PRÉSENCE D'EVARISTE GALOIS 1811 - 1832

Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
1982 — N° 48

PRÉSENCE D'EVARISTE GALOIS 1811 - 1832

Si vous voulez savoir ce qu'est

l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

voyez page 57

Si vous voulez adhérer à l'A.P.M.E.P., lui commander des brochures, écrivez à :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
13, rue du Jura, 75013 PARIS

Le portrait de couverture a été publié par le ***Magasin Pittoresque*** *en 1848.*

"Ce portrait, dit en note le ***Magasin Pittoresque,*** *reproduit aussi exactement que possible l'expression de la figure d'Evariste Galois. Le dessin est dû à M. Alfred Galois qui, depuis seize ans, a voué un véritable culte à la mémoire de son malheureux frère."*

PRÉSENCE D'EVARISTE GALOIS (1811-1832)

SOMMAIRE

Nous remercions Gilles WALUSINSKI pour l'excellent travail photographique qu'il a réalisé sur les manuscrits d'Evariste Galois.

Evariste Galois et nous

par Gilbert Walusinski

D'une certaine façon, il n'y a pas de différence, au départ, entre le travail d'un mathématicien créateur et celui d'un mathématicien enseignant qui s'efforce de réinventer avec ses élèves la théorie élaborée par le premier. Aucune *opposition* entre les deux démarches car avant d'agrandir le champ des mathématiques, même un Evariste Galois a remis les pas dans les pas des créateurs qui l'avaient précédé. Seulement le créateur fait un pas de plus ou, comme Galois, de grandes enjambées...

Force est donc de reconnaître qu'un écart existe — certains diront un fossé — entre la découverte et la reconstruction. On parlait à une certaine époque de "redécouverte" ce qui ne veut rien dire quant à la science faite, ce qui a un sens pour la science en train de se faire dans la tête de l'élève ou du chercheur.

On peut aussi penser à la comparaison avec le musicien qui compose et le musicien qui interprète. J'aimerais pouvoir écrire que nous qui enseignons des mathématiques, nous interprétons les mathématiciens créateurs. Il me semble qu'un effort se développe dans cette direction comme en témoigne le goût très répandu pour l'histoire des mathématiques, en particulier parmi ceux d'entre nous qui s'intéressent à la formation continue des enseignants. Rien qu'à ce titre, publier une brochure Galois est dans la ligne des préoccupations de l'A.P.M.E.P.

Ce n'est pourtant pas la seule raison qui nous a conduits à le faire en 1982. Il y a l'opportunité d'une commémoration, le cent cinquantenaire de la mort tragique du jeune savant. Et ceci, non par une sorte de superstition du nombre 150 mais par un certain goût de la commémoration que je justifierai brièvement.

Dans le cas de Galois, l'œuvre et son influence ont profondément marqué le développement des mathématiques, le marquent encore. Comment parler des mathématiques aujourd'hui sans citer les idées de Galois ? On ne peut se contenter de prononcer son nom et d'indiquer ses dates. Commémorer c'est aussi replacer l'homme dans son temps, essayer de comprendre comment ses idées se sont formées, comment il a pu ou comment il n'a pas pu s'exprimer, bref, participer un peu à son destin. Commémorer, un peu à la façon de Paul Desjardins, le fondateur avec Jules Lagneau et le Général Lyautey de l'Union pour la Vérité ; c'était, pour Desjardins, une occasion, provoquée par les dates, de réfléchir à la portée véritable de l'action d'un homme.

Or, pour nous, Evariste Galois n'est pas seulement le constructeur d'une théorie, un découvreur de théorèmes. C'est aussi un génie — malgré le système d'enseignement qu'il dut subir —, un héros victime de son temps et d'une certaine société. Il est aux mathématiques ce qu'un Shelley est à la poésie. Son destin n'a pas fini de nous toucher aussi bien par le cœur que par l'esprit.

L'idée de commémorer Galois ne nous est d'ailleurs pas personnelle. L'Académie des Sciences elle-même — pas rancunière en la circonstance quand on sait ce que Galois pensait d'elle — a réservé une séance publique, le 7 juin 1982, à honorer sa mémoire par une conférence de J. Tits. Plusieurs lycées et collèges ont organisé des expositions, tout particulièrement le Collège Evariste Galois de Bourg-la-Reine qui a réuni de très précieux documents. On lira dans la présente brochure un écho de la "Fête des maths" organisée au lycée Romain-Rolland d'Argenteuil en juin 1982. La ville de Bourg-la-Reine, après son collège, a rendu un hommage public à l'un de ses plus illustres citoyens le 23 octobre 1982. La régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. a demandé à notre collègue G.Th. Guilbaud une conférence qui a été prononcée le 16 juin et qui, je l'espère, pourra bientôt être rédigée et publiée (si cela n'a pas été fait plus tôt, je sais à qui m'en prendre).

*
* *

Notre association a donc voulu profiter de la circonstance pour réunir des textes de Galois ou sur Galois qui puissent servir à tous ceux qui enseignent. Nous remercions très vivement les collègues qui ont accepté de rédiger ces textes.

Nous sommes heureux également de publier pour la première fois une reproduction photographique intégrale de la célèbre dernière lettre de Galois à son ami Chevalier ; ceci grâce à l'obligeance de la Bibliothèque de l'Institut qui nous a autorisés à photographier ces précieux manuscrits.

Nous remercions enfin la Délégation générale aux commémorations nationales qui a honoré d'une subvention la publication de cette brochure.

*
* *

Aurons-nous ainsi bien commémoré Galois ? Oui, si dans nos classes, dans notre enseignement, nous faisons un peu sentir le souffle pour la vérité, pour la liberté, qui animait notre héros.

Evariste Galois et ses contemporains

par René TATON

Le nom d'Evariste Galois est resté le symbole du génie mathématique précoce, incompris et tourmenté, en butte aux persécutions des autorités de son époque, et spécialement des principaux mathématiciens français qui ignorèrent la valeur profonde de son œuvre.

De fait, d'accès difficile, cette œuvre, dont l'essentiel était resté inédit du vivant de Galois, ne fut publiée qu'en 1846 et ne fut pleinement appréciée et véritablement intégrée dans l'édifice mathématique qu'une vingtaine d'années plus tard. Quant à son auteur, ce n'est qu'en 1896 que l'historien Paul Dupuy lui consacra une première étude assez précise (1). Depuis lors, tandis que l'approfondissement de la théorie des groupes et la publication de différents inédits de Galois renforçaient la réputation de son œuvre mathématique, plusieurs ouvrages et un film lui étaient consacrés qui, mêlant la fiction et le romanesque aux faits réels, en ont fait le prototype du héros romantique incompris et persécuté (2). Sans vouloir entreprendre une analyse biographique rigoureuse, dont de nombreux éléments restent encore imprécis, voire inconnus, je voudrais dépasser la légende et tenter ici de retracer rapidement les circonstances de la genèse de l'œuvre de Galois et d'apprécier dans quelle mesure les mathématiciens de son époque ont pu en connaître l'existence et en comprendre la valeur prophétique.

Né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, petite localité des environs de Paris, Evariste Galois mourut dans un hôpital parisien, des suites d'un duel, le 31 mai 1832, à l'âge de 20 ans 7 mois.

Après avoir reçu sa première instruction au sein de sa famille, il était entré en 1823 comme élève interne en classe de quatrième au Collège Louis-le-Grand de Paris, où il poursuivit dès lors ses études. Supportant avec difficulté les contraintes d'une discipline particulièrement pesante en cette période de réaction politique, il est considéré comme un élève original et peu sociable, aux résultats scolaires irréguliers (3). Mais son premier contact avec les mathématiques au début de 1827 suscite en lui une passion irrésistible, une vocation qui l'oppose encore plus ouvertement aux responsables du collège. Le jugement de son maître d'études est particulièrement suggestif à cet égard : «C'est la fureur des mathématiques qui le domine ; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude ; il perd son temps ici et ne fait que tourmenter ses maîtres et se faire accabler de punitions » (3). Après deux années de mathématiques préparatoires, où, délaissant les manuels, il se passionne pour la *Géométrie* de Legendre et les grands traités de Lagrange, il se présente en août 1828 au concours d'entrée de l'Ecole polytechnique et subit un échec qui le touche profondément. Au cours de l'année scolaire 1828-1829, il suit les cours de mathématiques spéciales d'un professeur de grande valeur, L.P.E. Richard, qui reconnaît et apprécie ses dons exceptionnels pour les mathématiques. Cependant, loin d'être un élève modèle, le jeune homme s'intéresse moins aux travaux scolaires qu'à ses propres recherches dont il présente les premiers résultats dans un article sur les fractions continues publié en mars 1829 dans les *Annales de mathématiques* de Gergonne (4) et dans deux mémoires sur la théorie des équations algébriques présentés à l'Académie des Sciences les 25 mai et 1^er^ juin par un juge particulièrement qualifié, Augustin Cauchy (5).

Mais au début de juillet un événement tragique, le suicide de son père à la suite d'odieuses attaques d'origine politique, l'atteint profondément et accentue son sentiment de révolte contre tous les symboles du pouvoir politique, sentiment qui sera renforcé, quelques semaines plus tard, par un second échec au concours d'entrée à l'Ecole polytechnique.

Il se résigne toutefois à se présenter au concours de l'Ecole normale (connue alors sous le nom d'Ecole préparatoire) où étaient formés les professeurs d'enseignement secondaire (6) ; et, en novembre 1829, il entre dans cette école, beaucoup moins prestigieuse que l'Ecole polytechnique, logée dans une annexe de ce même Collège où il venait déjà de passer six années pénibles. Ayant remis à Cauchy une nouvelle étude « sur la théorie des substitutions et celle des équations littérales » (7), il apprend par le *Bulletin* de Férussac la publication du mémoire posthume d'Abel « sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement », qui recoupait une partie de ses travaux antérieurs (8). Sur le conseil de Cauchy, il prépare alors un nouveau mémoire « sur les conditions pour qu'une équation soit soluble par radicaux » qu'il dépose en février 1830 en vue du grand prix de mathématiques

(1) P. Dupuy, *La vie d'Evariste Galois*, op. cit. in Bibliographie. Cette étude est citée à la suite par l'abréviation P. Dupuy.

(2) Voir en particulier les ouvrages de L. Infeld et d'A. Arnoux cités dans la Bibliographie.

(3) Cf. Annexe III, Document 1. Voir P. Dupuy pour des renseignements plus détaillés sur l'ensemble de la biographie de Galois. Voir aussi la notice de J. Bertrand citée dans la Bibliographie - Abréviation : J. Bertrand.

(4) « Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques », *Annales* de Gergonne, t. 19, p. 294-301.

(5) Cf. R. Taton, « Les relations mathématiques d'Augustin Cauchy et d'Evariste Galois », *Revue d'histoire des sciences*, t. 24, 1971, p. 123-148 (ici, p. 128-129). Cette étude est citée à la suite par l'abréviation R. Taton, 2e article.

(6) Cf. Annexe III, Document 2.

(7) L'existence de ce mémoire est mentionné sans autre précision dans une note de Galois reproduite in R. Bourgne et J.-P. Azra, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, 1962, p. 509 (f° 83 b des manuscrits de Galois). Cette édition est citée à la suite par l'abréviation *Ecrits et mémoires.*

(8) Ce mémoire, annoncé par Legendre devant l'Académie des Sciences le 23 février 1829, a été publié fin mars 1829 dans le *Journal* de Crelle (t. 4, fasc. 2, p. 131-156) et un résumé en est donné par Ch. Sturm dans le fascicule de juillet 1829 du *Bulletin* de Férussac (t. 12, p. 24-31).

de l'Académie des sciences (9). Il rédige ensuite trois articles qui sont publiés dans le *Bulletin* de Férussac (10) grâce à l'appui de Ch. Sturm et, lecteur assidu d'Abel et de Jacobi, commence l'étude de la théorie des fonctions elliptiques et de la théorie des intégrales abéliennes (11). Mais à la fin de juin 1830, Galois est à la fois déçu et irrité lorsqu'il apprend que l'Académie a accordé son grand prix à Abel (à titre posthume) et à Jacobi et que son propre manuscrit a été égaré (12). Ayant passé ses examens de 1ere année de licence au milieu des troubles qui précèdent et suivent la Révolution de juillet 1830 (13), pendant les vacances il adhère au mouvement républicain et commence à participer à sa lutte contre la monarchie de Louis-Philippe. Dès la rentrée de l'Ecole normale, Galois entre en conflit avec le directeur qu'il attaque violemment dans une lettre publiée par la *Gazette des Ecoles* (14). Décidée au début de décembre, son exclusion est confirmée officiellement le 4 janvier 1831 (15). Galois participe alors activement à l'agitation politique très violente de cette époque, ce qui lui vaut d'être emprisonné à deux reprises : du 10 mai au 15 juin 1831 (16), puis du 14 juillet 1831 au 29 avril 1832 (17). Une courte note d'analyse dans le fascicule de décembre 1830 des *Annales* de Gergonne (18) et une « Lettre sur l'enseignement des sciences » dans la *Gazette des Ecoles* du 2 janvier 1831 (19) sont ses dernières publications. Son essai d'ouverture d'un cours public d'algèbre supérieure n'aura qu'un succès très éphémère (20). Par ailleurs, la version nouvelle de son « Mémoire sur la résolution des équations algébriques » qu'il présente à l'Académie le 17 janvier 1831 à la suggestion de Poisson sera, le 4 juillet 1831, l'objet d'un rapport sévère de ce dernier qui mettra en doute son originalité et critiquera son obscurité et l'insuffisance de ses démonstrations (21).

Profondément révolté par ce qu'il considère comme une nouvelle preuve de l'incompétence des milieux scientifiques dirigeants et de leur hostilité à son égard, il réussit cependant, dans l'atmosphère peu favorable de la prison Sainte-Pélagie (22), à reprendre ses études sur la théorie des équations, à réviser le mémoire rejeté par Poisson et à aborder certaines de ses applications, ainsi que d'importantes recherches sur la théorie des fonctions elliptiques et sur les intégrales abéliennes qu'il laissera inachevées lors de sa fin tragique (23). A l'annonce d'une épidémie de choléra, il est transféré le 16 mars 1832 dans une maison de santé où il poursuit ses recherches, rédige quelques essais sur la philosophie des sciences et noue une intrigue amoureuse dont le dénouement malheureux l'attriste profondément (24).

Provoqué en duel à la suite de cette rupture, Galois a le pressentiment d'une mort prochaine. Le 29 mai 1832, il classe à la hâte ses papiers, adresse des lettres désespérées à ses amis républicains, et rédige, à l'intention de Gauss et de Jacobi, une Lettre-testament (25), document tragique esquissant les principaux résultats de ses différentes recherches, qui sera

---

(9) Cf. R. Taton, 2e article, p. 133-138.

(10) « Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations » (*Bulletin* de Férussac, t. 13, avril 1830, p. 271-272) ; « Note sur la résolution des équations numériques » (*Ibid.*, juin 1830, p. 413-415) ; « Sur la théorie des nombres » (*Ibid*, juin 1830, p. 428-436).

(11) En plus de leurs résumés donnés dans le *Bulletin* de Férussac, il peut étudier alors les mémoires originaux d'Abel et de Jacobi insérés dans les 4 premiers tomes du *Journal* de Crelle, ainsi que l'ouvrage de Jacobi, *Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum* qui venait d'être publié.

(12) Cf. R. Taton, 2e mémoire, p. 141-142 et notes 48-49.

(13) Le 22 juillet 1830, Galois est reçu 4e sur 9 à l'examen de calcul différentiel intégral des élèves de 1ere année de l'Ecole normale (jury formé de Cauchy, Hachette et Lefébure de Fourcy) et, le 9 août, 3e sur 8 à l'examen de physique (jury formé de Dulong, Hachette et Pouillet). Entre temps s'étaient déroulés les journées révolutionnaires des 27-29 juillet 1830, le départ de Charles X et la désignation de Louis-Philippe comme roi des Français, événements auxquels Galois fut d'autant plus sensible qu'à l'inverse des élèves de l'Ecole polytechnique, ceux de l'Ecole normale furent consignés à l'Ecole par leur directeur et empêchés de ce fait d'y participer.

(14) Cf. P. Dupuy, p. 35-56 et 90-97. On y trouve, p. 46-47, le texte de la lettre du 3 décembre 1830 signée « Un élève de l'Ecole normale » qui fut à l'origine de l'affaire et, p. 53-54, celui d'une seconde lettre du 30 décembre 1830, signée E. Galois, lettres publiées toutes deux dans la *Gazette des Ecoles*.

(15) Cf. Annexe III, Document 3. En fait Galois avait dû quitter l'Ecole normale dès le 9 décembre 1830.

(16) Participant le 9 mai 1831 au banquet dit des Vendanges de Bourgogne organisé pour fêter l'acquittement de 19 membres de la garde nationale poursuivis par le gouvernement, Galois y porta un toast régicide. Arrêté le lendemain, il fut emprisonné à la prison Sainte-Pélagie pendant la période d'instruction. Poursuivi devant la Cour d'Assises le 15 juin suivant, il fut acquitté et remis en liberté, malgré son attitude ironique et agressive.

(17) Le 14 juillet 1831, au cours d'une manifestation républicaine interdite, Galois et son ami Duchâtelet, habillés en artilleurs de la garde nationale et armés, furent arrêtés sur le Pont Neuf à la tête d'une petite troupe d'étudiants. Transféré à Sainte-Pélagie, Galois fut condamné le 23 octobre à 6 mois de prison par le tribunal correctionnel ; sa peine, qui fut confirmée en appel le 3 décembre, devait expirer le 29 avril 1832.

(18) « Notes sur quelques points d'analyse », *Annales* de Gergonne, t. 21, déc. 1831, p. 182-184.

(19) « Lettre sur l'enseignement des sciences », *Gazette des écoles*, n° 110, 2 janvier 1831 et ci-dessous, Annexe III, Document 3.

(20) Ce cours hebdomadaire, organisé chez un libraire de la rue de la Sorbonne, s'ouvrit le jeudi 13 janvier 1831. L'annonce faite dans la *Gazette des écoles* précise qu'il « se composera de théories dont quelques-unes sont neuves, et dont aucune n'a jamais été exposée dans les cours publics... », en particulier « une théorie nouvelle des imaginaires, la théorie des équations qui sont solubles par radicaux, la théorie des nombres et les fonctions elliptiques traitées par l'algèbre pure ». Il ne semble pas que ce programme ambitieux, annoncé par un mathématicien de moins de 19 ans, ait pu être rempli, du fait de l'agitation politique intense de l'époque, dans laquelle Galois s'était lancé à plein.

(21) Voir à la suite le paragraphe concernant Poisson et l'Annexe III, Document 7.

(22) Galois souffrit beaucoup de la promiscuité de la vie à la prison Sainte-Pélagie et F.-V. Raspail a laissé dans ses *Lettres sur les prisons de Paris* le récit de quelques scènes particulièrement pénibles auxquelles le jeune homme fut mêlé. Voir aussi P. Dupuy, p. 67-72.

(23) On trouve dans *Ecrits et mémoires* la description et le texte de nombreux écrits et brouillons rédigés par Galois au cours de cette période parmi les plus difficiles de sa courte carrière.

(24) Il s'agissait de la maison de santé Faultrier, rue de l'Oursine n° 86 (aujourd'hui 94 rue Broca, Paris 13e) qui a été détruite peu après 1956 et remplacée par un immeuble moderne. Cf. P. Dupuy, p. 72-76 et C.-A. Infantozzi, « Sur la mort d'Evariste Galois », *Revue d'histoire des sciences*, t. 21, 1968, p. 157-160.

(25) Cf. P. Dupuy, p. 74-78 ; A. Dalmas, *Evariste Galois révolutionnaire et géomètre*, Paris, 1956, p. 73-74. Ces documents sont publiés à la suite : Annexe III, Documents 10 et 11.

publié au mois de septembre par son ami Auguste Chevalier dans la *Revue encyclopédique*. Grièvement blessé par son mystérieux adversaire, il meurt le 31 mai à l'hôpital Cochin et ses obsèques, le 2 juin, sont l'occasion d'une manifestation républicaine annonçant les tragiques émeutes des jours suivants (26).

La publication de cette Lettre et d'une nécrologie (27) ne semble avoir suscité aucun mouvement d'intérêt à l'égard de l'œuvre inédite de ce jeune mathématicien si tragiquement disparu. Ce n'est qu'en septembre 1843 que Liouville réhabilita la mémoire de Galois en annonçant devant l'Académie qu'il avait trouvé dans ses papiers une solution concise, mais aussi exacte que profonde, de ce beau problème : « Etant donnée une équation irréductible de degré premier, décider si elle est ou non résoluble par radicaux » (28). Et ce n'est qu'en 1846 qu'il publie dans son *Journal*, avec une réédition des articles de Galois, ses deux principaux mémoires inédits (29). Cette édition, devenue classique, fut reprise en volume par J. Picard en 1897 ; elle fut complétée en 1908 par une importante série de manuscrits et papiers inédits réunis par J. Tannery et en 1948 et 1956 par deux textes complémentaires édités par R. Taton et A. Dalmas. Enfin, en 1962, R. Bourgne et J.-P. Azra ont donné une remarquable édition critique de l'ensemble des *Ecrits et mémoires mathématiques* d'Evariste Galois, comportant même la reproduction intégrale de ses brouillons (30).

En fait, c'est par l'édition de Liouville de 1846 que l'œuvre de Galois a été progressivement connue et a exercé une profonde influence sur l'évolution des mathématiques modernes. Cependant, la partie de ses manuscrits publiée ultérieurement a révélé la profonde originalité de ses réflexions sur la structure et l'avenir des mathématiques et a enrichi notre connaissance de certains aspects de son œuvre.

*
* *

Je n'entreprendrai ici ni d'analyser les travaux mathématiques de Galois, ni de retracer la diffusion de ses idées. Je voudrais par contre tenter de préciser ses relations avec les mathématiciens de son temps, de discerner les influences, les encouragements ou les condamnations qu'il en a reçus et d'apprécier dans quelle mesure ces hommes se sont efforcés de suivre ses efforts et d'apprécier équitablement ses résultats. J'ai déjà abordé ce sujet en 1947 dans l'un de mes premiers articles, puis en 1971 à propos des relations scientifiques de Cauchy et de Galois (31). Mais par sa nature même, par les nombreuses incertitudes qui demeurent à ce sujet et par la diversité des facteurs qu'elle fait intervenir, une telle analyse garde un caractère essentiellement provisoire et mérite d'être reprise de temps en temps afin d'en rectifier, d'en préciser et d'en compléter les éléments documentaires, d'en réviser certaines interprétations et d'en nuancer les conclusions.

Avant d'aborder une telle enquête, il est nécessaire d'en identifier les acteurs et de citer les mathématiciens auxquels Galois lui-même se réfère, ceux avec qui il fut en rapport et enfin ceux dont il estimait le jugement et qui étaient susceptibles d'apprécier son œuvre. Dans les quelques articles publiés de son vivant, on ne trouve en dehors de Gauss, cité à de nombreuses reprises, que les noms de Lagrange, Legendre et Libri. Par contre, certains manuscrits ou brouillons relatifs à la théorie des nombres, à la théorie des équations ou à la théorie des groupes, mentionnent les noms de Lagrange, Landen, Gauss, Ruffini, Cauchy et Libri (32), tandis que les écrits concernant les fonctions elliptiques citent tout naturellement Legendre, Abel et Jacobi(33). On retiendra que ces références bibliographiques, qui attestent du soin avec lequel Galois s'efforce de suivre l'évolution de certaines branches des mathématiques alors en rapide expansion, ne mentionnent que six contemporains : Gauss, Legendre, Cauchy, Libri, Abel et Jacobi. Les mathématiciens avec qui Galois fut en rapport sont ses anciens professeurs (Collège Louis-le-Grand, Ecole normale et Faculté des sciences), certains membres de l'Académie, les éditeurs des revues scientifiques où il publia ses articles et quelques jeunes chercheurs avec qui il fut en contact. Leurs noms se retrouvent dans les brouillons d'une liste d'envoi d'une publication en projet que Galois rédigea en décembre 1831 (34). Dans sa forme définitive, cette liste comporte en effet treize noms : ceux de sept académiciens : Ampère, Cauchy, Hachette, Lacroix, Legendre, Poinsot et Poisson qui, à des titres divers, l'ont connu, ceux de deux anciens professeurs du Collège Louis-le-Grand, Vernier et Richard, celui de Sturm, rédacteur du *Bulletin* de Férussac, mais aussi ceux de Gauss, de Jacobi et d'Ostrogradski. La version préliminaire comportait dix autres noms, biffés ensuite, ceux des examinateurs de l'Ecole polytechnique et de quelques professeurs, ainsi que ceux de Saigey, ancien rédacteur du *Bulletin* de Férussac et de Navier, successeur de Cauchy à la

---

(26) Cf. P. Dupuy, p. 78-80 ; A. Dalmas, *op. cit.*, p. 75-79.

(27) *Revue encyclopédique*, t. 55, septembre 1832, p. 566-576 (Lettre-testament) et 744-754 (« Nécrologie » par A. Chevalier).

(28) Cf. *Procès-verbaux... de l'Académie des sciences*, t. 17, 2e semestre 1843, p. 448-449 et R. Taton, 2e article, p. 146, note 62.

(29) *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Liouville), t. 11, oct.-nov. 1846, p. 381-448, en particulier p. 417-433 : « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux » et p. 434-444 : « Des équations primitives qui sont solubles par radicaux ».

(30) Les références précises de ces différentes études sont données dans la Bibliographie.

(31) Id.

(32) Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), John Landen (1719-1790), Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), Paolo Ruffini (1765-1822), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et, à un moindre degré, Guglielmo Libri (1803-1869) ont effectivement joué un rôle important dans le développement de ces différentes théories. Voir les chapitres correspondants de *l'Abrégé d'histoire des mathématiques*, dirigé par J. Dieudonné, 2 vol., Paris, 1978.

(33) Galois semble connaître en particulier le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, 3 vol., Paris, 1827-1832, de A.-M. Legendre (1752-1853), le « Précis d'une théorie des fonctions elliptiques » et divers autres mémoires publiés par N.-H. Abel (1802-1829) dans le *Journal* de Crelle et le récent ouvrage de C.J.-J. Jacobi (1804-1851) *Fundamenta nova theoriae fonctionum ellipticarum* (Königsberg, 1829).

(34) Cf. *Ecrits et mémoires*, p. 28-29 et 502-503 (f° 63 a des manuscrits de Galois).

chaire d'analyse et de mécanique de l'Ecole polytechnique (35). Comportant la plupart des noms précédemment cités ou évoqués, cette liste, complétée par les noms d'Abel, de Fourier, de Libri, de Gergonne et de Liouville (36), apparaît comme le point de départ logique de cette enquête.

J'envisagerai d'abord les cas les plus simples, du moins en apparence. La présence des noms de Vernier et de Richard (37) est un simple témoignage de la reconnaissance de Galois envers ceux qui l'ont initié aux mathématiques. C'est un sentiment analogue, mais de niveau supérieur, qu'il exprime à l'égard de Gauss et de Jacobi dont il admire l'œuvre et qu'il considère comme seuls capables d'apprécier pleinement la valeur de ses travaux, mais avec lesquels il n'est pas en relation. Malheureusement ni Gauss, ni Jacobi ne semblent avoir pris connaissance de la Lettre-testament que Galois leur destinait et qui est restée ainsi sans effet. Par ailleurs, aucune trace ne semble demeurer des rapports de Galois avec Ampère, qui le connut à l'Ecole normale, avec Hachette, qui participa à son jury de licence, avec Fourier et Poinsot, commissaires du concours de prix de 1830, ou avec Gergonne, qui eut le grand mérite d'accueillir deux de ses articles dans ses *Annales*. Il reste donc à examiner les cas de quatre académiciens : Legendre, Cauchy, Poisson et Lacroix, ceux de quatre jeunes mathématiciens : Libri, Sturm, Ostrogradski et Liouville, et enfin celui d'Abel qui, bien qu'il soit mort au moment où Galois abordait ses premières recherches originales, a exercé sur lui une influence considérable.

Bien qu'à la même époque, et malgré son grand âge, Legendre ait apporté de précieux encouragements et d'utiles conseils tant à Jacobi qu'à Abel (38), il ne semble s'être intéressé directement ni à l'œuvre de Galois, ni à sa vie. Pour sa part, Cauchy a eu le grand mérite d'apprécier l'intérêt des premiers travaux de Galois qu'il présenta devant l'Académie en mai-juin 1829 et sur lesquels, en janvier 1830, il se proposait de faire un rapport officiel (39). Mais devant l'annonce du grand prix de mathématiques, il persuada, semble-t-il, le jeune homme de réviser son mémoire afin de le présenter à cette occasion. Un article anonyme publié le 15 juin 1831 dans le journal saint-simonien *Le Globe* (40) précise en effet à ce sujet : « Ce mémoire devait concourir pour le grand prix de mathématiques. Il en était digne car il levait quelques difficultés que Lagrange n'avait pu résoudre. M. Cauchy avait à ce sujet prodigué les plus grands éloges à l'auteur, qu'importe ? On égare le mémoire, le prix est adjugé sans que le jeune savant ait figuré au concours ! » De toute façon, Cauchy, ne faisant pas partie de la Commission de ce prix, ne put intervenir en faveur de Galois. Lui-même d'ailleurs, pendant les premiers mois de 1830, se consacre presque exclusivement à la physique mathématique, tandis que Galois suit les cours de l'Ecole normale et publie plusieurs mémoires. La Révolution de juillet 1830 devait susciter chez eux des réactions aussi violentes qu'opposées et les séparer définitivement (41). L'exil de Cauchy l'empêchera certainement de connaître le rejet par Poisson du nouveau mémoire présenté par Galois en 1831 et sa fin tragique l'année suivante. Mais on peut s'étonner que Cauchy ne soit intervenu ni à la séance de l'Académie du 4 septembre 1843 où Liouville affirma la valeur des démonstrations de Galois, ni après la publication de ses *Oeuvres* en 1846, alors que lui-même développait sa théorie des substitutions (42).

Rival de Fourier et de Cauchy en physique mathématique, Poisson n'est intervenu qu'assez rarement dans les domaines de l'analyse et de l'algèbre. Cependant son rapport de décembre 1829, publié dans le cahier d'avril 1830 du *Bulletin* de Férussac, sur les travaux de Jacobi et d'Abel concernant les fonctions elliptiques (43), attestait de la pénétration et de la clarté de sa pensée. Poisson ne semble avoir connu Galois qu'en janvier 1831 lorsque le Conseil royal de l'Instruction publique dont il était membre exclut le jeune homme de l'Ecole normale (44). Au témoignage d'A. Chevalier, Poisson rencontra alors Galois et l'engagea « à écrire à nouveau les théories qu'il avait soumises à l'Académie dans le manuscrit égaré l'année précédente ». Poursuivant son récit, Chevalier écrit : « Ce conseil fut suivi, parce qu'il avait été donné avec bienveillance. M. Poisson se chargea de présenter le travail à l'Académie ; on le nomma pour en rendre compte, et il vint déclarer, après quatre mois d'attente, qu'il n'avait pu le comprendre » (45). Dans une lettre du 31 mars 1831 par laquelle il demande au Président de l'Académie que son mémoire soit l'objet d'un rapport(46), Galois confirme d'ailleurs implicitement la première partie de ce

---

(35) Jacques-Frédéric Saigey (1797-1871), qui avait quitté pour raisons politiques la direction de la partie mathématique du *Bulletin* de Férussac à la fin de 1829, participait activement au mouvement républicain. Quant à Henri Navier (1785-1836), il s'intéressait surtout aux questions de mécanique appliquée.

(36) Niels-Henrik Abel était mort en avril 1829, Joseph Fourier en mai 1830. Avec Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) qui publia deux articles de lui dans ses *Annales*, Galois ne semble avoir été qu'en relations épistolaires. Quant à Joseph Liouville (1809-1882), sa présence parmi les jeunes mathématiciens parisiens de l'époque de Galois et le rôle important qu'il joua ultérieurement dans l'édition de ses *Oeuvres* justifiait sa mention dans cette liste, sans qu'une relation directe entre les deux hommes ait pu être établie.

(37) H.-J. Vernier (1800-1875) avait été le professeur de Galois en mathématiques préparatoires (deux derniers trimestres de 1826-1827 et année 1827-1828). Louis P.-E. Richard (1795-1849), professeur de Galois en mathématiques spéciales en 1828-1829, eut le mérite de déceler et d'apprécier les qualités exceptionnelles de son jeune élève.

(38) La correspondance de Legendre avec Jacobi est publiée dans les œuvres de ce dernier (*Werke*, Bd. 1, Berlin, 1881, p. 381-461) ; sa correspondance avec Abel dans *Niels-Henrik Abel. Mémorial*..., Kristiania, 1902, 2e pagin, p. 77-93.

(39) Voir R. Taton, 2e article.

(40) Voir à la suite l'Annexe III, Document 6.

(41) Voir R. Taton, 2e article, p. 142-143 et note 52. Cauchy, qui avait quitté la France en septembre 1830, fut exclu de l'Université le 26 novembre 1830. Après un bref séjour à Fribourg, il se fixa à Turin puis à Prague et rentra en France en 1838.

(42) Voir à ce sujet la thèse de 3e cycle d'A. Dahan citée dans la Bibliographie.

(43) *Bulletin* de Férussac, t. 13, avril 1830, p. 249-266.

(44) Cf. P. Dupuy, p. 41-56, 90-97 ; R. Taton, 2e article, p. 143, note 53.

(45) *Revue encyclopédique*, t. 55, septembre 1832, p. 747 ; Cf. R. Taton, 2e article, p. 144 et notes 54 et 55.

(46) Voir Annexe III, Document 5.

récit : « Sur l'avis d'un honorable membre de l'Académie, je refis en partie mon mémoire et vous le présentai ». Quant à la seconde partie du récit de Chevalier, elle concerne évidemment le rapport défavorable présenté par Poisson et Lacroix le 4 juillet 1831, rapport qui a suscité l'indignation de Galois et a valu plus tard à ses auteurs d'être accusés d'incompétence et de partialité. Pour juger de la valeur de ces accusations, il importe d'examiner attentivement le rapport(47), ainsi que les corrections ultérieures faites au mémoire par Galois lui-même, puis par Liouville (48). En fait, ce rapport n'est pas un refus définitif, mais une demande de développements et d'éclaircissements que justifient en partie le laconisme de Galois et l'insuffisance de certaines démonstrations, à laquelle Galois s'efforça lui-même de remédier. On peut regretter toutefois la présentation trop abrupte des jugements de Poisson, le doute qu'il fait planer sur l'exactitude des résultats de Galois et la trop grande insistance avec laquelle il cite divers passages des écrits posthumes d'Abel connus en France après le dépôt du mémoire de Galois. (49). Cette opinion nuancée que j'émets ici me paraît plus conforme à la réalité que le jugement plus brutal formulé dans mon article de 1947. Elle s'étend d'ailleurs au second signataire du rapport, S.F. Lacroix, qui, en 1836, dans la 6e édition de ses *Compléments des éléments d'algèbre*, mentionnera ce mémoire et son théorème principal, en ajoutant « mais ce Mémoire parut à peu près inintelligible aux commissaires chargés de l'examiner » (50).

De tous les jeunes mathématiciens vivant alors à Paris, le Suisse Charles Sturm est celui qui a le mieux connu Galois à qui il avait largement ouvert les colonnes du *Bulletin* de Férussac. Il lui permit aussi de consulter les publications récentes reçues au bureau de la revue et fut l'un des seuls à pouvoir s'entretenir avec lui de ses travaux (51). Quant au mathématicien russe Ostrogradski, dont la présence sur la liste dressée par Galois peut paraître surprenante, c'est probablement par l'intermédiaire de Sturm, auquel il s'était lié lors d'un séjour antérieur, qu'il connut Galois au cours d'un voyage à Paris en 1830-1831 (52). Bien que cité à deux reprises dans les manuscrits de Galois, Libri semble avoir eu avec lui des rapports assez orageux. En effet, dans une lettre d'avril 1831, Sophie Germain fait allusion à des injures que Galois aurait adressées le 20 septembre 1830 au jeune mathématicien italien après sa présentation à l'Académie d'un mémoire sur la résolution d'une classe d'équations algébriques (53). Il est curieux de noter que, douze ans plus tard, c'est à l'occasion d'une discussion de priorité entre Libri et Liouville que ce dernier affirmera pour la première fois la valeur du mémoire de Galois (54). Quant à Liouville lui-même, dans l'« Avertissement » à son édition des « Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois », il affirme n'avoir « ni connu, ni même jamais vu ce malheureux jeune homme » (55). Et pourtant une telle rencontre eut été possible car Liouville, qui fut nommé en novembre 1831 répétiteur d'analyse à l'Ecole polytechnique, fréquentait assidûment l'Académie des sciences, et publiait des mémoires dans les mêmes revues que Galois.

Bien qu'Abel soit mort en avril 1829 au moment même où Galois commençait ses propres recherches, ce sont les publications et l'œuvre posthume de ce mathématicien qui l'ont le plus influencé et ont suscité de sa part les réactions les plus vives et les plus passionnées.

A la fin de l'année 1831, alors qu'il préparait un projet de publication de ses travaux, Galois tint à marquer à la fois les liens et l'indépendance relative de son œuvre avec celle d'Abel (56). Il affirme tout d'abord que la démonstration de l'impossibilité de la résolution des équations générales de degré supérieur à 4 donnée par Abel en 1826 dans le premier fascicule du *Journal* de Crelle (57), ne reposant que sur « des raisonnements relatifs au degré des équations auxiliaires », n'avait aucun rapport avec sa théorie. Faisant allusion au mémoire d'Abel « sur une classe particulière d'équations résolvables algébriquement » publié en 1829 dans le t. IV du *Journal* de Crelle (58), il note qu'Abel n'avait « rien laissé » sur la discussion générale du problème qui l'occupait. Enfin, signalant que dans sa lettre à Legendre du 25 novembre 1828 publiée en 1830 dans le t. VI du *Journal* de Crelle (59), Abel « annonçait qu'il avait eu le bonheur de découvrir une règle pour reconnaître si une équation était résolvable par radicaux », il ajoutait que « la mort anticipée de ce géomètre ne lui ayant pas permis de

(47) Voir Annexe III, Document 7.

(48) On trouve la trace de ces corrections dans les pages de gauche d'annotations *d'Ecrits et mémoires* (texte p. 38-109, annotations, p. 481-487).

(49) Voir ci-dessous, notes 59 et 63.

(50) Sylvestre François Lacroix (1765-1843) était professeur de calcul différentiel et intégral à la faculté des sciences de Paris, mais il était remplacé par L.F. Lefebure de Fourcy au moment où Galois suivit cet enseignement. La citation est à la p. 345 de la 6e édition (1836) de ses *Compléments des éléments d'algèbre.*

(51) Charles Sturm (1803-1855) s'était fait connaître par la présentation devant l'Académie le 13 mai 1829 d'un « Mémoire sur la résolution des équations numériques » contenant son célèbre théorème que Galois, au témoignage de J. Bertrand (*op. cit.*, p. 335), démontra en quelques minutes. Après la Révolution de juillet, il fut nommé, sur la recommandation d'Arago,professeur de mathématiques spéciales au Collège Rollin.

(52) Sur Mikhaïl Ostrogradski (1801-1861), voir la brochure de A.-P. Youschkevitch, *Michel Ostrogradski et le progrès de la science au XIXe siècle*, Paris, 1967.

(53) Cf. Ch. Henry, « Les Manuscrits de Sophie Germain, Documents nouveaux », *Revue philosophique*, t. 8, 1879, p. 632. La date de l'incident n'y est pas indiquée mais l'examen du t. 9 des *Procès-verbaux de l'Académie des sciences* permet de la préciser. Libri est cité par Galois dans son « Mémoire sur la théorie des nombres » de juin 1830 et dans un manuscrit datant de juin 1830 (*Ecrits et mémoires*, p. 92-123 et 498).

(54) Cf. ci-dessus note 28.

(55) *Journal de mathématiques pures et appliquées,* vol. 11, 1846, p. 383. Sur Joseph Liouville (1809-1882), voir la notice de R. Taton in *Dictionary of scientific biography*, vol. 8, New York, 1973, p. 381-387.

(56) Voir sa « Note sur Abel », Annexe III, Document 12,2.

(57) *Journal de Crelle*, t. 1, fasc. 1, 1826, p. 65-84, Abel avait donné un résumé français de son mémoire dans le *Bulletin* de Férussac (t. 6, déc. 1826, p. 347-353).

(58) Cf. ci-dessus, note 8.

(59) *Journal* de Crelle, t. 6, fasc. 1, 1830, p. 73-80. En fait la lettre d'Abel à Crelle du 18 octobre 1828 publiée antérieurement (*Journal* de Crelle, t. 5, fasc. 4, p. 336-348) est plus explicite quant aux résultats obtenus sur la théorie des équations (p. 342-343), dont certains sont cités dans le rapport de Poisson.

publier les recherches promises dans cette lettre » (60), il devait donner lui-même la solution de ce problème. Bien qu'il ait exprimé alors le regret de devoir « cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura faite la science », il tint à affirmer qu'il lui serait aisé de prouver qu'il ignorait même le nom d'Abel lorsque, en mai-juin 1829, il avait présenté ses premières recherches sur la théorie des équations et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la sienne.

Que retenir de cette note au ton si passionné ? Il semble tout d'abord que si Galois ignorait bien le nom et l'œuvre d'Abel lorsqu'il écrivit ses premiers mémoires, il en eut la brusque révélation à l'automne 1829 par l'analyse des derniers travaux d'Abel sur la théorie des équations et les fonctions elliptiques et par sa nécrologie insérées dans les fascicules de juillet et d'octobre du *Bulletin* de Férussac (61). Il fut certainement enthousiasmé et bouleversé à la fois par cette découverte. Il est probable que le mémoire d'Abel sur la théorie des équations périmait en partie ses premiers mémoires et l'amenait à reprendre ses propres recherches dans ce domaine. C'est alors que, refondant ses premiers travaux, il prépara le mémoire perdu de février 1830 destiné à concourir au grand prix de mathématiques de 1830. A la proclamation du résultat de ce concours, le 28 juin 1830, il fut très déçu de voir préférer à son œuvre celle d'Abel luimême, à titre posthume, et celle de Jacobi. Reprenant alors à nouveau ses recherches et préparant le grand mémoire qu'il déposa à l'Académie le 16 janvier 1831, il ne pouvait penser être à nouveau en compétition avec Abel, décédé depuis près de deux ans.

Et pourtant cette compétition se trouvait relancée par la publication fin 1830 dans les tomes V et VI du *Journal* de Crelle de lettres où Abel annonçait à Crelle et à Legendre d'importantes découvertes réalisées peu avant sa mort, en particulier dans la théorie des équations (62). Galois apprit l'existence de ces fragments posthumes par le *Bulletin* de Férussac peu après le dépôt de son mémoire et en fut certainement très préoccupé (63). Il fut encore plus ulcéré en voyant que dans son rapport sur ce mémoire du 4 juillet suivant, Poisson s'étendait longuement sur le fait que la théorie présentée par Galois lui semblait très proche de celle qui était annoncée dans les notes posthumes d'Abel (64).

On comprend dès lors le ton passionné et revendicatif de la note rédigée quelques mois plus tard lorsque le jeune mathématicien, enfermé à la prison Sainte-Pélagie, préparait une édition d'ensemble de ses travaux(65) et l'on peut deviner quel drame s'est ainsi ajouté à tous ceux qui ont marqué la vie et la carrière d'Evariste Galois.

Les intérêts de Galois se rejoignirent avec ceux d'Abel dans deux autres grands domaines des mathématiques, ceux des fonctions elliptiques et des intégrales abéliennes, mais ce fut de façon beaucoup plus sereine, une bonne partie des efforts de Galois au cours de ses derniers mois visant à approfondir l'analyse des travaux de son jeune devancier et à les poursuivre dans des voies originales.

Il serait dangereux de vouloir tirer des conclusions trop hâtives de ces quelques éléments. On ne peut en effet tenter de comprendre les rapports souvent difficiles et parfois orageux de Galois avec ses contemporains sans tenir compte à la fois de son caractère original et parfois peu sociable, de l'insolence de son génie, de son existence tourmentée et de son engagement révolutionnaire dans un climat politique très tendu, mais aussi de la personnalité et des intérêts particuliers des savants avec qui il fut en contact.

Ecrivant quelques jours avant sa mort à Auguste Chevalier, son condisciple de l'Ecole normale et son ami le plus proche, converti au saint-simonisme, Galois résume très clairement les difficultés et le drame de sa vie elle-même et de sa carrière de mathématicien :

« J'aime à douter de ta cruelle prophétie quand tu me dis que je ne travaillerai plus. Mais j'avoue qu'elle n'est pas sans vraisemblance. Il me manque, pour être un savant, de n'être que cela. Le cœur chez moi s'est révolté contre la tête ; je n'ajoute pas comme toi : « C'est bien dommage » » (66).

Loin d'être un savant de cabinet, ce génie d'une rare précocité et d'une exceptionnelle profondeur avait connu, nous l'avons vu, une existence particulièrement tourmentée. Au lieu d'encouragements, il n'avait rencontré le plus souvent que dédain et hostilité. A l'incompréhension souvent malveillante des surveillants, de certains professeurs et d'une partie de ses condisciples, au choc produit par le suicide de son père, persécuté pour ses opinions libérales, au sort malheureux des mémoires successifs qu'il avait soumis à l'Académie des sciences, s'étaient ajoutés deux échecs successifs à l'Ecole polytechnique, son exclusion de l'Ecole normale et de longs mois de prison politique. Sa révolte contre la société, qui éclate dans ses derniers écrits, s'était concrétisée dans son active participation à l'agitation républicaine dès les premiers mois de la monarchie de Juillet.

Par ailleurs, il est rapidement conscient de sa propre valeur et de l'infériorité de la plupart de ceux avec qui il est en rapport, professeurs, inspecteurs,

---

(60) En fait un important manuscrit inachevé d'Abel datant du 2e semestre 1828 « Sur la résolution algébrique des équations » ne fut publié qu'en 1839 par B. Holmboë dans son édition des *Oeuvres complètes de N.-H. Abel* (Kristiania, 1839, t. 1, p. 185-209) ; Cf. également l'édition de L. Sylow et S. Lie (2 vol., Kristiania, 1881, t. 2, p. 217-243 et notes de L. Sylow, p. 329-338). Mais L. Sylow a montré lui-même que Galois était allé beaucoup plus avant qu'Abel dans ce domaine.

(61) En plus du résumé du mémoire déjà cité dans la note 8, on trouve en effet dans le t. 19, fasc. d'octobre 1830 du *Bulletin* de Férussac le « Résumé d'un Précis d'une théorie des fonctions elliptiques » (p. 304-316) et la « Notice nécrologique sur N. Abel » de Crelle (p. 368-379).

(62) Cf. ci-dessus note 59.

(63) *Bulletin* de Férussac, t. 15, p. 14 (janvier 1831) et p. 73 (février 1831) : annonce de la publication des lettres d'Abel à Crelle et à Legendre dans le *Journal* de Crelle (Cf. note 59).

(64) Voir ci-dessus notes 59 et 60.

(65) Cf. Annexe III, Document 12,2

(66) Cf. Annexe III, Document 9.

examinateurs, auteurs de manuels, voire académiciens. Son assurance en son propre génie l'amène d'ailleurs à ne donner que des textes très concis, sans développements ni intermédiaires superflus, qui ne pouvaient que déconcerter les lecteurs de l'époque. J. Dieudonné insiste sur « l'allure étrangement moderne » de cette pensée et ajoute fort justement : « Son insistance sur le caractère conceptuel des mathématiques, son aversion pour les longs calculs masquant les idées directrices, son souci de grouper les problèmes selon leurs affinités profondes de structure plutôt que leur aspect superficiel, tout cela nous est maintenant familier ; et il est piquant que ses mémoires si concis soient pour nous bien plus clairs que les filandreux exposés que croyaient devoir en donner ses successeurs immédiats » (67).

Mais les contemporains de Galois, ses critiques, ses juges appartenaient à une époque bien éloignée de celle de la mathématique moderne et son génie, son accent prophétique ne pouvaient que difficilement être compris par eux. D'autant que demeuraient dans plusieurs de ses écrits certaines lacunes de raisonnement que Galois lui-même s'efforça ensuite de corriger et que planait sur ce débat l'ombre des écrits inédits laissés par Abel, dont on ignorait l'intérêt et la valeur.

Reste que le cas de Galois est à rapprocher de celui d'Abel et qu'on peut s'étonner qu'à quelques années de distance, les membres de l'Académie aient pu décevoir à ce point les espoirs que ces deux jeunes génies avaient placés en eux. La protection efficace d'un des grands savants de l'Académie eût certainement modifié leur carrière. Mais, comme le dit Abel dans sa lettre adressée de Paris à Holmboë, le 24 octobre 1826 : « Tout commençant a bien de la peine à se faire entendre ici. Chacun travaille à part sans s'occuper des autres. Tous veulent instruire et personne ne veut entendre » (68). Un exemple illustre parfaitement ce jugement : le cas de Poncelet qui, malgré la publication en 1822 de son remarquable *Traité des propriétés projectives*, n'arrive pas à se faire un nom ; car personne alors ne s'occupe de géométrie pure et Cauchy considère ces recherches comme d'un intérêt médiocre (69). Les cas d'Abel et de Galois peuvent s'expliquer en partie de la même façon. La négligence et l'incompréhension qu'ils ont rencontrées sont dues, partiellement au moins, à ce qu'aucun savant de l'Institut ne s'occupait sérieusement des recherches d'analyse pure. Lacroix et Legendre étaient âgés ; Cauchy était tout à son œuvre. Poisson, Navier, Fourier, Ampère ne s'intéressaient guère qu'à la physique mathématique. Dans le cas de Galois, une autre raison, moins importante peut-être mais non négligeable, est son non-conformisme. Cauchy et Poisson, royalistes convaincus, partisans de l'ordre, ne devaient pas être prévenus en faveur de ce jeune homme qui leur apparaissait comme un agitateur, un esprit subversif dans tous les domaines ; et peut-être ont-ils cru avoir affaire à un de ces utopistes qui prétendent chaque jour résoudre des problèmes difficiles, voire impossibles. Galois ne semble t-il pas le craindre quand il compare son sort à celui des quadrateurs ou à celui de Wronski (70) ?

Quoi qu'il en soit, il nous est difficile de trancher le débat. Mais, si Galois n'a pas connu la gloire de son vivant, il est considéré maintenant comme un des mathématiciens les plus originaux du XIXe siècle, et le théorème mis en doute par Poisson est un des fondements de la théorie moderne des équations et son œuvre « l'une des sources les plus fécondes de la mathématique moderne ».

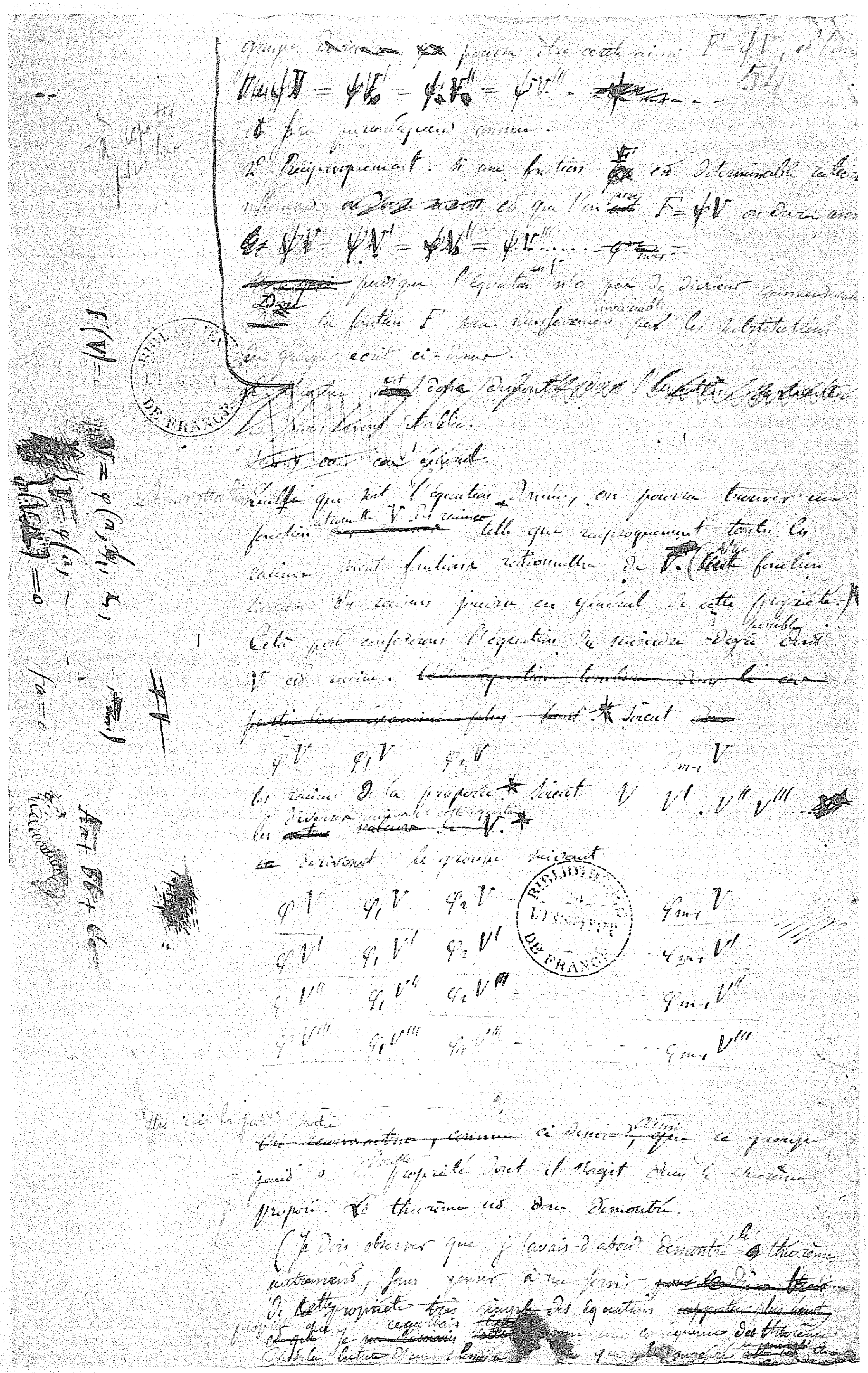
---

(67) Préface à *Ecrits et mémoires*, p. V-VI.

(68) Cf. *Niels-Henrik Abel, Memorial...*, Kristiania, 1902, 2e pagin, p. 45-49.

(69) Cf. R. Taton in *Dictionary of scientific Biography*, vol. 11, 1975, p. 76-82 et spécialement p. 76. Poncelet reproduit le rapport présenté le 5 juin 1820 par Cauchy sur son « Essai sur les propriétés projectives des coniques » dans son célèbre *Traité des Propriétés projectives des figures* (Metz-Paris, 1820). Voir aussi N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, 2e éd., Paris, 1969, p. 31 et 166.

(70) Militaire polonais réfugié en France en 1800, Josef Maurice Hoëné-Wronski (1776-1853) avait entrepris de réformer de nombreux domaines des sciences exactes et sociales. Dans ses travaux mathématiques, des idées originales se mêlent à de graves erreurs de raisonnement, à des vues philosophiques extravagantes et à de violentes attaques contre les mathématiciens les plus connus (Cf. J. Dobrzycky, in *Dictionary of scientific Biography*, vol. 16, 1978, p. 224-226). On comprend donc que Galois ne veuille pas que ses vues soient placées sur le même plan que celles de ce savant illuminé et fantaisiste.



Premier état de la Démonstration de la Proposition I
du "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux"
(Dossier 6, folio 54a des manuscrits de Galois, datant d'environ juin 1830 ; p. 91, 496 et 511 de l'édition de Bourgne et Azra).

Table des Annexes

ANNEXE 1

LES OEUVRES DE GALOIS ET LEUR PUBLICATION

I — Editions collectives

Les écrits scientifiques de Galois ont été l'objet des éditions suivantes :

1) J. LIOUVILLE (éd.): "Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois" (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XI, oct.-nov. 1846, p. 381-448).

2) E. PICARD (éd.) : *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1897. Reproduit en fac-similé en 1951 avec une étude de G. VERRIEST.

3) J. TANNERY (éd.) : "Manuscrits et papiers inédits de Galois" (*Bulletin des sciences mathématiques*, 2e s., t. 30, août-sept. 1906, p. 246-248, 255-263 ; t. 21, nov. 1907, p. 275-308).

4) J. TANNERY (éd.): *Manuscrits de Evariste Galois*, Paris, 1908.

5) R. BOURGNE et J.-P. AZRA (éd.): *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1962 (préface de J. DIEUDONNÉ).

Nous désignerons ces éditions par les mentions : "Oeuvres", *Oeuvres*, "Manuscrits", *Manuscrits, Ecrits et mémoires*. Les volumes d'*Oeuvres* et de *Manuscrits*, n'étant que les rééditions en volumes séparés d'"Oeuvres" et de "Manuscrits", ne sont pas analysés, tandis que les contenus des trois autres éditions se trouvent précisés à leur date dans le tableau suivant.

II — Tableau chronologique de la publication de ses travaux

1. ***Textes scientifiques publiés de son vivant :***

avril 1829: Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques (*Annales de mathématiques...* de Gergonne, t. 19, p. 294-301);

avril 1830: Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations (*Bulletin des sciences mathématiques...* de Férussac, t. 13, p. 271-272);

juil. 1830: Note sur la résolution des équations numériques (*Bulletin* de Férussac, t. 13, p. 413-414);

juin 1830: Sur la théorie des nombres (*Bulletin* de Férussac, t. 15, p. 428-436);

déc. 1830: Note sur quelques points d'analyse (*Annales* de Gergonne, t. 21, p. 182-184);

janv. 1831: Lettre sur l'enseignement des sciences (*Gazette des écoles,* n° 110, 2 janv. 1831).

2. ***Publications posthumes :***

sept. 1832: Lettre à Auguste Chevalier (*Revue encyclopédique*, t. 55, p. 568-576);

oct.-nov. 1846: Publication d'"Oeuvres". Cette édition, considérée comme définitive jusqu'en 1906, contient, en plus des mémoires publiés du vivant de Galois (sauf le dernier) et de la Lettre à Auguste Chevalier, les deux mémoires inédits suivants :
"Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" ("Oeuvres", p. 417-433);
"Des équations primitives qui sont solubles par radicaux" ("Oeuvres", p. 434-444).

août-sept. 1906: Publication de la première partie de "Manuscrits". Contient, en plus d'une description des manuscrits de Galois, le texte des fragments inédits suivants (nous avons adopté les titres choisis dans l'édition *Ecrits et mémoires*): "Discours préliminaire"; "Projet de publication"; "Note sur Abel"; "Préface" (partielle); "Discussions sur les progrès de l'analyse pure"; "Fragments"; "Sciences, hiérarchie, écoles"; "Catalogue, note sur la théorie des équations".

nov. 1907: Suite de cette édition; "Recherche sur la théorie des permutations et des équations algébriques"; "Comment la théorie des équations dépend de celle des permutations"; "Note manuscrite"; "Addition au second mémoire"; "Mémoire sur la division des fonctions elliptiques de première espèce"; "Note sur l'intégration des équations linéaires"; "Recherches sur les équations du second degré".

janv.-mars 1948. R. TATON (éd.): Texte intégral de "Préface" et de "Projet de publication" (*Revue d'histoire des sciences*, t. I, p. 123-128).

1956: Première réédition de la "Lettre sur l'enseignement des sciences" (in A. DALMAS, *Evariste Galois...*, Paris, 1956, p. 105-108).

1962 : Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois (R. BOURGNE et J.P. AZRA éd.), Paris, 1962 ; repr. fac-similé avec errata et Tables de concordance, 1976.

Cette remarquable édition rassemble l'intégralité de l'œuvre de Galois: articles publiés de son vivant, édition critique avec corrections et variantes de tous ses manuscrits, y compris ses brouillons. La plupart des nombreux textes inédits qui y figurent se regroupent en deux catégories, des Essais datant de la période où Galois était étudiant (p. 403-453 et 519-521), des "Calculs et brouillons inédits" (p. 187-361 et 526-538) classés en cinq rubriques: Intégrales eulériennes, Calcul intégral, Fonctions elliptiques, Groupes de substitutions et Annexe. Les neuf lettres connues de Galois sont reproduites et décrites (p. 459-471 et 523-525). Les manuscrits de Galois, conservés à la Bibliothèque de l'Institut de France (Ms 2108), sont l'objet d'une description détaillée qui apporte de nombreuses précisions complémentaires (Appendices I: p. 478-521 et II: 526-538).

ANNEXE 2
BIBLIOGRAPHIE

I - Etudes biographiques

1. Il n'existe actuellement aucune grande étude de synthèse sur la vie et l'œuvre de Galois. La principale source biographique de référence demeure l'étude de P. DUPUY ("La vie d'Evariste Galois", *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 3e s., vol. 13, 1896, p. 197-266 avec pièces justificatives et deux fac-similés; réédition in *Cahiers de la quinzaine*, 5e série, 2e cahier, Paris, 1903).

Parmi les quelques notices antérieures, les seules qui présentent une certaine valeur de témoignage sont: deux brèves nécrologies publiées dans le fascicule de septembre 1832 de la *Revue encyclopédique*, (t. 55); la première (p. 566-568), anonyme, est très générale; la seconde ("Nécrologie", p. 744-754), due à Auguste Chevalier, le meilleur ami de Galois, est une source de renseignements divers et précieux; une notice anonyme — mais inspirée par le frère cadet d'Evariste, Alfred Galois (1813-1848) et par l'un de ses anciens camarades de classe, P.-P. Flaugergues — dans le *Magasin pittoresque* (t. 16, 1848, p. 227-228), une note d'O. TERQUEM (*Nouvelles annales de mathématiques*, t. 8, 1849, p. 452).

Parmi les études biographiques postérieures, quelques-unes renferment certains éléments nouveaux: J. BERTRAND ("La vie d'Evariste Galois par P. DUPUY", *Journal des savants*, juillet 1899, p. 389-400); réédité in *Eloges académiques*, nouv. série, Paris, 1902, p. 331-345; R. TATON ("Les relations scientifiques d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps", *Revue d'histoire des sciences*, t. I, 1947, p. 114-130); A. DALMAS, *Evariste Galois, révolutionnaire et géomètre*, Paris, 1956; l'édition des *Ecrits et mémoires mathématiques* de R. BOURGNE et J.P. AZRA précédemment citée (Paris, 1962); C.A. INFANTOZZI, "Sur la mort d'Evariste Galois", *Revue d'histoire des sciences*, t. 21, 1968, p. 157-160; J.-P. AZRA et R. BOURGNE in *Encyclopaedia Universalis*, v. 7, Paris, 1970, p. 450-451; R. TATON, "Sur les relations mathématiques d'Augustin Cauchy et d'Evariste Galois", *Revue d'histoire des sciences*, t. 24, 1971, p. 123-148.

Les biographies de G. SARTON ("Evariste Galois", *The Scientific Monthly*, oct. 1921, p. 363-375; repr. in *Osiris*, t. III, 1937, p. 241-254) et de E.T. BELL (*Men of mathematics*, New-York, 1937, p. 362-377; trad. fr., Les *grands mathématiciens*, Paris, 1939, p. 390-406) sont directement inspirées de Dupuy. Celles de L. INFELD (*Whom the Good Love. The story of Evariste Galois*, New-York, 1948; trad. fr. Paris, 1957 ; rééd. 1978) et d'A. ARNOUX (*Algorithme*, Paris, 1948) mêlent les faits authentiques aux éléments romancés. A. Arnoux a tiré un film de son ouvrage.

II — Etudes de l'œuvre scientifique

L'œuvre scientifique de Galois n'a pas encore été l'objet de l'étude approfondie qu'elle mériterait. Cependant d'assez nombreuses notices s'efforcent d'en souligner les principaux caractères. Parmi les plus anciennes, en plus des "Commentaires" des premiers disciples, Betti et Jordan en particulier, on peut citer :

J. LIOUVILLE, "Avertissement" à l'édition des "Oeuvres" (*Journal de mathématiques*, vol. XI, 1846, p. 381-384); S. LIE, "Influence de Galois sur le développement des mathématiques" (*Le Centenaire de l'Ecole Normale*, Paris, 1895, p. 481-489); E. PICARD, "Introduction" à l'édition des *Oeuvres* (Paris, 1897, p. V-X); J. PIERPONT, "Early history of Galois's theory of equations" (*Bull. of the American Mathematical Society*, vol. 4, april 1898, p. 332-340); J. TANNERY, "Introduction" à l'édition des "*Manuscrits*" (*Bull. sciences mathém.*, t. 30, 1906, p. 1-19; reprod. in *Manuscrits*, p. 1-19).

Les notices récentes les plus importantes sont: G. VERRIEST, *Evariste Galois et la théorie des équations algébriques* (Louvain-Paris, 1934; rééd. Paris, 1951); L. KOLLROS, *Evariste Galois* (Basel, 1949); "Préface" de J. DIEUDONNÉ (p. V-VII), "Avertissement" de R. BOURGNE (p. IX-XVI) et "Appendice" de J.P. AZRA (p. 475-538) in *Ecrits et mémoires* (Paris, 1962); N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques* (2e éd., Paris, 1969, p. 73-74 et 104-109); K. WUSSING, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* (Berlin, 1969, spécialement

p. 73-87 et 206-211) ; J. DIEUDONNÉ éd., *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 2 vol., Paris, 1978, en particulier t. I, p. 75-77, et II, p. 32-34 ; A. DAHAN, *Les recherches algébriques de Cauchy*, thèse de 3e cycle, Université de Paris-Nord, 1979.

ANNEXE 3

DOCUMENTS DIVERS

1. *Quelques notes trimestrielles d'Evariste Galois au Collège Louis-le-Grand* (*)

1826-1827. RHÉTORIQUE, PUIS SECONDE ET MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES

Deuxième Trimestre

Notes d'étude

Devoirs religieux	Bien.
Conduite	Assez bien.
Travail	Satisfaisant.
Dispositions	Heureuses.
Progrès	Assez sensibles.
Caractère	Original et bizarre.

Cet élève, qui travaille bien la généralité de ses devoirs, et quelques-uns avec ardeur et goût, se rebute facilement quand la matière ne lui plaît pas, et alors il néglige le devoir. Il en est de même pour les leçons qu'il sait généralement bien, mais quelquefois qu'il n'apprend pas du tout. Jamais il ne sait mal une leçon : ou il ne l'a pas apprise du tout ou il la sait bien. Quant à ses qualités personnelles, elles sont bien difficiles à définir. Il n'est pas méchant, mais frondeur, singulier, bavard, aime à contrarier et à taquiner ses camarades.

Seconde

Note de M. Saint-Marc-Girardin. — Son travail n'est pas assez régulier ; sa conduite est passable.

Mathématiques préparatoires

Note de M. Vernier. — Zèle et succès.

1827-1828. RHÉTORIQUE ET MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES

Deuxième Trimestre

Note d'étude. — Conduite fort mauvaise, caractère peu ouvert. Il vise à l'originalité. Ses moyens sont distingués, mais il ne veut pas les employer à la Rhétorique. Il ne fait absolument rien pour la classe. C'est la fureur des mathématiques qui le domine ; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude ; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres et se faire accabler de punitions. Il ne se montre pas dépourvu de sentiments religieux, sa santé paraît faible.

Rhétorique

Note de M. Pierrot. — Travaille quelques devoirs. Du reste, causeur comme à l'ordinaire.

Note de M. Desforges. — Dissipé, causeur. A, je crois, pris à tâche de me fatiguer, et serait d'un fort mauvais exemple s'il avait quelque influence sur ses camarades.

Mathématiques préparatoires

Note de M. Vernier. — Intelligence, progrès marqués. Pas assez de méthode.

1828-1829. MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Deuxième Trimestre

Note d'étude. — Se conduit généralement bien ; cependant parfois sa conduite est répréhensible ; il travaille beaucoup et est doué de grands moyens et d'une facilité étonnante. Ses progrès répondent à son travail et à sa facilité. Il a de la bizarrerie dans le caractère, il est quelquefois très léger et souvent aussi paraît raisonnable. Il se tient assez bien pendant les exercices religieux. Sa santé est bonne.

Mathématiques

Note de M. Richard. — Cet élève ne travaille qu'aux parties supérieures des mathématiques.

Physique

Note de M. Thillaye. — Conduite passable, travail nul.

Chimie

Note de M. Thillaye. — Conduite passable, travail nul.

2. *Lettre de candidature de Galois à l'Ecole Préparatoire* (10 ? août 1829)

A son Excellence Monseigneur le Ministre de l'instruction publique (*)

Monseigneur,

J'ai l'honneur de présenter à Votre Excellence une demande à l'effet d'ajouter mon nom à la liste déjà arrêtée des concurrents pour l'entrée à l'école préparatoire (sciences). Depuis long-temps destiné à l'école Polytechnique, j'ai subi l'examen d'admission à cette école. Mais les espérances qu'on m'a fait concevoir de ce côté n'ont pu m'aveugler sur ma véritable vocation, et je ne puis que regretter de ne m'être pas fait inscrire à l'époque prescrite pour l'école préparatoire. Les encouragements des personnes placées à la tête du monde savant se joignent à mon propre goût pour me déterminer à embrasser cette carrière.

J'ose espérer, Monseigneur, que, si votre Excellence hésitait à m'accorder l'objet de ma demande, les informations qu'elle pourrait prendre parleraient en ma faveur.

J'ai l'honneur d'être,
Monseigneur,
Avec le plus profond respect,
de Votre Excellence
Le très humble et très obéissant serviteur

E. GALOIS
Elève du Collège Royal Louis le Grand

(*) Tiré de P. DUPUY, *op. cit.*, p. 85-89 (d'après les Archives du lycée Louis-le-Grand).

(*) Lettre inédite autographe qui fut transmise officiellement le 12 août (le concours s'est ouvert le 20) (Archives Nationales, F.17, Dossier des Inscriptions au Concours de l'Ecole Normale, 1829).

3. *Lettre "Sur l'enseignement des sciences"* (*Gazette des Ecoles*, n° du 2 janvier 1831) (*)

Monsieur le Rédacteur,

Je vous serais obligé si vous voulez bien accueillir les réflexions suivantes relatives à l'étude des mathématiques dans les collèges de Paris.

D'abord dans les sciences, les opinions ne comptent pour rien; les places ne sauraient être la récompense de telle ou telle manière de voir en politique ou en religion. Je m'informe si un professeur est bon ou mauvais, et je m'inquiète fort peu de sa façon de penser dans des matières étrangères à ses études scientifiques. Ce n'était donc pas sans douleur et indignation que, dans le gouvernement de la Restauration, on voyait les places devenir la proie des plus offrants en fait d'idées monarchiques et religieuses. Cet état de choses n'est pas changé; la médiocrité, qui fait preuve de sa répugnance pour le nouvel ordre de choses, est encore privilégiée; et cependant les opinions ne devraient pas être mises en ligne de compte, lorsqu'il s'agit d'apprécier le mérite scientifique des individus.

Commençons par les collèges; là les élèves de mathématiques se destinent pour la plupart à l'Ecole polytechnique; que fait-on pour les mettre en état d'atteindre ce but? Cherche-t-on à leur faire concevoir le véritable esprit de la science par l'exposé des méthodes les plus simples? Fait-on en sorte que le raisonnement devienne pour eux une seconde mémoire? N'y aurait-il pas au contraire quelque ressemblance entre la manière dont ils apprennent les leçons de français et de latin? Jadis un élève aurait appris d'un professeur tout ce qui lui était utile de savoir; maintenant il faut le supplément de un, de deux répétiteurs pour préparer un candidat à l'Ecole polytechnique.

Jusques à quand les pauvres jeunes gens seront-ils obligés d'écouter ou de répéter toute la journée? Quand leur laissera-t-on du temps pour méditer sur cet amas de connaissances, pour coordonner cette foule de propositions sans suite, de calculs sans liaison? N'y aurait-il pas quelque avantage à exiger des élèves les mêmes méthodes, les mêmes calculs, les mêmes formes de raisonnement, s'ils étaient à la fois les plus simples et les plus féconds? Mais non, on enseigne minutieusement des théories tronquées et chargées de réflexions inutiles, tandis qu'on omet les propositions les plus simples et les plus brillantes de l'algèbre; au lieu de cela, on démontre à grands frais de calculs et de raisonnements toujours longs, quelquefois faux, des corollaires dont la démonstration se fait d'elle-même.

D'où vient le mal? Assurément ce n'est pas des professeurs des collèges; ils montrent tous un zèle louable; ils sont les premiers à gémir de ce qu'on ait fait à l'enseignement des mathématiques un véritable métier. La cause du mal, c'est aux libraires de MM. les examinateurs qu'il faut la demander. Les libraires veulent de gros volumes: plus il y a de choses dans les ouvrages des examinateurs, plus ils sont certains d'une vente fructueuse; voilà pourquoi nous voyons apparaître chaque année ces volumineuses compilations où l'on voit les travaux défigurés des grands maîtres à côté des essais de l'écolier.

D'un autre côté, pourquoi les examinateurs ne posent-ils les questions aux candidats que d'une manière entortillée? Il semblerait qu'ils craignissent d'être compris de ceux qu'ils interrogent; d'où vient cette malheureuse habitude de compliquer les questions de difficultés artificielles? Croit-on donc la science trop facile? Aussi qu'arrive-t-il? L'élève est moins occupé de s'instruire que de passer son examen. Il lui faut sur chaque théorie une répétition de chacun des quatre examinateurs; il doit apprendre les méthodes qu'ils affectionnent et savoir à l'avance, pour chaque question et pour chaque examinateur, quelles doivent être ses réponses et même son maintien. Ainsi il est vrai de dire qu'on a fondé depuis quelques années une science nouvelle qui va grandissant chaque jour et qui consiste dans la connaissance des dégoûts et des préférences scientifiques, des manies et de l'humeur de MM. les examinateurs (**).

Etes-vous assez heureux pour sortir vainqueur de l'épreuve? Etes-vous enfin désigné comme l'un des deux cents géomètres à qui l'on porte les armes dans Paris? Vous croyez être au bout: vous vous trompez, c'est ce que je vous ferai voir dans une prochaine lettre.

E.G.

(*) En sous-titre: "Des professeurs - Des ouvrages - Des examinateurs".

(**) L'ordonnance relative à l'organisation de l'Ecole Polytechnique fait espérer qu'à l'avenir les examinateurs seront nommés sur présentation de l'Institut. Mais on ne sait pas si ce sera chaque année, ou seulement sur la vacance des places d'examinateurs. Des examinateurs temporaires et nommés peu de temps avant l'examen nous paraîtraient préférables.

4. *Arrêté d'expulsion de Galois de l'Ecole Normale* (janvier 1831) (*)

Conseil royal de l'Instruction publique,

Séance du 4 janvier 1831

"Sur le rapport de M. le Conseiller chargé des affaires relatives à l'Ecole Normale, le Conseil prend la délibération suivante:

Le Conseil

Vu le rapport de M. le Directeur de l'Ecole Normale sur le renvoi provisoire de l'élève Galois et les motifs à l'appui,

Arrête ce qui suit:

L'élève Galois quittera immédiatement l'Ecole Normale. Il sera statué ultérieurement sur sa destination".

(*) Archives nationales, Registres du Conseil Royal de l'Instruction publique. Sont présents: le ministre Barthe, Villemain, Cuvier, Guéneau de Mussy, Rendu, Poisson, Cousin et Thénard. Le rapporteur, Conseiller chargé des affaires relatives à l'Ecole normale, est Victor Cousin.

5. *Lettre de Galois au Président de l'Académie des Sciences* (31 mars 1831) (*)

Le 31 mars 1831.

Monsieur le Président,

J'ose espérer que MM. Lacroix et Poisson ne trouveront pas mal que je rappelle à leur souvenir un mémoire relatif à la théorie des équations dont ils ont été chargés, il y a trois mois.

Les recherches contenues dans ce mémoire faisaient partie d'un ouvrage que j'avais mis, l'année dernière, au concours pour le prix de mathématiques et où je donnais, dans tous les cas, des règles pour reconnaître si une équation donnée était ou non soluble par radicaux. Comme ce problème a paru jusqu'ici, sinon impossible, du moins fort difficile aux géomètres, la commission d'examen jugea a priori que je ne pouvais avoir résolu ce problème, en premier lieu parce que je m'appelais Galois, de plus parce que j'étais étudiant. Et la commission égara mon mémoire. Et l'on me fit dire que mon mémoire était égaré.

Cette leçon aurait dû me suffire. Toutefois, sur l'avis d'un honorable membre de l'Académie, je refis en partie mon mémoire et vous le présentai.

Vous voyez, monsieur le Président, que mes recherches ont subi jusqu'à ce jour à peu près le même sort que celles des quadrateurs. L'analogie sera-t-elle poussée jusqu'au bout ?

Veuillez, monsieur le Président, me faire sortir d'inquiétude en invitant MM. Lacroix et Poisson à déclarer s'ils ont *égaré* mon mémoire ou s'ils ont l'intention d'en rendre compte à l'Académie. Agréez, monsieur le Président, l'hommage de votre respectueux serviteur.

E. GALOIS

(*) Lettre autographe conservee aux Archives de l'Académie des Sciences.

6. *Témoignage anonyme sur Galois publié par le Journal* Le Globe *le* 15 juin 1831, *jour de son premier procès* (*).

"... M. Galois, quoiqu'il soit fort jeune (il n'a pas vingt ans), a déjà donné des preuves incontestables d'une haute capacité scientifique ; mais, malgré tous ses efforts, il n'a trouvé que froideur ou dédain pour ses talents. Se voyant comprimé par l'ordre social, il s'est aigri, découragé, exaspéré. Il sentait qu'il avait en lui les germes d'un brillant avenir, et, jeté au milieu d'une société égoïste, sans protecteurs et sans amis, ces germes sont restés sans culture ; il a conçu une haine violente contre un régime où le hasard de la naissance condamne à l'oubli tant de facultés précieuses, tandis que ce même hasard élève tant de nullités. Il est devenu indiscipliné, et, entré à l'Ecole Normale, il a été obligé d'en sortir à la suite de démêlés avec ses supérieurs.

"Voici, au reste, quelques détails qui feront comprendre si l'âme énergique du jeune Galois n'est pas excusable dans son antipathie contre l'état actuel de la société, antipathie qui s'est manifestée par la scène des Vendanges de Bourgogne. La haute capacité mathématique de M. Galois est un fait constant : il a découvert les propriétés des fonctions elliptiques en même temps que M. Abel, ce savant du Nord dont l'Institut ne sut apprécier le mérite qu'après qu'il fût mort dans la détresse. L'année dernière, avant le 1er mars, M. Galois remit au secrétariat de l'Institut un mémoire sur la résolution des équations algébriques. Ce mémoire devait concourir pour le Grand Prix des mathématiques. Il en était digne, car il levait quelques difficultés que Lagrange même n'avait pu résoudre. M. Cauchy avait à ce sujet prodigué les plus grands éloges à l'auteur — qu'importe? On égare le mémoire, le prix est adjugé sans que le jeune savant ait figuré au concours. Et pour toute réponse à une lettre adressée à l'Académie des Sciences, où le jeune Galois se plaignait de l'oubli dont son travail avait été l'objet, M. Cuvier répondit : "C'est une chose bien simple : le mémoire a été perdu à la mort de M. Fourier, qui était chargé de l'examiner". Aujourd'hui, le mémoire a été récrit, présenté de nouveau à l'Institut. M. Poisson chargé de l'examiner ne s'en est pas encore acquitté, et voilà plus de cinq mois que son malheureux auteur attend une parole bienveillante de l'Académie.

"M. Galois est en outre auteur de plusieurs notes mathématiques relatives à des points de détail, qui ont été insérées dans plusieurs recueils scientifiques.

"La société peut-elle réellement flétrir par une condamnation un jeune homme dont les égarements momentanés attestent à un si haut degré l'imprévoyance et l'égoïsme de la société elle-même ? Quel enseignement surtout pour les savants dont l'indifférence est la cause principale de ses écarts !".

(*) Texte publié par R. Taton (*Revue d'Histoire des Sciences*, t. I, 1947, p. 118-120).

7. *Rapport de Poisson sur le mémoire de Galois,* 4 juillet 1831 (*)

"Le but que l'auteur s'est proposé dans ce Mémoire est de démontrer un théorème qu'il énonce ainsi :

"Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que, deux quelconques de ses racines étant connues, les autres se déduisent rationnellement.

"L'auteur entend par équation irréductible une équation dont les coefficients sont rationnels, et qui ne peut se décomposer en d'autres équations qui aient aussi leurs coefficients rationnels. D'après sa proposition, l'équation générale du 3e degré, par exemple, serait résoluble, parce que, la somme des trois racines étant égale au coefficient du second terme pris avec un signe contraire, chacune d'entre elles s'exprime rationnellement au moyen des deux autres. Des notes trouvées dans les papiers d'Abel et qui ont été imprimées après sa mort dans le Journal de M. Crelle, tome V, page 345, renferment une proposition analogue à celle de M. Galois dont voici l'énoncé :

"Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines puisse être exprimée rationnellement au moyen des deux autres, l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

"Cet énoncé diffère de celui de M. Galois, en ce que le géomètre norvégien ne dit pas que la condition dont il s'agit soit *nécessaire*, mais seulement qu'elle *suffit* pour que l'équation soit résoluble ; et il ne semble pas qu'il la regardât comme indispensable ; car on trouve dans les notes citées une autre proposition relative à la résolution d'une classe nombreuse d'équations qui pourraient bien ne pas remplir cette condition. Il ne paraît pas non plus que ce soit à cette proposition qu'il ait fait allusion dans ce passage d'une lettre écrite à M. Legendre et publiée après la mort d'Abel dans le *Journal de M. Crelle*, tome VI, page 80 :

"J'ai été assez heureux" dit-il "de trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble ou non à l'aide de radicaux. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est impossible de résoudre les équations supérieures au 4e degré."

"Nous ignorons si Abel a laissé un manuscrit de cette théorie ; elle n'a point encore été imprimée, non plus que la démonstration du théorème analogue à celui qui fait l'objet de ce Rapport et qui appartiendrait entièrement à M. Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux ; car en admettant comme vraie la proposition de M. Galois, on n'en serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée dont le degré est un nombre premier est résoluble ou non par radicaux, puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible, et ensuite si l'une de ces racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres. La condition de résolubilité, si elle existe, devrait avoir un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée, ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.

"Quoi qu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude et nous ne serions pas même en état d'en donner une idée dans ce Rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive ; mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'Académie, nous ne pouvons pas vous proposer d'y donner votre approbation".

(*) *Procès-verbaux des séances de l'Académie des Sciences ...,* t. IX (*années 1828-1831*), Paris, 1921, p. 660-661.

8. *Préface de Galois pour "Deux mémoires d'analyse pure"* (décembre 1831) (*)

Cecy est un livre de bonne foy.
MONTAGNE.

Premièrement, le second feuillet de cet ouvrage n'est pas encombré par les noms, prénoms, qualités, dignités et éloges de quelque prince avare dont la bourse se serait ouverte à la fumée de l'encens avec menace de se refermer quand l'encensoir serait vide. On n'y voit pas non plus, en caractères trois fois gros comme le texte, un hommage respectueux à quelque haute position dans les sciences, à un savant protecteur, chose pourtant indispensable (j'allais dire inévitable) pour quiconque à vingt ans veut écrire. Je ne dis à personne que je doive à ses conseils ou à ses encouragements tout ce qu'il y a de bon dans mon ouvrage. Je ne le dis pas : car ce serait mentir. Si j'avais à adresser quelque chose aux grands du monde ou aux grands de la science (et au temps qui court la distinction est imperceptible entre ces deux classes de personnes), je jure que ce ne seraient point des remerciements. Je dois aux uns de faire paraître si tard le premier des deux mémoires, aux autres d'avoir écrit le tout en prison, séjour que l'on a tort de considérer comme un lieu de recueillement, et où je me suis souvent trouvé stupéfait de mon insouciance à fermer la bouche à mes stupides Zoïles : et je crois pouvoir me servir de ce mot de Zoïle en toute sûreté pour ma modestie, tant mes adversaires sont bas dans mon esprit. Il n'est pas de mon sujet de dire comment et pourquoi l'on me retient en prison : mais je dois dire comment les manuscrits s'égarent le plus souvent dans les cartons de MM. les membres de l'Institut quoiqu'en vérité je

(*) Bibliothèque de l'Institut, Manuscrits de Galois. Le texte est celui de l'édition de Bourgne et Azra, sans les variantes et corrections.

ne conçoive pas une pareille insouciance de la part des hommes qui ont sur la conscience la mort d'Abel. A moi qui ne veux pas me comparer à cet illustre géomètre, il suffira de dire que mon mémoire sur la théorie des équations a été déposé en substance à l'académie des sciences au mois de février 1830, que des extraits en avaient été envoyés en 1829, qu'aucun rapport ne s'en est suivi et qu'il m'a été impossible de revoir les manuscrits. Il y a dans ce genre des anecdotes fort curieuses : mais j'aurais mauvaise grâce à les raconter, parce qu'aucun accident semblable, sauf la perte de mes manuscrits, ne m'est arrivé. Heureux voyageur, ma mauvaise mine m'a sauvé de la gueule des loups. J'en ai déjà trop dit pour faire comprendre au lecteur pourquoi, quelle que fût d'ailleurs ma bonne volonté, il m'eût été absolument impossible de parer ou de déparer, comme on voudra, mon œuvre d'une dédicace.

En second lieu, les deux mémoires sont courts et nullement proportionnés aux titres ; et puis il y a au moins autant de français que d'algèbre à tel point que l'imprimeur, quand on lui a porté les manuscrits, a cru de bonne foi que c'était une introduction. En ce point je suis complètement inexcusable ; il eût été si facile de reprendre dans ses éléments toute une théorie, sous le prétexte de la présenter sous une forme nécessaire à l'intelligence de l'ouvrage, ou bien mieux sans plus de façon d'entrelarder une branche de science de deux ou trois théorèmes nouveaux, sans désigner lesquels ! Il eût été si facile encore de substituer successivement toutes les lettres de l'alphabet dans chaque équation, en les numérotant par ordre pour pouvoir reconnaître à quelle combinaison de lettres appartiennent les équations subséquentes ; ce qui eût multiplié indéfiniment le nombre des équations, si l'on réfléchit qu'après l'alphabet latin, il y a encore l'alphabet grec, que, celui-ci épuisé, il reste les caractères allemands, que rien n'empêche de se servir des lettres syriaques, et au besoin des lettres chinoises ! Il eût été si facile de transformer dix fois chaque phrase, en ayant soin de faire précéder chaque transformation du mot solennel théorème ; ou bien encore d'arriver par NOTRE ANALYSE à des résultats connus depuis le bon Euclide ; ou enfin de faire précéder et suivre chaque proposition d'un cortège redoutable d'exemples particuliers ! Et de tant de moyens je n'ai pas su choisir un seul !

En troisième lieu, le premier mémoire n'est pas vierge de l'œil du maître ; un extrait envoyé en 1831 à l'académie des sciences, a été soumis à l'inspection de M. Poisson, qui est venu dire en séance ne point l'avoir compris. Ce qui, à mes yeux fascinés par l'amour-propre d'auteur, prouve simplement que M. Poisson n'a pas voulu ou n'a pas pu comprendre, mais prouvera certainement aux yeux du public que mon livre ne signifie rien.

Tout concourt donc à me faire penser que dans le monde savant, l'ouvrage que je soumets au public sera reçu avec le sourire de la compassion ; que les plus indulgents me taxeront de maladresse et que pendant quelque temps je serai comparé à Wronski ou à ces hommes infatigables qui trouvent tous les ans une solution nouvelle de la quadrature du cercle. J'aurai surtout à supporter le rire fou de MM. les examinateurs des candidats à l'Ecole Polytechnique (que je m'étonne en passant de ne pas voir occuper chacun un fauteuil à l'académie des sciences, car leur place n'est certainement pas dans la postérité), et qui ayant tendance à monopoliser l'impression des livres de mathématiques n'apprendront pas sans en être formalisés qu'un jeune homme deux fois mis au rebut par eux a aussi la prétention d'écrire, non des livres didactiques il est vrai, mais des livres de doctrine.

Tout ce qui précède, je l'ai dit pour prouver que c'est sciemment que je m'expose à la risée des sots.

Si avec aussi peu de chances d'être compris, je publie, malgré tout, le fruit de mes veilles, c'est afin de prendre date pour mes recherches, c'est afin que les amis que j'ai formés dans le monde avant qu'on m'enterrât sous les verrous, sachent que je suis bien en vie, c'est peut-être aussi dans l'espérance que ces recherches pourront tomber entre les mains de personnes à qui une morgue stupide n'en interdira pas la lecture, et les diriger dans la nouvelle voie que doit, selon moi, suivre l'analyse dans ses branches les plus hautes. Il faut bien savoir que je ne parle ici que d'analyse pure ; mes assertions transportées aux applications les plus directes des mathématiques deviendraient paradoxales.

Les longs calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des Mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donnée à la science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires, mais de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont su imprimer à leurs recherches, et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

Il est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre, n'a pas d'autre but.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance, on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas) ont leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues. Je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour sans cela tout serait épuisé.

Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

Il ne faut pas confondre l'opinion que j'émets ici, avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer. Ces personnes-là sont en arrière de cent ans.

Ici rien de semblable ; ici on fait l'analyse de l'analyse : ici les calculs les plus élevés exécutés jusqu'à présent sont considérés comme des cas particuliers, qu'il a été utile, indispensable de traiter, mais qu'il serait funeste de ne pas abandonner pour des recherches plus larges. Il sera temps d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leurs difficultés, mais non spéficiés dans leur forme, quand la spécialité d'une question les réclamera.

La thèse générale que j'avance ne pourra être bien comprise que quand on lira attentivement mon ouvrage qui en est une application : non que ce point de vue théorique ait précédé l'application ; mais je me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendrait si étrange à la plupart des lecteurs, et rentrant en moi-même, j'ai cru observer cette tendance de mon esprit à éviter les calculs dans les sujets que je traitais, et qui plus est, j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement dans les matières que j'ai traitées.

On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai pu vaincre. Aussi dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est plus récent, trouvera-t-on souvent la formule "je ne sais pas". La classe des lecteurs dont j'ai parlé au commencement ne manquera pas d'y trouver à rire. C'est que malheureusement on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu'il ne sait pas, c'est qu'on ne se doute pas qu'un auteur ne nuit jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une difficulté. Quand la concurrence, c'est-à-dire l'égoïsme, ne règnera plus dans les sciences, quand on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académies des paquets cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera : "je ne sais pas le reste".

De Ste Pélagie Xbre 1831,
EVARISTE GALOIS.

9. *Lettre de Galois à Auguste Chevalier,* 25 mai 1832 (*Revue encyclopédique,* septembre 1832)

Mon bon ami, il y a du plaisir à être triste pour être consolé ; on est vraiment heureux de souffrir quand on a des amis. Ta lettre, pleine d'onction apostolique, m'a apporté un peu de calme. Mais comment détruire la trace d'émotions aussi violentes que celles où j'ai passé ?

Comment se consoler d'avoir épuisé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir épuisée sans bonheur, sans espoir, sûr qu'on est de l'avoir mise à sec pour la vie ?

Oh ! Venez après cela prêcher la paix ! Venez demander aux hommes qui souffrent d'avoir pitié de ce qui est ! Pitié, jamais ! Haine, voilà tout. Qui ne la ressent pas profondément cette haine du présent, n'a pas vraiment l'amour de l'avenir.

Quand la violence ne serait pas une nécessité dans ma conviction, elle le serait dans mon cœur. Je ne veux pas avoir souffert sans me venger.

A part cela, je serais des vôtres.

Mais laissons cela ; il y a des êtres destinés peut-être à faire le bien, mais à l'éprouver, jamais. Je crois être du nombre.

Tu me dis que ceux qui m'aiment doivent m'aider à aplanir les difficultés que m'offre le monde. Ceux qui m'aiment sont, comme tu le sais, bien rares. Cela veut dire, de ta part, que tu te crois, quant à toi, obligé à faire de ton mieux pour me convertir. Mais il est de mon devoir de te prévenir, comme je l'ai fait cent fois, de la vanité de tes efforts.

J'aime à douter de ta cruelle prophétie quand tu me dis que je ne travaillerai plus. Mais j'avoue qu'elle n'est pas sans vraisemblance. Il me manque, pour être un savant, de n'être que cela. Le cœur chez moi s'est révolté contre la tête ; je n'ajoute pas comme toi : "C'est bien dommage".

Pardon, pauvre Auguste, si j'ai blessé ta susceptibilité filiale en te parlant lestement de l'homme à qui tu t'es dévoué. Mes traits contre lui ne sont pas bien acérés, et mon rire n'a rien d'amer. C'est beaucoup de ma part, dans l'état d'irritation où je suis.

J'irai te voir le 1er juin. J'espère que nous nous verrons souvent pendant la première quinzaine de juin. Je partirai vers le 15 pour le Dauphiné.

Tout à toi,

E. GALOIS.

En relisant ta lettre, je remarque une phrase où tu m'accuses d'être énivré par la fougue putréfiée d'un monde pourri qui me souille le cœur, la tête et les mains.

Il n'y a pas de reproches plus énergiques dans le répertoire des hommes de violence.

De l'ivresse ! Je suis désenchanté de tout, même de l'amour de la gloire. Comment un monde que je déteste pourrait-il me souiller ? Réfléchis bien.

10. *Lettres de Galois à ses amis républicains,* 29 mai 1832 (*)

Lettre à tous les républicains

Je prie les patriotes de mes amis de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays.

Je meurs victime d'une infâme coquette et de deux dupes de cette coquette. C'est dans un misérable cancan que s'éteint ma vie.

Oh ! Pourquoi mourir pour si peu de chose, mourir pour quelque chose d'aussi méprisable !

Je prends le ciel à témoin que c'est contraint et forcé que j'ai cédé à une provocation que j'ai conjurée par tous les moyens.

Je me repens d'avoir dit une vérité funeste à des hommes si peu en état de l'entendre de sang-froid. Mais enfin j'ai dit la vérité. J'emporte au tombeau une conscience nette de mensonge, nette de sang patriote.

Adieu ! J'avais bien de la vie pour le bien public.

Pardon pour ceux qui m'ont tué, ils sont de bonne foi.

E. GALOIS

Lettre à N.L. et à V.D.

Mes bon amis

J'ai été provoqué par deux patriotes... il m'a été impossible de refuser.

Je vous demande pardon de n'avoir averti ni l'un ni l'autre de vous.

Mais mes adversaires m'avaient sommé sur l'honneur de ne prévenir aucun patriote.

Votre tâche est bien simple : prouver que je me suis battu malgré moi, c'est-à-dire après avoir épuisé tout moyen d'accommodement, et dire si je suis capable de mentir, de mentir même pour un si petit objet que celui dont il s'agissait.

Gardez mon souvenir, puisque le sort ne m'a pas donné assez de vie pour que la patrie sache mon nom.

Je meurs votre ami,

E. GALOIS.

(*) Publiées par A. Chevalier dans la *Revue Encyclopédique*, septembre 1832, p. 753-754.

Lettre à Auguste [illegible]

Paris, le 29 Mai 1832. 8

Mon cher Ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des Équations, les autres les fonctions Intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux : ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les ~~transformations~~ transf. possibles sur une équation lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

~~[illegible]~~

On pourra faire avec tout cela trois mémoires.

Le premier est écrit, et malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens avec les corrections que j'y ai faites.

Le ~~troisième~~ second ~~et~~ contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes.

1°. D'après les propositions II et III du 1er Mémoire, on voit une grande différence entre adjoindre à une équation une des racines d'une équation auxiliaire, ou les adjoindre toutes.

Dans les deux cas le groupe de l'équation se partage par l'adjonction en groupes tels que l'on passe de l'un à l'autre par une même substitution. Mais la condition que ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que dans le second cas. Cela s'appelle la décomposition propre.

En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H le groupe G peut se partager en groupes que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution, en sorte que $G = H + HS + HS' + \ldots$

et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions en sorte que $G = H + TH + T'H + \ldots$

Ces deux genres de décomposition ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite propre.

Il est aisé de voir que quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations

11. *Lettre-testament de Galois à Auguste Chevalier,* 29 mai 1832 (*)

Mon cher Ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des équations ; les autres, les fonctions intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux ; ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les transformations possibles sur une équation, lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.

Le premier est écrit ; et, malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens avec les corrections que j'y ai faites.

Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes.

1° D'après les propositions II et III du premier Mémoire, on voit une grande différence entre adjoindre à une équation une des racines d'une équation auxiliaire, ou les adjoindre toutes.

Dans les deux cas, le groupe de l'équation se partage par l'adjonction en groupes tels que l'on passe de l'un à l'autre par une même substitution ; mais la condition que ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que dans le second cas. Cela s'appelle la décomposition propre.

En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution ; en sorte que

$$G = H + H S + H S' + \dots$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + T H + T' H + \dots$$

Ces deux genres de décomposition ne coïncident pas ordinairement. Quand elles coïncident, la décomposition est dite propre.

Il est aisé de voir que quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre, en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations, on

(*) Original à la Bibliothèque de l'Institut, Manuscrit de Galois. Texte de la *Revue Encyclopédique*, septembre 1832. On trouvera dans *Ecrits et mémoires*, p. 172-185 ce même texte sur les pages de droite et, sur les pages de gauche, les corrections et variantes du manuscrit original.

On pourra résoudre l'équation comme au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations.

Lors donc qu'on aura épuisé ~~dans une équation~~ sur le groupe de l'équation tout ce qu'il y a de décompositions propres possibles sur ce groupe, on arrivera à des groupes qu'on pourra transformer, mais dont les permutations seront toujours en même nombre.

Si ces groupes ont chacun un nombre premier de permutations, l'équation sera soluble par radicaux ; sinon, non.

Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable quand ce nombre n'est pas premier est 5.4.3.

2°. Les ~~substitutions~~ décompositions les plus simples sont celles qui ont lieu par la Méthode de M. Gauss.

[illegible]

Comme ces décompositions sont évidentes même dans la forme actuelle du groupe de l'équation, il est inutile de s'arrêter longtemps sur cet objet.

Quelles décompositions sont praticables sur une équation qui ne se simplifie pas par la Méthode de M. Gauss ?

J'ai appelé primitives les équations qui ~~peuvent~~ ne peuvent pas se simplifier par la méthode de M. Gauss, non que ces équations soient réellement indécomposables, puisqu'elles peuvent même se résoudre par radicaux.

Comme lemme à la théorie des équations primitives solubles par radicaux, j'ai ~~pu~~ mis en juin 1830 dans le bulletin Férussac, une analyse sur les imaginaires de la théorie des nombres.

On trouvera ci-joint la démonstration des théorèmes suivants.

1°. Pour qu'une équation primitive soit soluble par radicaux, elle doit être de degré p^ν, p étant premier.

2. ~~Une pareille~~ Toutes les permutations d'une pareille équation sont de la forme

$x_{k.l.m....}$ | $x_{ak+bl+cm+\dots,\ a_1k+b_1l+c_1m+\dots+g_0\ \dots}$

$k, l, m, \dots$ étant ν indices qui prenant chacun p valeurs pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations.

Lors donc qu'on aura épuisé sur le groupe d'une équation tout ce qu'il y a de décompositions propres possibles sur ce groupe, on arrivera à des groupes qu'on pourra transformer, mais dont les permutations seront toujours en même nombre.

Si ces groupes ont chacun un nombre premier de permutations, l'équation sera soluble par radicaux; sinon, non.

Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable, quand ce nombre n'est pas premier, est 5.4.3.

2° Les décompositions les plus simples sont celles qui ont lieu par la méthode de M. Gauss.

Commme ces décompositions sont évidentes, même dans la forme actuelle du groupe de l'équation, il est inutile de s'arrêter long-temps sur cet objet.

Quelles décompositions sont praticables sur une équation qui ne se simplifie pas par la méthode de M. Gauss ?

J'ai appelé primitives les équations qui ne peuvent pas se simplifier par la méthode de M. Gauss; non que ces équations soient réellement indécomposables, puisqu'elles peuvent même se résoudre par radicaux.

Comme lemme à la théorie des équations primitives solubles par radicaux, j'ai mis en juin 1830, dans le Bulletin Férussac, une analyse sur les imaginaires de la théorie des nombres.

On trouvera ci-jointe la démonstration des théorèmes suivants :

1. Pour qu'une équation primitive soit soluble par radicaux, elle doit être du degré p^{ν}, p étant premier.

2. Toutes les permutations d'une pareille équation sont de la forme

$x_{k.l.m\ldots} / x_{ak+bl+cm+\ldots+f.\ a_1k+b_1l+c_1m+\ldots+g.\ \ldots}$

$k, l, m\ldots.$ étant ν indices, qui, prenant chacun p valeurs, indiquant toutes les racines &. Les indices sont pris suivant module p, c'est à dire que la racine sera la même quand on ajoutera à l'un des indices un multiple de p.

Le groupe qu'on obtient en opérant toutes les substitutions de cette forme linéaire, contient en tout $p^n(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1})$ permutations.

Il s'en faut que dans cette généralité les équations qui lui répondent soient solubles par radicaux.

La condition que j'ai indiquée dans le bulletin Férussac pour ~~qu'elle~~ que l'équation soit soluble par radicaux est trop restreinte. Il y a peu d'exceptions, mais il y en a.

La dernière application de la théorie des équations est relative aux équations modulaires des fonctions elliptiques.

On sait que le groupe de l'équation qui a pour racines les sinus de l'amplitude des p^2-1 divisions d'une période est celui-ci

$$x_{k.l} \qquad x_{ak+bl,\, ck+dl}$$

Par conséquent l'équation modulaire correspondante aura pour groupe

$$x_{\frac{k}{l}} \qquad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}}$$

Dans laquelle $\frac{k}{l}$ peut avoir les $p+1$ valeurs $\infty\ 0\ 1\ 2 \dots p-1$. Ainsi en convenant que k peut être infini on peut écrire simplement

$$x_k \qquad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

en donnant à $a\ b\ c\ d$ toutes les valeurs, on obtient $(p+1)p(p-1)$ permutations.

Or ce groupe se décompose proprement en deux groupes, dont les substitutions sont

$$x_k \qquad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

$ad-bc$ étant un résidu quadratique de p.

Le groupe ainsi simplifié est de $(p+1)p\frac{p-1}{2}$ permutations. Mais il est aisé de voir qu'il n'est plus décomposable proprement à moins que $p=2$ ou $p=3$. Ainsi de quelque manière qu'on transforme l'équation, son groupe indiquent toutes les racines. Les indices sont pris suivant module p ; c'est-à-dire que la racine sera la même quand on ajoutera à l'un des indices un multiple de p.

Le groupe qu'on obtient en opérant toutes les substitutions de cette forme linéaire contient en tout

$p^n\ (p^n-1)\ (p^n-p)\ \ldots\ldots\ (p^n-p^{n-1})$ permutations.

Il s'en faut que dans cette généralité les équations qui lui répondent soient solubles par radicaux.

La condition que j'ai indiquée dans le Bulletin de Férussac pour que l'équation soit soluble par radicaux est trop restreinte ; il y a peu d'exceptions, mais il y en a.

La dernière application de la théorie des équations est relative aux équations modulaires des fonctions elliptiques.

On sait que le groupe de l'équation qui a pour racines les sinus de l'amplitude des p^2-1 divisions d'une période est celui-ci :

$$x_{k.l} \quad x_{ak+bl\,/\,ck+dl}$$

par conséquent l'équation modulaire correspondante aura pour groupe,

$$x_{\frac{k}{l}} \quad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}}$$

Dans laquelle $\frac{k}{l}$ peut avoir les $p+1$ valeurs

$$\infty\ 0\ 1\ 2\ \ldots\ p-1\ .$$

Ainsi en convenant que k peut être infini, on peut écrire simplement

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

En donnant à $abcd$ toutes les valeurs, on obtient $(p+1)p(p-1)$ permutations.

Or ce groupe se décompose *proprement* en deux groupes, dont les substitutions sont

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

$ad-bc$ étant un résidu quadratique de p .

Le groupe ainsi simplifié est de

$$(p+1)\,p.\,\frac{p-1}{2} \quad \text{permutations.}$$

Mais il est aisé de voir qu'il n'est plus décomposable proprement, à moins que $p=2$, ou $p=3$.

Ainsi, de quelque manière que l'on transforme l'équation, son groupe toujours le même nombre de permutations.

Mais il est curieux de savoir si le degré peut s'abaisser.

Et d'abord il ne peut s'abaisser ~~plus~~ plus bas que p, puisque ~~toute~~ une équation de degré moindre que p, ne peut avoir p pour facteur dans le nombre des permutations de son groupe.

Voyons donc si l'équation de degré $p+1$ dont les ~~x~~ racines x_k s'indiquent ~~~~ en donnant à k toutes les valeurs y compris l'infini et dont le groupe a pour substitutions

$$x_k \qquad x_{\frac{ak+b}{ck+d}} \quad ad-bc \text{ étant un carré}$$

peut s'abaisser au degré p.

Or il faut ~~que~~ pour cela que le groupe se décompose (improprement, s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun.

Soient 0 et ∞ deux lettres conjointes dans l'un de ces groupes. Les ~~x~~ ~~subst~~ ~~que~~ substitutions qui ne font pas changer 0 et ∞ de place seront de la forme

$$x_k \qquad x_{m^2k}$$

Donc si M ~~n'est ni nul ni infini et que~~ M est la lettre conjointe de 1 la lettre conjointe de m^2 sera m^2M. Quand M est un carré on aura donc $M^2=1$; ~~et ...~~ Mais cette simplification ne peut avoir lieu que pour $p=5$.

~~Il ...~~ Pour $p=7$ on trouve un groupe de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations où $\infty\ 1\ 2\ 4$ ont respectivement pour lettres conjointes $0\ 3\ 6\ 5$

Ce groupe ~~est~~ a ses substitutions de la forme

$$x_k \qquad x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

b étant la lettre conjointe de c et a une lettre qui est ~~à la fois~~ résidu ~~ou~~ ou non résidu en même temps que c.

Pour $p=11$ les mêmes substitutions auront lieu avec les mêmes notations,

$\infty\ 1\ 3\ 4\ 5\ 9$ ayant respectivement pour conjointes $0\ 2\ 6\ 8\ 10\ 7$

~~En toute~~ Ainsi pour les cas de $p = 5, 7, 11$, l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés.

aura toujours le même nombre de permutations.

Mais il est curieux de savoir si le degré peut s'abaisser.

Et d'abord il ne peut s'abaisser plus bas que p, puisqu'une équation de degré moindre que p ne peut avoir p pour facteur dans le nombre des permutations de son groupe.

Voyons donc si l'équation de degré $p+1$, dont les racines x_k s'indiquent en donnant à k toutes les valeurs, y compris l'infini, et dont le groupe a pour substitutions

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}} \quad ad - bc \text{ étant un carré}$$

peut s'abaisser au degré p.

Or il faut pour cela que le groupe se décompose (improprement, s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun.

Soient o et ∞ deux lettres conjointes dans l'un de ces groupes. Les substitutions qui ne font pas changer o et ∞ de place seront de la forme :

$$x_k \quad x_{m^2k}.$$

Donc si M est la lettre conjointe de 1, la lettre conjointe de m^2 sera m^2M. Quant M est un carré, on aura donc $M^2=1$. Mais cette simplification ne peut avoir lieu que pour $p=5$.

Pour $p=7$ on trouve un groupe de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations, où ∞ 1 2 4 ont respectivement pour lettres conjointes 0 3 6 5.

Ce groupe a ses substitutions de la forme

$$x_k \quad x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

b étant la lettre conjointe de c, et a une lettre qui est résidu ou non résidu en même temps que c.

Pour $p=11$ les mêmes substitutions auront lieu avec les mêmes notations, ∞ 1 3 4 5 9 ayant respectivement pour conjointes 0 2 6 8 10 7.

Ainsi pour les cas de $p=5$, 7, 11 l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés.

10

Le troisième mémoire concerne les intégrales.

On sait qu'une somme de ~~font~~ termes d'une même fonction elliptique se réduit toujours à un seul terme, plus des quantités algébriques ou logarithmiques. ~~Pour les~~ Il n'y a pas d'autres fonctions pour lesquelles cette propriété ait lieu.

Mais des propriétés absolument semblables y suppléent dans toutes ~~les~~ ~~intégrales~~ les intégrales de fonctions algébriques.

On traite à la fois toutes les ~~fonctions~~ intégrales dont la différentielle est une fonction de la variable et d'une même fonction irrationnelle de la variable, que cette irrationnelle soit ou ne soit pas un radical, qu'elle s'exprime ou ne s'exprime pas par des radicaux.

~~Soit~~ On trouve que le nombre des périodes distinctes de ~~la fonct~~ l'intégrale la plus générale relative à une irrationnelle donnée est toujours un nombre pair.

~~Soit~~ $2n$ ce nombre, On aura le théorème suivant :

Une somme quelconque de termes se réduit à n termes plus des quantités algébriques et logarithmiques.

Les fonctions de première espèce sont celles pour lesquelles la partie algébrique et logarithmique est nulle.

Il y en a n distinctes.

Les fonctions de seconde espèce sont celles pour lesquelles la partie complémentaire est purement algébrique.

Il y en a n distinctes.

~~Les fonctions autres font~~ On peut supposer que les différentielles des autres fonctions ne soient jamais infinies qu'une fois pour $x=a$, et de plus que leur partie complémentaire se réduise à un seul logarithme, $\log P$, P étant une quantité algébrique. En désignant par $\Pi(x,a)$ ces fonctions, on aura le théorème

$$\Pi(x,a) - \Pi(a,x) = \Sigma\, \varphi a\, \psi x$$

φa et ψx étant des fonctions de première et de seconde espèce.

On en déduit ~~pour les~~ ~~fonctions~~ en appelant $\Pi(a)$ et ψ les périodes de $\Pi(x,a)$ et ψx relatives à une même révolution de x,

$$\Pi(a) = \Sigma\, \psi \times \varphi a.$$

Le troisième Mémoire concerne les intégrales.

On sait qu'une somme de termes d'une même fonction elliptique se réduit toujours à un seul terme, plus des quantités algébriques ou logarithmiques.

Il n'y a pas d'autres fonctions pour lesquelles cette propriété ait lieu.

Mais des propriétés absolument semblables y suppléent dans toutes les intégrales de fonctions algébriques.

On traite à la fois toutes les intégrales dont la différentielle est une fonction de la variable et d'une même fonction irrationnelle de la variable, que cette irrationnelle soit ou ne soit pas un radical, qu'elle s'exprime ou ne s'exprime pas par des radicaux.

On trouve que le nombre des périodes distinctes de l'intégrale la plus générale relative à une irrationnelle donnée est toujours un nombre pair.

Soit $2n$ ce nombre, on aura le théorème suivant :

Une somme quelconque de termes se réduit à n termes, plus des quantités algébriques et logarithmiques.

Les fonctions de première espèce sont celles pour lesquelles la partie algébrique et logarithmique est nulle.

Il y en a n distinctes.

Les fonctions de seconde espèce sont celles pour lesquelles la partie complémentaire est purement algébrique.

Il y en a n distinctes.

On peut supposer que les différentielles des autres fonctions ne soient jamais infinies qu'une fois pour $x=a$, et de plus que leur partie complémentaire se réduise à un seul logarithme, log. P, P étant une quantité algébrique. En désignant par $\Pi(x,a)$ ces fonctions, on aura le théorème

$$\Pi(x,a)-\Pi(a,x)=\Sigma\ \varphi a\ \psi x\ ,$$

φa et ψx étant des fonctions de première et de seconde espèce.

On en déduit, en appelant $\Pi(a)$ et ψ les périodes de $\Pi(x,a)$ et ψx relatives à une même révolution de x,

$$\Pi(a)=\Sigma\ \psi\times\varphi a\ .$$

Ainsi les périodes des fonctions de troisième espèce s'expriment toujours en fonctions de première et de second espèce.

On peut en déduire aussi des théorèmes analogues au théorème de Legendre
$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

La réduction des fonctions de troisième espèce à des intégrales définies, qui est la plus belle découverte de M. Jacobi, n'est pas praticable hors le cas des fonctions Elliptiques.

La multiplication des fonctions intégrales par un nombre entier est toujours possible, comme l'addition, au moyen d'une équation de degré n dont les racines sont les valeurs à substituer dans l'intégrale pour avoir les termes réduits.

L'équation qui donne la division des périodes en p parties égales est du degré $p^{2n}-1$. Son groupe a en tout $(p^{2n}-1)(p^{2n}-p)\ldots(p^{2n}-p^{2n-1})$ permutations.

L'équation qui donne la division d'une somme de n termes en p parties égales est du degré p^{2n}. Elle est soluble par radicaux.

De la transformation.

On peut d'abord, en suivant des raisonnements analogues à ceux qu'Abel a consignés dans son dernier mémoire, démontrer que si dans une même relation entre des intégrales on a les deux fonctions $\int \varphi(x, X)\,dx$, $\int \psi(y, Y)\,dy$, la dernière intégrale ayant $2n$ périodes, il sera permis de supposer que y et Y s'expriment moyennant une seule équation de degré n en fonction de x et de X.

D'après cela on peut supposer que les transformations aient lieu constamment entre deux intégrales seulement, puisqu'on aura évidemment en prenant une fonction quelconque rationnelle de y et de Y:
$$\sum \int f(y, Y)\,dy = \int F(x, X)\,dx$$

Il y aurait sur cette équation des réductions évidentes dans le cas où les intégrales de l'un et de l'autre membre n'auraient pas toutes deux le même nombre de périodes.

Ainsi nous n'avons à comparer que des intégrales qui aient toutes deux le même nombre de périodes.

On démontrera que le plus petit degré d'irrationalité de deux pareilles intégrales ne peut être plus grand pour l'une que pour l'autre.

Ainsi les périodes des fonctions de troisième espèce s'expriment toujours en fonctions de première et de seconde espèce.

On peut en déduire aussi des théorèmes analogues au théorème de Legendre

$$E'F''-E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

La réduction des fonctions de troisième espèce à des intégrales définies, qui est la plus belle découverte de M. Jacobi, n'est pas praticable, hors le cas des fonctions elliptiques.

La multiplication des fonctions intégrales par un nombre entier est toujours possible, comme l'addition, au moyen d'une équation de degré n dont les racines sont les valeurs à substituer dans l'intégrale pour avoir les termes réduits.

L'équation qui donne la division des périodes en p parties égales est du degré $p^{2n}-1$. Son groupe a en tout

$$(p^{2n}-1)(p^{2n}-p)\ldots(p^{2n}-p^{2n-1}) \text{ permutations.}$$

L'équation qui donne la division d'une somme de n termes en p parties égales est du degré p^{2n}. Elle est soluble par radicaux.

De la transformation. On peut d'abord, en suivant des raisonnements analogues à ceux qu'Abel a consignés dans son dernier mémoire, démontrer que si dans une même relation entre des intégrales on a les deux fonctions $\int \Phi(x,X)dx$, $\int \Psi(y,Y)dy$, la dernière intégrale ayant $2n$ périodes, il sera permis de supposer que y et Y s'expriment moyennant une seule équation de degré n en fonction de x et de X.

D'après cela on peut supposer que les transformations aient lieu constamment entre deux intégrales seulement, puisqu'on aura évidemment, en prenant une fonction quelconque rationnelle de y et de Y,

$$\Sigma \int f(y,Y)dy = \int F(x,X)dx$$

Il y aurait sur cette équation des réductions évidentes dans le cas où les intégrales de l'un et de l'autre membre n'auraient pas toutes deux le même nombre de périodes.

Ainsi nous n'avons à comparer que des intégrales qui aient toutes deux le même nombre de périodes.

On démontrera que le plus petit degré d'irrationnalité de deux pareilles intégrales ne peut être plus grand pour l'une que pour l'autre.

11

On fera voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale donnée en une autre dans laquelle une période de la première soit divisée par le nombre premier p, et les $2n-1$ autres restent les mêmes.

Il ne restera donc à comparer que des intégrales où les périodes seront les mêmes de part et d'autre, et telles par conséquent que n termes de l'une s'expriment sans autre équation qu'une seule du degré n, au moyen de ceux de l'autre, et réciproquement. Ici nous ne savons rien.

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir à priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.

Tu feras imprimer cette lettre dans la revue encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois. Le 29 Mai 1832.

On fera voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale donnée en une autre dans laquelle une période de la première soit divisée par le nombre premier p , et les $2n-1$ autres restent les mêmes.

Il ne restera donc à comparer que des intégrales où les périodes seront les mêmes de part et d'autre, et telles par conséquent que n termes de l'une s'expriment sans autre équation qu'une seule du degré n , au moyen de ceux de l'autre, et réciproquement. Ici nous ne savons rien.

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations, depuis quelque temps, étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir *a priori*, dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes, quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données, sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain, qui est immense.

Tu feras imprimer cette lettre dans la Revue encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion.

Le 29 mai 1832
E. GALOIS

12.1. *Textes divers d'Evariste Galois* (*)

1. Discours préliminaire (**)

Le mémoire qui suit a été adressé il y a environ sept mois à l'Académie des Sciences de Paris, et égaré par les commissaires qui devaient l'examiner. Cet ouvrage n'a donc, pour se faire lire, acquis aucune autorité, et cette raison n'était pas la dernière qui retenait l'auteur dans sa publication. S'il s'y décide, c'est par crainte que des géomètres plus habiles, en s'emparant du même champ, ne lui fassent perdre les fruits d'un long travail.

Le but que l'on s'est proposé est de déterminer des caractères pour la résolubilité des équations par radicaux. Nous pourrons affirmer qu'il n'existe pas dans l'analyse pure de matière plus obscure et peut-être plus isolée de tout le reste. La nouveauté de cette matière a exigé l'emploi de nouvelles dénominations, de nouveaux caractères. Nous ne doutons pas que cet inconvénient ne rebute les premiers pas du lecteur qui pardonne à peine aux auteurs qui ont tout son crédit de lui parler un nouveau langage. Mais enfin force nous a été de nous conformer à la nécessité du sujet dont l'importance mérite sans doute quelque attention.

Etant donnée une équation algébrique, à coefficients quelconques, numériques ou littéraux, reconnaître si ses racines peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète.

Si maintenant vous me donnez une équation que vous aurez choisie à votre gré et que vous désiriez connaître si elle est ou non soluble par radicaux, je n'aurai rien à y faire que de vous indiquer le moyen de répondre à votre question, sans vouloir charger ni moi ni personne de le faire. En un mot, les calculs sont impraticables.

Il paraîtrait après cela qu'il n'y a aucun fruit à tirer de la solution que nous proposons.

En effet, il en serait ainsi si la question se présentait ordinairement sous ce point de vue. Mais, la plupart du temps, dans les applications de l'analyse algébrique, on est conduit à des équations dont on connaît d'avance toutes les propriétés : propriétés au moyen desquelles il sera toujours aisé de répondre à la question par les règles que nous exposerons. Il existe, en effet, pour ces sortes de questions, un certain ordre de considérations métaphysiques qui planent sur tous les calculs et qui souvent les rendent inutiles. Je citerai, par exemple, les équations qui donnent la division des fonctions elliptiques et que le célèbre Abel a résolues. Ce n'est certainement pas d'après leur forme numérique que ce géomètre y est parvenu. Tout ce qui fait la beauté et à la fois la difficulté de cette théorie, c'est qu'on a sans cesse à indiquer la marche de l'analyse et à prévoir les résultats sans jamais pouvoir les effectuer. Je citerai encore les équations modulaires.

(*) Ces différents écrits, tirés des manuscrits d'Evariste Galois, sont donnés soit d'après la version du recueil d'A. Dalmas, soit d'après l'édition de R. Bourgne et J.P. Azra (sans ses corrections et variantes).

(**) Projet d'introduction à une édition de son mémoire de 1830, rédigé en septembre 1830, quelques mois après l'annonce de son échec au concours du grand prix de l'Académie des sciences.

12.2. *Note sur Abel* (*)

Abel paraît être l'auteur qui s'est le plus occupé de cette théorie. On sait qu'après avoir cru trouver la résolution des équations générales du cinquième degré, ce géomètre a démontré l'impossibilité de cette résolution. Mais dans le mémoire allemand publié à cet effet, l'impossibilité en question n'est prouvée que par des raisonnements relatifs au degré des équations auxiliaires et à l'époque de cette publication, il est certain qu'Abel ignorait les circonstances particulières de la résolution par radicaux. Je n'ai donc parlé de ce mémoire qu'afin de déclarer qu'il n'a aucun rapport avec ma théorie.

Il a ensuite démontré la résolubilité par radicaux d'équations particulières qui diffèrent peu par leurs propriétés des équations binomes mais il n'a rien laissé sur la discussion générale du problème qui nous a occupé. Car une fois pour toutes, ce que notre théorie a de remarquable, c'est dans tous les cas répondre oui ou non.

Depuis une lettre particulière adressée par Abel à M. Legendre, annonçait qu'il avait eu le bonheur de découvrir une règle pour reconnaître si une équation était résoluble par radicaux ; mais la mort anticipée de ce géomètre ayant privé la science des recherches promises dans cette lettre, il n'en était pas moins nécessaire de donner la solution d'un problème qu'il m'est bien pénible de posséder, puisque je dois cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura fait la science.

Dans tous les cas il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le nom d'Abel, quand j'ai présenté à l'Institut mes premières recherches sur la théorie des équations, et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la mienne.

12.3. *Sciences - Hiérarchie - Ecoles* (*)

Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée.

29 X^bre 1831

La hiérarchie est un moyen même pour l'inférieur.

— Quiconque n'est pas envieux ou a de l'ambition a besoin d'une hiérarchie factice pour vaincre l'envie ou les obstacles.

— Jusqu'à ce qu'un homme ait dit : la science c'est moi, il doit avoir un nom à opposer à ceux qu'il combat. Si non, son ambition passera pour de l'envie.

— Avant d'être roi il faut être aristocrate. Machiavel.

— L'intrigue est un jeu. Si l'on mérite ce qu'on brigue, on y gagne tout. Si non, on perd la partie.

— On combat les professeurs par l'institut, l'institut par le passé, un passé par un autre passé.

— Voici la marche de Victor Hugo. Renaissance, Moyen-Age, enfin, moi.

C'est à ce besoin de combattre un homme par un autre homme, un siècle par un autre siècle, qu'on doit

(*) Note écrite à la prison Sainte-Pélagie à la fin de 1831.

attribuer les réactions littéraires ou scientifiques, qui ne sont pas de longue durée. Aristote, Ptolémée, Descartes, Laplace.

Les subalternes ne comprennent pas.

Ce jeu use celui qui s'en sert. Un homme qui n'est pas dévoué fait éclectique.

— Un homme qui a une idée peut choisir entre, avoir, sa vie durant, une réputation colossale d'homme savant, ou bien se faire une école, se taire, et laisser un grand nom dans l'avenir. Le premier cas a lieu s'il pratique son idée sans l'émettre, le second, s'il la publie. Il y a un troisième moyen juste milieu entre les deux autres, c'est de publier et de pratiquer, alors on est ridicule.

12.4. *Discussions sur les progrès de l'analyse pure* (*)

De toutes les connaissances humaines, on sait que l'analyse pure est la plus immatérielle, la plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la plus coordonnée. Mais c'est erreur. Prenez un livre d'algèbre, soit didactique, soit d'invention, et vous n'y verrez qu'un amas confus de propositions dont la régularité contraste bizarrement avec le désordre de tout. Il semble que les idées coûtent déjà trop à l'auteur pour qu'il se donne la peine de les lier et que son esprit épuisé par les conceptions qui sont à la base de son ouvrage, ne puisse enfanter une même pensée qui préside à leur ensemble.

Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention. Ce défaut pire que l'absence de toute méthode arrive surtout dans les ouvrages didactiques, la plupart composés par des hommes qui n'ont pas l'intelligence de la science qu'ils professent.

Tout cela étonnera fort les gens du monde qui en général ont pris le mot "mathématique" pour synonyme de régulier.

Toutefois, on sera étonné si l'on réfléchit qu'ici comme ailleurs la science est l'œuvre de l'esprit humain, qui est destiné plutôt à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet, on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques non pas à nous connues, mais toutes les vérités possibles, pourrait les déduire régulièrement et comme machinalement de quelques principes combinés par une méthode uniforme; alors plus d'obstacles, plus de ces difficultés que le savant rencontre dans ses explorations... Il n'en est pas ainsi ; si la tâche du savant est plus pénible et, partant, plus belle, la marche de la science aussi est moins régulière. La science progresse par une série de combinaisons où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières de chacun d'eux. En vain, les analystes voudraient-ils se dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils composent : ... Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant d'un côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Les ouvrages didactiques doivent partager avec les ouvrages d'inventeurs ce défaut d'une marche sûre toutes les fois que le sujet qu'ils traitent n'est pas entièrement soumis à nos lumières. Ils ne pourraient donc prendre une forme vraiement méthodique que sur un bien petit nombre de matières. Pour la leur donner, il faudrait une profonde intelligence de l'analyse et l'inutilité de l'entreprise dégoûte ceux qui pourraient en supporter la difficulté.

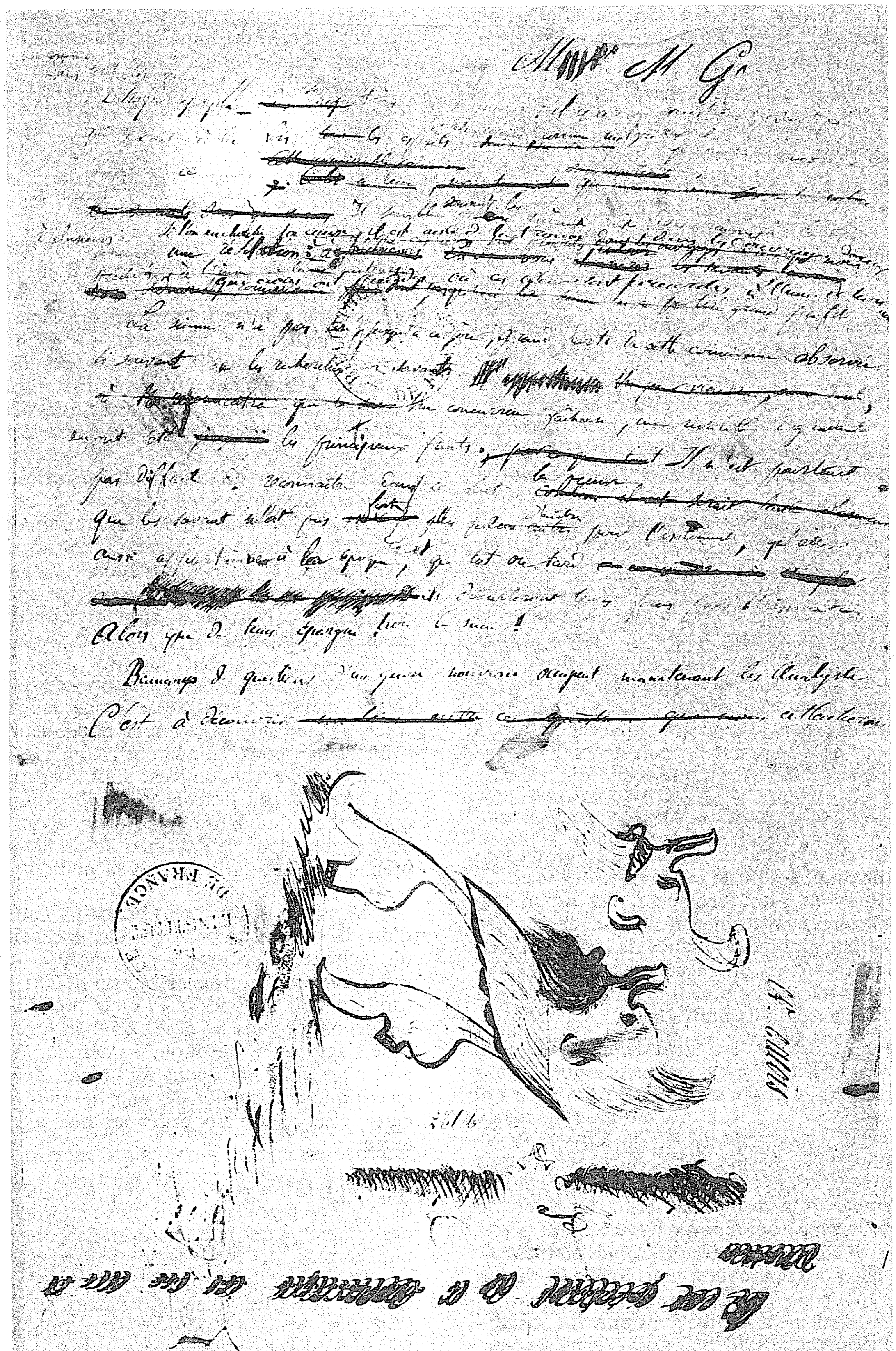
Il serait au-dessous de la gravité de cet écrit d'entrer dans une pareille lutte avec des sentiments personnels d'indulgence ou d'animosité à l'égard des savants. L'auteur des articles évitera également ces deux écueils. Si un passé pénible le garantit du premier, un amour profond de la science, qui la lui fait respecter dans ceux qui la cultivent, assurera contre le second son impartialité.

Il est pénible dans les sciences de se borner au rôle de critique : nous ne le ferons que contraint et forcé. Quand nos forces nous le permettront, après avoir blâmé, nous indiquerons ce qui à nos yeux sera mieux. Nous aurons souvent ainsi l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur les idées nouvelles qui nous ont conduit dans l'étude de l'analyse. Nous nous permettrons donc de l'occuper de ces idées, dans nos premiers articles, afin de n'avoir point à y revenir.

Dans des sujets moins abstraits, dans les objets d'art, il y aurait un profond ridicule à faire précéder un ouvrage de critique par ses propres œuvres : ce serait avouer par trop naïvement ce qui est presque toujours vrai au fond, que l'on se prend pour le type auquel on rapporte les objets pour les juger : mais ici, il ne s'agit pas d'exécution, il s'agit des idées les plus abstraites qu'il soit donné à l'homme de concevoir ; ici critique et discussion deviennent synonymes, et discuter, c'est mettre aux prises ses idées avec celles des autres.

Nous exposerons donc, dans quelques articles, ce qu'il y a de plus général, de plus philosophique, dans des recherches que mille circonstances ont empêché de publier plus tôt. Nous les présenterons seules, sans complications d'exemples et de hors-d'œuvres, qui chez les analystes noient d'ordinaire les conceptions générales. Nous les exposerons surtout avec bonne foi, indiquant sans détour la voie qui nous y conduit et les obstacles qui nous ont arrêté. Car nous voulons que le lecteur soit aussi instruit que nous des matières que nous aurons traitées. Quand ce but aura été rempli, nous aurons conscience d'avoir bien fait, sinon pour le profit qu'en retirera directement la science, du moins par l'exemple donné d'une bonne foi qu'on n'a pas trouvée jusqu'à ce jour.

(*) Notes rédigées en mars-avril 1832, à la pension Faultrier.



Manuscrit du fragment 12, 5 publié ci-contre.
Il s'agit d'un des tout derniers écrits de Galois et l'on notera, avec sa propre caricature, les traces d'un prénom féminin raturé, "Stéphanie D..."
(Dossier 13, folio 80b des manuscrits de Galois ; p. 19 et 507 de l'édition de Bourgne et Azra).

12.5. *Fragments* (*)

Ici comme dans toutes les sciences, chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés, comme malgré eux et sans qu'aucun accord ait présidé à ce concours. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à la fois à plusieurs comme une révélation : si l'on en cherche la cause, il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés, où ces idées sont prescrites à l'insu de leurs auteurs.

La science n'a pas tiré, jusqu'à ce jour, grand parti de cette coïncidence observée si souvent dans les recherches des savants.

Une concurrence fâcheuse, une rivalité dégradante en ont été les principaux fruits. Il n'est pourtant pas difficile de reconnaître dans ce fait la preuve que les savants ne sont pas faits plus que d'autres pour l'isolement, qu'eux aussi appartiennent à leur époque, et que tôt ou tard ils décupleront leurs forces par l'association. Alors que de temps épargné pour la science !

Beaucoup de questions d'un genre nouveau occupent maintenant les Analystes. C'est à découvrir un lien entre ces questions que nous attacherons . . . .

Nous ne nous plaindrons donc point de l'irrégularité des ouvrages de Mathématiques, qui est inhérente à la liberté absolue du savant. Une théorie nouvelle est bien plutôt la recherche que l'expression de la vérité, et si l'on pouvait la déduire régulièrement des théories déjà connues, elle ne serait pas nouvelle.

Ce dont nous nous plaindrons, c'est que la pensée qui a dirigé l'auteur reste le plus souvent cachée.

On croit généralement que les Mathématiques sont une série de déductions.

(*) Notes rédigées à la pension Faultrier (avril-mai 1832).

L'influence de Galois

par Jean DIEUDONNÉ

Les travaux de Galois en Algèbre mettent le point final à la solution du problème de la résolution "par radicaux" des équations algébriques, abordé avant lui sous divers angles par Lagrange, Vandermonde, Gauss, Ruffini et Abel. C'est de l'étude de ce problème que sont issues les notions modernes de groupe et de corps, ainsi que ce qu'on appelle la "théorie de Galois" qui relie ces deux notions.

On sait que les mémoires de Galois ne furent publiés qu'en 1846 par Liouville. Répondant complètement à une question qui avait arrêté les mathématiciens pendant 200 ans, il semble qu'ils auraient dû aussitôt susciter de nouvelles recherches développant les idées qu'ils contenaient. S'il n'en a rien été, c'est sans doute que le style de Galois, étonnamment "moderne" par l'absence presque complète de calculs explicites et qui nous paraît maintenant d'une parfaite limpidité dans sa concision, déroutait ses contemporains qui le considéraient comme trop "abstrait". Toujours est-il que jusqu'en 1860 les rares publications sur les groupes se bornent à exposer les résultats de Cauchy et de Galois sans rien y ajouter de substantiel ; c'est seulement ensuite que la situation s'est modifiée et que l'influence des travaux de Galois n'a cessé de s'amplifier pendant toute la fin de XIX[e] siècle. Nous nous bornerons à indiquer les directions les plus élémentaires dans lesquelles cette influence s'est fait sentir.

Groupes. — Le concept de groupe de permutations d'un nombre fini d'objets (sans l'usage du terme "groupe" qui n'est introduit que par Galois) est dû à Cauchy (1813) et dès cette époque il avait démontré quelques théorèmes généraux sur ces groupes et leurs sous-groupes ; il devait seulement y revenir en 1845, introduisant de nouvelles notions, telles que celles de groupe transitif et de groupe primitif (*) ; c'est aussi dans ce travail qu'il prouve que si un nombre premier p divise l'ordre d'un groupe fini G, G contient un élément d'ordre p, première étape vers le théorème de Sylow (**). Mais le progrès décisif, aussi bien pour l'étude "abstraite" des groupes que pour celle de leurs applications, a été l'introduction par Galois de la notion de sous-groupe *distingué* (ou invariant), et celle de groupe simple (***) qui s'en déduit.

(*) Un groupe G de permutations de n objets est dit *primitif* s'il n'est pas possible de partager les n objets en $m > 1$ sous-ensembles tels que toute permutation de G transforme chacun de ces sous-ensembles en un autre.

(**) Le théorème de Sylow (1872), qui généralise le résultat de Cauchy, dit que si l'ordre de G est de la forme $p^m r$, où p est premier et ne divise pas r, il y a dans G un sous-groupe d'ordre p^m, et tous ces sous-groupes sont conjugués; Galois connaissait ce résultat mais n'en a pas laissé de démonstration.

(***) Un groupe est dit *simple* s'il ne contient pas de sous-groupe distingué autre que lui-même et le groupe réduit à l'élément neutre.

Il est immédiat que pour tout groupe fini G, il y a une suite strictement décroissante de sous-groupes

$$(1) \qquad G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$$

où chaque G_{i+1} est distingué dans G_i, et les groupes quotients G_i/G_{i+1} sont tous simples ; en outre, il peut y avoir plusieurs suites de ce type qui sont différentes, mais les groupes simples G_i/G_{i+1} sont toujours les mêmes à l'ordre près (théorème de Jordan-Hölder). Si on veut classifier les groupes finis, il est donc naturel d'essayer de commencer par trouver tous les groupes simples. C'est un problème qui a débuté avec Galois lui-même, et qu'il a fallu exactement 150 ans et une masse colossale de travaux pour résoudre : depuis 1981, on sait décrire explicitement tous les groupes simples (*).

Le théorème de Cauchy rappelé plus haut montre que les seuls groupes simples commutatifs sont les groupes cycliques d'ordre premier. Le groupe simple non commutatif le plus petit fut découvert par Galois, c'est le groupe alterné A_5 des permutations paires de 5 objets, d'ordre 60, et son raisonnement montre que tous les groupes alternés A_n sont simples pour $n > 5$. Dans sa recherche des groupes des équations irréductibles de degré premier p, il avait introduit, pour tout $n \geqslant 2$, le groupe projectif unimodulaire que nous notons maintenant $\mathbf{PSL}(n, \mathbf{F}_p)$, quotient par son centre du groupe des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients dans le corps premier $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (ou, comme on disait alors, entiers modulo p), et de déterminant 1 (**). Jordan montra que ces groupes sont tous simples; il obtint aussi plusieurs autres séries de groupes de matrices à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, qu'on appelle maintenant "groupes classiques" et dont les plus connus sont les groupes orthogonaux; puis Dickson, vers 1900, généralisa les résultats de Jordan en y remplaçant $\mathbf{F}_p$ par un corps fini quelconque (***).

Ces groupes "classiques" finis se définissaient curieusement par les mêmes équations que les groupes de Lie simples, dits aussi "classiques", qui sont des groupes de matrices à éléments complexes, en remplaçant les nombres complexes par des éléments d'un corps fini ; et Dickson avait même montré qu'on obtenait encore des groupes simples finis en opérant de même sur deux des 5 groupes de Lie simples "exceptionnels" (ceux de dimension 14 et 78). Cette coïncidence resta inexpliquée jusqu'en 1955, date à laquelle Chevalley étendit à tous les groupes de Lie simples,

(*) Cf. Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 334, p. 459.

(**) Pour $n = 2$, ce groupe peut aussi se définir comme celui des transformations homographiques $z \longmapsto (az+b)/(cz+d)$, où a,b,c,d sont des entiers modulo p et $ad - bc = 1$.

(***) Un corps fini $\mathbf{F}_q$ a un nombre d'éléments q qui est une puissance p^m d'un nombre premier; leur découverte est due en substance à Gauss (qui ne publia pas ses résultats) et (indépendamment) à Galois; on désigne souvent leurs éléments sous le nom d'"imaginaires de Galois".

par un raisonnement général (et non plus en examinant séparément chaque groupe par une méthode *ad hoc*), cette correspondance avec des groupes finis simples. Les séries de groupes simples finis provenant ainsi des groupes de Lie sont maintenant appelés groupes de Chevalley, ou groupes du type de Lie.

Mais dès 1860, E. Mathieu avait découvert 5 groupes simples finis qui n'étaient isomorphes, ni à des groupes alternés, ni à des groupes du type de Lie. Un siècle plus tard, on crut un moment qu'avec ces groupes on avait épuisé la liste de tous les groupes simples ; mais entre 1965 et 1980 on découvrit, par des procédés très variés, 21 autres groupes simples (dont le plus grand est d'ordre $>10^{53}$), ne rentrant dans aucune série, si bien que l'optimisme de 1960 fit place à la crainte qu'il existât peut-être encore bien des groupes simples, peut-être même une infinité. Mais finalement, ce pessimisme s'est trouvé injustifié, et par un travail herculéen, auquel ont contribué plus de 20 mathématiciens, et qui actuellement occupe environ 10000 pages (*), on est arrivé (si aucune erreur n'a été commise) à montrer qu'il n'y a pas d'autre groupe simple fini que ceux des séries connues et les 26 groupes (dits "sporadiques") qui n'y figurent pas.

En vue d'obtenir son critère de résolubilité d'une équation par radicaux, Galois avait d'autre part considéré le cas où, dans la suite (1), les quotients G_i/G_{i+1} sont cycliques d'ordres premiers; on dit alors que le groupe G est ***résoluble***. Jordan (qui doit être considéré comme le continuateur direct de Galois et le "pape" de la théorie des groupes dans le dernier tiers du XIX^e siècle) fit une étude approfondie de ces groupes. Depuis lors, on a surtout étudié le cas des groupes d'ordre une puissance p^k d'un nombre premier, qu'on appelle *p-groupes*; ils sont toujours résolubles, par exemple en vertu d'un théorème de Burnside d'après lequel tout groupe dont l'ordre ne comporte que 2 facteurs premiers au plus est résoluble.

Bien entendu, tous ces résultats n'ont pu être obtenus que par la création et l'emploi de nombreuses techniques nouvelles, auxquelles on ne pouvait songer au temps de Galois ou de Jordan ; un des résultats les plus profonds et les plus utiles est le théorème de Feit-Thompson, d'après lequel tout groupe d'ordre *impair* est résoluble.

Corps.— La notion de corps n'apparaît pas explicitement dans les mémoires de Galois, car elle suppose l'usage d'un langage "ensembliste" qu'on n'emploie pas encore à cette époque. Mais pour Galois (et déjà avant lui pour Abel), la conception que recouvre ce mot est tout à fait claire : ils parlent d'éléments qui sont "fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues". Ils conçoivent clairement aussi ce qu'est un polynôme *irréductible* P : cela signifie pour eux que P ne peut pas s'écrire comme produit P_1P_2 de deux polynômes non constants, dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de P. Enfin, ils savent que si, en outre des coefficients de P, on considère d'autres nombres comme "quantités connues", un polynôme irréductible P peut se décomposer en produit de polynômes dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de P et de ces nouvelles "quantités connues" ; c'est ce que nous appelons maintenant le passage d'un corps à une *extension* de ce corps par adjonction de nouveaux éléments.

Théorie de Galois.— Ce sont là les idées qui sont à la base du théorème de Galois sur la résolubilité des équations par radicaux. A un polynôme P dont les coefficients appartiennent (dans notre langage) à un corps infini K, et irréductible sur K, dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, Galois associe d'abord un élément

$$(2) \qquad V = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$$

où les α_j sont dans K, et choisis de sorte que les $n!$ éléments obtenus par toutes les permutations des x_j dans l'expression de V soient tous distincts. Un résultat de Lagrange montre que chaque x_j s'exprime sous la forme

$$(3) \qquad x_j = f_j(V)$$

où f_j est un polynôme à coefficients dans K. Si alors $V_1 = V, V_2, \ldots, V_m$ sont les conjugués de V (racines du polynôme irréductible sur K dont V est une racine), on a $P(f_j(V)) = 0$, donc aussi $P(f_j(V_h)) = 0$ pour $1 \leqslant h \leqslant m$, autrement dit chaque V_h définit une permutation

$$(4) \qquad \sigma_h : (f_1(V), \ldots, f_n(V)) \longmapsto (f_1(V_h), \ldots, f_n(V_h))$$

des racines de P; c'est le groupe formé par *ces* permutations-là qui est le *groupe de Galois* de P (ou de l'équation $P=0$), et on a

$$(5) \qquad V_h = \alpha_1\sigma_h(x_1) + \alpha_2\sigma_h(x_2) + \ldots + \alpha_n\sigma_h(x_n) \ .$$

Cette méthode générale conduit à des calculs inextricables lorsqu'on veut déterminer le groupe de Galois d'un polynôme explicitement donné. Un sujet de recherche qui se développa de 1830 à 1880 environ consista à obtenir par des méthodes plus efficaces le groupe de Galois de diverses équations algébriques particulières qui se présentaient en Analyse ou en Géométrie. Galois lui-même (sans publier de démonstration) détermina ainsi le groupe de l'équation modulaire, une des notions importantes de la théorie des fonctions elliptiques, très étudiée à cette époque ; ses travaux furent poursuivis notamment par Kronecker et Klein. Jordan se distingua dans ce domaine, déterminant entre autres des suites de composition (1) pour les groupes de Galois d'équations célèbres, telles que celles qui déterminent les 27 droites d'une surface cubique, ou les 28 bitangentes d'une quartique plane, ou encore les 16 points singuliers d'une surface de Kummer.

Mais à partir de 1855 environ, le point de vue commence à changer avec Kronecker et Dedekind, qui introduisent et manient la notion de corps (*) dans leurs travaux d'Algèbre et de Théorie des nombres. Au lieu de considérer un polynôme P à coefficients dans un corps K et irréductible sur K, on lui associe son *corps des racines* $N = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, engendré par adjonction à K des racines de P ; cela a l'avantage

(*) Comme dans plusieurs cas analogues, il faut espérer qu'on arrivera à obtenir des démonstrations plus simples.

(*) Kronecker désigne un corps sous le nom de "domaine de rationalité".

de travailler sur un objet plus intrinsèque, car plusieurs polynômes différents peuvent avoir même corps des racines. Ces corps sont appelés *extensions galoisiennes* de K ; ils contiennent les conjugués sur K de chacun de leurs éléments. Avec les notations ci-dessus, $N = K(V)$; N est aussi engendré par chacun des conjugués $V_2, \ldots, V_m$ de V et est de degré m sur K ; en outre l'application $F(V) \longmapsto F(V_h)$ (où F parcourt les polynômes à coefficients dans K) est un *automorphisme* du corps N laissant invariants les éléments de K et se réduisant à la permutation σ_h dans l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, de sorte qu'on peut le noter aussi σ_h. Le groupe de Galois de P, formé des σ_h, s'identifie donc au groupe de tous les automorphismes du corps N qui laissent invariants les éléments de K ; on dit donc que c'est le *groupe de Galois de l'extension galoisienne* N de K, et de nouveau on a affaire à une notion intrinsèque, indépendante de la définition de N par un polynôme particulier.

Dans cette optique, le *théorème fondamental* de la théorie de Galois est le suivant : si Γ est le groupe de Galois d'une extension galoisienne N de K, on définit une application *bijective* de l'ensemble des corps L tels que $K \subseteq L \subset N$ (dits corps intermédiaires entre K et N) et l'ensemble des sous-groupes de Γ en faisant correspondre à tout corps intermédiaire L le groupe de Galois de N sur L.

La fin du XIX^e siècle voit aussi se terminer l'influence directe des idées de Galois, relayées par de nouvelles notions et de nouvelles techniques qu'il ne pouvait prévoir : avec Jordan, Lie et Klein, ce sont les groupes infinis qui entrent en scène ainsi que leurs liaisons avec l'Analyse et la Géométrie, en attendant que l'idée générale de groupe, avec toutes ses variantes (groupes topologiques, groupes de Lie, groupes algébriques, schémas en groupes, groupes formels), n'envahisse toute la mathématique actuelle et la physique théorique, accompagnée des idées fondamentales de représentation linéaire et d'invariant. Aux corps "classiques" (sous-corps de $\mathbb{C}$) que connaissaient Galois et ses successeurs immédiats viennent s'ajouter une foule d'autres (corps de caractéristique quelconque, corps locaux, corps de séries formelles) dont l'étude générale fait apparaître de nouveaux phénomènes comme l'inséparabilité et de nouvelles notions comme celle de dérivation.

Mais on peut dire que la théorie de Galois n'a cessé, de façon indirecte, de fasciner et d'inspirer les mathématiciens : en donnant l'exemple d'une manière canonique d'associer, à des objets mathématiques d'une certaine nature, comme les corps, des objets d'une autre nature, comme les groupes, elle a servi de modèle dans des théories diverses (revêtements, équations différentielles algébriques, Théorie des nombres algébriques), et il n'est peut-être pas exagéré d'y voir le premier exemple de la notion de *foncteur*.

Résolubilité des équations par radicaux et premier mémoire d'Evariste Galois

par Amy DAHAN-DALMEDICO.

Ce qu'on appelle la Théorie de Galois est aujourd'hui un chapitre classique des mathématiques. Du point de vue historique et épistémologique, elle a donné lieu à de nombreuses études dont nous citons quelques-unes dans notre bibliographie.

Quant aux écrits d'Evariste Galois lui-même ils tiennent en très peu de pages qui restent difficiles d'accès. La plupart des commentateurs se sont d'ailleurs tenus éloignés du texte original, le jugeant trop peu clair (*).

Or la personnalité, la trajectoire d'Evariste Galois sont suffisamment singulières et attachantes pour qu'on éprouve le désir de se confronter à ses écrits ; non seulement sa cinglante Préface écrite à la prison Sainte-Pélagie ou sa lettre sur l'Enseignement des Sciences mais aussi ses textes mathématiques.

Evariste Galois pensait que la vérité de la science ne devait pas se présenter comme un ordre achevé et immuable mais plutôt dans le mouvement de l'invention toujours inachevée sans cesse rectifiée. Sur un point au moins, cette exigence a été entendue : l'édition critique intégrale de ses écrits (par R. Bourgne et J.P. Azra) permet le contact exceptionnel avec l'œuvre vécue, vivante du jeune mathématicien, telle qu'elle a été déchiffrée dans ses manuscrits, non séparés des ébauches, des tâtonnements de la naissance, des hésitations de l'invention, marquée par les circonstances impitoyables de sa vie. Cette édition constitue un exemple absolument unique et priviligié d'œuvre mathématique non divorcée de son auteur qui n'a pas pu et pas voulu s'effacer de ses travaux.

Nous nous sommes donc fixé comme objectif de faciliter la lecture directe de Galois, au moins celle du "Premier Mémoire" de 1831, refusé par Poisson.

Pour cela, après avoir dans un premier temps retracé les grandes lignes de l'histoire de la résolubilité des équations par radicaux, nous proposons une lecture du Mémoire, très proche des termes mêmes de Galois, que nous avons quelquefois traduits dans la formulation contemporaine que permet la théorie profonde sous-jacente telle qu'elle s'est révélée par phases successives jusqu'à Artin près d'un siècle plus tard.

Ce parti pris, inévitablement un peu lourd et filandreux, suscitera — nous l'espérons — un mouvement vers l'œuvre de Galois elle-même ; car comme le dit si bien R. Bourgne : "*ce qu'elle apporte c'est ce qu'aucun exposé doctrinal n'apportera; car c'est la marque du créateur que de dire ce que personne ne dira comme il le dit, tant il est vrai que l'eau aura toujours un autre goût à sa source que dans une cruche*".

(*) C'est en particulier le cas de Verriest au début du siècle dont l'analyse sert de trame à bien d'autres analyses ultérieures, notamment celle de M. Kline et celle, très profonde, de J. Vuillemin.

Première partie : La problématique de la résolubilité des équations par radicaux

INTRODUCTION

A l'origine — chez les Babyloniens et les Grecs — l'algèbre ne se distingue guère de l'arithmétique, ellemême dans un état très primitif. Puis, très lentement, le processus historique d'élaboration des règles du calcul algébrique abstrait — calcul portant sur des expressions contenant une inconnue — mûrit et se développe, très lié à celui de l'élaboration de l'arithmétique. L'objet presque exclusif de cette discipline reste jusqu'au début du XIX[e] siècle, les équations.

La théorie des équations du second degré, du moins dans l'ensemble des rationnels positifs, est acquise dans le *Précis sur le calcul de al-jabr et almuquabala* d'Al Khwarizmi (1ère moitié du IX[e] siècle).

Puis la résolution des équations du troisième degré arrête les mathématiciens très longtemps. Ibn Al-Haythan, Al-Khayyam (XI[e] siècle) et d'autres tentent surtout la construction géométrique des racines des équations du 3[e] degré, en particulier par l'intersection de deux coniques.

Enfin au cours du XVI[e] siècle, les algébristes italiens de la Renaissance — Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Bombelli — donnent les formules de résolution par radicaux des équations des 3[e] et 4[e] degrés.

Pendant plus de deux siècles, les mathématiciens chercheront toujours des méthodes de résolution des équations de degré quelconque. Faute de les trouver, ils étudient des méthodes de résolution numérique, règles pour séparer les racines, trouver le nombre des racines réelles (Descartes, puis Stirling et De Gua au XVIII[e] siècle), règles pour déterminer les signes des racines, méthodes d'approximation de Newton, de Lagrange, etc.

Mais la résolution algébrique des équations de degré supérieur à quatre, c'est-à-dire le fait de trouver une expression algébrique composée avec les coefficients d'une équation donnée et qui, substituée à l'inconnue, satisfasse identiquement à cette équation, reste un point noir crucial de la théorie des équations.

Les premières tentatives sérieuses de résolution viennent de la part d'un ami de Leibniz, Tchirnhaus (1651-1708) qui s'efforce en 1689 de ramener toute équation algébrique, par un certain changement de variable, à une équation binôme de la forme $x^n - C = 0$, que Cotes et De Moivre avaient résolue par division des arcs, c'est-à-dire :

$$x_k = C^{1/n} (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}) .$$

Tchirnhaus part de l'équation de degré n , $P(x) = 0$, et pose $y = Q(x)$, où Q est un polynôme de degré $n - 1$ à coefficients indéterminés. Il élimine x entre les deux équations :

$$P(x) = 0$$

et
$$Q(x) - y = 0$$

et cherche à déterminer les coefficients du polynôme Q de façon à faire disparaître de l'équation résultante en y , certains ou tous les termes intermédiaires. La méthode réussit fort bien pour $n = 3$, mais pour $n = 5$ la recherche des coefficients de Q conduit à une équation du 24e degré qui ne peut s'abaisser. Euler et Bezout étudieront le même problème au XVIIIe siècle par des procédés assez voisins mais en ne progressant guère.

En 1770, paraissent deux mémoires très importants de Van der Monde et Lagrange sur le sujet. Ils mettent fin à la période de recherche plus ou moins empirique des méthodes de résolution. Celui de Lagrange surtout aura une influence considérable sur les fondateurs de la nouvelle algèbre.

LE MÉMOIRE DE LAGRANGE

''*Je me propose,* déclare Lagrange, *d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le 3e et le 4e degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs*''.

L'analyse de Lagrange porte davantage sur les méthodes que sur les équations ; il examine toutes les tentatives de ses prédécesseurs Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Descartes, Tchirnhaus, Euler, De Moivre, établit le bilan systématique de leurs entreprises puis compare les méthodes entre elles afin d'en déduire leur portée et leurs limites.

Au terme de cet examen, Lagrange montre qu'elles reviennent toutes au fond à faire dépendre la résolution de l'équation proposée de celle d'une autre équation auxiliaire — la ''*réduite*'' — dont les racines y_k sont composées linéairement des racines x_h de l'équation donnée et des puissances d'une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Ces expressions $y_k = \sum_{h=1}^{n} w_k{}^h x_h$, $1 \leqslant k \leqslant n$ où w_k prend successivement comme valeurs celles des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, sont appelées les *résolvantes de Lagrange.* On aura évidemment progressé dans la résolution de l'équation initiale si l'équation auxiliaire obtenue peut s'abaisser à un degré inférieur à celui de la proposée.

Lagrange montre clairement que la résolubilité de l'équation cubique est liée à l'existence d'une fonction de trois variables, ne prenant que deux valeurs distinctes par permutation de ces variables au lieu des six valeurs que l'on pouvait théoriquement prévoir puisqu'il y a six permutations possibles de trois objets. En effet, si l'équation du 3e degré a pour racines x_1, x_2, x_3 , l'expression $(x_1 + w\,x_2 + w^2x_3)^3$ où w est une racine cubique non réelle de l'unité ne prend que deux valeurs qui sont $(x_1 + wx_2 + w^2x_3)^3$ et $(x_1 + w^2x_2 + wx_3)^3$ par permutation des lettres ; l'équation auxiliaire réduite est ici une équation du second degré ayant pour racines les deux résolvantes $x_1 + wx_2 + w^2x_3$ et $x_1 + w^2x_2 + wx_3$.

Quand on passe au cas de l'équation du 4e degré, la situation est analogue : la résolubilité par radicaux est liée à l'existence d'une fonction de quatre variables et ne prenant que trois valeurs distinctes par permutation de ces variables ; il s'agit ici de l'expression $\frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_3 x_4)$. Dans la méthode de Ferrari, ces trois valeurs distinctes sont les racines de la réduite qui est du 3e degré. Dans les méthodes de Descartes et de Tchirnhaus, la réduite est du 6e degré mais s'abaisse immédiatement au troisième.

Ensuite, dans un deuxième moment de son mémoire, Lagrange montre que les racines de l'équation initiale s'expriment comme fonctions rationnelles des racines de l'équation auxiliaire (c'est-à-dire les résolvantes) et des coefficients de l'équation initiale. Cela permet à Lagrange de ne pas se satisfaire de l'analyse a posteriori des méthodes existantes mais de reconstruire par un procédé direct et a priori, les équations auxiliaires réduites en utilisant les propriétés des résolvantes et des racines primitives de l'unité. Il montre qu'au-delà du 4e degré, l'équation auxiliaire est de degré supérieur à celui de l'équation initiale donnée et ne paraît pas susceptible d'abaissement.

Les conclusions auxquelles aboutit Lagrange ne sont donc pas définitives. Du moins éviteront-elles des tentatives inutiles. Il conclut : ''*Si la résolution algébrique des équations de degrés supérieurs au quatrième n'est pas possible, elle doit dépendre de quelques fonctions des racines, différentes de la précédente*''. De plus ces résultats ont permis de ''*donner à cette occasion les vrais principes et pour ainsi dire la vraie métaphysique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré*''.

Chemin faisant, Lagrange a démontré les premières propositions que l'on peut rattacher à la théorie des groupes :

— d'une part : le nombre des valeurs distinctes que peut prendre une fonction de n variables par permutation de ces variables, est un diviseur de $n!$; ceci, avec le même raisonnement que l'on suit aujourd'hui pour montrer que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. En effet $n!$ est l'ordre du groupe symétrique S_n de toutes les permutations de n lettres et le nombre des valeurs distinctes est l'indice dans S_n du sous-groupe des permutations qui laissent la fonction inchangée.

— d'autre part un théorème profond sur les fonctions ''semblables'' de racines, qu'on peut rattacher à la future théorie de Galois. De quoi s'agit-il ? : quand une fonction donnée de n lettres ne change pas quand on y effectue une certaine substitution, on dit que cette fonction *admet* cette substitution ; et deux fonctions de n lettres seront dites *semblables* si les groupes de substitutions laissant les deux fonctions invariantes sont identiques.

La première proposition de Lagrange affirme que si une fonction $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ des racines d'une équation de degré n admet toutes les substitutions admises par une autre fonction $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ de ces racines (et éventuellement d'autres que ψ n'admet pas), alors la fonction ϕ peut s'exprimer rationnellement par la fonction ψ et les coefficients de l'équation.

En particulier si ϕ et ψ sont semblables, chacune s'exprime rationnellement en fonction de l'autre et des coefficients de l'équation. La démonstration donnée par Lagrange fournit en même temps une méthode pour construire l'expression de ϕ en fonction de ψ.

La seconde proposition de Lagrange (dont la première devient un cas limite avec $r = 1$) dit que si une fonction $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ des racines d'une équation n'admet pas toutes les substitutions admises par une fonction $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ mais si elle prend, par les substitutions qu'admet ψ, r valeurs distinctes, alors ϕ est racine d'une équation de degré r dont les coefficients sont des expressions rationnelles de ψ et des coefficients de l'équation initiale donnée.

La méthode de Lagrange, quand il utilise ces théorèmes, revient à construire une suite de fonctions des racines $x_1, ..., x_n$, dont la première ϕ_0 doit être une fonction symétrique (par exemple l'une des fonctions symétriques élémentaires égales à un coefficient de l'équation) et dont la dernière est une racine, par exemple x_1 ; ainsi :

$$\phi_0(x_1, ..., x_n),\ \phi_1(x_1, ..., x_n),\ \phi_2(x_1, ..., x_n),\ ......,\ \phi_{k-1}(x_1, ..., x_n),\ \phi_k(x_1, ..., x_n) = x_1$$

ϕ_0 admet les n! substitutions. ϕ_1 n'en admet qu'un certain nombre et donc prend par ces n! substitutions r valeurs distinctes ; ϕ_1 sera donc racine d'une équation de degré r dont les coefficients sont des expressions rationnelles de ϕ_0 et des coefficients de l'équation initiale donnée; de même ϕ_2 prend s valeurs distinctes par les substitutions qu'admet ϕ_1 et sera donc racine d'une équation de degré s dont les coefficients sont des expressions rationnelles de ϕ_1 et des coefficients de l'équation initiale donnée. Ces coefficients seront donc connus dès que l'équation de degré r dont ϕ_1 est racine, est résolue.

On continue ainsi de proche en proche jusqu'à former une équation dont la dernière fonction $\phi_k = x_1$ est racine. On obtient ainsi une série de k équations auxiliaires et si par exemple on peut choisir $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ en sorte qu'elles soient toutes racines d'équations binômes, on aura résolu algébriquement l'équation initiale proposée. Mais pour l'équation du 5e degré, Lagrange ne réussit pas à trouver des fonctions ϕ qui donnent lieu à des équations auxiliaires binômes. En fait, ces théorèmes anticipent l'idée galoisienne de suite de composition.

Le Mémoire de Lagrange remarquable par sa construction et sa démarche, représente un bilan méthodologique de toutes les recherches algébriques antérieures. Si la question centrale reste la solution des équations, bien des notions nouvelles et profondes relatives à la théorie des substitutions y affleurent.

RÉSOLUBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^{17} - 1 = 0$

En 1801, paraissent les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, admirable œuvre de jeunesse qui constitue l'acte de naissance de la théorie moderne des nombres et détermine ses directions principales jusqu'à nos jours. Cet ouvrage est très riche de nombreuses structures implicites qui y sont à l'œuvre.

Mais c'est surtout la dernière section consacrée à la constructibilité à la règle et au compas du polygone régulier à 17 côtés qui nous intéresse ici. En effet, déjà Van der Monde avait étudié la résolubilité par radicaux des équations $x^p - 1 = 0$, dites cyclotomiques ou de division du cercle. On a vu que leurs racines s'écrivent

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p},\ k = 0, 1, 2, ..., p-1 ;$$

mais une telle solution trigonométrique n'est pas forcément algébrique. Van der Monde avait résolu l'équation $x^{11} - 1 = 0$, mais son mémoire, difficile à suivre, n'a pas eu d'impact immédiat.

Gauss, lui, applique brillamment la même idée de méthode que celle de Van der Monde au cas de l'équation $x^{17} - 1 = 0$. La proposition qui se trouve à la base du raisonnement est la suivante : si les fonctions symétriques de n variables sont dans un corps donné K, alors ces n variables sont racines d'une équation à coefficients dans ce corps.

Si $r = e^{2i\pi/17}$, les racines de l'équation s'écrivent : $1, r, r^2, ..., r^{16}$

et l'on a $1 + r + r^2 + ... + r^{16} = 0$.

L'idée est de trouver des sous-sommes disjointes $\sigma_1, \sigma_2 ..., \sigma_e$ (avec $e < 17$) de la somme des racines, de façon que les fonctions symétriques des σ_i soient toutes rationnelles. D'après la proposition que l'on vient d'énoncer, les σ_i seront racines d'une équation de degré $e < p$, à coefficients rationnels. On considère ensuite comme connues ces quantités σ_i — Galois dira justement qu'on les a "*adjointes*" au corps des coefficients rationnels — et on essaie de trouver des sous-sommes disjointes $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{e'}$, de certaines des σ_i dont les fonctions symétriques peuvent s'exprimer comme fonctions rationnelles de $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_e$. Dans ce cas, les τ_i seront racines d'une équation de degré e', dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des σ_i. Et on répètera le processus en considérant cette fois connues les τ_i. L'idée est d'aboutir à des sous-sommes w_i réduites éventuellement à un seul terme, et donc racines de l'équation initiale, mais qui soient racines d'une équation de degré inférieur à p et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des sous-sommes précédentes.

Gauss utilise des propriétés arithmétiques finies pour effectuer la division en sous-sommes successives et résout l'équation $x^{17} - 1 = 0$ au moyen de quatre équations quadratiques successives ; ainsi les racines sont dans une extension de Q de degré 2^4 et donc sont constructibles à la règle et au compas.

Nous verrons que le procédé de Gauss, lui aussi, contient dans un cas particulier et de manière implicite l'idée galoisienne de suite de composition du groupe d'une équation.

LES PREMIERS TRAVAUX DE CAUCHY SUR LES SUBSTITUTIONS

En 1815, le jeune Augustin-Louis Cauchy publie deux mémoires dans lesquels il traite du problème suivant, issu de la théorie des équations : chercher le *Nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*. C'est d'ailleurs le titre du premier mémoire. Cauchy démontre que pour une fonction de n lettres, ce nombre ne peut être inférieur à n, prouvant définitivement qu'il ne fallait donc pas espérer trouver une fonction de 5 lettres prenant moins de 5 valeurs distinctes (sauf si elle en prenait 2) ; la problématique de Lagrange conduisait donc à une impasse dans le cas de l'équation du 5e degré.

Mais surtout, alors que Lagrange ne possédait aucune notation maniable pour la notion de permutation, et que sur ce point son exposé est très fastidieux à suivre, Cauchy invente une notation en deux lignes pour les substitutions, l'image de toute lettre se lisant sur la deuxième ligne en dessous de cette lettre ; notation qu'il abrège encore en $\binom{A}{B}$. Cette notation est déjà significative car elle permet une manipulation algébrique sans appel aux lettres elles-mêmes et conduit à la définition du produit de deux substitutions, à la notion d'ordre d'une substitution comme étant la plus petite puissance d'une substitution $\binom{A}{B}$ telle que $\binom{A}{B}^n$ soit l'identité. Cauchy étudie ce que nous appelons le groupe cyclique engendré par une substitution donnée d'ordre n. Mais il n'y a pas encore de notion générale d'un ensemble de substitutions fermé pour la loi du produit, ce que Galois appellera groupe ou que Cauchy nommera plus tard, en 1844, système de substitutions conjuguées.

Abel et Galois liront ce mémoire de Cauchy qui jette les bases d'une théorie autonome des substitutions et lui emprunteront plusieurs éléments, dont le résultat central.

ABEL ET L'IRRÉSOLUBILITÉ DE L'ÉQUATION DU 5e DEGRÉ

L'impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieur ou égal à cinq, fut finalement démontrée en 1826 par le jeune mathématicien norvégien Niels Heinrik Abel (1802-1829) dans un mémoire très technique et calculatoire, bien dans la tradition du XVIIIe siècle.

Puisque résoudre algébriquement une équation c'est exprimer ses racines par des fonctions algébriques des coefficients, Abel commence par une recherche de la forme générale des fonctions algébriques qu'il classifie très minutieusement suivant le nombre de radicaux qu'elles contiennent et leur agencement dans l'expression.

Puis Abel examine à quelles conditions doit satisfaire par sa nature une équation résolue algébriquement, c'est-à-dire qui admet comme racine une fonction algébrique, déterminée et classifiée précédemment. Et cette deuxième question se précise : quelles sont les relations qui existent en cas de résolubilité d'une équation entre une racine et les autres ?

Abel aboutit au fait que, dans ce cas, on peut toujours "*donner à la racine une forme telle que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée puissent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée*". Au terme d'un très long calcul, Abel prouve que toute expression rationnelle de cinq quantités qui prend cinq valeurs distinctes, doit être de la forme

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4$$

où les r_i sont des expressions symétriques de ces cinq quantités et x l'une d'elles. Il peut enfin conclure à l'irrésolubilité par radicaux de l'équation générale du 5e degré.

Le mémoire d'Abel relativement ancien dans sa technique et dans sa forme, résolvait néanmoins une question que se posaient les géomètres depuis des siècles, et ouvrait de nouvelles voies de recherches : caractériser les classes d'équations résolubles. Abel devait lui-même étudier les équations qui proviennent de la division de la lemniscate, par analogie avec les équations cyclotomiques, qui sont équivalentes à la division du cercle en n arcs égaux. et aboutir aux équations dites abéliennes, qui sont résolubles par radicaux.

Avec ce mémoire, le long chapitre de l'algèbre classique se termine : en effet, la théorie des équations, sous sa forme traditionnelle, est pour l'essentiel épuisée.

Deuxième partie : L'écrit de Galois

Le problème essentiel traité par Galois est donc celui de la résolubilité des équations par radicaux, non seulement cette fois le cas de l'équation générale du 5e degré ou celle de degré n, mais son objectif est bien de déterminer un critère pour toutes les équations algébriques particulières. Nous allons suivre son Mémoire, en nous tenant le plus près de ses écrits, mais en faisant néanmoins appel à certains concepts explicitement absents de l'œuvre de Galois mais qui y fonctionnent largement. Précisons encore que la lecture de Galois n'est pas chose allant de soi : la rédaction est concise à l'extrême, les références sont laconiques, les raisonnements à peine esquissés ; d'ailleurs de nombreuses démonstrations lacunaires seront entièrement reconstruites par Camille Jordan. Enfin nous analyserons séparément les difficultés spécifiques liées aux aspects structuraux de la théorie des groupes.

Galois commence par éclaircir la notion de quantité *rationnelle* par rapport à d'autres quantités. Il la définit en ces termes : "*... on pourra convenir de regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle d'un certain nombre de quantités déterminées, supposées connues à priori ; par exemple, on pourra choisir une certaine racine d'un nombre entier, et regarder comme rationnelle, toute fonction rationnelle de ce radical.*

Lorsque nous conviendrons de regarder ainsi comme connues de certaines quantités, nous dirons que nous les ADJOIGNONS à l'équation qu'il s'agit de résoudre. Nous dirons que ces quantités sont ADJOINTES à l'équation.

Cela posé, nous appellerons RATIONNELLE toute quantité qui s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités ADJOINTES à l'équation et convenues arbitrairement.

Quand nous nous servirons d'équations auxiliaires, elles seront rationnelles si leurs coefficients sont rationnels en notre sens''.

Ces notions de quantité rationnelle et d'adjonction déjà entrevues dans le Mémoire de Van der Monde et surtout chez Gauss, sont ici tout à fait explicites et Galois approche par ce biais le concept de corps engendré par un ensemble de nombres algébriques. De plus, la considération des quantités adjointes relativise la notion de quantité rationnelle puisque les quantités adjointes sont traitées comme connues quoique irrationnelles. Galois souligne: ''*on voit au surplus que les propriétés et les difficultés d'une équation peuvent être tout à fait différentes suivant les quantités qui lui sont adjointes. Par exemple, l'adjonction d'une quantité peut rendre réductible une équation irréductible*''. Galois donne l'exemple de l'équation cyclotomique $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$ (avec p premier), irréductible sur le corps Q des rationnels. Mais si l'on adjoint à ce corps la racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité $(\theta = e^{2i\pi/p})$, elle se factorise en $(x-\theta)(x-\theta^2)\ldots(x-\theta^{p-1}) = 0$ et est donc réductible sur le corps $Q(\theta)$.

Ainsi, dès les premières lignes de son mémoire, la résolubilité d'une équation cesse pour Galois d'être un problème absolu qui appelle d'emblée une réponse définitive. Elle va être conçue comme un lien entre un certain être algébrique, l'équation, et son ''milieu'', le corps ou domaine de rationnalité auquel on la rapporte. La résolubilité devient relative à ce domaine.

Vient ensuite une série de lemmes préparatoires:

— Premièrement, il existe une fonction rationnelle V des racines qui prend des valeurs toutes distinctes quand on effectue sur les racines toutes les permutations possibles; Galois la détermine en prenant une combinaison linéaire des racines à coefficients entiers distincts. V étant choisie, toutes les racines de l'équation proposée sont fonctions rationnelles de V. Galois redémontre ce résultat à partir de propriétés de divisibilité de polynômes, mais il découle aussi de la première proposition de Lagrange sur les fonctions semblables, évoquée dans la première partie, comme devait d'ailleurs le noter Poisson, rapporteur du Mémoire. En langage actuel, on dit que V est l'élément primitif de l'extension/corps des racines, au dessus du corps des coefficients.

— Deuxièmement, soit $P = 0$ l'équation irréductible dont V est racine, que Galois suppose connue. Si $a = f(V)$ est une racine de l'équation initiale proposée, et si V' est une autre racine de $P = 0$, alors $b = f(V')$ sera aussi racine de l'équation proposée. Et la démonstration relève des mêmes idées que le précédent.

Ensuite Galois introduit le concept-clé de ''groupe de l'équation'': ''*soit une équation donnée dont a, b, ... sont les m racines... Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, ... qui jouira de la propriété suivante:*

1) que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe soit rationnellement connue;

2) réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par ces substitutions''.

Le groupe d'une équation de degré n sur un corps donné, qui est le plus petit corps contenant les coefficients, n'est donc pas le groupe de toutes les permutations entre les n racines — c'est-à-dire le groupe symétrique S_n d'ordre $n!$ — mais un sous-groupe de ce groupe, formé des substitutions qui laissent invariantes toutes les relations entre les racines, donc qui conservent les expressions polynômiales des racines dont la valeur appartient au corps de base K. En langage moderne, la première propriété de Galois définissant le groupe de l'équation exprime que le corps des coefficients est le corps des invariants du groupe G; la deuxième indique que les éléments de G définissent un groupe de K-automorphismes du corps des racines.

Considérons par exemple l'équation $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Elle peut se mettre sous la forme $(x^2-2)(x^2+1) = 0$ et ne peut pas se réduire davantage sur le corps Q. Elle admet quatre racines:

$x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = +i$, $x_4 = -i$.

On a les relations :

$x_1 x_2 = -2$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 x_4 = +1$, $x_3 + x_4 = 0$.

Le groupe de cette équation comprendra quatre substitutions seulement: l'identité, la substitution S qui échange x_1 et x_2 et laisse fixes x_3 et x_4, la substitution T qui échange x_3 et x_4 et laisse fixes x_1 et x_2 et la substitution ST qui échange à la fois x_1 et x_2 d'une part, x_3 et x_4 d'autre part. (En effet, la relation $x_1 + x_2 = 0$ ne serait pas conservée par une autre de ces substitutions).

Ainsi Galois se sert du groupe d'une équation comme d'un miroir dans lequel se reflètent les difficultés de résolution de celle-ci. Le groupe permet de mesurer ce que Verriest a, par la suite, appelé ''l'indiscernabilité'' des racines sur le corps. Sur notre exemple, par rapport au corps des coefficients qui est le corps des rationnels, les deux couples (x_1, x_2) et (x_3, x_4) sont indiscernables, et au sein de chaque couple les racines sont aussi indiscernables. Mais l'adjonction à Q de l'élément $\sqrt{2}$ détermine les racines x_1 et x_2, sans permettre de distinguer encore x_3 et x_4. Sur le corps $Q(\sqrt{2})$, le groupe de l'équation se réduit à l'identité et la substitution qui échange x_3 et x_4.

Mais d'une certaine façon cette analyse de la résolubilité d'une équation, par les extensions successives du domaine de rationalité qui vont de pair avec le procédé de décomposition du groupe en sous-groupes emboîtés, est une analyse a posteriori quand on suppose connues les racines.

Le problème que se pose Galois une fois la définition du groupe donnée, est d'examiner *a priori* comment peut se réduire le groupe de l'équation. Le centre d'intérêt se déplace donc de l'équation elle-même, vers son groupe.

Quand une équation n'est pas résolue, il n'existe pas de moyen de déterminer à coup sûr l'élément primitif du corps des racines. Dans les propositions II, III, IV du Mémoire, Galois envisage d'adjoindre "la racine r d'une équation auxiliaire irréductible $(R = 0)$ de degré premier", c'est-à-dire la valeur r numérique d'une certaine fonction rationnelle ϕ_1 des racines. Il énonce le théorème :

"*1°) Il arrivera de deux choses l'une: ou bien le groupe de l'équation ne sera pas changé; ou bien il se partagera en* p *groupes appartenant chacun à l'équation proposée quand on lui adjoint respectivement chacune des racines de l'équation auxiliaire;*

2°) Ces groupes jouiront de la propriété remarquable que l'on passera de l'un à l'autre en opérant dans toutes les permutations du premier une même substitution de lettres".

Quelle est la signification de ce théorème ?

Si on considère les substitutions de G (groupe de l'équation) qui n'altèrent pas la valeur numérique de la fonction rationnelle ϕ_1, soit il s'agit du groupe G lui-même et l'adjonction de r n'a pas rendu l'équation réductible et n'a rien fait avancer, soit elles forment un sous-groupe H_1 de G et l'adjonction de r a réduit précisément le groupe de l'équation à H_1.
G s'écrit : $H_1 + H_1 b + \ldots + H_1 k$ qu'on peut encore noter $\sum_{i=0}^{p-1} H_1 \sigma_i$.

L'équation $P(x) = 0$ devient réductible et s'écrit :

$$P(x) = f(x, r) \,.\, f(x, r_1) \ldots f(x, r_{p-1})$$

où chaque $r_i = \sigma_i r$.

$$\text{et} \quad f(x, r) = \prod_{\sigma \in H_1} (x - \sigma r)$$

En général, la décomposition de G en classes à gauche suivant H_1, ne coïncide pas avec celle en classes à droite.

Si l'on adjoint maintenant une autre racine r_i de l'équation $R = 0$, r_i s'écrit $\sigma_i r$ et le groupe de l'équation proposée se réduira au groupe des substitutions laissant fixe r_i, soit le groupe $\sigma_i H_1 \sigma_i^{-1}$ qui est un groupe conjugué de H_1 (c'est ce qu'exprime la condition 2°) du théorème de Galois). En effet on obtient les permutations de ce deuxième groupe en changeant V en $\sigma_i V$ dans celles du premier (cf. la troisième partie).

Ensuite Galois envisage (Proposition III) un autre mode de décomposition du groupe :
"*si l'on adjoint toutes les racines d'une équation auxiliaire, les groupes dont il est question jouiront de plus de la propriété que les substitutions sont les mêmes dans chaque groupe*". Or ce qui se passe dans ce cas, c'est que le groupe de l'équation devient le groupe des substitutions laissant fixes toutes les racines r_i d'une équation auxiliaire ;

G se réduit donc à $I = \bigcap_{\sigma_i \in G} \sigma_i H_1 \sigma_i^{-1}$ et un tel sous-groupe I est distingué dans G.

Galois insistera particulièrement dans sa lettre à Auguste Chevalier, sur la différence entre adjoindre à une équation une des racines d'une équation auxiliaire ou les adjoindre toutes simultanément. Seule, cette dernière façon fait apparaître un sous-groupe normal, ce que Galois nomme une "*décomposition propre*".

On peut démontrer, comme le feront Serret en 1866 dans son Cours d'Algèbre Supérieure (3e édition) ou C. Jordan que, dans le cas où l'équation auxiliaire irréductible est telle que ses racines sont exprimables rationnellement en fonction de l'une d'entre elles et de quantités connues, alors cette fois l'adjonction d'une racine ou celle de toutes les racines de cette équation auxiliaire sont équivalentes et réduisent le groupe G à un sous-groupe distingué de G. C'est d'ailleurs le cas quand l'équation auxiliaire est de la forme $x^p = A$ et que les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité ont été précédemment adjointes.

C'est ainsi que la question de la résolubilité de l'équation par radicaux se trouve posée, et la proposition V du Mémoire de Galois y répond en donnant un critère.

Galois va transcrire en termes de groupes l'idée énoncée par Abel que les solutions doivent être exprimables uniquement à l'aide des opérations d'addition, de multiplication et d'extraction de racine $p^{\text{ième}}$ (où l'on peut toujours supposer p premier car si $p = nq$ l'extraction d'une racine $p^{\text{ième}}$ est l'extraction successive de racines $q^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$). La condition s'énonce alors : par adjonctions successives de racines d'équations binômes, le groupe doit se réduire à l'identité car alors les racines sont "rationnellement" connues.

Si donc l'équation est soluble par radicaux, Galois considère p le plus petit nombre premier pour lequel une extraction de degré p réduit le groupe. Il remarque qu'on peut toujours supposer les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité déjà adjointes car ceci ne change pas le groupe de l'équation. D'après les propositions précédentes, Galois conclut que "*le groupe de l'équation devra se décomposer en* p *groupes jouissant les uns par rapport aux autres de cette double propriété: 1°) que l'on passe de l'un à l'autre par une seule et même substitution; 2°) que tous contiennent les mêmes substitutions*". Comme nous le détaillons dans la troisième partie, ceci veut dire qu'on a fait apparaître un sous-groupe H distingué et d'indice p dans G.

La réciproque de cette propriété est démontrée par Galois : s'il existe dans G un tel sous-groupe H, Galois utilise une résolvante de Lagrange pour construire effectivement une racine $p^{\text{ième}}$ dont l'adjonction réduira le groupe de G à H. Pour cela, Galois prend une fonction θ des racines invariantes par H et H seulement. Soit σ une substitution de G, n'appartenant pas à H. Soient :

$$\theta_1 = \sigma\theta \quad , \quad \theta_2 = \sigma^2 \theta, \ldots, \theta_{p-1} = \sigma^{p-1} \theta$$

et α une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

Galois considère la résolvante:

$$r = \theta + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \dots + \alpha^{p-1}\theta_{p-1} .$$

D'une part r est évidemment invariante par H, et d'autre part les substitutions de G qui ne sont pas dans H induisent une permutation circulaire sur $\theta, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}$, et donc multiplient r par une puissance de α et laissent invariante r^p.

Finalement r^p est invariante par toutes les substitutions de G et r^p est rationnellement connue. En adjoignant la quantité r, on réduit le groupe G de l'équation à un sous-groupe d'indice p dans G auquel on appliquera le même raisonnement.

La condition nécessaire et suffisante à laquelle aboutit Galois, mais qui n'a été explicitée que par Jordan, pour qu'une équation soit soluble par radicaux est que "*son groupe puisse être considéré comme dérivant d'une échelle de substitutions* $1, a, b, \dots, f, g$ *telles: 1) que chacune d'elles soit permutable au groupe dérivé des précédentes; 2) que la première de ses puissances successives qui sont contenues dans le dit groupe soit de degré premier*" (*).

Ceci traduit la condition appelée aujourd'hui de "résolubilité" pour le groupe de l'équation: il possède une suite de sous-groupes emboîtés

$$\{1\} \subset H_k \subset H_{k-1} \subset \dots \subset H_1 \subset G ,$$

chacun étant un sous-groupe distingué maximal dans le suivant, dont l'indice dans celui-ci soit un nombre premier.

EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THÉORIE DE GALOIS

Soit l'équation $x^4 - 3 = 0$; elle est irréductible sur le corps Q et elle admet les quatre racines distinctes r, ir, $-$r, $-$ir avec $i = \sqrt{-1}$ et $r = \sqrt[4]{3}$.

Le corps des racines ou corps de décomposition de l'équation est obtenu par adjonction à Q de deux quantités r et i, soit N = Q(r,i) qui est aussi obtenu par adjonction de l'élément primitif r + ir.

Tout élément de N s'écrit comme combinaison linéaire des 8 éléments suivants : $1, r, r^2, r^3, i, ir, ir^2, ir^3$.

Après l'injection des idées de linéarisation dans la théorie des corps, à partir des travaux de Dedekind jusqu'à ceux d'Artin, on considérera N comme un espace vectoriel de dimension 8 sur Q; on dira que N est une extension de degré 8 sur Q.

Les éléments du groupe de l'équation seront déterminés dès qu'on connaît l'image de i et celle de r. Or chacune de ces deux racines ne peut être appliquée que sur l'une de ses *"conjuguées"* (de façon générale, on dit que deux éléments u et v du corps N des racines sont *conjugués* sur Q si et seulement si u et v sont tous deux racines du même polynôme irréductible sur Q). Donc i ne peut donc être appliqué que sur +i et $-$i et r sur l'un des quatre éléments r, $-$r, ir, $-$ir.

En combinant ces conditions, il y a donc huit éléments dans le groupe de Galois G (huit automorphismes du corps N). Les voici déterminés par leurs effets sur les générateurs i et r :

	I	S	S^2	S^3	T	ST	S^2T	S^3T
Image de i	i	i	i	i	$-$i	$-$i	$-$i	$-$i
Image de r	r	ir	$-$r	$-$ir	r	ir	$-$r	$-$ir

On peut vérifier que ces automorphismes conservent les relations polynomiales $i^2 = -1$, $r^4 = 3$.

G contient le sous-groupe $H = \{I, S, S^2, S^3\}$ engendré par S qui lui-même contient le sous-groupe plus petit $L = \{I, S^2\}$ engendré par S^2. Chaque automorphisme du groupe H laisse i fixe ; il laisse donc fixe tout élément du sous-corps Q(i).

Le sous-groupe L plus petit est formé des automorphismes qui laissent fixes tous les éléments du sous-corps plus grand $Q(i, r^2)$. Ainsi à la chaîne descendante des sous-groupes $G \supset H \supset L \supset I$ correspond la chaîne ascendante des sous-corps $Q \subset Q(i) \subset Q(i,r^2) \subset Q(i,r) = N$.

La chaîne ascendante des sous-corps fournit une méthode de résolution de l'équation donnée, par adjonctions successives des racines d'équations plus simples $x^2 = -1$, $y^2 = 3$, $z^2 = \sqrt{3}$.

La dernière partie du Premier Mémoire de 1831 est consacrée aux équations irréductibles de degré premier et Galois donne la structure du groupe de l'équation quand celle-ci est soluble par radicaux : le groupe ne renferme que des substitutions de la forme (x_k, x_{ak+b}), les indices k et $ak+b$ étant pris modulo p. C'est ainsi que l'on voit apparaître une idée très chère à Galois qu'il appelle la présentation analytique des substitutions.

En effet, si une telle équation irréductible de degré p est soluble par radicaux, c'est qu'elle est résolue par l'adjonction d'un radical d'indice p égal à son degré, et donc le plus petit groupe avant l'identité qui intervient dans la décomposition, est d'ordre p. C'est donc le groupe cyclique G_1 des permutations circulaires d'ordre p des p racines.

Ces substitutions de G_1 sont de la forme (x_k, x_{k+c}), les indices étant pris modulo p. Ensuite Galois cherche à déterminer les groupes qui peuvent admettre ce sous-groupe comme sous-groupe normal. Il est intéressant de noter ici que du point de vue heuristique, c'est le sous-groupe qui apparaît en premier lieu et Galois cherche des normalisteurs possibles ; l'agilité dans la manipulation simultanée des deux notions est tout à fait remarquable. Soit alors G_2 le groupe précédant G_1 et τ une substitution de G_2, n'appartenant pas à G_1. τ est définie par une certaine fonction f. Pour toute substitution σ de G_1, $\sigma\tau\sigma^{-1}$ doit être dans G_1. Donc, il existe C indépendant de k, tel que

$$f(k + C) = f(k) + C$$

on peut alors déduire que $f(k) = ak + b$. Le seul groupe qui puisse admettre le groupe cyclique — formé des substitutions (x_k, x_{k+c}) — comme sous-groupe normal est le groupe formé des substitutions (x_k, x_{ak+b}). Et Galois indique qu'il faut raisonner sur ce sous-groupe comme sur le précédent.

L'idée de la notation $(x_k, x_{f(k)})$ pour désigner une substitution se trouvait déjà de façon très embryonnaire chez Cauchy en 1815. Mais Galois va très vite sur la façon de déterminer pour une substitution donnée, sa fonction caractéristique, qui nécessite l'appel à la formule d'interpolation de Lagrange.

En effet, si les valeurs de l'indice z sont les p nombres $0, 1, 2, ..., p-1$ et que ces mêmes nombres sont dans un ordre différent a, b, c, ..., k ; et soit la fonction

$F(z) = z(z-1) \dots (z-p+1)$ et $F'(z)$ sa dérivée alors la fonction

$$f(z) = \frac{a\,F(z)}{z\,F'(0)} + \frac{b\,F(z)}{(z-1)\,F'(1)} + \dots + \frac{k\,F(z)}{(z-p+1)\,F'(p-1)}$$

est propre à représenter la substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & p-1 \\ a & b & c & \dots & k \end{pmatrix}$.

(*) Jordan - Traité des Substitutions - Ed. Blanchard, ch. IV, § 523, p. 389. Il est intéressant de lire les démonstrations de Jordan dans le livre IV du Traité car il n'était pas question ici de reconstruire toute la théorie.

Cette idée prend un très grand développement dans le Deuxième Mémoire et le conduira à la notion de représentation linéaire, d'abord sur les corps F_p puis sur des corps finis quelconques F_q (où $q = p^\nu$).

D'une certaine façon, la dernière proposition (VIII) qui clôt ce mémoire : "*Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques des racines étant données, les autres s'en déduisent rationnellement*" constitue un pas en arrière par rapport à la précédente, puisque ce critère rapporte la résolubilité à des conditions sur l'équation et ses coefficients plutôt qu'aux propriétés du groupe de l'équation. Pourtant ce fut dans un premier temps la proposition la plus remarquée du Mémoire : celle que cite Galois dans la préface à son mémoire, celle dont parle Liouville quand, en 1843, il annonce à l'Académie l'imminente publication des écrits de Galois ; sans doute correspondait-elle mieux à ce que pouvait recevoir le monde mathématique de l'époque et se rapprochait-elle des formes d'énoncés obtenus par Abel, dans l'étude particulière des classes d'équations résolubles.

On peut évidemment comprendre pourquoi le théorème d'Abel sur l'irrésolubilité par radicaux de l'équation générale de degré n est une application de la théorie de Galois. L'équation "*générale*" de degré n, $a_0x^n + \dots + a_n = 0$ a des coefficients littéraux indépendants. Son groupe de Galois est donc le groupe symétrique S_n. Or on peut démontrer que pour n supérieur à 4, le groupe S_n n'a qu'un seul sous-groupe distingué, le groupe alterné A_n d'ordre $\frac{n!}{2}$ et ce dernier est "*simple*", c'est-à-dire qu'il n'a pas d'autres sous-groupes distingués. La condition de la théorie de Galois n'est pas vérifiée ; S_n n'est pas "*résoluble*".

Troisième partie : Aspects structuraux de théorie des groupes

Nous devons ici éclaircir un certain nombre de difficultés du texte de Galois, liées aux notions de groupe de permutations, de sous-groupes conjugués, de sous-groupe normal, et expliquer les périphrases qui les désignent faute de définitions et de notations précises.

Une fois élucidé le cœur de la théorie de Galois, ces questions peuvent paraître assez élémentaires ; pourtant, historiquement, elles ont considérablement freiné la compréhension et la diffusion de sa théorie et peuvent encore gêner la lecture directe de ses mémoires.

Pour Galois, comme pour Cauchy en 1815, une permutation est un arrangement donné de lettres (conception statique) et une substitution est le passage d'une permutation à une autre, c'est-à-dire une opération. Et bien qu'il sache parfaitement qu'en ce qui concerne le produit — la loi de composition — il faut utiliser les substitutions, Galois hésite beaucoup entre les deux termes. Les ratures et les rajouts se superposent. Par exemple, une rature : "*Il n'y a d'important que la substitution*" ; plus loin une note en marge, elle-même biffée : "*mettre partout à la place du mot permutation le mot substitution*".

De plus, Galois dans tous les exemples développés dans ses travaux, n'utilise jamais l'écriture en deux lignes d'une substitution ; il doit raisonner de tête pour les calculs et n'écrit que les permutations d'arrivée, sans toujours préciser la permutation initiale.

Le fait que Galois applique le terme de groupe aux permutations induit une certaine instabilité dans son utilisation : si l'on rapporte ces permutations à une permutation initiale, on aura tantôt un ensemble de substitutions possédant la propriété de clôture, c'est-à-dire constituant un groupe au sens actuel, et tantôt une suite de substitutions qui sont en fait les classes à gauche ou à droite suivant un sous-groupe.

Examinons le cas développé par Galois du groupe de l'équation générale du 4e degré (S_4) (*). Galois indique qu'en adjoignant à l'équation la 1ère racine carrée qui intervient dans la formation de la résolvante du 3e degré, "le groupe de l'équation qui contenait en tout 24 substitutions, se décompose en deux qui n'en contiennent que douze.

En désignant par a, b, c, d les racines, voici l'un de ces groupes :

Tableau 1 :

a b c d	a c d b	a d b c
b a d c	c a b d	d a c b
c d a b	d b a c	b c a d
d c b a	b d c a	c b d a

Maintenant ce groupe se partage lui-même en trois groupes..." dont Galois écrit "*qu'ils sont semblables et identiques*". Galois dit aussi "*que l'on passe de l'un de ces groupes à l'autre par une même substitution*".

En effet, si l'on note ϕ la substitution :

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix} = (a)\,(b, c, d)$$

et si on applique ϕ à chaque permutation d'un "groupe" de Galois (c'est-à-dire une des colonnes du tableau 1), on obtient la permutation située à la même ligne et à la colonne suivante.

Ecrivons le tableau des substitutions déduit du tableau 1 de Galois en partant de la permutation arbitraire a b c d ; nous obtenons le groupe alterné A_4, que Galois a "partagé" implicitement comme suit :

Tableau 2 :

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$

et que l'on peut aussi transcrire sous la forme postérieure des produits de cycles ; ainsi :

Tableau 3 :

(a)(b)(c)(d)	(a)(b)(c)(d)	(a)(b, d, c)
(a, b) (c, d)	(a, c, b) (d)	(a, d, b) (c)
(a, c) (b, d)	(a, d, c) (b)	(a, b, c) (d)
(a, d) (b, c)	(a, b, d) (c)	(a, c, d) (b)

Pour nous, il est bien clair que nous avons affaire à un sous-groupe H du groupe G ($= A_4$) des douze substitutions de départ, qui est la 1ère colonne de gauche, et de ses classes (à gauche, par exemple) dans G .

Si on appelle H' et H'' les deuxième et troisième colonnes de ce tableau 3, on a :

$$H' = \phi H$$
$$H'' = (a)\,(b, d, c)\,H = \phi^2 H = \phi H'$$

Galois écrira dans sa lettre à A. Chevalier :

$$G = H + \phi H + \phi^2 H\,.$$

Pour Galois, H, ϕ H et ϕ^2 H sont désignés par le même terme de groupe. La reconnaissance par Galois qu'une même substitution applique successivement chaque colonne sur la suivante renvoie au caractère cyclique du groupe quotient de G par H . Et ce caractère cyclique s'explique lui-même par le fait que l'ordre de G/H est égal au degré p premier de l'équation binôme dont l'adjonction de la racine a permis de réduire le groupe G à H .

On voit donc que des "*groupes semblables et identiques de permutations*" pour Galois n'impliquent pas une quelconque propriété analogue pour les ensembles respectifs de substitutions, quand on considère une même permutation initiale. Ici Galois évoque le fait suivant : si l'on rapporte cette fois les 3 colonnes du tableau 1 (c'est-à-dire les trois "groupes" dont parle Galois) à leurs premières lignes respectives, il vient :

Tableau 4 :

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & d & b & c \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & d & b & c \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & d & b & c \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & d & b & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$

(*) Galois a présenté cet exemple dans le Mémoire de janvier 31 et on le trouve aussi traité dans un Fragment. Ed. Bourgne-Azra, p. 63 et p. 99.

c'est-à-dire :

(a)(b)(c)(d)	(a)(c)(d)(b)	(a)(d)(b)(c)
(a, b) (c, d)	(a, c) (b, d)	(a, d) (b, c)
(a, c) (b, d)	(a, d) (b, c)	(a, b) (c, d)
(a, d) (b, d)	(a, b) (c, d)	(a, c) (b, d)

et les trois groupes de substitutions formés sont bien identiques à H . On comprend dans ce cas la formulation de Galois : "*les trois groupes ont les mêmes substitutions*".

Cette propriété traduit la normalité du sous-groupe H dans $G = A_4$. En effet, puisque la substitution

$$\phi = \binom{a\ b\ c\ d}{a\ c\ d\ b} = (a)\ (b,\ c,\ d)$$

applique chaque permutation à la première colonne du tableau 1 de Galois, sur la permutation de même ligne de la deuxième colonne, alors une substitution de la deuxième colonne du tableau 4, par exemple celle de la 2e ligne, pourra s'écrire

$$\binom{a\ c\ d\ b}{c\ a\ b\ d} = \binom{\phi(a\ b\ c\ d)}{\phi(b\ a\ d\ c)}$$

Or si nous appelons ψ la substitution $\binom{a\ b\ c\ d}{b\ a\ d\ c}$ l'opération qui consiste à remplacer chaque ligne A_i de ψ , par $\phi(A_i)$ revient à calculer

$$\phi^{-1}\,\psi\,\phi$$

Quand ψ parcourt le groupe H , $\phi^{-1}\psi\phi$ parcourt la 2e colonne du tableau 4, donc un sous-groupe conjugué de H . Dans ce cas, H étant normal, $\phi^{-1}\psi\phi$ appartient à H . De la même façon, chaque substitution de la 3e colonne du tableau 4, par exemple celle de la 2e ligne peut s'écrire :

$$\binom{a\ d\ b\ c}{d\ a\ c\ b} = \binom{\phi^2(a\ b\ c\ d)}{\phi^2(b\ a\ d\ c)} = (\phi^2)^{-1}\,\psi\,\phi^2$$

qui appartient ici aussi à H .

L'apparition des notions de sous-groupes conjugués et de sous-groupe normal est donc absolument indissociable de la problématique de la résolubilité des équations par radicaux ; par exemple n'est pas imaginée de façon autonome l'idée d'un sous-groupe H invariant dans G (c'est-à-dire tel que $xHx^{-1} = H$ pour tout $x \in G$) mais sans que soit vérifiée la propriété pour G/H d'être cyclique, tout simplement parce que cette idée n'a pas de signification dans la situation de la résolubilité des équations.

Notons ici que le mémoire suivant : "*Des équations primitives qui sont solubles par radicaux*" qui ne connut que la publication posthume de 1846, laisse apparaître un degré de sophistication dans la théorie des groupes beaucoup plus important : groupes "*irréductibles*", groupes primitifs, développement de l'idée de représentation linéaire, considération des groupes linéaire et projectif linéaire d'un espace de dimension 2 sur un corps fini, etc. (*).

Ce degré de sophistication est d'ailleurs difficile à évaluer complètement car ce mémoire semble bien ne constituer qu'un fragment dont les parties en amont et en aval auraient disparu. Dans l'esprit de Galois, il constituait plutôt une application particulière à une classe d'équations qu'un développement de sa théorie, dont les principes de fond se trouvent dans le Premier Mémoire.

Pour justifier le détour par cette partie donnons quelques éléments historiques sur la compréhension ultérieure de cet aspect du mémoire de Galois.

Ainsi Enrico Betti, un des premiers lecteurs et commentateurs de Galois, aura beaucoup de difficultés à séparer et exprimer clairement la notion statique d'arrangement et celle de groupe de substitutions. En 1852, dans un mémoire intitulé *Sulla di Resoluzione delle equazioni algebriche*, Betti parle de groupe des arrangements mais en indiquant que ce sont les substitutions "*sur*" ce groupe, ou "*associées*" à ce groupe, qui importent dans la théorie. Il définit l'égalité de deux groupes si les ensembles de leurs substitutions associées sont identiques, même si les ensembles des arrangements sont différents et appelle "*semblables*" (*simili*) deux groupes contenant le même nombre d'arrangements et tels que les ensembles de leurs substitutions associées bien que différents contiennent le même nombre de substitutions de même ordre.

Betti avait inventé le terme "*dérivative*" d'une substitution θ par une autre ψ , comme étant $\psi^{-1}\theta\psi$, opération notée :

$$D_\psi\,\theta = \psi^{-1}\theta\psi$$

et qu'il étend aux groupes $(\psi^{-1}G\psi)$.

Betti remarque que si une substitution ψ applique un arrangement d'un groupe G sur un arrangement d'un autre groupe dérivé K , alors ψ appliquera n'importe quel arrangement de G , en un autre de K . En terminologie moderne, on peut dire que des groupes semblables d'arrangements induisent des groupes conjugués de substitutions et que des groupes égaux d'arrangements induisent un sous-groupe normal. Mais évidemment, cette notion de sous-groupe normal appelle un groupe référentiel plus grand, notion totalement absente chez Betti, ce qui rend les raisonnements très confus.

En fait, le premier qui ait parfaitement clarifié l'idée de groupe de substitutions, est le mathématicien A.L. Cauchy. Dans les années 1844-46, il reprend brusquement des travaux sur le sujet des substitutions et publie en quelques mois un grand *Mémoire sur les Arrangements que l'on peut former avec n lettres*, et vingt-sept Notes aux Comptes Rendus de l'Académie. (Il semble qu'en 1852, Betti ne les connaissait pas). Cauchy adopte une double écriture pour les substitutions : soit en deux lignes, soit en produit de cycles et définit les "*systèmes de substitutions conjuguées*" comme étant des ensembles de substitutions fermés pour la loi du produit. Cette terminologie restera en vigueur jusque dans les premiers travaux de Camille Jordan. Elle ne sera définitivement abandonnée au profit du mot groupe, que dans le Traité des Substitutions paru en 1870.

(*) Le résultat principal de ce mémoire — c'est-à-dire la caractérisation des équations primitives résolubles comme étant d'un degré égal à la puissance d'un nombre premier — est démontré de façon complète dans l'annexe de la thèse de 1860 de Camille Jordan.

Le Grand Mémoire de Cauchy constitue, en fait, une étude exhaustive, structurée du groupe symétrique S_n, et de ses sous-groupes d'indice le plus bas possible. Lui aussi définit des substitutions *"semblables"* comme des substitutions ayant la même décomposition en produit de cycles disjoints ; il démontre que si deux substitutions P et Q sont semblables, alors il en existe une troisième, R, telle que $P = RQR^{-1}$. En langage moderne, P et Q sont conjuguées dans le plus petit groupe symétrique les contenant toutes deux. Mais Cauchy restreint sa définition aux substitutions prises individuellement, sans l'étendre à des groupes, passant ainsi à côté de la notion de sous-groupes conjugués. De même, étudiant les conditions de permutabilité pour les substitutions, au moyen de manipulations subtiles sur les ensembles de lettres sur lesquels opèrent ces substitutions, Cauchy approche la notion de sous-groupe normal mais sans le cerner exactement.

Il n'est pas question de détailler davantage ici l'analyse de ces travaux de Cauchy que nous avons effectuée par ailleurs (*) ; indiquons seulement que Cauchy y fonde un véritable CALCUL DES SUBSTITUTIONS, qui s'inscrit dans la prise de conscience historique du rôle des opérations qui marque cette époque : il développe tous azimuts sur des objets nouveaux que rien n'assimile à des nombres, toutes les ressources de différentes techniques opératoires, sans qu'aucune limite ne soit a priori fixée, sinon l'épuisement parfois dans de trop grandes complications de calculs que l'émergence d'une méthode générale ou d'analogies profondes ne compense pas toujours. Pour lui, un "système de substitutions conjuguées" restera en définitive une entité indécomposable assez rigide, dont il explore les propriétés mais sans mettre profondément en évidence les concepts de sous-groupe, ou de sous-groupe distingué.

Bien qu'il obtienne des résultats fins sur ce que nous appelons aujourd'hui les groupes transitifs, les groupes transitifs primitifs, etc., dont bien des éléments seront utiles à Jordan dans la reconstruction de démonstrations lacunaires de Galois, relatives en particulier au Deuxième Mémoire (**), le Calcul des Substitutions de Cauchy élaboré sans finalité vraiment définie, aura besoin justement du choc de la théorie des équations pour témoigner de sa fécondité.

Au contraire, la démarche de Galois vise à la résolution d'un problème précis : la résolubilité des équations par radicaux. L'idée de *"décomposer"* un groupe est inscrite alors au cœur de sa théorie et confère à cette notion de groupe, exhibée au cours de la démarche, une souplesse, un pouvoir d'articulation et d'analyse qui resteront absolument étrangers au point de vue de Cauchy.

Et cette idée de *relativité*, invention propre de Galois, va se répercuter plus tard dans toutes les théories mathématiques et physiques nées de la théorie des groupes; F. Klein étant le premier à la mettre en œuvre magistralement dans son programme d'Erlangen.

BIBLIOGRAPHIE

N.H. Abel. *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*. Oeuvres. Ed. Sylow-Lie, tome I, p. 66-87.

A.M. Brasselet. *Résolution des équations algébriques - Premier mémoire de Galois*. Publication de l'IREM de Lille, Juin 1979.

A. Dahan. *Les recherches algébriques de Cauchy*. Thèse, Paris 1979.
Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept de groupe. Archive for History of Exact Sciences, vol. 23, 1980.

A. Dahan - Dalmedico & J. Peiffer. *Routes et dédales, Histoire des mathématiques*. Editions Etudes Vivantes, Paris 1982.

J. Dieudonné. *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Ouvrage collectif. Hermann, Paris 1978.

C.F. Gauss. *Recherches Arithmétiques* traduites par A.C.M. Poulet-Delisle. Ed. Blanchard, Paris 1953.

E. Galois. *Ecrits et mémoires mathématiques*. Edition R. Bourgne et J.P. Azra, Paris 1962, Gauthier-Villars.

C. Jordan. *Mémoire sur le nombre des valeurs des fonctions* (Thèse). Oeuvre, tome I.
Traité des substitutions et des équations algébriques. Ed. Blanchard, Paris 1957.

B.M. Kiernan. *The development of Galois Theory from Lagrange to Artin*. Archive for History of Exact Sciences, vol. 8, 1971.

J.L. Lagrange. *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, années 1770-71. Oeuvres, tome III, p. 205-421.

A.T. Vandermonde. *Mémoire sur la résolution des équations*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année 1771, Paris 1774, p. 365-416.

G. Verriest. *E. Galois et la théorie des équations algébriques*. Notice publiée en 1897. Rééd. Gauthier-Villars, Paris 1951.

J. Vuillemin. *La philosophie de l'Algèbre*. PUF, Paris 1962.

(*) cf. bibliographie.

(**) Edition Bourgne-Azra, p. 129. "Des équations primitives qui sont solubles par radicaux".


les MATHS en FETE
150 eme
ANNIVERSAIRE
DE LA MORT D'
EVARISTE GALOIS
JEUX
ECHECS
FILMS
EXPOS
DEBAT
DAMES
21→29 MAI
AU LYCEE R. ROLLAND
S'ADRESSER A D. GUY
OU A F. DREYFUS
RASKAL POUPON 82

"Mathématiques en Fête" aux collège et lycée Romain Rolland d'Argenteuil (95) du 21 au 29 mai 1982

par Dominique GUY.

C'est en terminale que j'ai découvert Evariste Galois; mon prof de math m'avait proposé de faire un exposé sur Galois et je fus immédiatement séduite par son travail et sa personnalité. Devenue prof à mon tour, je ne ratais pas une occasion d'en parler à mes élèves. Aussi lorsque l'appel pour célébrer le 150e anniversaire de sa mort est paru dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P., je réfléchis à la façon d'honorer mon "idole". En janvier, le Centre Culturel d'Argenteuil est venu nous présenter son travail; exaspérée de ce que la culture se traduit toujours presque exclusivement par les arts plastiques, musicaux ou littéraires, j'eus l'idée d'organiser une "fête des mathématiques" dans mon établissement placée sous le signe d'Evariste.

J'ai donc déposé un P.A.E. (Projet d'Action Educative), malheureusement trop tard pour obtenir une subvention, mais la Mission d'Action Culturelle qui nous a donné une cinquantaine d'heures PAE a transmis le dossier au Ministère des Affaires Culturelles qui, intéressé par le projet, nous a accordé une petite subvention. Entre temps, le plus dur était de décider mes collègues dont beaucoup trouvaient l'idée intéressante mais qui hésitaient à s'investir vraiment. C'est donc pratiquement seule que j'ai démarré ce projet.

J'ai pris contact avec l'Office National du Film Canadien et avec les IREM de Paris et Clermont pour obtenir des films, avec Jean-Michel Kantor, du musée de la Villette et avec plusieurs personnalités de l'A.P.M.E.P., qui ont bien voulu venir faire des exposés. C'est ainsi que Gilbert Walusinski est venu présenter ses diapositives sur l'astronomie, que Bernard Parzisz est venu nous parler des rapports entre la musique et les mathématiques, et que Jean-Michel Kantor est venu présenter la théorie de Galois et le futur musée des sciences et techniques du Parc de la Villette. Une collègue, Madame Dreyffus, avait également pris plusieurs contacts, notamment auprès de Janine Rogalski qui est venue avec un de ses collègues physicien nous parler de l'histoire des maths et de la physique et de Paul Braffort qui nous a parlé des rapports entre littérature et mathématiques. Grâce à Yves Roussel de P.A. nous avons pu organiser une simultanée d'échecs avec Alain Roussel, vice-champion de France par équipes. Jean Sauvy également a répondu présent à mon appel en nous prêtant son exposition sur le nombre d'Or.

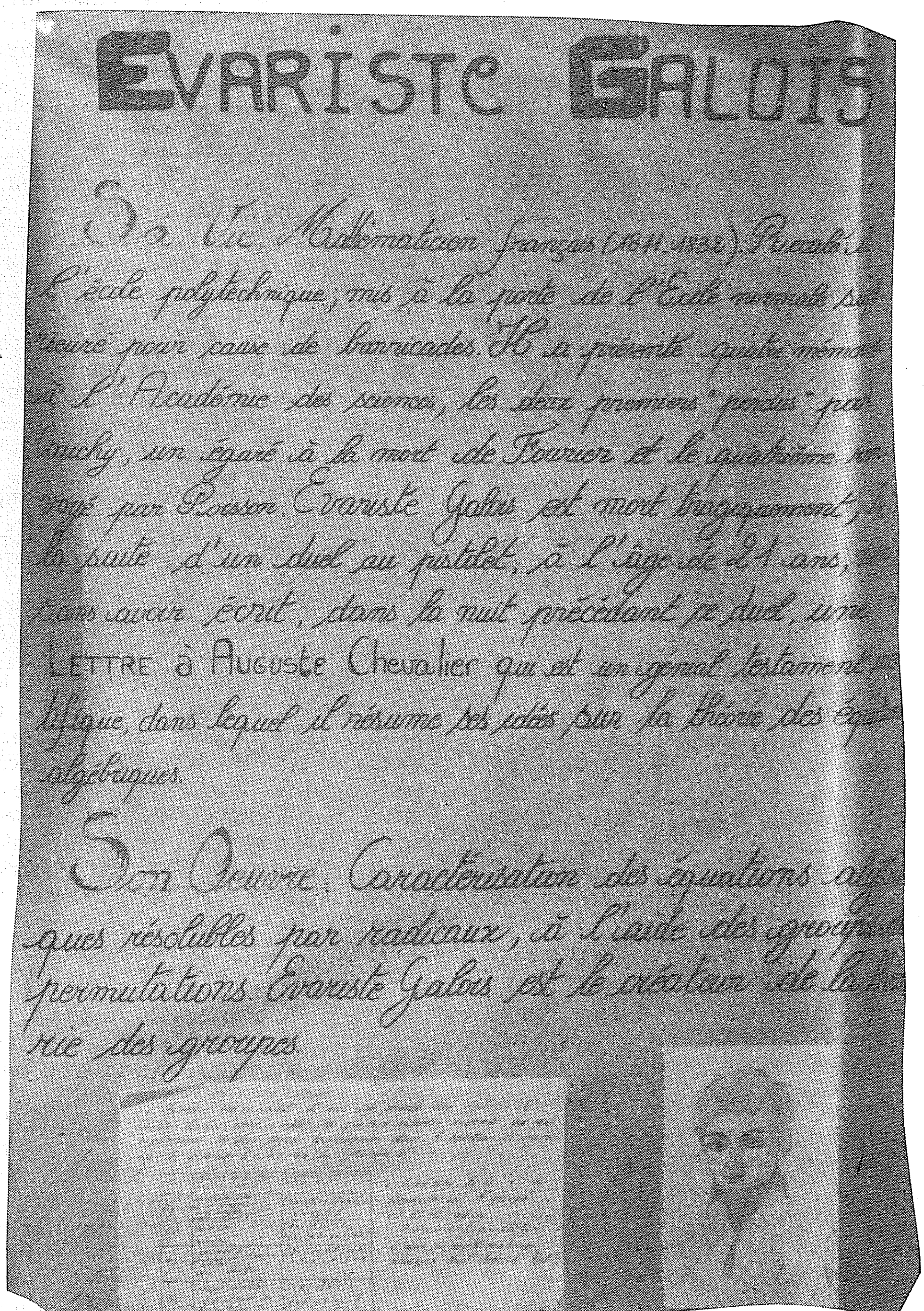
Si, côté profs, le démarrage fut long, les élèves eux prirent rapidement les choses en mains : plusieurs classes des 2 cycles ont préparé des panneaux d'exposition sur l'astronomie, la numération, l'évolution comparée des maths et de la physique, des biographies de mathématiciens dont Evariste bien sûr, la musique et les maths, littérature et mathématiques, Escher, les nombres premiers, l'arithmétique aztèque, des jeux mathématiques... (au total, une vingtaine de mètres d'expos). Une classe de seconde a fait avec son prof de math une émission dans une radio libre de la région, des élèves de Première A ont préparé avec leur prof de Français un spectacle théâtral à partir de "la vie de Galilée" de Brecht, les élèves de la seconde à option musique ont préparé avec leur prof de musique un concert classique, et deux groupes d'élèves ont préparé un concert de blues et un concert de rock. Trois classes de seconde ont organisé un buffet (le fruit de la vente leur a permis en partie d'aller visiter la Centrale Nucléaire de Dampierre et le Centre de radio-astronomie de Nançay). Ces activités se sont déroulées sur 10 jours, avec un point fort le 28 mai, journée banalisée, pendant laquelle ont eu lieu la plupart des conférences et les concerts.

Les cours n'étaient pas officiellement supprimés, mais les élèves pouvaient pendant les cours assister avec leurs profs aux différentes activités ; l'administration craignait si elle supprimait les cours que les collègues ne se déchargent complètement de leurs élèves et se considèrent en congé ! En fait, au cours de la journée banalisée, la plupart des profs ont joué le jeu, certains restèrent indifférents (surtout les collègues de physique, de terminale, ah ! ceux-là avec leur programme !), et très peu furent franchement hostiles. Les élèves avaient fait des affiches placées un peu partout dans l'établissement, et Madame Dreyffus avait même fait imprimer une affiche dessinée par un ancien élève du lycée. Bref, ce fut finalement un beau succès, surtout grâce à l'intérêt, au sérieux et à la responsabilité démontrés par les élèves tout au long de cette fête. La récompense : leur exposition nous a été commandée par deux établissements de la région, et ce n'est peut-être pas fini...

Certes, tout n'a pas été facile, j'aurais aimé une plus grande participation des agents et des parents à la préparation de cette fête, mais leur position dans l'école, bien qu'actuellement en évolution, ne leur permet pas encore de vraiment participer aux actions éducatives. Une dizaine de collègues seulement (sur 150 environ) m'ont aidée et soutenue dès le départ, résultat, la tâche fut très lourde pour moi, mais je ne regrette pas, Evariste valait bien ça, et puis surtout cette manifestation a permis aux élèves de découvrir les mathématiques sous des angles nouveaux, attrayants. Ils en redemandent ! Ils aimeraient organiser une nouvelle fête sur le Français, l'Histoire... Je passe le relais à mes collègues d'autres disciplines ! L'administration, qui ne m'a pas beaucoup aidée pour la préparation, m'a quand même soutenue pendant le déroulement de la fête et ce n'est déjà pas si mal qu'elle ait permis cette manifestation originale à trois semaines du Bac.

Je profite de cet article pour remercier les amis qui sont venus bénévolement faire des conférences, Alain Roussel qui est venu d'Amiens jouer aux échecs, Jean Sauvy pour son expo, les collègues qui m'ont aidée, et le Parc de la Villette qui nous donne une importante subvention pour couvrir nos frais.

Pour conclure, le bilan d'une élève de Première A qui a participé au théâtre : "C'était super, ça a mis de la joie dans le lycée, c'était la fête, c'était intéressant, quant au théâtre... !".



N.B. Pour de plus amples renseignements ou pour emprunter l'expo des élèves, écrire à :

Mme D. GUY - Lycée Romain Rolland, place Romain Rolland - 95104 ARGENTEUIL

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 11 000 enseignants concernés par les mathématiques ("de la Maternelle à l'Université").

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, "de la Maternelle à l'Université", mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen *, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte *, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un supplément d'actualité (4 N^os^ par an). Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^e^, CAP et BEP, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

Imprimerie VAUDREY
N° d'édition 24953
Dépôt légal Janvier 1983

ISBN 2-902680-25-2

L’APMEP en quelques mots...

Fondée en 1910, l’APMEP est une association :

- totalement indépendante, politiquement et syndicalement, et bénévole ;
- qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l’université.

L’APMEP se préoccupe simultanément :

- des contenus des programmes ;
- des compétences requises des élèves ;
- des méthodes d’enseignement et de formation ;
- des horaires et effectifs, en particulier des dédoublements de classes ;
- de l’harmonisation entre les cycles ;
- de la valorisation des mathématiques comme instrument de formation et non de sélection.

L’APMEP est un lieu de :

- libre parole et de confrontation d’idées ;
- démarches coopératives d’auto-formation ;
- propositions pour une politique d’enseignement des mathématiques.

L’APMEP intervient pour :

- défendre ses positions ;
- intégrer les nouveaux outils (calculatrices, logiciels de géométrie, de calcul...) ;
- faciliter les évolutions et les démarches d’équipe (formation initiale et permanente, laboratoires de maths...).

L’APMEP agit pour préserver, donner ou redonner aux élèves :

- le goût des mathématiques ;
- le plaisir d’en faire.

Pour l’APMEP, faire des mathématiques, c’est :

- identifier, formuler un problème ;
- expérimenter sur des exemples ;
- conjecturer un résultat ;
- bâtir une démonstration ;
- mettre en œuvre des outils théoriques ;
- contrôler les résultats et leur pertinence ;
- communiquer une recherche, une solution ;
- développer simultanément :
    - le travail individuel et le travail collectif des élèves ;
    - le sens de l’écoute et du débat ;
    - la persévérance ;
    - les capacités d’imagination, d’esprit critique, de cohérence et de rigueur.

Faire des mathématiques, c’est œuvrer pour :

- la formation de l’esprit ;
- l’intégration dans la vie sociale, culturelle et professionnelle.

Plus d’informations sur : www.apmep.fr