

COMPORTEMENT GLOBAL D'UNE FONCTION, COMPORTEMENT LOCAL D'UNE FONCTION EXEMPLES D'ETUDES AU VOISINAGE DE ZERO

OBJECTIFS

- *Expérimenter, conjecturer, démontrer.*
- *Utilisation de majorations dans le calcul des valeurs de fonctions.*
- *Recherche de conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration.*
- *Approximation locale d'une fonction par une fonction affine.*
- *Perspective: développement limité d'une fonction au voisinage d'un point.*

POINTS DU PROGRAMME TRAITES

- Sens de variation d'une fonction.
- Savoir interpréter une représentation graphique.
- Majoration.
- Exemples d'études au voisinage de zéro :

$$x \mapsto (1+x)^2 ; x \mapsto (1+x)^3 ; x \mapsto \frac{1}{1+x} ; x \mapsto \sqrt{1+x}$$

CONNAISSANCES PREALABLES

- Définition d'une fonction croissante (décroissante) sur un intervalle.
- Savoir utiliser la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, compatibilité de l'addition et de la multiplication avec la relation d'ordre.
- Connaître le sens de variation des fonctions :

$$x \mapsto x^2$$

$$x \mapsto x^3$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

PLAN

I. *Documents élèves* — Préliminaire.

II. *Motivations issues de la physique* — *Remarques et prolongements destinés aux professeurs*

A - Etude d'un phénomène physique : la dilatation.

- B - Des calculs de valeurs approchées à la machine.
- C - Observations de graphiques.
- D - Approximations de fonctions par des fonctions affines (tous les exemples ne sont pas à traiter avec les élèves).
- E - Développement limités.
- F - Des exemples d'utilisation empruntés à la physique.

I. Documents élèves

Document 1

1. Une tige a une longueur ℓ_0 à 0°C , à $t^\circ\text{C}$ cette tige a une longueur ℓ telle que $\ell = \ell_0 \times (1 + \lambda t)$; le réel λ s'appelle coefficient de dilatation linéaire.

Plomb :	$\lambda = 2,95 \times 10^{-5}$	Zinc :	$\lambda = 2,90 \times 10^{-5}$
Aluminium :	$\lambda = 2,33 \times 10^{-5}$	Cuivre :	$\lambda = 1,70 \times 10^{-5}$
Verre ordinaire :	$\lambda = 7 \times 10^{-6}$	Pyrex :	$\lambda = 3 \times 10^{-6}$
Fer :	$\lambda = 1,22 \times 10^{-5}$		

Si $\ell_0 = 1\text{ m}$, déterminer ℓ lorsque t est : 10, 20, 50, 100 pour chaque λ .

2. Une plaque carrée de 1 m de côté à 0°C est portée à une température de $t^\circ\text{C}$. On admet que chaque côté se dilate en suivant la loi définie dans 1.

Quelle est l'aire de cette plaque lorsque t est égal à 10 ; 20 ; 50 ; 100 pour chaque λ ? Donner les résultats sous forme de tableaux (valeurs approchées à 10^{-5} près).

3. Un cube de 1 m de côté à 0°C est porté à une température de $t^\circ\text{C}$. Quel est son volume à $t^\circ\text{C}$?

4. Les hypothèses sont celles de l'exercice 2 ; si une plaque de cuivre a pour aire $1,01\text{ m}^2$, quelle est la longueur de son côté ? quelle est la température ?

5. Le cube de 1 m de côté à 0°C est une cuve à mazout en fer dont $\lambda = 1,22 \cdot 10^{-5}$, donc* $K \approx 3,66 \cdot 10^{-5}$.

Calculer son augmentation de volume entre l'hiver (-10°C) et l'été ($+30^\circ\text{C}$). Calculer l'augmentation de volume de 1 m^3 de mazout à 0°C entre les mêmes températures (-10°C et $+30^\circ\text{C}$). Le mazout a un coefficient de dilatation cubique de $1,3 \cdot 10^{-3}$.

Quelles conséquences peut-on prévoir ?

* Voir page 134.

Document 2: Donner les valeurs approchées de ces fonctions pour x donné.

x	$\sqrt{1+x}$
-10^{-1}	
-10^{-2}	
-10^{-3}	
-10^{-4}	
0	
10^{-5}	
10^{-4}	
10^{-3}	
10^{-2}	
10^{-1}	

x	$\frac{1}{1+x}$
-10^{-1}	
-10^{-2}	
-10^{-3}	
-10^{-4}	
0	
10^{-5}	
10^{-4}	
10^{-3}	
10^{-2}	
10^{-1}	

x	$\frac{1}{(1+x)^2}$

x	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Document 3:

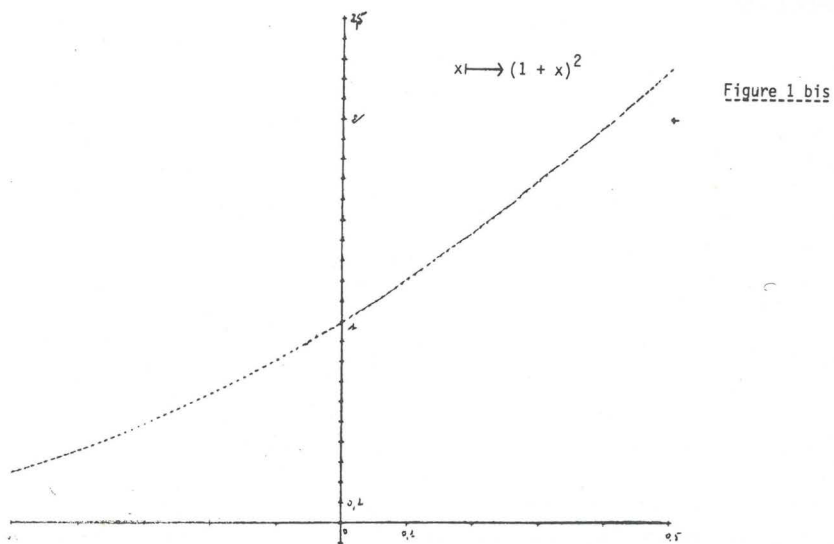
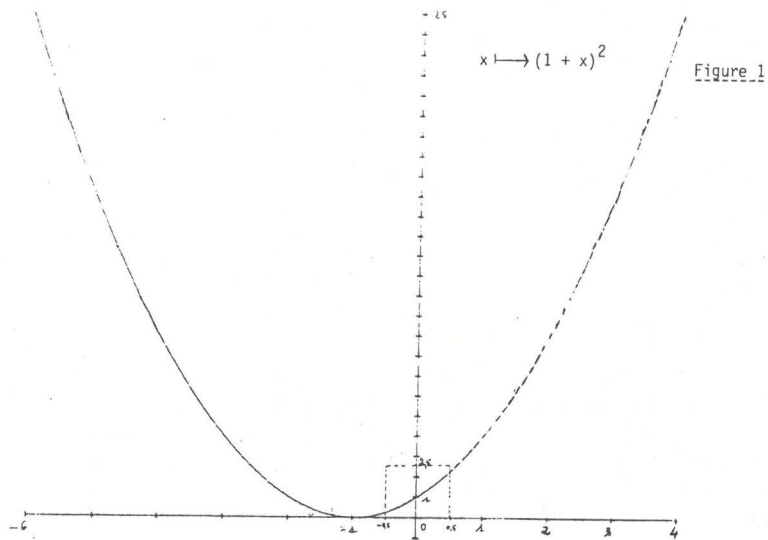


Figure 2

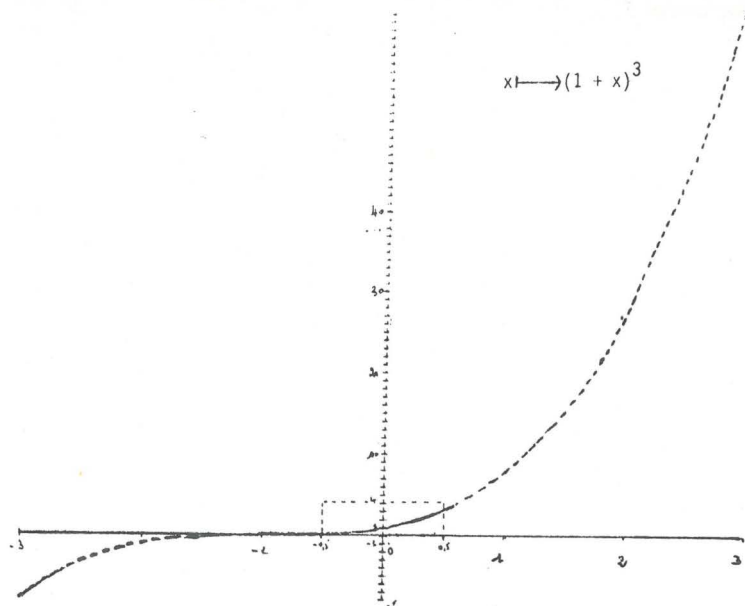
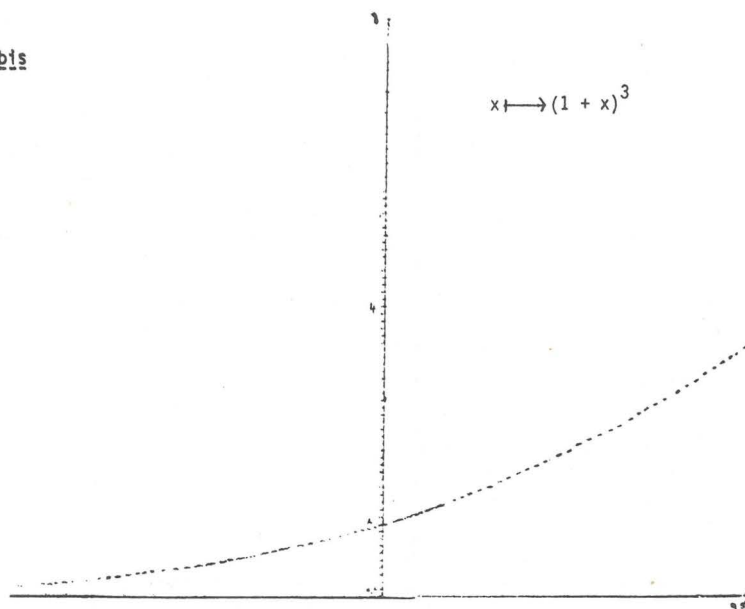
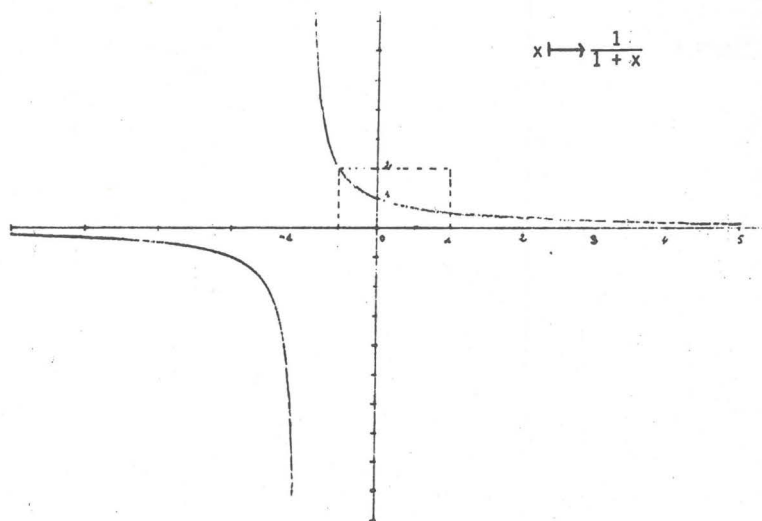


Figure 2 bis



Figure_3



Figure_3 bis

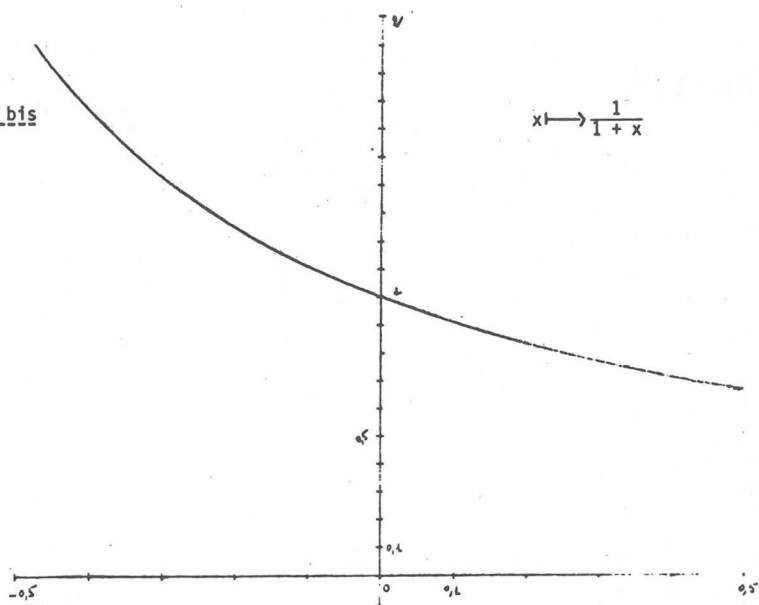


Figure 4

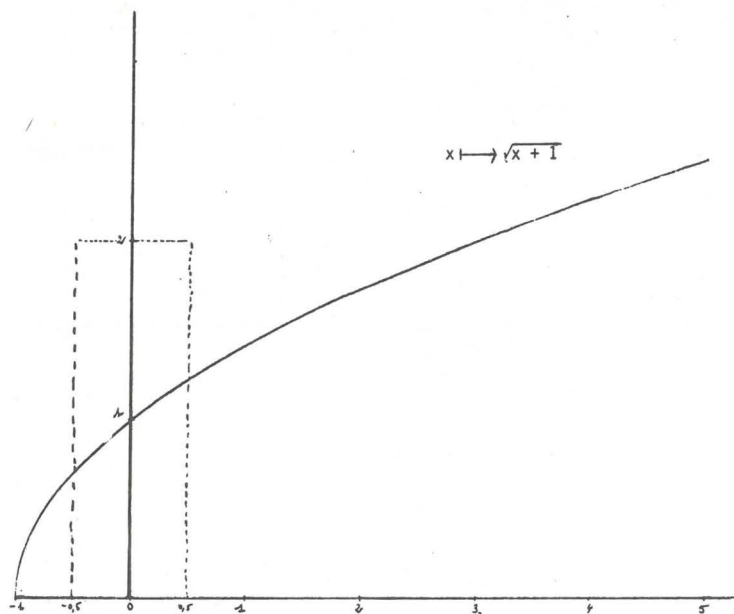
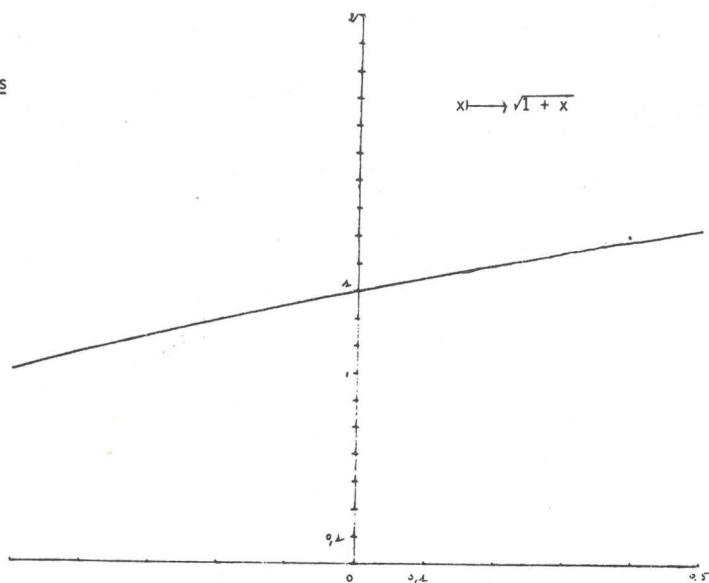
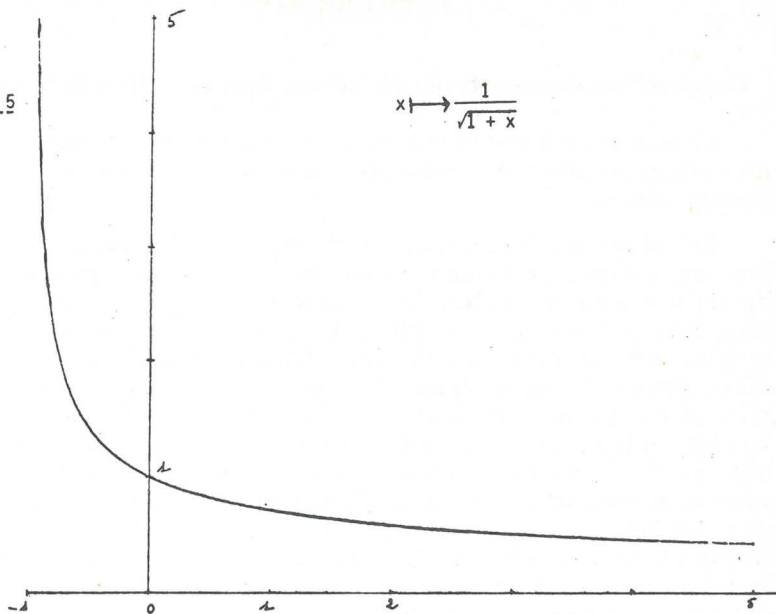


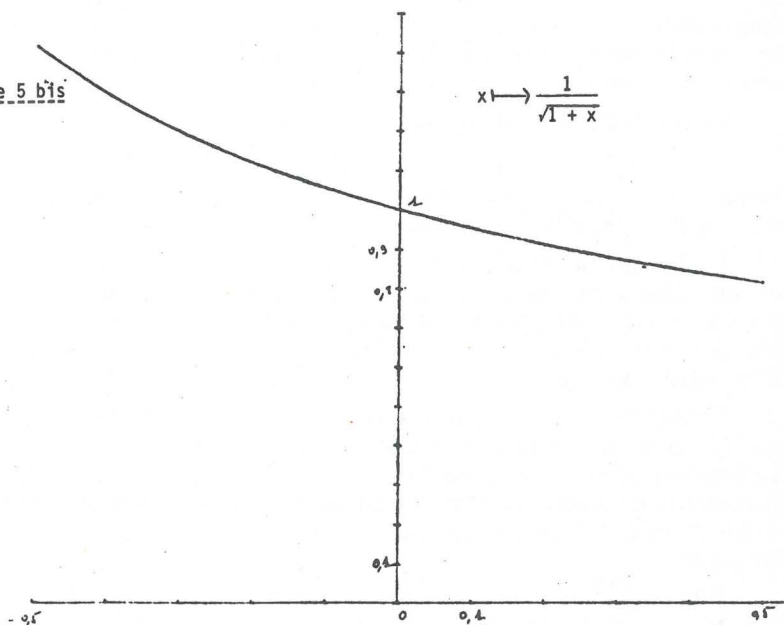
Figure 4 bis



Figure_5



Figure_5 bis



Préliminaire

Comment ces documents ont été utilisés dans une classe de Seconde

Ce document de travail met en œuvre diverses notions qui sont abordées progressivement et parallèlement à d'autres activités, au cours du premier trimestre.

En liaison avec le professeur de physique, les phénomènes de dilatation sont abordés. Le document 1 est étudié par les élèves en temps libre durant une semaine environ, ils travaillent en groupe ou en individuel selon leur goût et leurs possibilités. Chaque fois qu'ils le désirent, des informations ou mises au point sont données en quelques minutes en début d'heure de mathématique. Puis un compte rendu de ce travail est effectué par un ou deux élèves, cela donne l'occasion de comparer des résultats, d'indiquer que, peut-être, tous les chiffres donnés ne sont pas significatifs, de prévoir des réponses sans utiliser une calculatrice, simplement en négligeant certains termes du développement du carré ou du cube d'une somme ; mais, la semaine suivante, cette approximation est systématique dans le document 2 que les élèves ont à étudier à la maison. Lorsque les résultats sont comparés en classe, un élève est invité à me dicter ses valeurs approchées ; puis, parfois, je note les valeurs approchées avant qu'il n'ait eu le temps de les donner ; grand étonnement ; puis je recommence... Une fois les tableaux remplis, l'observation des nombres est plus approfondie, on est amené à suggérer une formule plus simple, à contrôler... Enfin, on propose une expression qui permette d'avoir rapidement une valeur approchée... Mais est-elle "valable" pour tous les nombres ?

La fin de l'heure est consacrée à l'étude des différences

$$(1+x)^2 - (1+2x) \quad \text{et} \quad (1+x)^3 - (1+3x),$$

lorsque x est un nombre voisin de zéro ; la recherche d'une majoration est suggérée aux élèves pour l'heure suivante.

La 3^e semaine est consacrée à l'observation de tracés, le document 3 est distribué à chaque élève. La première heure me permet d'expliquer succinctement comment une machine peut effectuer ces tracés, d'observer tous les dessins (Ceux-ci sont également projetés sur un écran à l'aide d'un rétroprojecteur).

Toutes les suggestions des élèves sont notées au tableau ; c'est pour les figures bis que je suis un peu plus précis dans les questions ; peut-on, en utilisant une règle en plexiglass, "ajuster" une portion de courbe ? Si oui, mettre en évidence l'erreur commise. Puis on convient de retenir une droite "tangente" au tracé au point $A(0,1)$, une équation de droite est suggérée.

L'heure suivante est consacrée à l'étude "mathématique" des figures 2 et 2 bis en suivant les idées que je développe par ailleurs. En s'inspirant

des questions posées dans l'étude précédente, les élèves sont invités à travailler par groupe sur une figure donnée (1, 1 bis, 3, 3 bis), (les figures 4, 4 bis, 5, 5 bis sont réservées pour un approfondissement ultérieur), et peuvent me poser toutes les questions qu'ils souhaitent ; de temps en temps je leur suggère une idée. Je donne, parallèlement, des exercices de calculs algébriques d'encadrement, de majorations dans certaines conditions, qui seront utilisés lors d'une séance de synthèse.

Ces différents résultats d'approximations sont utilisés par exemple en physique dans les classes terminales (voir paragraphe F). Il est possible de construire, au cours du 2^e trimestre, un devoir s'inspirant des conditions du paragraphe F, permettant aux élèves de réinvestir des notions rencontrées.

II. Motivations - Remarques et prolongements destinés aux professeurs

A - ETUDE D'UN PHENOMENE PHYSIQUE - LA DILATATION

Le document 1 est distribué aux élèves.

Les élèves doivent faire du calcul numérique, en s'aidant éventuellement d'une calculatrice. Les résultats sont donnés avec quatre ou cinq chiffres après la virgule, et regroupés dans des tableaux.

L'unité de longueur choisie est le mètre.

		$\ell = \ell_0(1 + \lambda t)$ $\ell_0 = 1\text{m}$ Dilatation linéaire				$S = S_0(1 + \lambda t)^2$ $S_0 = 1\text{m}^2$ Dilatation surfacique				$V = V_0(1 + \lambda t)^3$ $V_0 = 1\text{m}^3$ Dilatation cubique			
$\lambda \backslash t$		10	20	50	100	10	20	50	100	10	20	50	100
Fer	1,22 10 ⁻⁵												
Zinc													
Aluminium													
Cuivre													
Verre													
Pyrex													

Faire remarquer que pour un matériau donné et une température donnée, les valeurs approchées de S et de V s'obtiennent par une formule plus simple.

Les physiciens utilisent : $S \approx S_0 \times (1 + 2\lambda t)$ $V \approx V_0 \times (1 + 3\lambda t)$; λt étant un nombre petit.

Le coefficient λ est le coefficient de dilatation linéaire,

2λ le coefficient de dilatation surfacique,

$K = 3\lambda$ le coefficient de dilatation cubique (*exemple* : $K = 10^{-3}$ pour l'alcool ; *remarque* : dilatation non linéaire pour l'eau).

On peut établir les relations entre ℓ et ℓ' ; S et S' ; V et V' , longueur, surface, volume du matériau à $t^\circ\text{C}$ et à $t'^\circ\text{C}$ respectivement.

Ces relations sont plus intéressantes dans la pratique ; la dilatation se produit, en général, entre deux températures t et t' différentes de 0°C .

Par exemple : armature de fer du béton entre -20°C et $+50^\circ\text{C}$.

B - TABLES DE VALEURS NUMERIQUES D'UNE FONCTION (utilisation de calculatrices)

Le document 2 est distribué aux élèves.

On donnera les valeurs approchées avec 4 ou 5 chiffres après la virgule.

Les élèves sont amenés à observer ces valeurs et à trouver un "truc" qui permet de calculer mentalement une valeur approchée.

Les tableaux peuvent suggérer de former les différences $\sqrt{1+x} - 1$; $\frac{1}{1+x} - 1$;

C'est alors que l'on constate que :

— si x est voisin de zéro, $\sqrt{1+x}$ est voisin de $1 + \frac{1}{2}x$

— si x est voisin de zéro, $\frac{1}{1+x}$ est voisin de $1 - x$

— si a est voisin de zéro, $\frac{1}{(1+a)^2}$ est voisin de $1 - 2a$

— si α est voisin de zéro, $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ est voisin de $1 - \frac{1}{2}\alpha$

A la recherche de justifications

Si l'observation des tableaux de valeurs numériques ne permet pas aux élèves de proposer une expression de la valeur approchée, on peut avoir recours à une autre technique.

Par exemple pour $\sqrt{1+x}$

$1+x$ peut être considéré comme le début d'un carré

$$1+x = 1 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4};$$

dans une première approche, si x est petit, $-\frac{x^2}{4}$ est négligeable et

$$\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}} \quad \text{soit} \quad 1 + \frac{1}{2}x.$$

Il est possible de proposer une meilleure approximation et de la justifier par une autre méthode. Voir les calculs ci-dessous.

Pour tout réel supérieur à -1 , on peut écrire:

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}$$

Si $x \neq 0$ il vient:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}; \text{ or } \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} + \epsilon(x)$$

$$\epsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (1 + \sqrt{1+x})}{2(1 + \sqrt{1+x})}$$

$$\epsilon(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{2(1 + \sqrt{1+x})} \quad \epsilon(x) = \frac{-x}{2(1 + \sqrt{1+x})^2}$$

Soit : $\sqrt{1+x}$ peut s'écrire :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1+x})^2}$$

Posons

$$g(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt{1+x})^2}; \quad g(x) = \frac{1}{4} + \epsilon'(x);$$

$$\epsilon'(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt{1+x})^2} - \frac{1}{4} = \frac{2 - x - 2\sqrt{1+x}}{4(1 + \sqrt{1+x})^2}$$

$$\epsilon'(x) = \frac{2 \cdot \frac{-x}{1 + \sqrt{1+x}} - x}{4(1 + \sqrt{1+x})^2} \quad \epsilon'(x) = -x \cdot \frac{3 + \sqrt{1+x}}{4(1 + \sqrt{1+x})^3}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - x \cdot \frac{3 + \sqrt{1+x}}{4(1 + \sqrt{1+x})^3} \right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{8} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{1+x}}{(1 + \sqrt{1+x})^3} \right)$$

Posons

$$\epsilon''(x) = \frac{3 + \sqrt{1+x}}{(1 + \sqrt{1+x})^3}$$

Sous la condition $|x| < 1/2$,

$$\frac{3 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3} < \epsilon''(x) < \frac{3 + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3} = \gamma;$$

En résumé:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{|x|^3}{8} \cdot \gamma < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{|x|^3}{8} \gamma$$

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \text{ est une valeur approchée de } \sqrt{1+x} \text{ à } \frac{\gamma x^3}{8} \text{ près.}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{8} \cdot \epsilon''(x).$$

* Pour la recherche d'une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$, on peut s'intéresser d'abord à $\frac{1}{1-x}$ et utiliser des identités connues.

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x) \quad \text{d'où: } \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \quad \text{d'où: } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$(1 - x^n) = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \quad \text{d'où } \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Une autre présentation des calculs permet aussi de proposer des approximations de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de zéro.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \left(1 - x \cdot \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdot \frac{1}{1+x}$$

Posons $\epsilon(x) = \frac{1}{1+x} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdot \epsilon(x)$

Si $|x| < 1/2$ alors $\frac{2}{3} < \epsilon(x) < 2$ d'où $|\epsilon(x)| < 2$ et par conséquent :

$$1 - x + x^2 - 2|x|^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 + 2|x|^3$$

* *Pour la recherche d'une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$* il est intéressant de suggérer aux élèves la composition de deux formules approchées

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

d'où $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$.

De même pour $\frac{1}{(1+x)^2}$.

Remarques : Les techniques de calcul qui précèdent peuvent être continuées à l'ordre désiré et également pour d'autres "bonnes" fonctions. On peut obtenir sous certaines conditions :

- le développement à l'ordre zéro : $f(x) = f(0) + x \cdot \epsilon(x)$
- le développement à l'ordre un : $f(x) = f(0) + a \cdot x + x^2 \cdot \epsilon'(x)$
- le développement à l'ordre deux : $f(x) = f(0) + ax + b \cdot x^2 + x^3 \cdot \epsilon''(x)$

Le développement à l'ordre deux au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 \cdot \epsilon''(x - x_0)$$

a, b réels à trouver ; $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ fonctions à déterminer.

Ces résultats font l'objet du programme de première. Lorsque l'on recherche un développement au voisinage du réel x_0 non nul, le changement de variable $X = x - x_0$ est effectué, et l'on est ramené au cas précédent.

C - REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS A L'AIDE D'UN TRACEUR DE COURBES

Observations

Les représentations graphiques des fonctions étudiées sont tracées à l'aide d'un mini-ordinateur et de sa table traçante.

Un programme permet de calculer $f(x_i)$ connaissant x_i .

A l'intérieur d'un rectangle préalablement choisi, les abscisses minimum, maximum sont données, ainsi que les ordonnées minimum et maxi-

mum ; le traceur permet de tracer le point de coordonnées $(x_i; f(x_i))$. On peut alors tracer des milliers de points et éventuellement joindre par un segment de droite deux points extrêmement voisins.

Ces tracés sont donnés aux élèves (document 3).

Ces tracés peuvent être décalqués — ou un tracé point par point effectué par l'élève avec l'aide d'une calculatrice.

L'observation du graphique permet de faire constater qu'une fonction donnée est croissante ou décroissante, sur un intervalle à choisir.

Les figures bis sont des agrandissements d'une partie du tracé de départ (le traceur nous permet de faire un effet de zoom). Les élèves sont alors invités à ajuster cette partie du tracé par une droite... Laquelle?

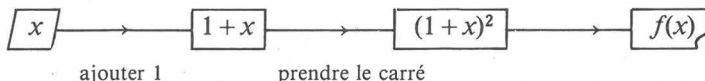
D - DEMONSTRATIONS

1. *Etude de la fonction*
$$x \xrightarrow{f} (1+x)^2 \quad (\text{figure 1})$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

f peut être étudiée sur toute partie de $\mathbf{R}$.

Plan de calcul



Sens de variation : en utilisant des propriétés simples, on détermine :

$$\left(\begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; -1[\\ \forall x' \in]-\infty; -1[\end{array} \right. x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \Bigg)$$

f est décroissante sur $] -\infty; -1[$; de même f est croissante sur $] -1; +\infty[$.

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 1 bis)

— On trace sur la figure 1 bis la droite Δ d'équation $y = 1 + 2x$.

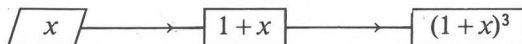
— On met en évidence sur le dessin les points $M(x; (1+x)^2)$; $N(x; 1+2x)$ puis $\overline{NM} = (1+x)^2 - (1+2x)$. $\overline{NM} = x^2$. Si x est voisin de zéro, $(1+x^2) - (1+2x)$ est voisin de zéro. $1+2x$ est une valeur approchée par défaut de $(1+x)^2$ à x^2 près.

La fonction affine $x \mapsto 1+2x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \mapsto (1+x)^2$.

2. *Etude de la fonction*
$$x \xrightarrow{f} (1+x)^3 \quad (\text{figure 2})$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

Plan de calcul



f peut être étudiée sur toute partie de $\mathbf{R}$.

On démontre que $\left(\begin{array}{l} \forall x \in \mathbf{R} \\ \forall x' \in \mathbf{R} \end{array} \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \right)$

f est croissante sur $\mathbf{R}$.

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 2 bis)

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \quad (x \in \mathbf{R})$$

On trace la droite Δ d'équation $y = 1 + 3x$, puis $M(x; (1+x)^3)$, $N(x; 1 + 3x)$, $\overline{NM} = (1+x)^3 - (1+3x) = 3x^2 + x^3$.

$\epsilon = 3x^2 + x^3$ est l'erreur commise en remplaçant $(1+x)^3$ par $1 + 3x$.

On se propose de trouver un majorant de cette erreur.

Par exemple, si l'on s'impose $x \in]-0,5; +0,5[$: trouver un majorant de ϵ . $\epsilon = x^2(3+x)$; si $-0,5 < x < +0,5$ alors $2,5x^2 < x^2 \cdot (3+x) < 3,5x^2$.

Si $-0,5 < x < 0,5$ alors $0 < (1+x)^3 - (1+3x) < +3,5x^2$

Si $-0,1 < x < +0,1$ alors $0 < (1+x)^3 - (1+3x) < 3,1x^2$

En résumé

Sous la condition $|x| < 0,5$, $(1+3x)$ est une valeur approchée par défaut de $(1+x)^3$ à $3,5x^2$ près.

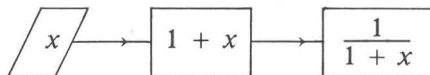
La fonction affine $x \mapsto 1 + 3x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \mapsto (1+x)^3$.

$$3 - \text{Etude de la fonction: } \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad (\text{figure 3})$$

f peut être étudiée sur toute partie de $\mathbf{R} - \{-1\}$.

Plan de calcul Ajouter 1. Prendre l'inverse



Sens de variation. f décroissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty [$

Attention: $-2 < 2$ et $f(-2) = -1 < f(2)$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 3 bis).

On trace la droite Δ d'équation $y = 1 - x$; $M(x; \frac{1}{1+x})$; $N(x; 1 - x)$.

$\overline{NM} = \frac{1}{1+x} - (1-x)$; $\overline{NM} = \frac{x^2}{1+x}$; si x voisin de zéro, $1-x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ à $\frac{x^2}{1+x}$ près; majoration de l'erreur: par

exemple si l'on s'impose: $x \in]-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}[$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{1+x} < 2; \text{ si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ alors } \frac{2}{3}x^2 < \frac{x^2}{1+x} < 2x^2$$

En résumé: Si $\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}$, alors $0 < \frac{1}{1+x} - (1-x) < 2x^2$

ou bien: si $-0,1 < x < 0,1$, alors $0,9x^2 < \frac{1}{1+x} - (1-x) < 1,2x^2$

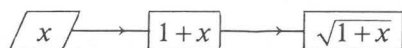
Sous la condition $|x| < 1/2$; $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

La fonction affine $x \mapsto 1-x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

4 — Etude de la fonction: $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$
 $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (figure 4)

f peut être étudiée sur toute partie de $[-1; +\infty[$

Plan de calcul



Sens de variation: f est croissante sur $[-1; +\infty[$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 4 bis)

On trace la droite $\triangle$ d'équation: $y = 1 + \frac{1}{2}x$ $M(x; \sqrt{1+x})$
 $N(x; 1 + \frac{1}{2}x)$; $\overline{NM} = \sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)$. Si x est voisin de zéro,
 $1 + \frac{1}{2}x$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$.

$$\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x) = \frac{-\frac{1}{4}x^2}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x}$$

ce nombre est négatif sur son ensemble de définition.

Recherchons un majorant de $\frac{x^2}{4(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x)}$.

Si l'on s'impose par exemple: $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

$$\text{alors } \frac{4}{\sqrt{2}} + 3 < 4(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x) < 5 + 4\sqrt{3/2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{4(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x)} < \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{2}} + 3} < 0,18$$

En résumé: si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ alors $0 \leq -\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x) \leq 0,18x^2$

ou bien si $-0,1 < x < 0,1$ alors $0 \leq -\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x \leq 0,14x^2$.

Sous la condition $|x| < 1/2$; $1 + \frac{1}{2}x$ est une valeur approchée par excès de $\sqrt{1+x}$ à $0,18 x^2$ près.

La fonction affine $x \mapsto 1 + \frac{1}{2}x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

5 — Etude de la fonction: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (\text{figure 5})$$

f peut être étudiée sur toute partie de $] -1; +\infty[$

Sens de variation: f est décroissante sur $] -1; +\infty[$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 5 bis)

On trace la droite Δ d'équation: $y = 1 - \frac{1}{2}x$; $M(x; \frac{1}{\sqrt{1+x}})$;
 $N(x; 1 - \frac{1}{2}x)$; $\overline{NM} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - (1 - \frac{1}{2}x)$.

Pour rechercher une majoration, on utilise les majorations de 3° et 4° .

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - (1 - \frac{1}{2}x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} \right) + \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x) \right)$$

$$\overline{NM} = \frac{(1 + \frac{1}{2}x) - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} \cdot (1 + \frac{1}{2}x)} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x)$$

d'après 4° $0 \leq (1 + \frac{1}{2}x) - \sqrt{1+x} \leq 0,18 x^2$ si $|x| < 1/2$

d'après 3° $0 \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x) \leq 1,2 \cdot \frac{x^2}{4}$

$$\text{et } \frac{3}{4} \sqrt{1/2} \leq \sqrt{1+x} \cdot 1 + \frac{1}{2}x$$

On en déduit :

$$0 \leq \overline{NM} \leq \frac{0,18 \cdot 4 \sqrt{2}}{3} x^2 + \frac{1,2}{4} x^2$$

$$\text{et } \left(\frac{4 \times 0,18 \sqrt{2}}{3} + \frac{1,2}{4} \right) x^2 \leq 0,64 x^2.$$

En résumé: Si $-1/2 < x \leq 1/2$ alors $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} - (1 - \frac{1}{2}x) \leq 0,64x^2$.

Sous la condition $|x| < 1/2$; $1 - \frac{1}{2}x$ est une valeur approchée par défaut, à $0,64 x^2$ près.

La fonction affine $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Voici un certain nombre de fonctions étudiées au voisinage de zéro; d'autres, aussi, sont intéressantes: par exemple $x \xrightarrow{f} \frac{1}{(1+x)^2}$; on démontre que $1 - 2x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{(1+x)^2}$ à $8x^2$ près sous la condition $|x| < 1/2$.

E — GÉNÉRALISATION

Dans le paragraphe précédent, des approximations de fonctions au voisinage de zéro par des fonctions affines sont proposées, mais on peut étudier des approximations au voisinage d'un réel x_0 , par des fonctions simples (par exemple des fonctions polynomes). C'est le principe des développements limités.

Voici quelques formules:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \cdot \alpha(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \times 4} x^2 + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p} x^p + x^p \cdot \alpha(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} x^2 + \dots + (-1)^p \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p} x^p + x^p \cdot \alpha(x)$$

F — QUELQUES EXEMPLES EMPRUNTÉS A LA PHYSIQUE

1 — La pesanteur terrestre varie en fonction de l'altitude; la loi de la gravitation universelle (Newton) montre que:

$$g(z) = \frac{g(0) \times R^2}{(R + z)^2}$$

$g(0)$: Intensité du champ de pesanteur à l'altitude 0

z : Altitude du point considéré

R : Rayon de la terre ($R \approx 6400$ km)

$g(z)$: Intensité du champ de pesanteur à l'altitude z .

On se propose d'étudier les variations de $g(z)$ lorsque z varie au voisinage de $z_0 = 0$, ou plutôt d'étudier les valeurs approchées de $g(z)$ au voisinage de 0. Par quelle fonction affine simple peut-on obtenir une valeur approchée de $g(z)$?

L'écriture de $g(z)$ est modifiée:
$$g(z) = \frac{g(0)}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2} .$$

$\frac{z}{R}$ est un nombre voisin de zéro.

Rappel:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x \text{ à } 8x^2 \text{ près.}$$

$1 - 2x$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{(1+x)^2}$ à $8x^2$ près

$$g(z) \approx g(0) \left(1 - \frac{2z}{R}\right); \text{ majorant de l'erreur: } g(0) \times 8 \times \left(\frac{z}{R}\right)^2$$

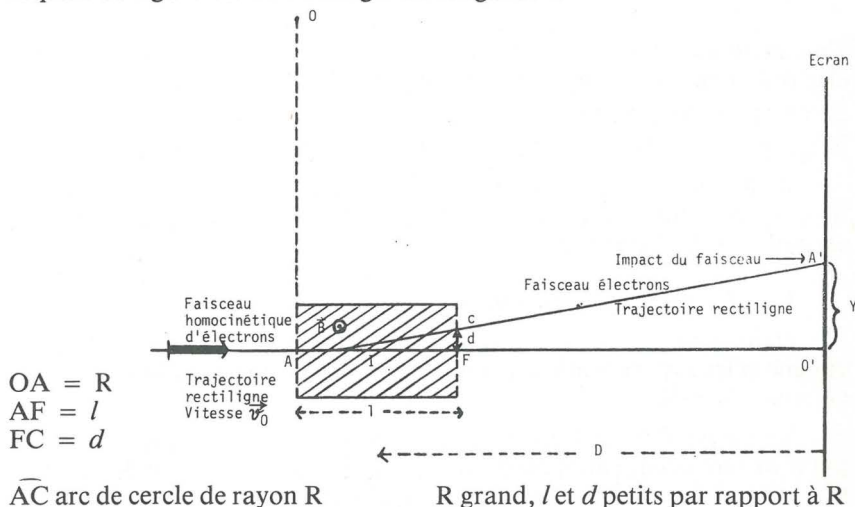
Valeurs numériques

$g(0) = 9,81 \text{ N kg}^{-1}$ en France.

Prendre pour z : 100 m; 1000 m; 9 km (les plus hautes montagnes);
50 km (presque plus d'air); 300 km (vide, périgée des satellites artificiels).

2 — Déviation d'un faisceau d'électrons dans un champ magnétique uniforme

Le champ magnétique est représenté par le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure. Il est produit par des bobines dans un espace approximativement parallélépipédique, dont la trace dans le plan de figure est un rectangle de longueur l .



Calcul de d

Choix d'un repère: A origine; axe des abscisses de support AI
axe des ordonnées de support AO

Equation du cercle de centre O (0; R) de rayon R: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$

Si $x = l$ et $y = d$, $l^2 + (y - R)^2 = R^2$ d'où $(y - R)^2 = R^2 - l^2$

$$R > l: y - R = \sqrt{R^2 - l^2} \quad \text{ou} \quad y - R = -\sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\text{Soit } y = R + \sqrt{R^2 - l^2} \quad \text{ou} \quad y = R - \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\text{donc } d = R - \sqrt{R^2 - l^2} \quad \text{ou} \quad d = R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2} \right)$$

Rappel

$\sqrt{1 + \alpha}$ a pour valeur approchée par excès $1 + \frac{1}{2} \alpha$, à $0,2 \alpha^2$ près.

$$\left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right) - 0,2 \alpha^2 \leq \sqrt{1 + \alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right)$$

$$d \approx R \times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right) \right) \quad d \approx \frac{R}{2} \times \left(\frac{l}{R} \right)^2;$$

On en déduit aussi l'encadrement :

$$\left(1 + \frac{-1}{2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right) - 0,2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 \leq \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R} \right)^2} \leq 1 + \frac{-1}{2} \left(\frac{l}{R} \right)^2$$

$$\frac{R}{2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \leq d \leq \frac{R}{2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 0,2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 \times R.$$

Une valeur approchée par défaut de d est $\frac{1}{2R} \times l^2$ à $0,2 \frac{l^4}{R^3}$ près.

Commentaires: La trajectoire circulaire de centre O et de rayon OA des électrons dans le champ magnétique est remplacée par une trajectoire parabolique $\widehat{AC}$, d'axe OA. Le faisceau poursuit son trajet suivant la tangente à l'arc $\widehat{AC}$. Cette tangente passe par I, milieu de AF.

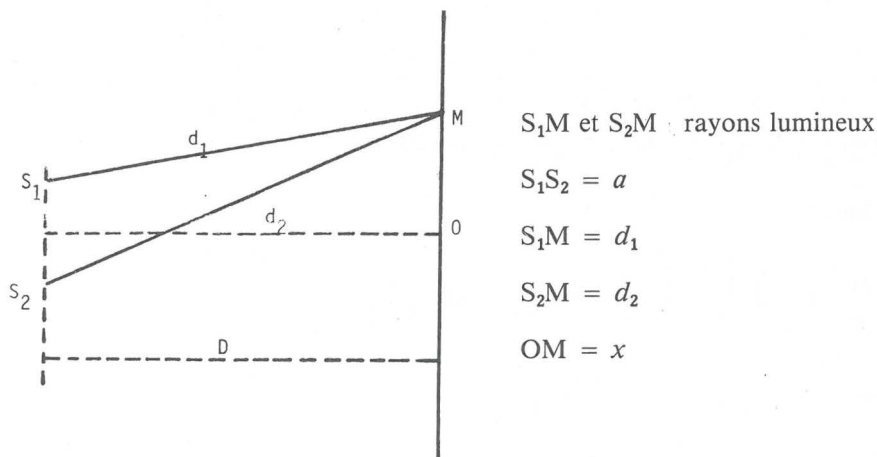
Il devient très commode d'exprimer la "déflexion" du faisceau $Y = O'A'$, connaissant la géométrie du tube employé (télévision par exemple), et la distance d .

3 — Interférences lumineuses:

Dans une expérience d'interférences lumineuses, tout se passe comme si les rayons lumineux provenaient de deux sources synchrones et en phase S_1 et S_2 .

En un point M de l'écran se superposent les rayons S_1M et S_2M . Le point M sera éclairé au maximum, si la différence $d_2 - d_1$ est égale à $k\lambda$. (k entier; λ longueur d'onde de la lumière utilisée). Le point M sera

dans l'obscurité si $d_2 - d_1$ est égale à $(2k + 1) \frac{\lambda}{2}$. Il est donc nécessaire de calculer la différence de marche Δ en fonction des caractéristiques du dispositif expérimental, c'est-à-dire D ; a ; x .



Calcul de la différence de marche $\Delta = d_2 - d_1$

$$d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 ; \quad d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_2 = D \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D}\right)^2} ; \quad d_1 = D \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2}$$

Recherche d'une approximation de d_1 , d_2 puis de $d_2 - d_1$, a et x étant petits par rapport à D .

Rappel:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha \text{ à } 0,2 \alpha^2 \text{ près.}$$

$$1 + \frac{1}{2} \alpha - 0,2 \alpha^2 < \sqrt{1 + \alpha} \leq 1 + \frac{1}{2} \alpha$$

$$d_1 \approx D \times \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right) ; \quad d_2 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right)$$

$$\text{d'où } d_2 - d_1 \approx \frac{D}{2} \times \left(\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}\right) ; \quad d_2 - d_1 \approx \frac{ax}{D}$$

Encadrement de d_1 , d_2 , puis de $d_2 - d_1$:

$$D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^2 - 0,2 \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^4 \right) \leq D \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^2} \leq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^2 \right)$$

$$D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{D} \right)^2 - 0,2 \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{D} \right)^4 \right) \leq d_1 \leq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{D} \right)^2 \right)$$

Donc :

$$\frac{ax}{D} - 0,2D \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^4 \leq d_2 - d_1 \leq \frac{ax}{D} + 0,2D \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D} \right)^4$$

$$\text{et } \left| (d_2 - d_1) - \frac{ax}{D} \right| \leq D \times 0,2 \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^4$$