# 10

# FONCTIONS

*Introduction par des procédés divers dans trois classes de seconde (A, AB, C) en 80-81.*

## 1. OBJECTIFS

Partir de graphiques ou de tableaux de valeurs effectivement tirés d'ouvrages d'économie, biologie, sciences physiques,... (et mathématique) et prendre conscience de leur imprécision, des unités difficiles à lire ou à reporter, des renseignements ponctuels, discontinus qu'ils fournissent, des traits sans signification qui joignent les points représentatifs des phénomènes étudiés, des différents types de variables. Mettre en évidence petit à petit les notions de fonction, d'ensemble d'existence, de variation sur un intervalle, de parité, de périodicité,...

## 2. LES METHODES DE TRAVAIL

Ne croyant à aucune méthode qui serait la panacée universelle, nous avons décidé de faire alterner : travail sur fiche ou sur document, individuel ou en groupe, travaux présentés par le professeur au tableau, synthèses collectives, travail de soutien ou d'approfondissement avec une partie de la classe. Dans les trois classes, trois heures par semaine sont consacrées à l'introduction de la notion de fonction.

## 3. LES SUJETS ETUDIES

① *Document élève :* une pseudo-copie d'élève à corriger et compléter dans le but de faire revoir du calcul numérique et du calcul littéral.

② *Document élève :* graphiques donnant l'âge moyen au premier mariage des hommes et des femmes entre 1821 et 1945 (source : Institut National d'Etudes Démographiques).

③ *Document élève :* tableau des mille premières décimales de $\pi$ (source : Petit Archimède).

④ "Fabrication" d'une sinusoïde.

⑤ *Document élève :* schéma en bandeaux donnant le menu d'une gélinotte suivant les douze mois de l'année (source : Biologie 6ème Bordas).

⑥ *Document élève :* tableau donnant, en fonction du temps, les températures de trois flacons nus et entourés de peau de mouton et de lard (source : manuel de physique premier cycle).

⑦ *Document élève :* tableau donnant la taille d'un criquet en fonction de son âge et graphique donnant le poids en fonction de l'âge (source : manuel de biologie premier cycle).

⑧ *Document élève :*

I - Pour un triangle rectangle d'hypoténuse donnée, étude, en fonction d'un côté de l'angle droit de mesure $x$, du second côté, de l'aire, de la hauteur.

II - Variation du périmètre d'un rectangle d'aire donnée.
Variation de l'aire d'un rectangle de périmètre donné.

**Voici ces sujets :**

①

NOM de l'élève : Dominique BIDON

Date : 19 Sept. 1985

Classe : 2de

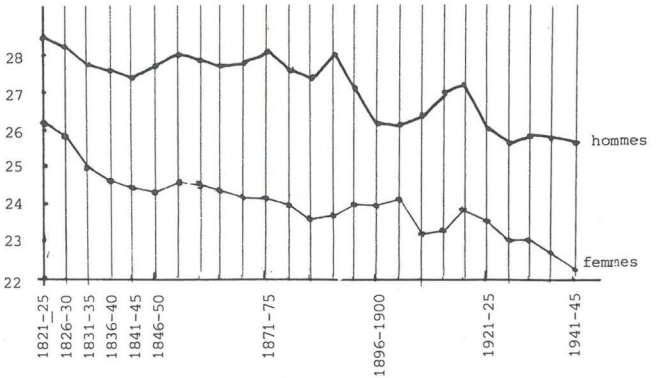
Complète le tableau suivant:

| 1er côté d'un rectangle | 2ème côté d'un rectangle | Demi-périmètre | Périmètre | Aire |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 12 | 37 | 74 | 300 |
| 40 | 10 | 50 | 100 | 4000 |
| 60 | 140 | 100 | 200 | 8400. |
| 25 | 5 | 30 | 60 | 125 |
| 6a | 6a | 12a | 24a | 36a |
| b | 2 | b + 2 | 2b+2 | 2b |
| 19 | c | 19+c | 2(19+c) | 19c |
| 17 | d | 17+d | 34+2d | 17d |
| 2x | x | 3x | $3x^2$ | 4x |
| 2a | c | 2a + c | 4a+c | 2ac |
| 2u | 2v | 2(u+v) | 4u+v | 4uv |
| m + 2 | m+2 | m + n + 4 | 2m+2n+8 | mn+4 |
| a + b | a + b | 2a+2b | 4a+2b | $a^2+b^2$ |
| 2a | | | | $6a^2c$ |
| | x - y | | | $x^2 - y^2$ |

②

AGE MOYEN AU PREMIER MARIAGE
entre 1821 et 1945

On s'intéresse à l'âge moyen au premier mariage pour les hommes et pour les femmes. Cet âge moyen a été calculé sur des périodes de cinq ans (1821-25 ; 1826-30 ; ... ; 1941-45). Voici, ci-dessous, le graphique obtenu par l'INED*. Sur ce graphique, les points ont été joints pour visualiser les variations de l'âge moyen, les segments n'ont pas d'autre signification.




① Quel est l'âge moyen pour les hommes dans la tranche 1896-1900 ? 1881-86 ?

. Mêmes questions pour les femmes ?

. Qui s'est marié à 26 ans (âge moyen) et quand ?

. Peut-on affirmer, en voyant ce graphique, que personne ne s'est marié à 21 ans ?

. A quel âge moyen les femmes se sont-elles mariées le plus fréquemment ?

② Faire toutes les remarques que vous inspirent ces graphiques.

③ Construire un graphique donnant, en fonction de la période, l'écart des âges moyens entre les deux sexes.

---

* INED : Institut National d'Etudes Démographiques.

③

$\pi$

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091

45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960

51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

Dans la première centaine des décimales de $\pi$ , on a compté huit fois le chiffre 1, dix fois le chiffre 4, quatorze fois le chiffre 9 ;

dans la deuxième centaine, on a compté douze fois le chiffre 2, ...

Organisez-vous pour compléter le tableau ci-dessous:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ère cent. | 8 | 8 | 12 | 11 | 10 | 8 | 9 | 8 | 12 | 14 |
| 2ème cent. | 11 | 12 | 12 | 8 | 12 | 12 | 7 | 4 | 13 | 9 |
| 3ème cent. | 7 | 10 | 11 | 12 | 15 | 7 | 15 | 7 | 9 | 7 |
| 4ème cent. | 13 | 13 | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 5 | 10 | 9 |
| 5ème cent. | 6 | 16 | 10 | 11 | 6 | 11 | 6 | 12 | 9 | 13 |
| 6ème cent. | 9 | 8 | 10 | 13 | 11 | 5 | 14 | 14 | 6 | 10 |
| 7ème cent. | | | | | | | | | | |
| 8ème cent. | | | | | | | | | | |
| 9ème cent. | | | | | | | | | | |
| 10ème cent. | | | | | | | | | | |
| 1er millier | | | | | | | | | | |

① Faire un graphique représentant la répartition des chiffres dans le 1er millier de décimales.

② Faire maintenant un graphique tenant compte de la répartition des chiffres dans chacune des dix centaines.

Pour information, dans le 1er million de décimales, il y a :

99 959 fois le chiffre 0
99 758 fois le chiffre 1
100 026 fois le chiffre 2
100 229 fois le chiffre 3
100 230 fois le chiffre 4
100 359 fois le chiffre 5
99 548 fois le chiffre 6
99 800 fois le chiffre 7
99 985 fois le chiffre 8
100 106 fois le chiffre 9

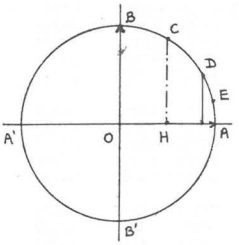
## ④ Ce qui a été dit aux élèves :

*Pour les élèves*

### Fabrication d'une sinusoïde

Matériel: compas, papier millimétré.

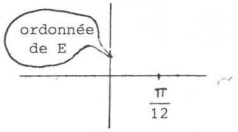
Dessiner un cercle de centre O, de rayon 6 cm puis deux diamètres perpendiculaires en O : AA' et BB'.
H est le milieu de [OA] . La droite HC est perpendiculaire à la droite OA.
Quelle est la nature du triangle OAC ?
Quelle est donc la mesure du secteur $\widehat{AOC}$ en degrés ? en radians ?
Construire avec le compas la bissectrice OD du secteur $\widehat{AOC}$ puis la bissectrice OE du secteur $\widehat{AOD}$ .




Partager ensuite le cercle en 24 arcs égaux et le graduer en degrés et en radians à partir du point A, en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

M étant l'un des points du cercle, son ordonnée dépend de la mesure de l'arc AM . Il s'agit de représenter la variation de l'ordonnée de M en fonction de la mesure x de l'arc AM.
(On choisit le radian pour ne pas mélanger les deux unités).

L'unité étant le rayon du cercle, on note sin x l'ordonnée de M.




*Nos objectifs* :

Peut-on joindre les points obtenus ? Expliquer pourquoi , et choisir un ou deux autres points. Bien insister.

Eventuellement "pousser" pour obtenir une représentation graphique sur un intervalle plus large que $[0 , 2\pi]$. Choisir l'unité sur l'axe des abscisses pour obtenir au moins deux périodes.

Recommencer avec l'abscisse de M (fonction cosinus) puis la fonction tangente obtenue en présentant l'axe des tangentes parallèle à OB.

Avec le cercle et ces courbes, chercher les symétries, trouver des égalités

(ex. $\sin(\pi - x) = \sin x$ ; $\sin(-x) = -\sin x$ ; $\cos(-x) = \cos x$ ;
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ; $\cos(x + \pi) = -\cos x$ ; ...etc. ).

Observer ce que trouvent les élèves.

Penser à $\sin 2x \neq 2 \sin x$ ; à $\sin \frac{\pi}{3}$ ; $\sin \frac{\pi}{4}$ ; $\sin \frac{\pi}{6}$ ; ... etc.

On peut revoir les constructions de segments de longueur $\sqrt{2}$ , $\sqrt{3}$ , ... à partir d'un segment unitaire.

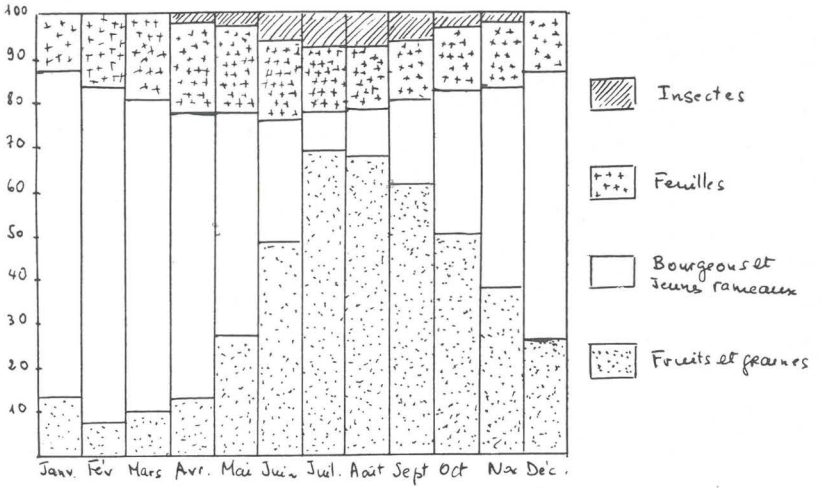
⑤

## LE MENU DE LA GELINOTTE

*"Examinons les aliments consommés au cours de l'année par la gélinotte, oiseau des sous-bois de hêtres.*

*La gélinotte mange toute l'année la même quantité de feuilles; elle consomme beaucoup plus de fruits et de graines, beaucoup moins de bourgeons et de jeunes rameaux, en été qu'en hiver. Les insectes entrent dans son alimentation d'avril à novembre seulement. Cette variation du régime a plusieurs causes: d'une part, la gélinotte trouve peu d'insectes en hiver, d'autre part, ses préférences suivent ses besoins, qui ne sont pas les mêmes toute l'année.*

*De nombreux animaux sont ainsi capables de s'adapter aux conditions de milieu, en particulier à la quantité de nourriture disponible."*




Extrait du livre de Biologie 6ème
Collection Désiré Bordas (77)

① En juillet, quelle est la part prise par les insectes dans la quantité de nourriture absorbée par la gélinotte ?

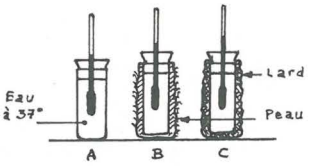
Quelle est celle des bourgeons et jeunes rameaux ? Celle des fruits et graines ? celle des feuilles ?

A quel mois la part des fruits et graines est-elle de 27% ? A quel mois celle des feuilles est-elle de 20% ?

② Représenter par un graphique les variations de la part prise par les fruits et graines dans la nourriture de la gélinotte suivant les douze mois de l'année.

Mêmes questions pour les bourgeons et jeunes rameaux, pour les feuilles et pour les insectes.

⑥




Dans trois flacons, on met de l'eau à 37°.

Le flacon A est nu; le flacon B est entouré de peau de mouton et le flacon C est entouré de lard gras.

Le tableau suivant donne les températures de l'eau des trois flacons de deux en deux minutes. On admettra qu'entre deux relevés consécutifs de température, celle-ci décroît proportionnellement au temps écoulé.

| Temps en min | Température en degrés | | |
|---|---|---|---|
| | flacon nu | flacon avec peau | flacon avec lard |
| 0 min | 37° | 37° | 37° |
| 2 | 32 | 35 | 34 |
| 4 | 28 | 33 | 31 |
| 6 | 24 | 31 | 29 |
| 8 | 21 | 29 | 27 |
| 10 | 19 | 27 | 25 |
| 12 | 17 | 26 | 23 |
| 14 | 15 | 25 | 22 |
| 16 | 14 | 24 | 21 |
| 18 | 13 | 23 | 20 |
| 20 | 12 | 22 | 19 |

① Représenter graphiquement, sur une même figure, les variations des températures des trois flacons en fonction du temps écoulé.

② Entre quels flacons et à quel moment l'écart des températures est-il le plus grand ?

⑦

## LES MUES DU CRIQUET

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille* d'un criquet s'accroît donc brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance discontinue.

① Ainsi

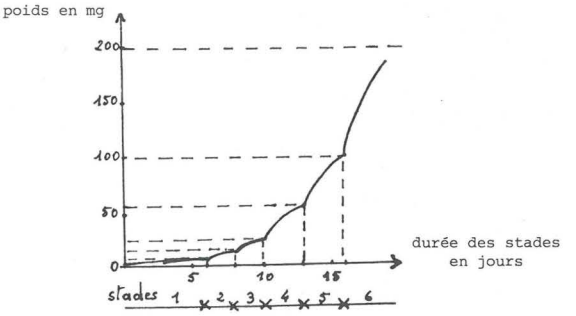
| | | |
|---|---|---|
| de 0 à 6 jours | un criquet mesure | 9 mm |
| de 6 à 8 jours | un criquet mesure | 12 mm |
| de 8 à 10 jours | un criquet mesure | 16 mm |
| de 10 à 13 jours | un criquet mesure | 21 mm |
| de 13 à 16 jours | un criquet mesure | 27 mm |

Après le 16ème jour, le criquet est adulte et sa taille ne change plus: elle est de 40 mm. Il a donc subi cinq mues.

Représenter graphiquement les variations de la taille du criquet de 0 à 20 jours en négligeant la durée des mues.

Comment apparaissent les mues du criquet sur le graphique ?

② Par contre, le poids du criquet croît entre les mues comme l'indique le graphique ci-dessous:




Quelle(s) remarque(s) peut-on faire sur la croissance du poids du criquet entre deux mues ?

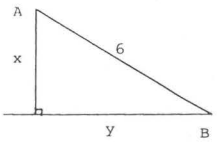
Chercher des exemples d'animaux dont la croissance est discontinue.

---

* Pour un biologiste, la taille d'un criquet est celle de sa cuticule.

⑧

## I Triangles rectangles d'hypoténuse de longueur 6




AB = 6

Où sont les sommets des triangles rectangles dont AB est l'hypoténuse ?

. Calculer y en fonction de x.
Quelles sont les valeurs que peut prendre le réel x ? Désigne par I l'ensemble de ces valeurs.
Construire des points de la représentation graphique de la fonction f qui à x associe y

$$f \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y \end{array} \right. \qquad \text{notation: } y = f(x)$$

. Calculer l'aire z du triangle d'hypoténuse 6 et dont un côté de l'angle droit est x.
Construire des points de la représentation graphique de la fonction a.

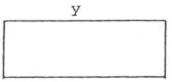
$$a \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto z \end{array} \right. \qquad z = a(x)$$

. Calculer la hauteur h du triangle d'hypoténuse 6 et dont un côté de l'angle droit est x.
Représenter graphiquement la fonction u.

$$u \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto h \end{array} \right. \qquad h = u(x)$$

## II Histoire de rectangles

x et y sont les mesures des côtés d'un rectangle, une unité étant choisie.




aire de ce rectangle: xy

périmètre de ce rectangle: x + y

1. On se propose de déterminer, parmi les rectangles d'aire 36, celui ou ceux qui ont le plus petit périmètre.

| | |
|---|---|
| x | ... |
| y | ... |
| x + y | ... |

Exprimer le demi-périmètre x + y en fonction de x.

On appelle p la fonction qui, au réel x, associe le réel x + y qu'on notera p(x). Quel est son ensemble d'existence ?

Construire des points de la représentation graphique de la fonction p.
Cette représentation permet-elle de résoudre le problème proposé ?

2. On se propose de déterminer, parmi les rectangles de périmètre 24, celui ou ceux qui ont la plus grande aire.

| | |
|---|---|
| x | ... |
| y | ... |
| xy | ... |

Exprimer l'aire xy en fonction de x.

On appelle q la fonction qui, au réel x, associe le réel xy qu'on notera q(x). Quel est son ensemble d'existence ?

Construire des points de la représentation graphique de la fonction q.
Cette représentation permet-elle de résoudre le problème proposé ?

## 4. COMMENTAIRES

①

| Nombre de fautes | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pourcentage d'élèves en A | 6,2 | 12,5 | 3,1 | 15,6 | 12,5 | 15,6 | 12,5 | 9,5 | 3,1 | 3,1 | 3,1 | 0 | 3,1 |
| Pourcentage d'élèves en B | 12,9 | 12,9 | 16 | 19,3 | 9,7 | 3,2 | 3,2 | 3,2 | 0 | 3,2 | 0 | 3,2 | |
| Pourcentage d'élèves en C | 31,4 | 25,7 | 20 | 14,2 | 5,7 | 2,8 | | | | | | | |

Les élèves ont mis de 20 min. à 40 min.

② Dans la classe de Seconde AB, les interprétations du graphique ont été faites avec le professeur d'Economie* qui, étant libre à l'heure du cours de Mathématique, a pu y assister. Dans les autres classes, les élèves ont posé des questions au professeur d'histoire.

Pour la question ③, pas mal de difficultés en A où les élèves ayant choisi de reporter les longueurs ont souvent omis de reporter l'unité et choisi comme unité le cm (alors que l'unité du document représentait 8 mm). En C, les élèves ont fait, à ce propos, des calculs de proportionnalité.

*** Commentaires du professeur d'Economie**

Le professeur d'économie a bien insisté sur la nécessité de faire l'analyse en deux temps :

1) Voir la tendance générale
2) Faire les remarques locales.

1) TENDANCE GENERALE
— les hommes et les femmes se marient de plus en plus tôt ;
— la femme se marie plus jeune que l'homme ; l'écart est en général de 2 - 3 ans ;
— la diminution est plus rapide chez les femmes ;
— en gros, les deux courbes se ressemblent ;
— il faut expliquer les creux et les bosses par l'arrivée d'événements historiques.

2) REMARQUES LOCALES
On est amené à s'interroger sur deux époques, surtout visibles sur le graphique des hommes :
— Baisse brusque de l'âge moyen de 1886 à 1900 : cette baisse semble avoir une explication plus socio-économique que politique : elle est liée aux nouvelles conditions de vie nées de l'industrialisation et de l'exode rural.
— La hausse 1916 - 1920 (aussi bien Hommes que Femmes) correspond bien sûr à la guerre ; elle empêche (ou retarde) les unions.

③ Pas mal d'intérêt pour ce document de la part des élèves ; espérons qu'après lui $\pi$ ne sera plus jamais 3,14 ! Il faut une heure pour compléter la table et vérifier les résultats.

En Seconde AB, on a accordé une certaine importance à l'aspect statistique, on s'est efforcé d'examiner les méthodes de décomptage et surtout de vérification.

Les élèves prennent conscience de l'importance du choix de la place des nombres en ordonnée dans l'interprétation d'un graphique : pour ceux qui ont commencé à 90 il semble que les décimales se répartissent très inégalement alors que pour les autres elles se répartissent de manière semblable.

Pour ② , le but recherché était de faire spontanément des sommes de fonctions. Assez bizarrement plusieurs élèves en A, en AB et C ont fait un graphique pratiquement illisible avec un troisième paramètre (tantôt la décimale, tantôt la centaine) illustré par la couleur — en utilisant donc 10 couleurs —.

④ C'est ce travail sur la sinusoïde, riche dans de nombreuses directions (constructions avec règle et compas, médiatrice, bissectrice, calculs de proportionnalité, choix des unités sur les axes, formules de trigonométrie, symétries du cercle, triangle équilatéral,...) qui a duré le plus longtemps.

L'examen conjoint du cercle et de la sinusoïde a permis de constater que $\sin(\pi+x) = -\sin x$ , $\sin(\pi-x) = \sin x$ ,...
Un petit coup de pouce a été nécessaire pour "tourner" en sens inverse sur le cercle trigonométrique et la sinusoïde est repartie de l'autre côté de l'origine...

On construit ensuite — en classe ou à la maison, suivant les sections — la représentation de $x \mapsto \cos x$ et on remarque que la nouvelle courbe se déduit de la précédente par translation.

⑤ Pas de difficulté pour les lectures, l'unité du document présenté étant le cm. Dans les trois classes des représentations diverses ont été choisies : points, bâtons, rectangles.

En commentant les graphiques, les élèves remarquent que les deux courbes représentatives de la consommation des "fruits" et des "bourgeons" sont symétriques (ils disent "contraires", "inverses") par rapport à une droite parallèle à l'axe des $x$.

En Seconde AB, on est même amené à faire un retour en arrière sur les coordonnées du milieu d'un segment et l'on cherche l'ordonnée du milieu de chacun des 12 segments. Cette ordonnée est effectivement voisine de 40.

⑥ Pas de difficulté pour les représentations graphiques. La phrase "décroît proportionnellement au temps écoulé" a souvent du être expliquée. Les plus futés ont su démontrer les alignements de points (en A et AB au moyen de vecteurs liés, en C au moyen du déterminant, alors que nous croyions que des équations de droite seraient recherchées...)

En Seconde AB où l'on travaillait parallèlement avec le professeur d'économie sur pourcentages et pourcentages d'augmentation, il n'a pas été facile de faire comprendre que si l'augmentation par an est régulière, alors le pourcentage d'augmentation d'une population diminue, tandis que si le pourcentage d'augmentation est régulier, alors l'augmentation de la population ne l'est pas.

⑦ Cette première représentation d'une fonction en escalier crée des problèmes après le caractère discret de la plupart des phénomènes représentés au préalable. C'est aussi un problème que celui des "discontinuités" provenant des mues dont la durée est supposée "négligeable" par les biologistes. Dans les Secondes A et AB, on étudie à cette occasion les tarifs postaux, on en profite pour introduire petit à petit des intervalles semi-ouverts qui s'avèrent indispensables pour bien comprendre les tarifs rédigés comme suit :

| jusqu'à | 20g | 50g | 100g | 500g |
|---|---|---|---|---|
| ordinaires | 1,40 | 2,50 | 3,50 | 7,20 |

Pour le graphique du ②, les élèves remarquent spontanément que le poids croît plus vite après la perte de la cuticule qu'avant de la quitter ; quelques-uns aussi (plus nombreux en C, il faut le noter) pensent que ces "festons" sont une "erreur décorative" de l'imprimeur, habitués peut-être qu'ils ont été à voir des fonctions affines par morceaux).

⑧

I Au premier coup d'œil, pour la plupart des secondes A, la moitié des secondes AB, et quelques secondes C, il n'y a que deux triangles rectangles : ceux dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux côtés de la feuille...

Pour représenter $y$ en fonction de $x$, personne ne pense à reporter les longueurs en utilisant le cercle de diamètre AB. On préfère faire des calculs, c'est l'occasion d'utiliser une table de carrés pour encadrer $\sqrt{a}$ (avec beaucoup de difficulté en A), d'utiliser les machines en AB, et en C.

On discute pour savoir si on choisira [0,6] ou ]0,6[. On ne sent pas toujours la nécessité de choisir plus de valeurs sur [5,6[ que sur ]0,1]. Quelques-uns constatent — ceux du moins qui ont pris la même unité sur les axes — que la courbe a l'air d'un quart de cercle. Ensemble on le démontre.

| $x$ | $z=a(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2,955 |
| 2 | 5,65 |
| 3 | 7,785 |
| 4 | 8,94 |
| 5 | 8,30 |
| 3,9 | 8,892 |
| 4 | 8,94 |
| 4,1 | 8,979 |
| 4,2 | 8,988 |
| 4,3 | 8,987 |
| 4,4 | 8,976 |
| 4,19 | 8,9876 |
| 4,20 | 8,988 |
| 4,21 | 8,98835 |
| 4,22 | 8,9886 |
| 4,23 | 8,988875 |
| 4,24 | 8,9888 |
| 4,25 | 8,98875 |

Pour la représentation de $z$ en fonction de $x$ ($z = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$), les calculs à la main, et en utilisant une table de carrés (en seconde A) donnent les résultats ci-contre. Que le maximum ait lieu pour $x$ compris entre 4,1 et 4,3 est difficile à faire comprendre, tous les élèves ont la certitude que le maximum est pour $x=4{,}2$. Les calculs faits par un ordinateur WANG sont soumis aux élèves. L'ordinateur donne le maximum de l'aire (8,999999999) pour $x=4{,}24264$. Enfin, pour faire bonne mesure, et montrer que, dans ce cas, "l'homme" surpasse l'ordinateur, on cherche ensemble (et non sans peine) le maximum de $z$, donc de

$$-x^4 + 36x^2 = -(x^2-18)^2 + 18^2 \quad .$$

On trouve ainsi $x = 3\sqrt{2}$ et 9 pour l'aire. En Seconde C, les élèves ayant eu l'idée de chercher l'aire d'un triangle rectangle isocèle, ils n'ont eu ensuite qu'à vérifier que, pour tout $x$, $a(x) \leqslant 9$.

**II — Etude du périmètre des rectangles d'aire 36**

$$p : x \longmapsto 2 + \frac{36}{x}$$

• L'ensemble de définition fournit l'occasion d'introduire $]0, +\infty[$.

• Pour la recherche du *minimum* la situation est bien différente de la précédente puisque la valeur entière 6 donne un résultat qui "finit juste".

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 15 | 13 | 12,2 | 12 | 12,14 |

On s'assure que $x + \frac{36}{x}$ n'égale 12 que pour cette valeur 6, en résolvant $x + \frac{36}{x} = 12$ donc $(x-6)^2 = 0$.

Enfin, on démontre soit qu'on ne peut jamais avoir $x + \frac{36}{x} < 12$

soit qu'on a toujours $x + \frac{36}{x} \geqslant 12$.

A remarquer qu'en seconde A, les 3/4 de la classe se disent plus convaincus par la première démonstration que par la seconde ! En seconde C, cette fois encore, on a pensé directement à étudier le carré d'aire 36.

• Autre problème soulevé : *le comportement de p aux bornes* de l'intervalle. On constate que $p(x) > x$

que $p(x) - x$ diminue quand $x$ grandit et sans jamais s'annuler

que la droite d'équation $y = x$ est "sous" la courbe. En seconde AB et C le mot *asymptote* est prononcé.

En seconde AB, on cherche à calculer $x$ pour que $p(x) = 10\,000$. Echec, on n'y arrive pas... on admet que c'est possible et l'on parle encore d'asymptote. On note la différence de comportement de $p$ pour $x$ voisin de 0 et pour $x$ de plus en plus grand.

• Dans les trois classes, on *résout graphiquement des équations* du type $x + \frac{36}{x} = \text{Cte}$

**Etude de l'aire des rectangles de périmètre 24**

La représentation d'un côté en fonction de l'autre ($x \mapsto 12 - x$) permet de démontrer *l'alignement des points.* Ici encore le problème du *maximum* se résout facilement par le calcul.

De nouveaux problèmes sont soulevés :

- *Symétrie de la courbe* (seconde A, AB, C)
- *Position de la courbe par rapport à la droite d'équation* $y = x$ en seconde AB, où les élèves croyaient que $q(x)$ surpassait toujours $x$. Dans les trois sections, on remarque que la courbe monte plus vite "vers 0" "qu'avant 6".
  En seconde AB, on se lance dans des calculs interminables (à la machine) pour comparer *les accroissements de l'ordonnée.* On constate avec surprise au passage que

$$q(a+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left(q(a)+q(a+1)\right)$$

est toujours égal à 0,25. La démonstration est faite avec les lettres.

## 5. CE QUI A ETE REVU OU VU AU PASSAGE

Le théorème de Pythagore ⑧ ④
Le triangle équilatéral, hauteurs et angles ④
Mesures d'un angle en radians, degrés, grades (passage de l'une à l'autre) ④
Equation d'un cercle ⑧
Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle ⑧
Alignement de points dans le plan rapporté à un repère ⑥
Aire du rectangle et du triangle ⑧
Radicaux. Encadrement de radicaux, utilisation de tables de carrés ⑧
Utilisation des tables de valeurs trigonométriques ④
Calculs de proportionnalité ② ④ (à propos des représentations et des choix d'unité)
Utilisation d'une calculatrice ⑧
Résolution d'équations ⑧
Interprétation graphique de la résolution d'une équation ⑧
Mise sous la forme canonique d'un trinome du second degré ⑧