3

THÈME SUR LES POLYNOMES

OBJECTIFS :

- *Calculs sur les polynomes à partir de tables de différences.*
- *Exploitation dans un thème interdisciplinaire :*
  étude du mouvement dans un plan d'une masse ponctuelle soumise à un champ constant.

On pourra relire avec profit dans le Bulletin A.P.M.E.P. n° 300 les articles *Tables de différences*, par Michèle Chouchan (p. 497) et *Espaces vectoriels de polynomes*, par Michel de Cointet (p. 504).

Quelques commentaires préliminaires

Les polynomes interviennent dans tous les secteurs des mathématiques. Tout au long de l'enseignement, les différentes étapes sont, en général, les suivantes :

— découverte d'une expression littérale
— définition d'une fonction polynome
— opérations dans l'ensemble des fonctions polynomes
— diverses écritures des polynomes (forme réduite ordonnée, forme factorisée, combinaison linéaire des polynomes $(x-a)^i$...)
— structure de l'ensemble des fonctions polynomes
— fonctions dérivées, fonctions primitives de fonctions polynomes
— etc.

Quelques collègues ont proposé à leurs élèves de classes de troisième et seconde une étude sur les polynomes à partir de tables de différences. Il s'agit là de notions que l'on rencontre peu dans les manuels des collèges ou des lycées, mais qui nous paraissent intéressantes, car elles permettent de proposer un certain nombre d'exercices originaux et féconds.

A titre d'exemples, nous présentons ici six activités relatives à cette question. Nous avons cru bon de rappeler brièvement la définition des différences successives d'une fonction et de faire quelques remarques concernant l'exploitation de ces activités.

Différence première d'une fonction, différences successives

Etant donnée une fonction numérique f, on appelle *fonction différence première de pas 1* de cette fonction, la fonction $\triangle_1 f$: $x \mapsto f(x+1)-f(x)$ et de même, pour h réel positif non nul donné, on appelle *différence première de pas h de f*, la fonction $\triangle_h f$: $x \mapsto f(x+h)-f(x)$.

On définit de la même manière les différences secondes de f:

$$\triangle_1^2 f : x \mapsto \triangle_1 f(x+1) - \triangle_1 f(x) \; ; \; \triangle_h^2 f : x \mapsto \triangle_h f(x+h) - \triangle_h f(x)$$

et, plus généralement, les différences d'ordre p, naturel non nul, de pas h:

$$\triangle_h^p f : x \mapsto \triangle_h^{p-1} f(x+h) - \triangle_h^{p-1} f(x)$$

On peut démontrer les quelques égalités suivantes:

$$\triangle^m(\triangle^n f) = \triangle^{m+n} f \quad ; \quad \triangle^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, f(x+(n-k)h)$$

$$f(x+nh) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \triangle^k f(x) \, .$$

1. Valeurs numériques d'une fonction polynome et différences successives (activité 1)

L'activité 1 consiste à proposer aux élèves une fonction polynome f de la variable réelle x et à leur faire calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., puis à leur demander de dresser, à partir des valeurs numériques précédentes, une table de différences de f. Ils seront alors amenés à constater qu'à partir d'une certaine colonne, les différences sont constantes.

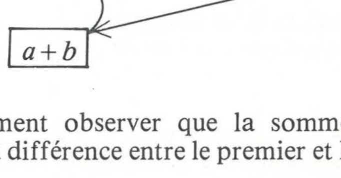
D'un point de vue théorique on démontre que la différence première d'une fonction polynome P_n de degré n est une fonction polynome de degré $n-1$ et, par suite, que $\triangle_h^n P_n$ est une constante, donc que $\triangle_h^{n+1} P_n = 0$ (partant de: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ et remarquant la "linéarité" de la différence $\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\triangle_h P_n(x) = a_0 \triangle_h x^n + a_1 \triangle_h x^{n-1} + \ldots + a_p \triangle_h x^{n-p} + \ldots + a_{n-1} \triangle_h x \ldots$$

il suffit d'utiliser: $\triangle_h x^p = (x+h)^p - x^p = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \, h^k \, x^{p-k}$) .

Dans le cas présent, on considère un polynome de degré 3, les différences troisièmes sont constantes et les différences quatrièmes nulles. On peut alors suggérer aux élèves de prolonger la table déjà dressée en ne calculant que des sommes conformément au schéma suivant:

$i^{\text{ème}}$ colonne $\qquad\qquad$ $(i+1)$ième colonne



On peut également observer que la somme des éléments d'une colonne est égale à la différence entre le premier et le dernier élément de la colonne qui précède.

2. Découvrir une fonction polynome programmée sur une calculatrice (activité 2)

Cette activité destinée à une équipe d'élèves propose, préalablement à l'exploitation des résultats du 1, de "découvrir" une fonction polynome : une fonction polynome étant programmée (par un élève ou par le professeur), quelle est cette fonction ?

L'utilisation d'une calculatrice avec des élèves modifie le comportement du maître et des élèves ; libérés du calcul numérique, ils se posent de nombreuses questions intéressantes, et sont très rapidement à la recherche de méthodes, de justifications et de vérifications.

3. Recherche d'une fonction polynome (activités 3 et 4)

Le but de ces activités est d'utiliser la méthode des différences finies pour déterminer une fonction polynome dont le degré est connu ou non.

1er cas : Si f est une fonction polynome de degré connu, deux par exemple : $f: x \mapsto ax^2+bx+c$, le tableau des différences donne une colonne de différences deuxièmes constantes. La différence première de f est une fonction affine : $\triangle_1 f: x \mapsto f(x+1)-f(x) = 2ax+a+b$; sa différence seconde est la fonction constante :

$$\triangle_1^2 f: x \mapsto \triangle_1 f(x+1)-\triangle_1 f(x) = 2a .$$

La constante obtenue dans la quatrième colonne du tableau nous permet d'en déduire a ; connaissant a, $\triangle_1 f$ nous permet de calculer b ; puis c est calculé à l'aide d'une valeur de f.

2ème cas : Si f est une fonction polynome de degré non connu, dans ce cas la table des différences successives est poursuivie jusqu'à l'obtention d'une fonction constante.

Si la différence troisième est une constante λ, alors on peut faire l'hypothèse : $f : x \mapsto a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ alors :

$$\triangle_1^3 f : x \mapsto \triangle_1^2 f(x+1)-\triangle_1^2 f(x) = 6a_0 \qquad (\lambda=6a_0)$$

$$\triangle_1^2 f(x)=6a_0x+6a_0+2a_1 \quad ; \quad \triangle_1 f(x)=a_0(3x^2+3x+1)+a_1(2x+1)+a_2$$

les coefficients sont :

$$a_0=\frac{1}{6}\triangle_1^3 f(0) \qquad a_1=\frac{1}{2}\triangle_1^2 f(0)-\frac{1}{2}\triangle_1^3 f(0)$$

$$a_2=\triangle_1 f(0)-\frac{1}{2}\triangle_1^2 f(0)+\frac{1}{3}\triangle_1^3 f(0) \qquad a_3=f(0)$$

(au besoin on complètera la table des différences pour obtenir les valeurs des différences successives pour la valeur zéro de la variable).

Remarque : Dans le cas où le degré du polynome n'est pas connu, l'unicité de la solution n'est pas assurée ; mais on peut s'imposer la recherche d'une fonction polynome de degré le plus petit.

Exemple d'une table de différence :

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
0	0	4 176	46 800	77 112	0
1	4 176	50 976	123 912	77 112	0
2	55 152	174 888	201 024	77 112	0
3	230 040	375 912	278 136	77 112	
4	605 952	654 048	355 248		
5	1 260 000	1 009 296			
6	2 269 296				

Cette table suggère de rechercher une fonction polynome de degré 3. On trouve : $x \mapsto 12\,852x^3 - 15\,156x^2 + 6\,480x$; avec $g(7) = 3\,710\,952$. En fait, cet extrait de table est obtenu à partir de la fonction f définie par :

$$f(x) = 4\,991x^4 - 840x^5 + 14x^6 + 12x^7 - x^8 \ , \text{ avec } f(7) = 3\,630\,312$$

Il est évident que, dans ce cas, si l'on continue la table, la dernière colonne n'est pas nulle.

4. Recherche d'une équation d'une parabole (activité 5)

A partir du tracé de quelques points obtenus par l'intermédiaire d'une table à coussin d'air, on peut demander aux élèves de faire un relevé des coordonnées de points et d'utiliser la méthode précédente pour trouver une équation de la courbe... Différentes questions se posent alors aux élèves : choisir un repère, adopter une convention pour la localisation des points..., avec quelle précision doit-on donner les coordonnées ?

5. Somme des termes d'une suite... et table de différences (activité 6)

On peut utiliser la méthode précédente pour déterminer la somme des termes de certaines suites finies simples.

1re ACTIVITE

Valeurs numériques d'une fonction polynome et différences successives

Soit f la fonction polynome de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 2{,}1x^3 - 1{,}7x^2 + 4{,}3x + 5{,}7 \quad .$$

Compléter le tableau ci-dessous :

x	$f(x)$	$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$	$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$	$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x)$	$\Delta^4 f(x) = \Delta^3 f(x+1) - \Delta^3 f(x)$
.					
.					
.					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
.					
.					
.					
.					
.					
.					

Quelles sont les propriétés que vous pouvez formuler ? Essayez de les justifier.

2e ACTIVITE

Découvrir une fonction polynome

Elève A : Proposer une fonction polynome de degré 2.
Par exemple : $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$
Programme sur HP 25 : $\uparrow\uparrow\ 2 \times 3 + \times 7 -$
Introduire le programme et donner la notice d'utilisation à votre camarade B.

Elève B : Trouver la fonction polynome de degré 2 que votre camarade A a cachée dans la machine.
(Ne pas utiliser les codes du programme).

3e ACTIVITE

Recherche d'une fonction polynome

Un de vos camarades a choisi une fonction polynome du second degré et vous donne les images qu'il a obtenues pour des valeurs entières successives de x. Ces valeurs figurent dans les deux premières colonnes du tableau ci-dessous.

Devinez la fonction qu'il a choisie.

x	$f(x)$	
3	6	
4	19	
5	38	
6	63	
7	94	

Indications :

Calculez les différences entre les nombres successifs écrits dans la deuxième colonne et inscrivez-les dans la troisième colonne. Puis remplissez de même la quatrième colonne.

Déduisez-en les coefficients de la fonction polynome. Justifiez. Quel est le nombre minimum d'images de x qui vous sont nécessaires ? Connaissez-vous une autre méthode pour trouver la réponse ? Si oui, comparez-les. Quelle est la plus simple ?

4e ACTIVITE

Recherche de fonctions polynomes. *Autres exemples*

1 — Déterminer la fonction polynome f du deuxième degré sachant que :

x	f(x)	
11	43320	
12	51650	
13	60682	
14	70416	
15	80852	
16	91990	

2 — Même question que 1.
$f(1) = -7$; $f(2) = -15{,}11$; $f(3) = -29{,}56$; $f(4) = -50{,}35$;
$f(5) = -77{,}48$; $f(6) = -110{,}95$; $f(7) = -150{,}76$.

3 — Appliquez la méthode des différences pour trouver la fonction polynome du deuxième degré sachant que :

$f(3) = 55$; $f(6) = 241$; $f(9) = 571$; $f(12) = 1045$; $f(15) = 1663$.

Vous devez adapter la démonstration car ici les valeurs de x se succèdent de 3 en 3.

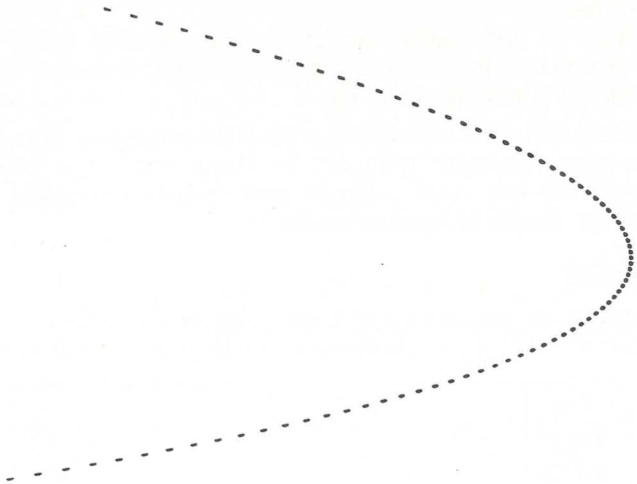
4 — Déterminer la fonction polynome f sachant que :
$f(2) = -2{,}6$; $f(3) = 26$; $f(4) = 134{,}2$; $f(5) = 404{,}2$;
$f(6) = 947$; $f(7) = 1902{,}4$; $f(8) = 3439$; $f(9) = 5754{,}2$.

5e ACTIVITE : thème interdisciplinaire mathématique-physique

Recherche d'une équation d'une parabole

La table à coussin d'air. Ce dispositif a été mis à la disposition de la plupart des lycées depuis la réforme des programmes de physique (1978). En mécanique la réforme accorde une place importante à la conservation de la quantité de mouvement et donc au vecteur vitesse.

Il existe deux types de tables à coussins d'air :
1) la table elle-même souffle l'air à travers de nombreux trous et le léger galet que l'on pose sur la table s'y déplace pratiquement sans frottement. Sa position est photographiée périodiquement :



avantage : on peut incliner suffisamment la table pour obtenir une parabole fortement concave ;

inconvénient : le marquage des points est peu précis.

2) le galet lui-même souffle l'air. Contenant un moteur et un système de marquage par étincelage électrique, il est plus lourd (voir page 32 - travail de Nathalie)

avantage : le marquage des points est précis ;

inconvénient : on ne peut guère incliner la table, sinon les résultats expérimentaux sont décevants (probablement à cause des frottements parasites).

La manipulation : On lance le galet sur la table de manière à obtenir une trajectoire d'allure parabolique. Sur la courbe de Nathalie (fig. 1, page 33) les points M_i retenus figurent sur le dessin uniquement par leurs numéros i .

Deux points consécutifs correspondent à un intervalle de temps de $\frac{4}{100}$ de seconde.

Premier problème

Comment déterminer le vecteur vitesse en un point ? Nathalie a choisi le point M_{20}. Elle constate que les droites $M_{20-\tau}\, M_{20+\tau}$ (τ prenant les valeurs 3, 7, 9) sont parallèles, et que la vitesse moyenne entre deux tels points ne dépend pas de τ. Cela l'amène à identifier le vecteur vitesse en M_{20} avec le vecteur $\overrightarrow{M_{20-5}\, M_{20+5}}$ en convenant de représenter 1 cm/s par 0,4 cm. Elle détermine de même les vecteurs vitesses en M_{10}, M_{30}, M_{35}. Je demande alors de construire, à partir d'un point S, les couples de points équipollents aux couples (M_{15}, M_{25}) ; (M_5, M_{15}) ; (M_{25}, M_{35}) etc. Surprise, les différents points obtenus sont sensiblement alignés.

Deuxième problème

La trajectoire est-elle effectivement une parabole ? Quels axes choisir ? « La droite qu'on vient de trouver », propose quelqu'un. Une perpendiculaire à cette droite fournira l'axe des x.

Nathalie a gradué ces deux axes de cm en cm, puis, elle a construit le tableau T_e des résultats expérimentaux. Les élèves ont été entraînés à découvrir des polynomes du second degré cachés dans une calculatrice. La ligne $\alpha(x)$ ne devrait comporter que des nombres égaux, ce n'est pas tout à fait réalisé ; c'est pourquoi Nathalie adopte la valeur $-0,21$ et construit un tableau théorique T_t qui lui permet de trouver les coefficients a, b, c du polynome du second degré cherché.

Pour vérifier l'adéquation de la fonction trouvée à la courbe expérimentale, les élèves viennent programmer leur fonction sur la calculatrice ; ils peuvent ainsi contrôler, pour quelques points choisis au hasard, que la valeur donnée par la calculatrice est voisine de celle mesurée sur le graphique. On attend avec une certaine émotion le verdict de la calculatrice. Pour Nathalie, ce fut satisfaisant :

$f(6) = 9,6$ à la calculatrice ; 9,3 sur le dessin.
$f(-7) = 11,3$ à la calculatrice ; 11,3 sur le dessin.

DOCUMENT ELEVE

Le 21/5/80 *Nathalie*

Le Lancement du galet

T_e

x	− 10	− 8	− 6	− 4	− 2	0	2	4	6	8	10
f(x)	10,6	11,2	11,6	11,7	11,7	11,4	10,8	10,1	9,3	8,3	7
△(x)	0,6	0,4	0,1	0	− 0,3	− 0,6	− 0,7	− 0,8	− 1	− 1,3	
α(x)		− 0,2	− 0,3	− 0,1	− 0,3	− 0,3	− 0,1	− 0,1	− 0,2	− 0,3	

$$\frac{-0{,}2 + (-0{,}3) + (-0{,}1) + (-0{,}3) + (-0{,}3) + (-0{,}1) + (-0{,}1) + (-0{,}2) + (-0{,}3)}{9} = \frac{-1{,}9}{9} = -0{,}21\ldots$$

T_t

x	− 10	− 8	− 6	− 4	− 2	0	2	4	6	8	10
f(x)				11,7	11,7	11,49					
△(x)				0	− 0,21	− 0,42					
α(x)		− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21	− 0,21

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$ $\triangle(x) = f(x+2) - f(x) = 4ax + 4a + 2b$

$\triangle(x+2) = 4a(x+2) + 4a + 2b$ $\alpha(x) = 8a.$

$8a = —0{,}21$ $\triangle(x) = 4a\,x + 4a + 2b$

$\boxed{a = —0{,}02625}$ $= —0{,}105x—0{,}105 + 2b$

$\triangle(—4) = 0 \rightarrow —0{,}105(—4)—0{,}105 + 2b = 0$

$0{,}420—0{,}105 = —2b$ $\boxed{b = —0{,}1575}$

$f(x) = —0{,}02625x^2—0{,}1575x + c$

$f(—4) = 11{,}7$ $f(—4) = —0{,}02625.16 + 0{,}1575.4 + c$

$11{,}7 = 0{,}21 + c$ donc $\boxed{c = 11{,}49}$

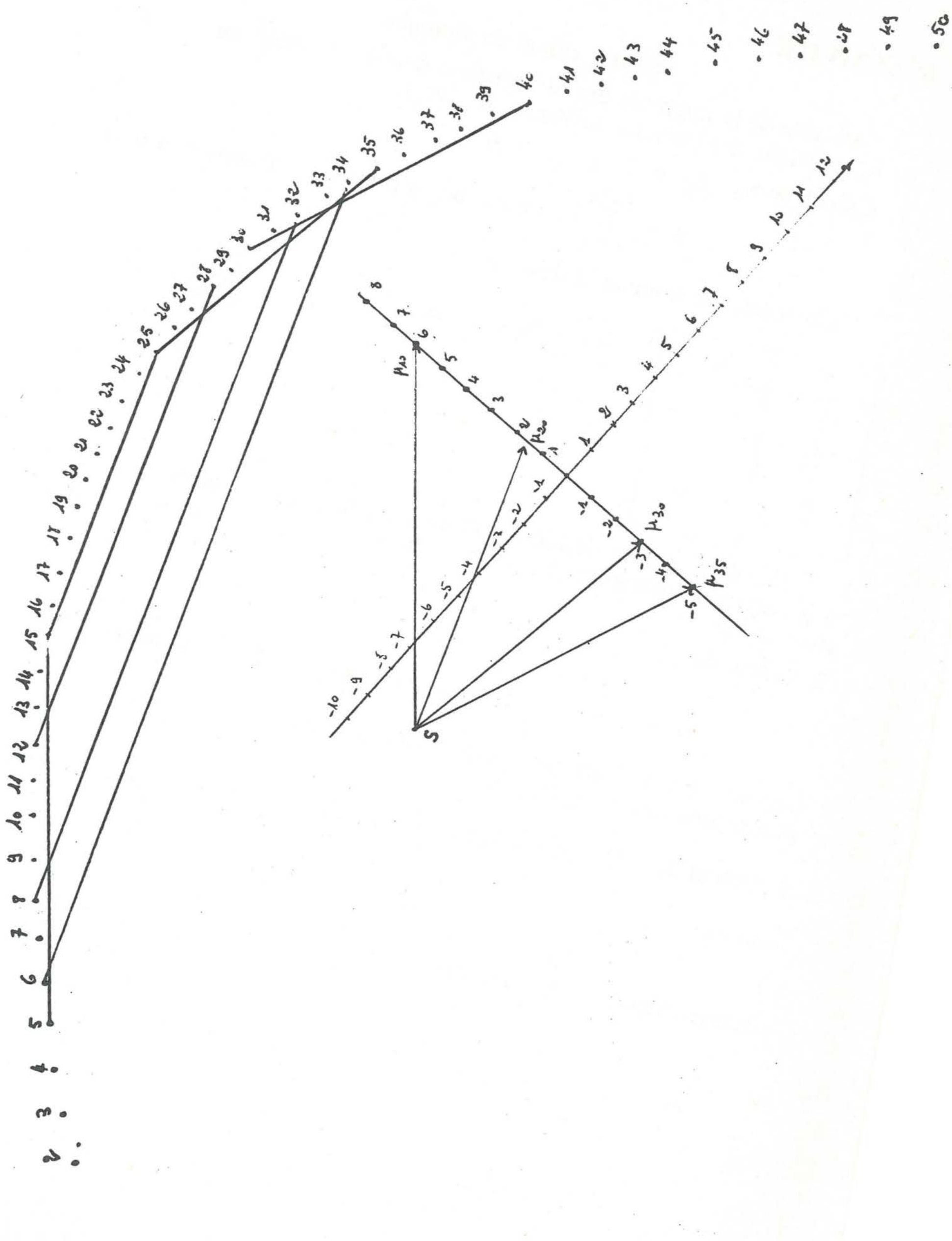
Vérification : $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) = —0{,}02625x^2—0{,}1575x + 11{,}49$

$f(—4) = 11{,}7$ $f(—4) = —0{,}02625 \times (—4)^2—0{,}1575.(—4) + 11{,}49$

$f(—4) = —0{,}42 + 0{,}63 + 11{,}49 = 11{,}7$

Polynome $f(x) = —0{,}02625x^2—0{,}1575x + 11{,}49.$

Nathalie 2A4



6e ACTIVITÉ

Suites, calcul de sommes

A l'aide de la méthode des différences, peut-on prévoir, en fonction de n, la valeur des sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}_*$).

1. **Calcul de S_n** : $S_n = 1+2+\ldots+n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} i \text{ somme des } n \text{ premiers naturels non nuls.}$$

Complétez le tableau ci-dessous :

n	S_n	$\Sigma_n = S_{n+1} - S_n$	$\Sigma'_n = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n$
1			
2			
3			
4			
5			

En observant la dernière colonne, on peut proposer en se référant aux activités antérieures $S_n = an^2+bn+c$ où a, b, c sont des entiers à déterminer.

2. **Calcul de S'_n** : $S'_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \text{ ; somme des } n \text{ premiers naturels}$$

impairs. En utilisant un tableau analogue au tableau ci-dessus, donner une expression de S_n en fonction de n.

3. **Calcul de** $\sum_{i=1}^{n} i^2$, somme des carrés des n premiers nombres naturels non nuls.

Autres calculs : $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$; $\sum_{i=1}^{n} i^3$; $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$.