6

UTILISATION DE CALCULATRICES PROGRAMMABLES

Notre lycée polyvalent est équipé depuis quatre ans d'une douzaine de calculatrices programmables. Nous les utilisons particulièrement en Travaux Dirigés de Seconde, C et T.

Nous tenons à ce que les élèves ne perçoivent pas ces machines comme un nouvel avatar de la magie. Mais qu'au contraire, grâce à une initiation progressive, ils parviennent à une réelle compréhension de leur mode de fonctionnement, et aussi à une attitude active, inventive, face à un instrument qui peut facilement intimider le débutant. Ce n'est qu'exceptionnellement que nous fournissons un programme tout fait, utilitaire. A ce propos, ceux qui sont indiqués dans les notices de fabricant sont, en général, mal adaptés et surtout peu formateurs (1).

I. Etape "calculatrice"

Il nous paraît nécessaire de passer du temps (au moins 2 h) sur cette étape, dans deux buts :

— se familiariser avec l'usage de la machine

— revoir sous un autre éclairage des notions fondamentales de calcul.

I.1 - Sur les nombres

— notation scientifique, utilisant les puissances de 10 ;

— principe de l'arrondi pour la dernière décimale : par exemple affichage de $\frac{2}{3}$;

— priorité (éventuelle) à la multiplication et à la division par rapport à l'addition et à la soustraction ; calculs en chaîne ;

— utilisation des mémoires ;

— moyens de calculer les puissances 3^e, 4^e... d'un nombre éventuellement négatif. Par exemple : $\times\ x^2$; x^2x^2 ; $\times\ x^2x^2$...

(1) Il n'est pas nécessaire que chaque élève possède une calculatrice programmable. Mais, si l'objectif est d'apprendre aux élèves à programmer, une calculatrice pour deux élèves est indispensable.

Sur les nombres, deux prises de conscience nous paraissent nécessaires :

— on peut aussi se tromper en calculant avec une machine, même si, le plus souvent, l'erreur provient de l'opérateur. Il faut donc contrôler l'*ordre de grandeur* du résultat ;

— la calculatrice, le plus souvent, n'affiche que des *valeurs approchées*, et même ne "connaît" que des valeurs approchées, éventuellement plus précises que les précédentes (souvent, deux décimales supplémentaires). Par exemple, calcul de $(\sqrt{2}-1{,}414)\times 10^4$.

I.2 - Sur les fonctions

— inventaire des fonctions disponibles (et connues des élèves), y compris le "passage à l'opposé", touche distincte du signe − opératoire ;

— à la différence des opérations, on entre un seul nombre, qui est aussitôt remplacé par son image ;

— ensembles de définition : par exemple, essais de calcul de $\sqrt{-2}$, $\frac{1}{0}$;

— composition des fonctions : il suffit d'appuyer successivement sur les deux touches ! Par exemple $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{|x|}$, $(\sin x)^2$, $\sin(x^2)$ ...;

— fonction réciproque d'une fonction.

II. Programmation

II.1 - Fonctions

a) *Sensibilisation*

On donne aux élèves une fonction simple, par exemple un polynome du second degré, à représenter par points. Les calculs sont vite fastidieux, surtout si on veut une courbe précise. On fournit alors le programme de cette fonction en expliquant, à ce propos, le rôle des touches correspondantes concernant : mode programme et mode calcul, instructions, adresses, compteur d'instruction, ordre d'arrêt ...

b) *A vous de jouer !*

Les élèves sont alors en mesure de programmer n'importe quelle fonction courante. Ils doivent, bien sûr, vérifier l'exactitude des résultats par plusieurs contrôles à la main. Cette phase nous paraît pédagogiquement très intéressante. Elle fait apparaître :

— la réalité d'une fonction, suite bien définie d'instructions ;

— par contre, le caractère volatil de la fameuse variable (au début, il se trouve toujours des gens qui cherchent la touche x...). Intérêt d'une mise en mémoire pour utiliser le *même* nombre dans les calculs successifs.

Ces programmes sont surtout intéressants s'ils sont utilisés. Ce peut être (voir exemple détaillé en annexe) :

— pour une représentation graphique précise ;

— pour la résolution approchée, mais néanmoins précise, d'une équation mise sous la forme $f(x) = 0$, l'existence des racines étant admise à partir du graphique ;

— pour la confirmation du sens de variation, et spécialement la recherche d'un maximum ou d'un minimum.

Les tâtonnements correspondants nous paraissent très formateurs. Les élèves sont amenés à organiser leurs essais pour en limiter le nombre. Ils retrouvent parfois empiriquement des méthodes telles que l'interpolation linéaire. Le plus souvent, bien incapables d'expliquer leur démarche, ils avancent pourtant vite vers l'objectif fixé... parfois plus vite que leur professeur...

II.2 - Suites

a) *Suites récurrentes*

Quand une fonction est programmée, il arrive que des élèves, au lieu d'introduire arbitrairement une nouvelle valeur de la variable, utilisent l'image qui vient d'être calculée : ils réinventent par là la notion de suite récurrente.

Il est facile et "payant" de programmer une suite récurrente, par exemple : $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n}$, en prévoyant à chaque tour, soit un arrêt bref, soit un relancement par l'opérateur.

b) *Suites additives (séries)*

Soit par exemple à faire calculer $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Plutôt que de vouloir économiser une mémoire par un stratagème, il paraît plus parlant d'en utiliser deux :

— une pour la valeur de n , que l'on augmente de 1 à chaque tour,

— une pour la valeur de S_n, que l'on augmente de $\dfrac{1}{n}$ à chaque tour.

c) *Limites*

Pas besoin d'un cours pour que les élèves se demandent, sur une suite donnée, "ce qui va se passer à la fin".

— Dans le premier exemple indiqué, un graphique montre que l'on oscille autour d'une "valeur limite" dont on a des encadrements successifs de plus en plus précis. A l'étonnement général, cette valeur ne paraît pas dépendre du terme initial U_0 choisi.

— Dans le second, toutes les hypothèses sont permises. En tout cas, ce n'est pas la machine qui "démontrera" la convergence même si, après quelques années d'effort, son affichage reste constant...

— Voici un troisième exemple, lui aussi vécu en classe, et concernant une suite géométrique. Si la population mondiale continue à croître comme entre 1970 et 1980, le coefficient multiplicateur en n années est $(1{,}019)^n$. Avec la calculatrice, on peut vite savoir, dans l'hypothèse indiquée, non seulement combien nous serons en l'an 2000 ou 2100, mais aussi dans combien de temps nous serons deux fois plus nombreux, cent fois plus nombreux... Ce type d'exemple paraît plus motivant que d'étudier le comportement de $2x$ ou de x^2 pour x grand.

II.3 - Tests

On franchit une nouvelle étape avec l'utilisation d'un test. Il suffit de prévoir une question à réponse binaire et la suite à donner dans les deux cas de réponse. Lors de l'exécution, la machine prend d'elle-même le bon aiguillage. Voici trois cas où nous l'avons utilisé avec succès.

a) *Fonction définie par intervalles*

Soit par exemple f définie par :
— si $x<2$, $f(x)=2x-1$
— sinon $f(x)=x^2-4$.

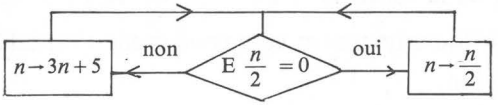
La programmation d'une telle fonction fait apparaître au moins deux points :
— il n'y a qu'une application de **R** dans **R**
— il est plus facile de tracer sa représentation graphique au voisinage de 2 et l'idée de limite apparaît naturellement.

b) *Un exemple de suite entière*

Soit l'application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par :
— si n est pair, $f(n)=\frac{n}{2}$
— sinon $f(n)=3n+5$

et la suite récurrente : $U_{n+1}=f(U_n)$ (bien sûr, elle n'est pas présentée ainsi aux élèves !). Par groupes, les élèves cherchent "ce qui se passe" en partant de petits nombres, et voient apparaître des cycles. Mais pour de plus grands ?

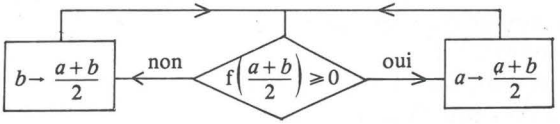
Pour programmer cette suite, il faut une touche "partie entière". Voici un organigramme (une mémoire suffit).



c) *Résolution d'équation par dichotomie*

Soit une "bonne" fonction f qui paraît croissante dans $[a,b]$, et telle que $f(a)<0$; $f(b)>0$. On a tout lieu de penser que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[a,b]$ une solution unique.

C'est à la portée d'un élève de Seconde muni d'une calculatrice programmable d'en trouver une valeur approchée, à la précision de cet instrument. Il suffit de tester le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et de remplacer alors, soit a, soit b, par $\frac{a+b}{2}$ (pour plus de précision, voir annexe).



Dans ces activités, nous limitons nos ambitions. Nous ne cherchons ni à exploiter toutes les possibilités de la machine, ni à optimiser les programmes, en cherchant systématiquement à réduire le nombre d'instructions ou de mémoires. Quand un élève a fait son programme, le plus important, c'est qu'il fonctionne.

Et s'il ne fonctionne pas, il faut arriver à voir pourquoi, et à le montrer à son auteur. Cela suppose pour le professeur un minimum de familiarité avec l'instrument et sans doute un certain nombre d'heures en tête à tête avec lui. Effort largement payé par la satisfaction de ne plus être, dans la classe, celui qui apporte tout, théorèmes, questions et réponses, mais un simple médiateur qui propose, écoute, dialogue.

Enfin, ces jeunes à qui on aura donné le temps d'approcher progressivement ce monde de l'informatique, qui auront constaté que ce n'est pas l'ordinateur qui choisit, peut-être seront-ils plus difficiles à berner par certains discours de la publicité ou du pouvoir...

Annexe

Etude de la fonction $f : x \mapsto -4x^2+3x+3$ sur TI57

1) Calcul de quelques images et commencement d'un tableau de valeurs.

2) Programmation

a) LRN (passage en mode programme)

b)

Instructions	*Commentaires*
STO 1	la variable x est recopiée dans la mémoire 1
$x^2 \times 4 +/-$	$x^2 \times (-4) = -4x^2$
+ RCL 1	retour de x
$\times 3 + 3 =$	calcul de $f(x)$
R/S	ordre d'arrêt pour lecture
RST	mise à 0 du compteur d'instructions

c) LRN (retour au mode calcul). RST (inutile semble-t-il sur les derniers modèles)

d) exécutions du programme
- frappe d'une valeur (pour la variable)
- R/S

autant de fois que l'on veut.

3) Tableau de valeurs et tracé précis d'une représentation graphique

Ce tracé amène deux questions :
— maximum de f
— intersections avec l'axe des abscisses.

4) Résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Approche progressive, en quatre étapes :

a) Le graphique fait apparaître deux solutions probables α et β avec

$$1 < \alpha < 2 \quad \text{et} \quad -1 < \beta < 0 .$$

b) On cherche à préciser ces valeurs, par tâtonnement. Beaucoup d'élèves se montrent fort habiles dans cette recherche ; par exemple, l'un a obtenu sept décimales justes en une dizaine de minutes.

c) On peut systématiser les essais, et les faire effectuer par la machine, selon l'organigramme indiqué ci-dessus.

On cherche des encadrements de α :

$$a < \alpha < b$$

* Choix des mémoires

numéro	1	2	3
contenu	a	b	$\frac{a+b}{2} = c$

Initialisation des mémoires: 1 STO 1 , 2 STO 2 .

Programme (après LRN).	*Commentaires*
RCL 1 + RCL 2 = : 2 =	Calcul de $c = \frac{a+b}{2}$
R/S STO 3 (ou: Pause)	Affichage de c et mise dans M3
$x^2 \times 4 +/- +$ RCL 3 $\times$ 3 + 3 =	Calcul de f(c)
$x \geqslant t$	A-t-on: f(c) $\geqslant 0$?
GTO 1	Si oui, aller à LBL 1
RCL 3 STO 2 RST	Si non, mettre c dans M1 et boucler
LBL 1 RCL 3 STO 1 RST	Si oui, mettre c dans M2 et boucler.

* Exécution: LRN (RST) R/S R/S R/S ...

En moins de deux minutes on obtient sept décimales invariantes. On peut être certain de l'encadrement de α en faisant sortir alors les contenus des mémoires 1 et 2.

Les élèves suivent fort bien le déroulement des opérations. Voici les premiers états des mémoires 1, 2, 3:

1	2	3
1	2	1,5
1	1,5	1,25
1,25	1,5	1,375
1,25	1,375	1,3125
....	....	....

Le même programme peut servir à rechercher β.
Il suffit de changer l'initialisation: $a = 0$
$b = -1$

d) Résolution mathématique

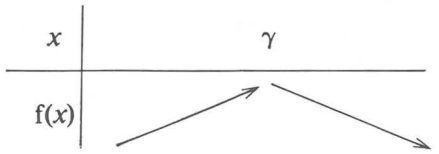
Par la classique transformation du polynome du second degré on parvient aux racines:

$$x' = \frac{3 + \sqrt{57}}{8} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{3 - \sqrt{57}}{8} .$$

On reconnaît: $\alpha = x'$ et $\beta = x''$.

5) *Recherche du maximum*

a) Le graphique fait apparaître un tableau de variations du type:



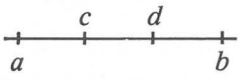
avec $\gamma \simeq 0{,}5$.

b) On cherche à préciser γ, par tâtonnement. C'est plus délicat que pour α et β, puisque, à chaque étape, il faut considérer non plus deux, mais *trois* valeurs. Par exemple les inégalités : $f(0,3) < f(0,4)$ et $f(0,4) > f(0,5)$ prouvent seulement : $0,3 < \gamma < 0,5$. Là encore, beaucoup d'élèves se montrent efficaces (pas nécessairement ceux qui font de "bons devoirs"), et parviennent assez vite à : $\gamma \simeq 0,375$. Ils sont troublés de constater que $f(x)$ ne semble pas varier quand x varie de 10^{-4} autour de γ. La fonction serait-elle constante sur un petit intervalle ?

c) La justification mathématique du sens de variation et de la valeur de γ, ainsi que la réponse à la question précédente, s'obtiennent assez aisément à l'aide du taux de variation.

d) Il est possible de faire effectuer le tâtonnement par la calculatrice, par exemple selon l'organigramme suivant :

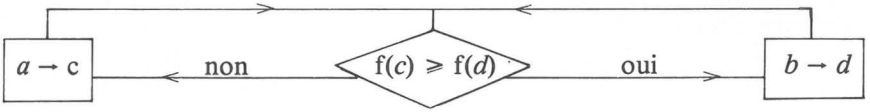
Soit un encadrement $a < \gamma < b$.



On fait comparer les images de c et d :

$$c = \frac{2a+b}{3} \; ; \; d = \frac{a+2b}{3}$$

(on peut trouver ces écritures à l'aide du barycentre)



Il faut donc quatre mémoires.

Mais la programmation de ce processus paraît difficile pour un élève de Seconde.