9

EXEMPLE DE SUITE CONVERGEANT VERS π : METHODE DES ISOPERIMETRES

Pour obtenir des compléments d'information sur π, on recommande la lecture de la brochure que le Petit Archimède a consacrée à la question.

OBJECTIFS :

- *Calculs sur les radicaux*
- *Retour sur le programme de 3^e : relations métriques, constructions géométriques*
- *Initiation au processus de récurrence*
- *Usage de calculatrices, programmables ou non*

PRE-REQUIS :

- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Dans un triangle ABC rectangle en A :$AH^2 = BH.CH$ (H étant le pied de la hauteur issue de A).
- Le théorème sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.
- Quelques notions de programmation.

Déroulement du thème. Classe de 2^e C (9 garçons, 6 filles)

6 heures réparties sur un mois avec des compléments de travail à la maison.

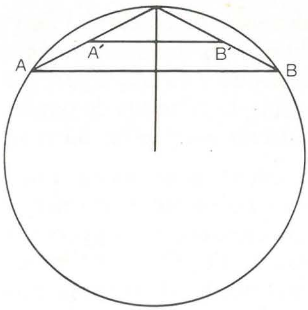
Je demande d'abord aux élèves de construire un cercle de rayon aussi grand que possible, puis d'y inscrire un carré. Facile... Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de construire sur cette figure déjà en place un octogone régulier de même périmètre que le carré.

Apparaissent des octogones de périmètres plus grands, plus petits, et même des octogones non réguliers ; les élèves sont facilement convaincus de leur erreur lorsque je leur rappelle les vertus toutes simples de l'inégalité triangulaire.

Enfin, au bout d'une demi-heure de recherche, deux d'entre eux obtiennent un bon octogone. Pour les autres, le travail se poursuivra à la maison.

A la séance suivante, surprise ! tout le monde n'a pas un bon octogone. Cela m'amène à présenter au rétroprojecteur le principe de la construction (fig. 1).

Figure 1



Si AB est le côté d'un polygone régulier de n côtés,
A′B′ est le côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés.

Les élèves ayant dès lors une figure exacte, je leur demande de construire un polygone régulier de 16 côtés ayant même périmètre que l'octogone.

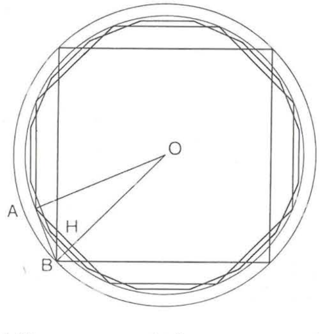
Nouveau blocage qui provient du fait que, contrairement à ce qui se passait dans la phase précédente, le cercle circonscrit au nouvel objet (l'octogone), si utile pour la construction, n'est pas tracé.

Cette recherche qui s'avère délicate est donnée comme travail à la maison.

Le compte rendu révèle encore de nombreuses erreurs qu'on peut réfuter grâce à l'inégalité triangulaire, mais aussi, pour certains, une maladresse réelle dans la manipulation des instruments.

Dans cette phase, le travail réclame effectivement beaucoup de soin. Une seule élève présente un travail net et correct. Je dois donc montrer encore au rétro-projecteur le principe de la construction et finalement tout le monde construit la figure (2).

Figure 2



Que se passe-t-il si l'on poursuit les constructions suivant un processus analogue ?

"Le polygone va devenir un cercle". C'est la réponse la plus fréquente. J'indique alors que ce travail a été entrepris dans la perspective de calculer des approximations de π (π qui figure au-dessus du tableau avec 50 décimales. Il s'agit en fait de la bande de papier que le Petit Archimède a eu l'excellente idée d'insérer à cet effet dans sa brochure sur π).

Comment donc procéder pour avoir une approximation de π ? Mesurer le périmètre d'un polygone et diviser le nombre obtenu par le double du rayon du cercle circonscrit, suggère un élève. Pour des raisons d'ordre pratique je demande d'opérer sur l'apothème et non le rayon, ce qui ne soulève pas d'objection, les deux longueurs semblant se confondre lorsque le nombre de côtés augmente indéfiniment.

a_0 et c_0 désignent l'apothème et le côté du carré
a_1 et c_1 désignent l'apothème et le côté de l'octogone.

La première approximation est vite découverte sans mesurer quoi que ce soit:

$$\frac{L}{2a_0} = \frac{8a_0}{2a_0}, \text{ donc } \frac{L}{2a_0} = 4$$

Pour la seconde, j'indique qu'au lieu de mesurer, on peut trouver une relation entre a_0 et a_1 en utilisant une certaine relation métrique dans le triangle rectangle.

Dans le meilleur des cas, les élèves ont retenu la relation de Pythagore. Les redoublants, eux, n'en connaissent aucune. Alors on organise la chasse aux relations métriques et finalement on obtient celle qui doit servir dans le cas présent. Je le dis et donne le travail en recherche à la maison. Echec complet. Il me faut orienter la recherche en matérialisant le triangle AOB et sa hauteur AH (fig. 2).

Ces renseignements permettent à la plupart des élèves de découvrir l'équation

$$a_1(a_1 - a_0) = \frac{a_0^2}{4}$$

(ils tiennent compte du fait que $L = 4c_0 = 8a_0$).

On la met sous la forme

$$a_1^2 - a_0a_1 - \frac{a_0^2}{4} = 0$$

L'usage des radicaux ne va pas sans mal. D'autre part l'équation a deux solutions et la construction géométrique n'en révèle qu'une.

$$a'_1 = \frac{a_0(1+\sqrt{2})}{2} \qquad a''_1 = \frac{a_0(1-\sqrt{2})}{2}$$

Le choix entre les deux n'est pas aisé tant que les formules ci-dessus ne sont pas obtenues.

Pour avoir la deuxième approximation de π, on forme $\frac{L}{2a_1}$.

"Quelle valeur faut-il prendre pour a_0 ?" disent ceux (et ils sont les plus nombreux) qui ont obtenu une formule du genre :

$$\frac{8a_0}{a_0+\sqrt{2a_0^2}}$$

D'autres, en revanche, donnent la seconde approximation de π $\frac{8}{1+\sqrt{2}}$ et en calculent une valeur approchée au centième : 3,31.

On passe maintenant au polygone régulier de 16 côtés. L'équation du second degré qui lie a_2 et a_1 est en général assez rapidement découverte :

$$a_2(a_2-a_1)=\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 \qquad \text{Or } 16C_2=L=8a_0 \qquad \text{d'où } C_2=\frac{a_0}{2}$$

$$a_2^2-a_1a_2-\frac{a_0^2}{4^2}=0$$

$$a_2^2-\frac{a_0(1+\sqrt{2})}{2}a_2-\frac{a_0^2}{4^2}=0$$

Calculs délicats sur les radicaux, mieux maîtrisés cependant que les précédents.

$$a'_2=\frac{a_0[1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,]}{4} \qquad a''_2=\frac{a_0[1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,]}{4}$$

On obtient une nouvelle approximation de π : $\frac{16}{1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ dont une valeur approchée au centième près est 3,18.

Il est clair qu'à ce stade les élèves ne pouvaient conjecturer l'équation générale du second degré

$$a_{n+1_2}-a_na_{n+1}-\frac{a_0^2}{4^{n+1}}=0$$

Le calcul pour le polygone de 32 côtés a été nécessaire

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+\frac{a_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$\frac{L}{2a_{n+1}}=\frac{8a_0}{a_n+\sqrt{a_n^2+\frac{a_0^2}{4^n}}}$$

Même à la calculatrice non programmable, les calculs deviennent fastidieux. J'écris donc pas à pas avec l'aide des élèves le programme (p.80) que deux d'entre eux enregistrent sur nos deux calculatrices.

Une question se pose : pour les trois premières approximations le résultat était indépendant de a_0. Ici au contraire il faut introduire a_0.

La réponse ne dépend pas de la valeur choisie. Les élèves s'en rendent compte en manipulant à tour de rôle la calculatrice et en introduisant des a_0 différents.

Pour faire comprendre ce phénomène, je dois reprendre le calcul des premières approximations

$$\frac{8a_0}{2a_0} = \frac{8a_0}{a_0(1+\sqrt{2})} = \frac{8}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{8a_0}{\dfrac{a_0(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}})}{2}} = \frac{16}{1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

qui montre les simplifications par a_0 et permet donc de les prévoir pour les calculs suivants.

Programme de calcul des termes successifs :

$$2a_i\ ,\ \frac{\mathrm{L}}{a_i}\ ,\ i$$

à partir de la formule

$$a_{i+1} = \frac{a_i + \sqrt{a_i^2 + \dfrac{a_0^2}{4^n}}}{2}$$

Programme sur TI58 ou TI59 : LRN , LBL , A , STO , 00 , RS , STO , 01 , RS , LBL , C , STO , 02 , RS , RCL , 00 , X^2 , ÷ , 4 , Y^X , RCL , 02 , + , RCL , 01 , X^2 , z , $\sqrt{X}$, + , RCL , 01 , = , RS , ÷ , 2 , = , STO , 01 , RCL , 00 , X , 8 , ÷ , RCL , 01 , ÷ , 2 , = , RS , 1 , SUM , 02 , RCL , 02 , RS , GTO , 13 , LRN

Rentrer a_0 en A, 0 en C

RS donne $2a_1$

RS donne $\dfrac{\mathrm{L}}{2a_1}$

RS donne 1 c'est-à-dire l'indice

RS donne $2a_2$

etc.

Résultats pour $a_0 = 5$:

indice	nombre de côtés	apothème $\times 2$	approximation de π
0	4	10	
1	8	12,07106781	3,313708499
2	16	12,56834873	3,182597878
3	32	12,69146298	3,151724907
4	64	12,72216727	3,144118385
5	128	12,72983871	3,14222363
6	256	12,73175628	3,141750369
7	512	12,73223566	3,141632081
8	1024	12,73223555	3,14160251
9	2048	12,73238545	3,141595118
10	4096	12,73239295	3,14159327
11	8192	12,73239482	3,141592808
12	16384	12,73239529	3,141592692
13	32768	12,73239541	3,141592663
14	65536	12,73239544	3,141592656
15	131072	12,73239544	3,141592654
16	262144	12,73239545	3,141592654

On ne peut aller plus loin, tout au moins en n'utilisant que la capacité normale de la machine.

Les 9 premiers chiffres sont exacts ; le 10e est donné par excès.

Evaluation

Le thème "π par les isopérimètres" a été suivi du test ci-joint.

Les objectifs avaient été annoncés 15 jours avant.

Il s'est déroulé après que le thème eut été traité par les élèves.

Dans l'intervalle de ces 15 jours, les élèves m'ont demandé des compléments d'information.

Durée : 1 heure.

• Les critères retenus pour l'évaluation :
1 acquis 0 non acquis
sont les suivants :

pour l'objectif 1 : réussir à former les équations (1) ou (1′) et (3) ou (3′)

pour l'objectif 2 : obtenir (2) ou (2′)

pour l'objectif 3 : voir comment les élèves ont "sorti" a_0 du radical dans (2), par exemple ; voir comment ils ont cherché à simplifier les différentes formules comprenant des radicaux.

pour l'objectif 4 : le fait d'avoir cherché à calculer les rapports
$\frac{P}{2a_0}, \frac{P}{2a_1}, \frac{P}{2a_2}$

pour l'objectif 5 : la découverte de 5 ou (5′)

pour l'objectif 6 : le calcul des valeurs approchées, même lorsque l'élève opère sur des formules fausses sous réserve que pour ces formules il trouve les résultats correspondants exacts.

• Le temps imparti était un peu court.

• Il ne faut pas se dissimuler le fait que l'appréciation ''acquis'', ''non acquis'' est au mieux une présomption qui doit inciter l'élève à se poser des questions et le maître à approfondir certains points.

Test sur le calcul de π par la méthode des isopérimètres

1°) Inscrire dans un cercle de rayon R un hexagone régulier. Quel est,en fonction de R, son périmètre ? son apothème ?

2°) Construire un côté du dodécagone régulier de même périmètre. Calculer son apothème a_1.

3°) Calculer l'apothème a_2 d'un polygone régulier de 24 côtés de même périmètre.

4°) Conjecturer la formule donnant l'apothème a_n d'un polygone régulier de 6.2^n côtés (j'indique la signification de 6.2^n : formule associant à l'indice de l'apothème le nombre de côtés du polygone correspondant).

5°) Donner des approximations de π (valeurs exactes ou approchées).

OBJECTIFS :

1°) reconnaître si les élèves ont compris le processus permettant de calculer l'apothème a_{i+1} lorsqu'on connaît l'apothème a_i

2°) reconnaître s'ils savent résoudre une équation du second degré

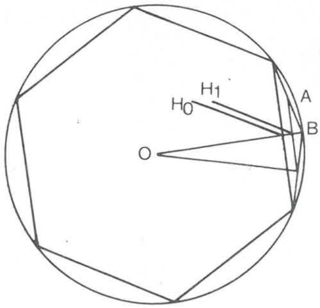
3°) reconnaître comment ils maîtrisent les calculs sur les radicaux

4°) voir s'ils sont capables de conjecturer :

1) le fait que le rapport $\frac{P}{2a_n}$ est une approximation de π

2) la formule donnant a_{n+1} en fonction de a_n

5°) voir s'ils savent utiliser leurs calculatrices.



1°) Si P désigne le périmètre de l'hexagone et a_0 son apothème,

$$P = 6\,R$$
$$a_0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

2°) $AH_1^2 = OH_1.H_1B$ donc $AH_1^2 = OH_1.H_0H_1$

$$\left(\frac{R}{4}\right)^2 = a_1(a_1 - a_0)$$

$$(1)\quad a_1^2 - a_0a_1 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 = 0 \qquad a_1 = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + \frac{R^2}{4}}}{2} \quad (2)$$

Les élèves ont préféré exprimer a_1 en fonction de a_0 uniquement

$$(1')\quad a_1^2 - a_0a_1 - \frac{a_0^2}{12} = 0 \qquad a_1 = \frac{1}{2}\,a_0\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad (2')$$

3°) $$(3)\quad a_2^2 - a_1a_2 - \left(\frac{R}{8}\right)^2 = 0 \quad a_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \frac{R^2}{16}}}{2} \quad (4)$$

$$(3')\quad a_2^2 - a_1a_2 - \frac{a_0^2}{48} = 0 \qquad a_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \frac{a_0^2}{12}}}{2} \quad (4')$$

4°) $$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + \frac{R^2}{4^{n+1}}}}{2} \quad \text{en fonction de R} \quad (5)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + a_0^2.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}}}{2} \quad \text{en fonction de } a_0 \quad (5')$$

5°) Calcul des valeurs approchées de π.

$$P = 6\,R = \frac{12a_0}{\sqrt{3}}$$

Avec l'hexagone : $\dfrac{P}{2a_0} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{6}{\sqrt{3}} \simeq 3{,}46$

Avec le dodécagone: $\dfrac{P}{2a_1} = \dfrac{\dfrac{12}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{12}{2+\sqrt{3}} \qquad \dfrac{12}{2+\sqrt{3}} \simeq 3{,}21$

Avec le polygone de 24 côtés: $\dfrac{P}{2a_2} = \dfrac{P}{a_1+\sqrt{a_1{}^2+\dfrac{a_0{}^2}{12}}}$

$$= \frac{P}{\dfrac{1}{2}\,a_0\,(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})+\sqrt{\dfrac{1}{4}\,a_0{}^2\,(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{a_0{}^2}{12}}}$$

$$= \frac{\dfrac{12}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})+\sqrt{\dfrac{1}{4}(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{1}{12}}} \simeq 3{,}15$$

On pouvait bien sûr "simplifier" cette formule, mais telle quelle, elle se prête bien au calcul machine avec mémorisation de $1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Résultats du test

Objectifs annoncés préalablement aux élèves

	1	2	3		4	5
			Conjectures			
	Processus du calcul de a_{i+1} en fonction *de* a_i	**Résolution** d'une équation du second degré	calculs sur les radicaux	signification de $\frac{P}{2a_n}$	$a_{n+1} = f(a_n)$	usage des calculatrices
1	1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0	1
6	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	1
8	0	1	0	1	0	1
9	1	1	0	0	0	0
10	0	1	0	1	0	0
11	1	1	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	1
14	0	0	0	1	0	0
15	1	1	0	0	1	0
	7	13	3	11	1	9

Commentaires :

Du test il ressort que trois points semblent acquis par le plus grand nombre des élèves :
- la résolution de l'équation du second degré
- le principe de la méthode du calcul de π par les isopérimètres
- l'usage des calculatrices.

Deux points à approfondir :
- les calculs sur les radicaux
- l'art de conjecturer une formule.