8

ACTIVITES NUMERIQUES : UNE SUITE A RECURRENCE LINEAIRE

OBJECTIFS : Le but de cette étude est de :

— faire manipuler les élèves avec une suite de nombres ;
— de les sensibiliser à un algorithme ;
— de leur faire découvrir pas à pas un langage adapté aux suites ;
— de leur faire utiliser une calculatrice ;
— d'utiliser un graphique lié à une activité numérique.

Prérequis

- calculs dans l'ensemble des décimaux, ou des rationnels.
- relation d'ordre $\leqslant$ et propriétés.
- représentation graphique d'une fonction affine.

Bibliographie :

Bulletin A.P.M. n° 308 - Avril 1977. Article de M. Glaymann. *Initiation aux méthodes itératives et utilisation de calculateurs avec des enfants.*

Plan :

- Document élève.
- Commentaires sur le document élève.
- Quelques remarques d'élèves.
- Programmes.

Document élève.

Suite de nombres

1. Calcul

Ecrire sous forme décimale les nombres définis ci-dessous :

$$
\begin{array}{ll}
u_1 = 2 & \\
u_2 = 0{,}5 \times u_1 + 3 & u_2 = 4 \\
u_3 = 0{,}5 \times u_2 + 3 & u_3 = 5 \\
u_4 = 0{,}5 \times u_3 + 3 & u_4 = \\
u_5 = 0{,}5 \times \ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

2. Faire un programme de calcul de cette suite de nombres

Remplir le tableau ci-contre (1ère et 2ème colonne) jusqu'au vingtième au moins. Indiquer par un astérisque si c'est une valeur approchée.

i	u_i	$u_{i+1} - u_i$
1	2	
2	4	2
3	5	1
4	—	—

3. Observer les nombres obtenus

Que peut-on dire ? Ecrire toutes les idées que vous suggère ce tableau de nombres.

4. Comment organiser les idées

4.1. Comparer les nombres u_1, u_2, u_3, ...

4.2. Interprétation géométrique :
Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $(O, \vec{i})$ désigne l'axe des abscisses, $(O, \vec{j})$ l'axe des ordonnées.

Tracer l'ensemble D des points M $(x; 0{,}5x+3)$ (x réel). Tracer l'ensemble $\triangle$ des points N de coordonnées $(x\ ;\ x)$; (x réel).
Puis placer les points $I_1(u_1\ ;\ O)$; $M_1(u_1\ ;\ 0{,}5u_1+3)$
$N_2(u_2\ ;\ u_2)$; $I_2(u_2\ ;\ 0)$
$M_2(u_2\ ;\ 0{,}5u_2+3)$; $N_3(u_3\ ;\ u_3)$... ainsi de suite.
S'il y a d'autres remarques, les noter.

4.3. Calculer $u_2 - u_1$; $u_3 - u_2$; $u_4 - u_3$; ... ; $u_{i+1} - u_i$,...
(Remplir la 3ème colonne du tableau).
Peut-on en déduire que, pour tout entier i non nul, $u_i < u_{i+1}$?

4.4. A partir de quel entier k a-t-on : $|u_{k+1} - u_k| < 10^{-3}$? Même question pour : $|u_{k+1} - u_k| < 10^{-4}$...

4.5. Comment peut-on choisir l'entier j pour que l'on ait : $|u_j - 6| < 10^{-7}$? Démontrer que, pour tout entier n non nul, si $n > j$ alors $|u_n - 6| < 10^{-7}$.

5. D'autres exemples.... généralisation

5.1. Reprendre l'étude précédente en changeant la valeur initiale

$u_1 = 1{,}5$	$u_2 = 0{,}5 \times u_1 + 3$...	$u_k = 0{,}5 \times u_{k-1} + 3$
$u_1 = 8$	$u_2 = 0{,}5 \times u_1 + 3$...	$u_n = 0{,}5u_{n-1} + 3$
$u_1 = 6$	$u_2 = 0{,}5 \times u_1 + 3$...	$u_{i+1} = 0{,}5 \times u_i + 3$

5.2. Reprendre l'étude précédente avec :

	$u_1 = 2$	$u_2 = 0{,}7u_1 + 4$	$u_3 = 0{,}7u_2 + 4$.....
5.3.	$u_1 = 2$	$u_2 = 1u_1 + 3$	$u_3 = 1u_2 + 3$.....
5.4.	$u_1 = 2$	$u_2 = 2u_1 + 3$	$u_3 = 2u_2 + 3$.....

5.5. $u_1 = 2$ $\quad u_2 = -u_1+3 \quad u_3 = -u_2+3.....$

5.6. $u_1 = 2$ $\quad u_2 = -2u_1+3 \quad u_3 = -2u_2+3.....$

.....d'une façon générale, u_1 est un nombre donné et les autres se calculent par la relation $u_{n+1} = au_n + b$, $n \in \mathbf{N}_*$; a et b sont deux nombres réels donnés.

Faire d'autres essais. Indiquer un classement possible des différents cas en choisissant une des propriétés mises en évidence (chaque fois qu'il est possible, faire une démonstration).

• Commentaires sur le document élève

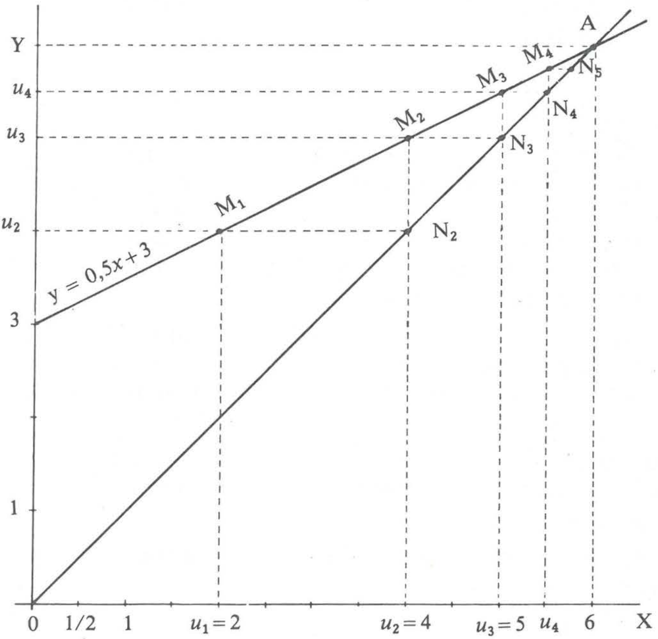
Les élèves sont amenés à faire beaucoup de calculs simples, d'où l'intérêt d'utiliser des calculatrices, afin que les objectifs mathématiques ne soient pas « noyés ».

f désigne la fonction définie par $f(x) = 0{,}5x+3$; $x \in \mathrm{R}$.

On peut utiliser des égalités du type $f(x)-f(y) = k.(x-y)$.
En effet : $u_i = f(u_{i-1})$; $u_{i+1}-u_i = f(u_i)-f(u_{i-1}) = 0{,}5\times(u_i-u_{i-1})$.
En posant $d_i = u_{i+1}-u_i$:

$u_3-U_2 = 0{,}5\times(u_2-u_1)$; $d_2 = 0{,}5d_1$; $d_3 = 0{,}5\times d_2 = (0{,}5)^2\times d_1$
$d_4 = 0{,}5\times d_3$; $d_4 = (0{,}5)^3\, d_1...$; $d_i = (0{,}5)^{i-1}\, d_1$.

Le paragraphe 4.2. du document élève nous montre comment on peut mettre en évidence sur un graphique les nombres u_1, u_2, u_3..., puis les différences d_1, d_2, d_3... et la relation entre ces différences.



$d_1 = M_1N_2$
$d_2 = M_2N_3$
$d_3 = M_3N_4$
$d_4 = M_4N_5$

L'observation de la suite des nombres, puis du graphique, suggère à l'élève un certain nombre de propriétés.

- le signe de $u_{i+1} - u_i$ est le même que celui de $u_i - u_{i-1}$.
- le signe de $u_{i+1} - u_i$ est le même que celui de $u_2 - u_1$.
- la suite (u_i) est croissante.
- la différence entre deux termes consécutifs, à partir d'un certain rang, peut être aussi petite que désiré.
- c'est l'observation du tableau de nombres qui nous permet de suggérer un entier k tel que $|u_{k+1} - u_k| < 10^{-4}$ (ou encore $(0,5)^{k-1} \times 2 < 10^{-4}$)
- la suite converge vers 6.

Le tableau de nombres peut être complété par une quatrième colonne, celle des différences $u_i - 6$. On remarque que l'on peut utiliser des égalités du type : $f(x) - 6 = \frac{1}{2}.(x - 6)$.

En effet :

$$u_{i+1} = f(u_i) = 0,5u_i + 3 \ ;$$
$$u_{i+1} - 6 = 0,5u_i - 3 \ u_{i+1} - 6 = 0,5 \times (u_i - 6)$$
$$u_2 - 6 = 0,5(u_i - 6) \ ; \ u_3 - 6 = 0,5 \times (u_2 - 6) = (0,5)^2(u_1 - 6)$$
$$u_{i+1} - 6 = 0,5^2.(u_{i-1} - 6) = (0,5)^i \times (u_1 - 6)$$

L'observation du tableau nous permet de proposer un entier j tel que :
$|u_j - 6| < 10^{-7}$ (ou encore $(0,5)^{i-1}. |u_1 - 6| < 10^{-7}$)

Un autre graphique peut être proposé aux élèves, en plaçant i en abscisse et u_i en ordonnée.

Quelques remarques d'élèves

- En observant les nombres obtenus, on voit que quand i croît, u_i croît également, mais plus i est important, moins la différence $(u_{i+1} - u_i)$ est importante. Ce tableau de nombres suggère une courbe qui est très inclinée pour des abscisses faibles mais qui finit par être presque parallèle à l'axe des abscisses quand celles-ci sont importantes. La fonction tend alors à devenir constante mais sans jamais atteindre 6.

- A partir du chiffre 6, les nombres d'indice pair se terminent par 875 et les nombres d'indice impair par 375. La calculatrice n'ayant que 9 chiffres après la virgule, u_i est une valeur approchée à partir du nombre 13. u_i tend vers 6 sans y parvenir.

- On constate qu'à partir de u_{11}, la fonction est constante. On constate également que la différence $u_{i+1} - u_i$ diminue de moins en moins rapidement pour finir par être nulle.

- J'ai une autre remarque : les ordonnées des points sont toujours supérieures aux abscisses.

• **Programmes**

Les différents programmes donnés ici sont ceux correspondant à l'utilisation d'une calculatrice programmable (TI57 ou HP33) ; il est facile d'adapter les instructions à toute autre calculatrice programmable, voire même à une calculatrice non programmable ; dans ce dernier cas, l'élève note des résultats intermédiaires et effectue lui-même les tests.

Il est certainement possible de proposer des programmes plus élégants. Ce sont pour la plupart d'entre eux des programmes d'élèves.

Programme de calcul des nombres de la suite (§2).

×	**Notice TI57**	↑	**Notice HP 33**
.	OFF ON	.	OFF ON
5	LRN introduire le prog LRN	5	en mode prgm introduire les
+	RST	×	instructions
3	introduire $u_i = 2$ frapper RS	3	en mode RUN. GT0 00
=		+	
2nd Pause	lire u_2, u_3...	fPause	introduire $u_i = 2$ frapper RS
RST	pour arrêter appuyer sur RS	GT0 01	lire u, u_2...
R/S			pour arrêter appuyer sur RS

Le programme précédent peut être complété pour obtenir les différences de termes consécutifs de la suite.

	Notice TI57		**Notice HP33**
+/−	OFF ON	CHS	OFF ON
ST01	1) LRN introduire	ST01	1) en mode PRGM :
+/−	le programme LRN	CHS	introduire le programme
×	2) RST	↑	2) en mode RUN. GT000
.	3) introduire $u_i = 2$	.	3) introduire $u_i = 2$
5	puis frapper R/S	5	frapper R/S
+	4) lire u_2, $u_2 - u_1$, u_3, $u_3 - u_2$,...	×	lire u_2, $u_2 - u_1$; u_3 ; $u_3 - u_3$....
3	5) pour un autre essai	3	pour arrêter, appuyer sur R/S
=	appuyer sur R/S puis	+	pour un autre essai
2nd Pause	reprendre au paragraphe 2	fPause	appuyer sur GT000 et
2nd Pause		fPause	reprendre au paragraphe 3
ST00		ST00	
SUM1		ST0+1	
RCL1		RCL1	
2nd Pause		fPause	
2nd Pause		fPause	
2nd Pause		fPause	
RCL0		GT001	
RST			
R/S			

Le paragraphe 4.4. du document-élève propose d'ajouter au programme un test d'arrêt.

	Notice TI 57		**Notice** HP 33
+/− ST0 1 +/− X 0 . 5 + 3 = 2nd Pause 2nd Pause ST00 SUM 1 *RCL1 2nd $\|x\|$ 2nd Pause 2nd Pause 2nd Pause 2nd INV $x \geq t$ R/S RCL0 RST R/S	1) LRN introduire le programme LRN 2) RST 3) introduire l'incertitude de $\|u_{i+1} - u_i\|$; par exemple 10^{-4} : frapper 1EE+/−4 ST07 4) introduire $u_1 = 2$ puis frapper sur R/S 5) lire u_2 ; $\|u_2 - u_1\|$; u_3 ; $\|u_3 - u_2\|$;... lorsque les calculs sont terminés, est affichée la première différence $\|u_i - u_{i-1}\|$ inférieure à 10^{-4}, en rappelant le contenu de la mémoire R_0, on a le dernier u_k calculé.	CHS ST0 1 CHS ↑ . 5 X 3 + fPause fPause ST00 ST0+1 *RCL1 gABS fPause fPause fPause RCL3 f$x>y$ R/S RCL0 GT0 01	1) en mode PRGM introduire les instructions 2) en mode RUN : GT000 3) introduire l'incertitude ST03 4) introduire $u_1 = 2$ puis frapper R/S. 5) lire u_2, $\|u_2 - u_1\|$; u_3 ; $\|u_3 - u_2\|$ lorsque les calculs sont terminés, est affichée l'incertitude donnée. En rappelant la mémoire R_0, on a le dernier terme calculé.

* **Remarque :** on peut ajouter les instructions 1 SUM 2 (ou 1 ST0+2) ce qui permet de compter le nombre de termes calculés ; après arrêt de la calculatrice on presse sur RCL2 pour obtenir l'entie k. Ne pas oublier de mettre 0 dans R_2 pour un autre essai.

Après avoir remarqué que les nombres sont rangés dans l'ordre croissant et que la suite converge vers 6 (des démonstrations sont possibles dans certaines classes) on peut rechercher la plus petite valeur de l'entier j vérifiant $|u_j - 6| < 10^{-7}$, par exemple en utilisant le programme :

X	**Notice TI 57**	↑	**Notice HP 33**
. 5 + 3 = 2nd Pause ST01 1 SUM0 RCL1 − 6 = 2nd $\|x\|$ 2nd INV x ≥ t GT01 RCL1 RST 2nd Lbl 1 RCL0 + 1 = R/S	1) LRN introduire le programme LRN 2) RST 3) OST00 4) 1EE +/− 7 ST07 5) introduire $u_1 = 2$ puis frapper R/S 6) lire les u_i puis la machine affiche le rang du premier terme vérifiant $\|u_j - 6\| < 10^{-7}$. Pour un autre essai, reprendre au paragraphe 2.	. 5 X 3 + fPause ST01 1 ST0 + 0 RCL1 6 − gABS RCL3 fx > y GT020 RCL1 GT001 RCL0 1 +	1) en mode prgm. introduire les instructions. 2) en mode run : GT000 OST00 3) 1 EEX 7 CHS ST03 4) introduire $u_i = 2$ puis frapper R/S 5) lire les u_i puis la machine affiche le rang du premier terme vérifiant $\|u_j - 6\| < 10^{-7}$. Pour un autre essai reprendre un paragraphe 2.

L'étude de la suite (u_n) définie par u_1 et la relation $u_{n+1} = au_n + b$; $n \in \mathbf{N}_*$, a et b deux nombres donnés, peut être abordée par le calcul numérique ou géométriquement. Ayant une vingtaine de résultats, les élèves peuvent alors classer puis, éventuellement, justifier.

Programme TI 57 :
ST01 R/S ST02 R/S ST00 2nd Lbl 1 (RCL 0 × RCL 1 + RCL 2) 2nd Pause 2nd Pause GT01 R/S.

Programme HP 33 :
ST01 R/S ST02 R/S ST00 RCL0 RCL1 × RCL2 + fPause fPause GT0O6.

Notice : OFF ON
1) introduire le programme
2) initialiser en mode calcul
3) introduire a R/S, b R/S, u_1 R/S
4) lire u_2, u_3, u_4, u_5.... pour arrêter, appuyer sur R/S. Pour un autre essai reprendre au paragraphe 2.