12

RECHERCHE D'EXTREMUMS

OBJECTIFS

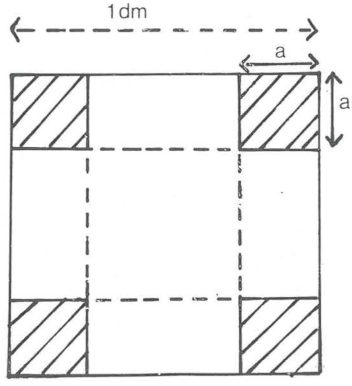
- *Mettre un problème en équation (choisir la variable, voir que le problème posé se ramène à la détermination d'un extremum d'une fonction).*
- *Faire des calculs à la machine.*
- *Faire des représentations graphiques pour en déduire des informations.*
- *Lorsqu'on étudie le problème pour un volume V choisi, montrer l'intérêt d'une étude mathématique plus poussée conduisant à un résultat simple, valable pour toute valeur de V.*
- *Donner une illustration des notions de variable, paramètre, fonction, encadrement.*
- *Montrer que, pour un volume donné, la quantité de matière nécessaire à la fabrication d'un récipient dépend de la forme de ce récipient, ce qui surprend beaucoup les élèves.*

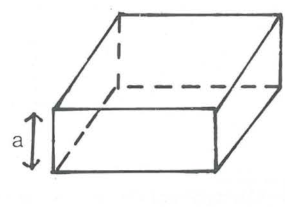
I. Recherche de maximum pour un volume

1. Le cendrier

On découpe les quatre coins d'une plaque métallique carrée d'un décimètre de côté et on remonte les bords. Quelles doivent être les dimensions de la découpe pour que le volume obtenu soit maximum ?

Dessin





Une recherche possible

1 - *Mise en équation* : Volume de la boîte obtenue :

$V = (1-2a) \times (1-2a) \times a$; $V = 4a^3 - 4a^2 + a$; $V = ((4 \times a - 4) \times a + 1)a$.

a est compris entre 0 et 0,5.

Comment déterminer le nombre a pour que le volume soit maximum ?

2 - *Traitement numérique et graphique*

Une machine à calculer avec une mémoire permet un calcul rapide. Voici un programme :

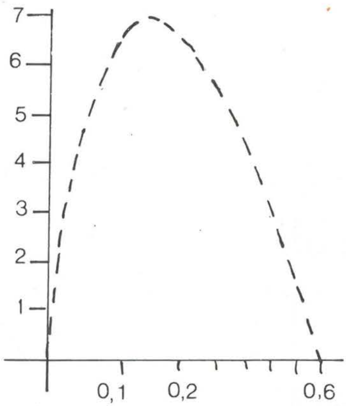
- avec une TI57 : STO 1(1 − 2×RCL 1) x^2×RCL1 = R/S
- avec une HP25 : $\uparrow$ 4×4 − RCL1×1+RCL1 X

Il est possible de dresser un tableau de valeurs, puis d'effectuer un tracé point par point :

	a en dm	V en dm^3
	0	0
	0,05	0,0405
	0,1	0,0640
(2)	0,15	0,0735
	0,2	0,0720
	0,25	0,0625
	0,3	0,0480
	0,35	0,0315
	0,4	0,0160
	0,45	0,0045
	0,5	0

On recommence à 0,16 avec un pas de 0,001

a = 0,16	V = 0,07398400	
a = 0,161	V = 0,07400912	
a = 0,163	V = 0,07404999	
a = 0,164	V = 0,07405978	
a = 0,165	V = 0,67406850	
a = 0,166	V = 0,0740731	
a = 0,167	V = 0,07407385	(1)
a = 0,168	V = 0,07407053	



(1) Changement de sens de croissance.

(2) Le maximum se trouve entre 0,166 et 0,168.

D'autres questions peuvent se poser : par exemple, recherche de a pour un volume donné.

3 - Généralisation à une plaque rectangulaire de longueur x, de largeur y. Si le parallélépipède rectangle a une hauteur a, le volume V est $(x-2a)\times(y-2a)\times a$.

Quelques réactions d'élèves

L'énoncé paraît bien court aux élèves. Certains en sont tout perplexes. Il faut calculer le volume, proposent certains (ce qui n'a pas paru évident à d'autres).

La formule est rapidement établie.

Question : Comment trouver a puisque l'on ne nous donne pas la valeur maximum de V ? L'élève ne s'aperçoit pas que, même si V était donné, il faudrait résoudre une équation du 3e degré.

Bien que V soit fonction de a (d'après la formule trouvée), une élève pense que V est constant, car, plus la tranche augmente, plus le fond diminue. On propose alors les cas triviaux $a=0$ et $a=\frac{1}{2}$. Elle exclut alors ces cas de sa conclusion hâtive. Une autre propose, pour vérifier l'affirmation de sa camarade, de calculer V pour deux valeurs particulières. Ce qui est fait ; les valeurs trouvées sont différentes.

Certains proposent des valeurs "au hasard" et affirment que c'est pour $a=\frac{1}{4}$ ou $a=\frac{1}{3}$ que le volume sera maximum. Pourquoi ? Comment le vérifier ?

Il vient alors à l'idée de certains qu'il faut calculer V pour un certain nombre de valeurs de a, comprises entre 0 et 1/2 (ceci est vite perçu).

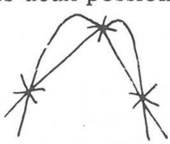
On calcule V pour $a=0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Aucun ne proposera de faire un graphique.

A partir des valeurs trouvées, les élèves ont du mal à situer le maximum.

Exemple :	$a=0{,}1$	$V=0{,}0640$
	$a=0{,}2$	$V=0{,}0720$
	$a=0{,}3$	$V=0{,}0480$

Le maximum est situé entre 0,1 et 0,2. Le fait qu'il puisse être entre 0,2 et 0,3 ne leur saute pas aux yeux. Seul un dessin du professeur présentant les deux possibilités le leur fera admettre.



(Malgré cela, l'idée de faire un graphique ne leur vient pas à l'esprit).

La difficulté pour situer le maximum à partir des valeurs subsistera encore pour certains.

Ensuite, on calcule V pour $a=0{,}15$. Certains proposent 0,25, ce qui est inutile d'après la valeur trouvée pour 0,15.

Après, c'est 0,14 qui est essayé, puis 0,16...

N'ayant pas utilisé de calculatrice programmable, faute de temps, on ne pourra aller plus loin que 0,166. Mais certains pressentent que la calculatrice serait saturée à un certain stade, ce qui ne permettrait pas d'avoir toute la précision désirée.

Les élèves voudraient connaître la valeur exacte et se demandent comment on fait pour la trouver.

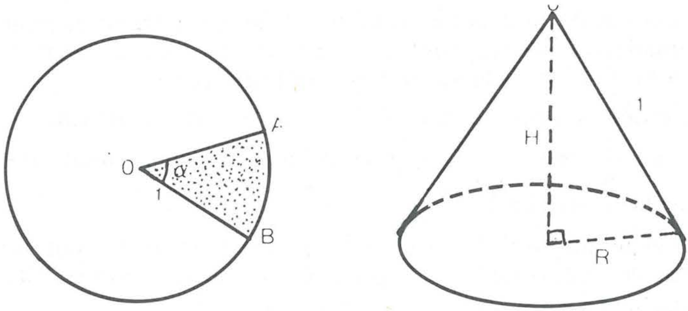
Cet exercice leur a plu car il leur a semblé "sortir de l'ordinaire", et a donné l'occasion de manipuler les calculatrices.

2. Le cône

Problème : Etant donné un disque métallique de centre O et de rayon une unité, on découpe un secteur angulaire AOB de mesure α et les deux bords AO et BO de la partie restante sont soudés.

Trouver α pour que le volume du cône obtenu soit maximum.

Dessin



Une recherche possible

La première idée est de calculer le volume en fonction de α , mais ce n'est pas forcément la bonne méthode. En fait, il suffit de déterminer l'un des paramètres du problème :

— soit α un angle de découpe
— soit l'angle au sommet du cône obtenu
— soit la hauteur du cône
— soit le rayon du cercle de base.

Le volume du cône : $V = \frac{\pi}{3} R^2 H$ ou $V = \frac{\pi}{3} \times (1 - H^2) \times H$.

$H^2 + R^2 = 1$ et $\alpha = 2\pi(1 - R)$, α est exprimé en radians. Rechercher H pour que V soit maximum, c'est rechercher H pour que $(1 - H^2) \times H$ soit maximum. Une calculatrice nous permet d'effectuer de nombreux calculs et de localiser une valeur approchée de H, puis la valeur correspondante de α .

Quelques réflexions

L'énoncé est donné, et paraît bien bref aux élèves. Après quelques minutes de réflexion, le professeur encourage à faire des dessins... un début difficile dans la recherche des formules et du choix le plus judicieux du paramètre (Quelques élèves seulement retrouvent les formules à utiliser). Le professeur donne alors les formules permettant de calculer le volume d'un cône, l'aire d'un disque, la longueur d'un arc de cercle.

Un élève programme, sur TI 57, l'expression du volume en fonction de l'angle α, puis arrive très rapidement à localiser la valeur de α pour que le volume du cône soit maximum.

D'autres exercices d'un style analogue ayant déjà été proposés, les élèves peuvent réinvestir les méthodes déjà rencontrées.

L'heure n'est pas assez "longue" pour que tous les groupes terminent.

II. Comment fabriquer des boîtes de conserve en utilisant le moins de métal possible

Enoncé

Un fabricant de boîtes de conserve veut fabriquer des boîtes cylindriques de 1000 cm^3 en utilisant le moins de métal possible.

Il calcule donc les dimensions qu'il faut donner aux boîtes pour que leur surface soit minimum. Quelles sont ces dimensions ?

Après avoir fait ce calcul, il se rend compte qu'il utilise plus de métal que ce qu'il a calculé, car il y a des chutes. En fait, pour faire un disque de diamètre D, on utilise un carré de côté D dans lequel il est inscrit. Le fabricant refait donc ses calculs en tenant compte de cette remarque, ce qui donne de nouvelles dimensions. Lesquelles ?

Mais avant d'entreprendre la fabrication, il réfléchit : "Puisque, pour faire les fonds et les couvercles des boîtes, je dois utiliser des carrés, ne serait-il pas plus judicieux de construire des boîtes parallélépipédiques ; ainsi, il n'y aurait pas de pertes de métal". Quelle sera sa conclusion ?

Peut-on répondre aux mêmes questions en remplaçant 1000 cm^3 par un volume V quelconque ?

Solution

Il faut d'abord mettre le problème en équation. Soit D le diamètre et h la hauteur de la boîte cylindrique. On a :

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}\pi D^2 + \pi D h$$

Si on veut que $V=1000$, il faut : $h=\dfrac{4000}{\pi D^2}$, d'où $S=\dfrac{1}{2}\pi D^2+\dfrac{4000}{D}$

On doit chercher pour quelle valeur de D, S est minimum. Comme on ne peut utiliser de dérivée en seconde, on commencera par chercher à faire un tracé point par point de la courbe représentative de $D \mapsto S(D)$ (On pourra, par exemple, commencer par calculer S pour des valeurs entières de D). Il est nécessaire, pour faire les calculs, de disposer de machines, si possible programmables.

On constatera alors que S passe par un minimum pour une valeur de D comprise entre 10 et 12 (à ce niveau, l'existence du minimum paraîtra évidente aux élèves).

On peut chercher à améliorer ce résultat, sans perdre de vue le problème posé, pour savoir quelle précision paraît raisonnable. Ici, un résultat à 1 mm près paraît suffisant. On peut alors constater que $10{,}8 \leqslant D_0 \leqslant 11$ (D_0 étant la valeur de D pour laquelle S est minimum).

On choisira donc $D=10{,}9$ et $h=10{,}8$, ce qui donne $V \simeq 1007{,}78$ et $S \cong 556{,}45$.

Si l'on considère maintenant que, pour faire le fond et le couvercle, on utilise deux carrés de côté D, on a :

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \quad \text{et} \quad S = 2D^2 + \frac{4V}{D}$$

Par un procédé analogue au précédent, on trouvera $9{,}9 \leqslant D_0 \leqslant 10{,}1$.

En prenant $D_0=10$, cela donne $h=12{,}8$, $V \simeq 1005{,}31$ et $S \cong 602{,}12$.

Enfin, si l'on construit une boîte parallélépipédique, on aura :

$$V = D^2 h \quad \text{et} \quad S = 2D^2 + \frac{4V}{D}$$

On constate que la surface utilisée est la même que dans le cas précédent ; on est conduit à prendre $D=h=10$, ce qui donnera une boîte cubique avec $V=1000$ et $S=600$.

On ne peut donc décider, de ce seul point de vue, s'il est préférable de faire une boîte cylindrique ou une boîte cubique. On peut alors réfléchir à d'autres critères de choix.

On notera qu'on n'a rien démontré ; pour faire une démonstration, il faut connaître la valeur exacte de D_0 ; ici, il faut donc conjecturer, puisqu'on n'a pas d'autre moyen de déterminer cette valeur.

Dans le premier cas, la conjecture est que S est minimum quand $D=h$, c'est-à-dire que D_0 est tel que $V=\dfrac{\pi D_0^3}{4}$; dans le second cas, la conjecture est que $D_0^3=V$. (On doit s'efforcer de faire trouver cela aux élèves ; s'ils ne le trouvent pas sur le seul exemple étudié, on peut leur faire refaire les calculs pour d'autres valeurs de V, mais cela risque d'être fastidieux ; on peut se contenter de leur indiquer d'autres résultats, qu'ils auraient pu trouver par le même procédé).

Dans le premier cas, on obtient :

$$\begin{aligned} S(D) - S(D_0) &= \frac{1}{2}\pi(D^2 - D_0^2) + 4V\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi(D^2 - D_0^2) + \pi D_0^2 \frac{D_0 - D}{D} \quad (\text{car } 4V = \pi D_0^3) \\ &= \frac{\pi(D - D_0)}{2D}(D^2 + DD_0 - 2D_0^2) \end{aligned}$$

Or $$D^2 + DD_0 - 2D_0^2 = (D - D_0)(D + 2D_0)$$

D'où :

$$S(D) - S(D_0) = \frac{\pi(D - D_0)^2(D + 2D_0)}{2D}$$

ce qui prouve que $S(D) \geqslant S(D_0)$.

Dans le deuxième cas, un calcul analogue donne :

$$S(D) - S(D_0) = \frac{2(D - D_0)^2(D + 2D_0)}{D}$$

Quelques réactions d'élèves de 2ᵉ T

— Cet exercice faisant suite au "cendrier" a été mieux compris mais les erreurs de calcul ont été plus nombreuses. Le résultat a effectivement surpris les élèves qui ont vérifié chez eux si les dimensions des boîtes de conserve étaient à peu près celles qu'ils avaient trouvées.

— Cet exercice, par son aspect concret, a intéressé les élèves, mais il leur a semblé plus difficile qu'un exercice plus théorique.

— Ce thème peut être suivi d'une enquête chez les fabricants de boîtes de conserve mais aussi de chauffe-eau électriques... Pourquoi ces appareils ont-ils une forme cylindrique, voire sphérique ?

Problème : Comparer les surfaces d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre de même volume et de même "hauteur".