

POURCENTAGES

Les calculs avec pourcentages nous semblent devoir être entretenus durant toute la scolarité. Cette notion ne figure pas explicitement aux programmes de seconde, mais peut être considérée comme un thème de travail à l'occasion de calculs dans **R, Q** et des études de fonctions.

Voici une partie d'un document, utilisé dans des classes de 2^e A et 2^e AB ; ce document était destiné à l'élève. Ce n'est pas un **cours** sur « pourcentage » ; il se veut un point de départ pour se poser des questions et contient ensuite de très nombreux exercices (ici, seulement quelques-uns de ces exercices ont été retenus).

- (A) Questionnaire** : avant tout travail sur pourcentages
- (B) Trois exercices** commentés
- (C) Faire le point**
- (D) Des exercices**, avec indication de matériel à utiliser.

Il conviendra de compléter l'aspect mathématique, par exemple avec l'application linéaire, si l'on travaille dans une seconde indifférenciée.

1. Commentaire sur le questionnaire **(A)**

Nous voulions savoir tout d'abord où en étaient les élèves avec ce mot semi-magique qui s'étale dans les journaux, les livres de géographie, qu'on entend à la radio et qui a même droit à une touche de calculatrice... : pourcentage.

Nous avons donc élaboré ce premier questionnaire A et l'avons soumis aux élèves sans aucun commentaire. Comme nous l'avions prévu, ce fut un échec. Nous ne l'avons pas corrigé en classe mais nous avons distribué le document B sur lequel les élèves ont travaillé en sollicitant souvent notre aide. Ensuite le questionnaire A a été de nouveau distribué. Cette fois les résultats furent bons. Il faut dire qu'au cours de l'étude du document B, de nombreuses questions avaient été posées sur le questionnaire. Cependant la notion de pourcentage n'était pas acquise pour autant. En effet, au cours de l'année de 1^{re} B, alors que nous avons beaucoup insisté sur cette notion en 2^e AB, et souvent en compagnie du professeur d'économie, il arrive que celui-ci constate encore des erreurs.

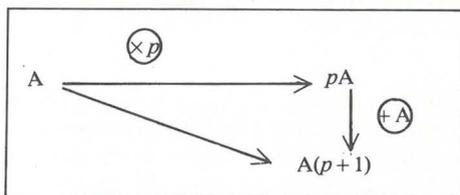
2. Commentaire sur les parties **(B)** et **(C)**

Nous avons tenu à présenter l'usage des pourcentages au moyen d'**opérateurs**. C'est évidemment un parti-pris, mais compte tenu des expériences diverses de ces dernières années, ce nous semble être le meilleur

procédé pour apprendre à **agir** avec des pourcentages : utiliser un opérateur multiplicatif ou l'opérateur inverse et travailler sur des exemples simples que l'on rencontre dans des ouvrages divers de géographie, d'économie, ou dans le journal.

Que derrière tout cela, existe une application linéaire, n'est pas notre problème initial : ce n'est qu'après de nombreux exercices, soulevant des questions, que l'on pourra, éventuellement, mettre en évidence cette linéarité avec ses propriétés.

- Deux aspects bien différents dans l'utilisation d'un pourcentage :
 - L'opérateur multiplicatif tout seul (premier exemple)
 - Le « pourcentage d'augmentation » (second exemple) qui fait intervenir à la fois la multiplication et l'addition ou encore « pourcentage de diminution », ce qui est la même chose.



• Un de nos buts a été de **démystifier** une écriture : 8 %... c'est un « truc » formel et nous devons montrer sa simplicité. Nous devons faire comprendre que

« prendre 8 % de A »

ce n'est rien d'autre que multiplier A par $\frac{8}{100}$ ou 0,08.

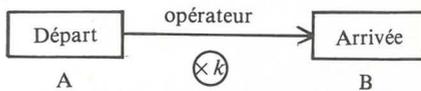
Cela dit, se servir d'un pourcentage nécessite une bonne connaissance des décimaux et de leur multiplication.

D'abord rappeler que $\frac{8}{100}$ c'est 0,08... ce qui est loin d'être évident pour certains élèves de seconde. C'est inquiétant, mais c'est un fait.

Reste à calculer $x \times 0,08$ ou $x \times \frac{8}{100}$ ou $\frac{x \times 8}{100}$ où l'on retrouve la trop fameuse « règle de trois », pour les nostalgiques.

• Il s'agit, pour nous, de faire « fonctionner » le modèle ci-contre, qui doit rester un modèle dynamique.

Si l'on a su, sur un exemple concret, reconnaître ce qui figure dans chacune des trois cases, il reste alors à calculer ce « qui



manque » et ce n'est qu'une équation simple à résoudre :

$$A = pB \text{ équivaut à } B = A : p \text{ équivaut à } p = A : B$$

Nous croyons à l'efficacité de ce modèle algébrique. Ce qui n'empêche pas, bien sûr, d'évoquer la proportionnalité, avec des tableaux de nombres, et la fonction linéaire. Mais en définitive, nous devons fournir à nos élèves une technique simple et rassurante.

3. Commentaires sur les exercices (D)

Certains exercices ne comportent que très peu (ou pas du tout...) de questions : nous voulons que nos élèves apprennent à se poser des questions à partir de données d'origines réelles et diverses. Il faut donc aller chercher les pourcentages là où ils se trouvent, plutôt que de proposer des problèmes artificiels et préfabriqués.

— C'est volontairement que certains tableaux de données sont pris, sans changement, dans des journaux ou des revues, avec tous les problèmes de « lecture » que cela suppose. Mais un de nos rôles n'est-il pas d'apprendre à lire à nos élèves ?

Exemple : l'exercice (8) ne peut être valablement traité sans commentaire préalable du professeur sur les deux colonnes de pourcentages.

— De nombreux exercices ont un caractère pluridisciplinaire. Ainsi des problèmes démographiques qui sont au programme de seconde en géographie.

Dans l'exercice (9) par exemple, on étudie une évolution de population. L'élève est amené à essayer de prévoir une population pour les années suivantes, par des procédés divers (graphique, tendance sur le graphique, moyenne de pourcentages d'augmentation, etc.). Avec, bien sûr, tous les risques que comporte ce type de prévision...

— Il nous faut démystifier l'utilisation des pourcentages dans diverses activités sociales, économiques ou politiques. D'où le choix volontaire de certains exercices.

Exercice (7) :

Evolution d'un capital à intérêts composés. A propos de cet exercice, les élèves découvrent un monde où la linéarité apparente (annuelle...) n'a plus rien de linéaire si on regarde de près.

A. QUESTIONNAIRE

	Réponse
① Lu dans un journal : « Haïti atteint le record mondial d'analphabétisation : 93,2 % ». Que signifie cette phrase ? Quel usage pouvez-vous faire de cette information ?	
② Un article vaut 100 F. Il augmente de 10 %. Combien vaut-il alors ?	
③ Un article vaut 2 728 F ; il diminue de 10 %. Combien vaut-il alors ?	
④ Un article valait hier 110 F ; il vaut aujourd'hui 100 F. De quel pourcentage a-t-il baissé ?	
⑤ Le côté d'un carré augmente de 3 %. De quel pourcentage a augmenté son périmètre ? l'aire du carré ?	
⑥ La vie augmente de 9 % par an ; en deux ans elle augmente de 18 %...	VRAI FAUX
⑦ Un article augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Il revient donc à son prix de départ...	VRAI FAUX
⑧ Baisser le prix d'un article de 10 % puis l'augmenter de 10 %, c'est pareil que l'augmenter d'abord de 10 % puis le diminuer ensuite de 10 %...	VRAI FAUX
⑨ Si, à un litre de jus de fruit contenant 20 % de sucre, j'ajoute un litre de jus de fruit contenant 10 % de sucre, j'obtiens du jus de fruit... — contenant 30 % de sucre... — contenant 15 % de sucre...	VRAI FAUX VRAI FAUX
⑩ Si dans une classe il y a 50 % de filles demi-pensionnaires et 40 % de garçons demi-pensionnaires, on peut alors avec ces données calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans la classe...	VRAI FAUX

B. PREMIÈRES ACTIVITÉS

• Premier exemple :

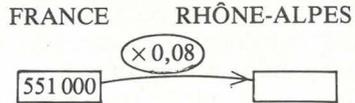
L'aire totale de la France est 551 000 km². La région Rhône-Alpes représente 8 % de la superficie de la France.

☞ Expliquez la signification de "... 8 % de la superficie de la France".
☞ Que pouvez-vous calculer avec ces informations ?

Indications : Pour calculer la superficie de la région Rhône-Alpes...

... Prendre les 8 % de 551 000

C'est-à-dire appliquer à 551 000
l'OPERATEUR $\times 0,08$
8 centièmes



• **Second exemple :**

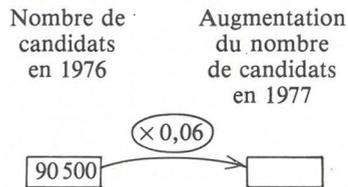
*En 1976, 90 500 élèves se sont présentés au Bac de techniciens (Btñ).
En 1977, il y eut environ 6 % de candidats en plus.*

- { Expliquez "6 % de candidats en plus...".
- { Que pouvez-vous calculer à l'aide de ces informations ?

Indications : Pour calculer l'augmentation du nombre des candidats de 1976 à 1977...

... Prendre les 6 % de 90 500

C'est-à-dire appliquer à 90 500
l'OPERATEUR $\times 0,06$
6 centièmes



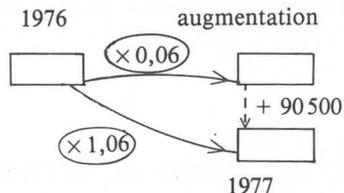
Pour calculer le nombre des candidats en 1977...

Ajouter à 90 500
l'augmentation calculée

C'est-à-dire calculer :
 $90\,500 + (0,06 \times 90\,500) =$
 $1,06 \times 90\,500$

On peut donc éviter de passer par l'intermédiaire du calcul de l'augmentation. Il suffit d'appliquer à 90 500

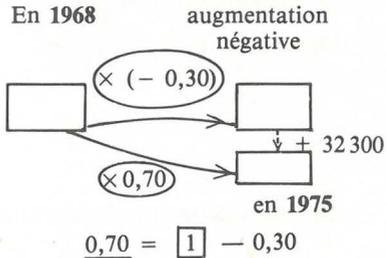
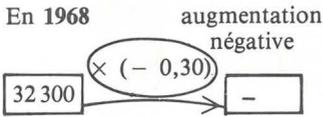
l'OPERATEUR $\times 1,06$



$$1,06 = \boxed{1} + 0,06$$

• Troisième exemple :

En 1968, le 1^{er} arrondissement de la ville de Paris comptait 32300 habitants. Cette population a diminué de 30 % entre 1968 et 1975.



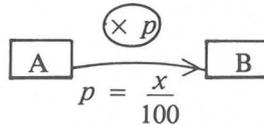
* Attention à "... diminué de 30 %", qui peut être considéré comme une "augmentation négative".

Ⓒ FAIRE LE POINT

Ceci est un bilan très sommaire sur l'usage de pourcentages.

1) $x\%$ de A

Un pourcentage est un OPÉRATEUR multiplicatif qui permet, connaissant le nombre A, de calculer le nombre B.



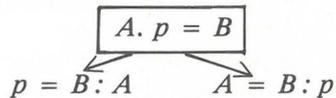
Calculer 6% de A, c'est multiplier A par 0,06 ($p = 0,06$).

Trouver une augmentation de 6% de A, c'est multiplier A par 0,06 ($p = 0,06$).

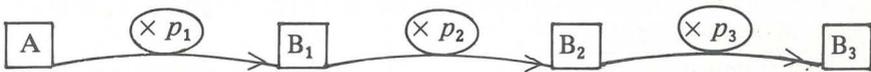
$$B = A \times 0,06$$

Problèmes qui se posent :

Je connais A et p : $B = A \cdot p$
 Je connais A et B : $p = B : A$
 Je connais B et p : $A = B : p$



OPÉRATEURS EN CHAÎNE



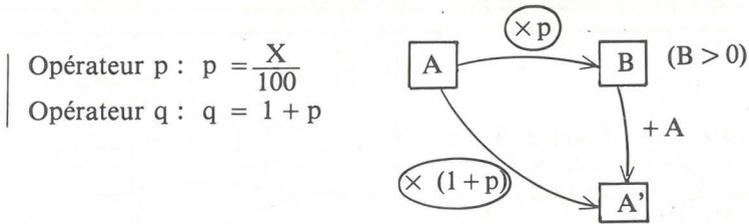
$$B_1 = A \times p_1$$

$$B_2 = B_1 \times p_2 = A \times p_1 \times p_2$$

$$B_3 = A \times p_1 \times p_2 \times p_3$$

2) Nouvelle valeur après augmentation de X % :

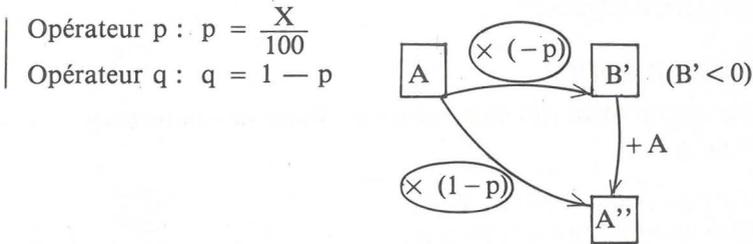
$$A' = A + 0,06 A \rightarrow A' = A \times 1,06$$



3) Nouvelle valeur après diminution de X % :

$$A'' = A - 0,06 A$$

$$A'' = A \times 0,94$$



D) QUELQUES EXERCICES

Matériel souhaitable :

- papier millimétré
- papier semi-logarithmique
- machine à calculer

① La population de la région Rhône-Alpes était de 4 800 000 habitants au recensement de 1975 ; elle représente 8 % de la population française totale.

Que peut-on en déduire ?

② Dans cette région, la population active est de 2 000 000 d'habitants. Quel est le pourcentage de cette population active par rapport à la population totale de la région ?

③ Aire totale du globe terrestre :	510 millions de km ² (environ)
Aire totale des mers et océans :	362 millions de km ² (environ)
Aire du plus grand continent (Eurasie) :	55 millions de km ² (environ)
Aire du plus petit continent (Australie) :	7,5 millions de km ²

a) Calculer le pourcentage de la surface des océans par rapport à la surface du globe.

Calculer le pourcentage de la surface des terres par rapport à la surface du globe.

Peux-tu faire ce calcul de deux façons différentes ?

b) Quel est le pourcentage, par rapport à la surface des terres, de la surface de l'Eurasie ? de celle de l'Australie ?

c) La surface de l'Océan Pacifique représente 46 % de la surface totale des océans. Quelle est la surface de l'Océan Pacifique ?

④ Anthologie de la musique de Western :

Prix proposé par un club : 53,20 F

Prix public : 61,20 F

Alors ?...

⑤ Calculer les pourcentages qui manquent :

Noms des agglomérations (par ordre de population)	Population des premières agglomérations françaises		
	1968	1975	Variation en %
Paris	8 194 580	8 424 092	+ 2,8 %
Lyon	1 074 823	1 152 863	
Marseille	964 412	1 004 536	+ 4,2 %
Lille	881 439	928 569	+ 5,3 %
Bordeaux	555 152	591 447	
Toulouse	439 764	495 203	+ 12,6 %
Nice	392 635	437 566	+ 11,4 %
Nantes	393 731	433 280	+ 10,0 %
Rouen	369 793	389 462	
Toulon	340 021	378 609	+ 11,3 %
France entière	49 750 000	52 590 000	

Source I.N.S.E.E. (1975)

⑥ Reprendre les exercices du questionnaire A et tenter de répondre aux questions posées.

⑦ Un capital de 20 000 F est placé à la Caisse d'Épargne au taux annuel de 6 %.

a) Quels seront les intérêts au bout d'un an ?

b) Ces intérêts et le capital initial sont laissés en dépôts la seconde année (on dit que les intérêts sont capitalisés) ; de quelle somme dispose-t-on à la fin de la seconde année ?

c) Trouver une formule permettant de calculer le nouveau capital au bout de n années.

d) Au bout de combien d'années le capital initial est-il double ?

e) Reprendre la question d) en supposant que le taux annuel est 10 %.

⑧ Commenter ces données. Que permettent-elles de calculer ?

PAYS (par ordre d'importance)	EXPORTATIONS D'ARMEMENTS EN 1974 (en milliards de francs)		
	Montant	%	en % des exportations de marchandises
Etats-Unis	39,8	41,9 %	8,4 %
U.R.S.S.	28,4	27,8 %	2,3 %
France	15,8	16,6 %	7,2 %
Royaume Uni	7,2	7,8 %	4,0 %
Chine	2,0	2,1 %	—
Italie	1,2	1,3 %	0,8 %
All. Fédérale	0,5	0,5 %	0,1 %
Canada	0,5	0,5 %	0,3 %
Suède	0,4	0,4 %	0,6 %
Suisse	0,4	0,4 %	0,6 %
Israël	0,2	0,2 %	2,5 %
Autres	0,6	0,6 %	—
Total	95	100,0 %	2,5 %

⑨ Voici un tableau donnant la population mondiale en millions d'habitants de 1650 à 1966.

Année	1650	1750	1800	1850	1900	1920	1930	1940	1950	1960	1966
Population du monde (en millions)	545	728	907	1175	1620	1834	2008	2216	2476	3010	3350

a) Représentez cette population par un graphique sur du papier millimétré habituel, puis sur du papier « semi-logarithmique » si vous en avez. (Commentaires à faire). Quel est l'intérêt de cette seconde représentation ?

b) Calculez les pourcentages d'augmentation, de 1650 à 1750, puis de 1750 à 1850, puis de 1850 à 1950.

Ces résultats vous permettent-ils raisonnablement de prévoir la population mondiale en 2050 ?

c) Comparez l'augmentation mondiale de 1960 à 1966 à l'augmentation de la population française pendant la même période (se documenter).

d) En supposant que le pourcentage d'augmentation ne change pas d'une année à l'autre entre 1960 et 1966, calculez ce pourcentage moyen d'augmentation annuelle de la population mondiale pour cette période.

⑩ Voici un tableau donnant une répartition des entreprises françaises par nombres de salariés de l'entreprise.

Industrie (bâtiment, travaux publics exclus)	Nombre d'entreprises	Nombre de salariés (en milliers)
0 à 9 salariés	302 739	421,8
10 à 49 salariés	34 878	766,6
50 à 199 salariés	10 301	975,7
200 à 499 salariés	2 350	712,1
500 à 999 salariés	776	532,6
1 000 à 4 999 salariés	478	901,9
5 000 et plus	81	1 165,3
Total	351 603	5 476,5

Exploitez ces données.

*
* * *

Les tableaux de données ne manquent pas, et on pourra en trouver beaucoup d'autres, à volonté.

- Documents publiés par l'INSE : dans chaque région, il existe un « Observatoire Economique » qui peut fournir des documents sur la région. Voir aussi Services de l'Equiperment, de la Météo...
- Documents existant dans les C.D.D.P.
- Les journaux : les pages économiques (Le Monde par exemple)
- Plaquette annuelle « L'année économique et sociale », publiée par Le Monde
- "Faits et chiffres" : publié chaque année par le Nouvel Observateur
- Les manuels classiques de géographie, d'économie...