14

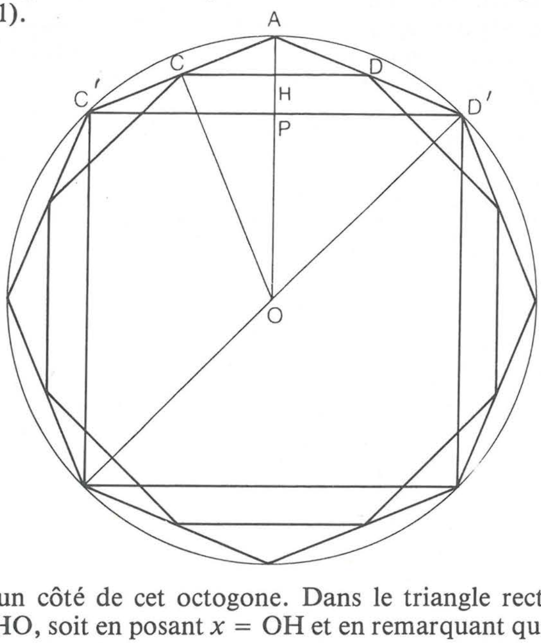
OÙ L'ON SE TROUVE AMENÉ A RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

OBJECTIFS :

- *résolution d'une équation par dichotomie*
- *résolution par changement d'inconnue*
- *résolution babylonienne*

Le second degré arriva sournoisement. Ce fut à propos du calcul de π par les isopérimètres.

Il s'agissait de construire, à partir d'un carré de 40 cm de périmètre, un octogone régulier de même périmètre et de calculer l'apothème de ce dernier (fig. 1).



(fig. 1)

CD est un côté de cet octogone. Dans le triangle rectangle OAC, $HC^2 = HA.HO$, soit en posant $x = OH$ et en remarquant que CD mesure 5 cm :

$$2{,}5^2 = (x-5)\,x$$

Après de vaines tentatives, les élèves se rendent compte que cette équation résiste anormalement. Jusqu'à ce qu'un redoublant s'aperçoive qu'elle est du second degré et le dise..., ce qui jette un froid. Les quelques équations du second degré vues en troisième se résolvaient, elles, mais celles-ci... Le redoublant, quant à lui, a oublié les « formules ».

Le désarroi est tel que je dois intervenir :

« On a deux calculatrices programmables. Elles vont nous servir à construire par points la courbe représentative de la fonction polynome f : $x \mapsto x^2 - 5x - 6,25$ ».

Je donne le programme en indiquant brièvement la signification des sigles mystérieux, car c'est la première rencontre de la classe avec une calculatrice programmable (TI 58-59).

LRN 2nd LBL A STO OO $x^2 - 5 \times$ RClOO $- 6,25$ = RS LRN

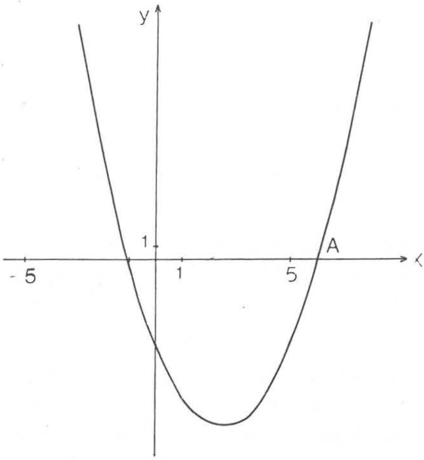
Deux élèves sont chargés des calculatrices ; ils donnent, à la demande, les valeurs de f que désirent leurs camarades. Les résultats arrivent d'abord en désordre ; je les inscris tous au tableau puis fais opérer un premier classement en prévoyant de la place pour des données complémentaires, travail nécessaire pour le choix des unités graphiques.

Après discussion, on choisit un centimètre sur l'axe des abscisses et un demi-centimètre sur celui des ordonnées (fig. 2). Les points sont le plus souvent joints par des segments. J'indique que, pour respecter la réalité, on ne doit pas avoir de points anguleux et donc qu'il faut avoir suffisamment de points pour faire un tracé à main levée. Nouvelles demandes de valeurs de f :

f(2,5) = − 12,5 f(6,5) = 3,5 f(7,5) = 12,5

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
− 3	17,75	1	− 10,25	5	− 6,25
− 2	7,75	2	− 12,25	6	− 0,25
− 1	− 0,25	3	− 12,25	7	7,75
0	− 6,25	4	− 10,25	8	17,75

(fig 2 après réduction)



Il est clair pour tout le monde qu'il y a deux valeurs x' et x'' pour lesquelles f(x) est nulle et qu'on peut les encadrer ainsi :

$$-1{,}25 < x' < -1 \qquad\qquad 6 < x'' < 6{,}25$$

qu'il n'y en a pas d'autre car, pour $x > 8$ ou $x < -3$, le terme x^2 du polynome imposera sa loi et les f(x) correspondants deviendront de plus en plus grands. Quelques essais demandés aux préposés à la calculatrice le confirment : f(50) = 2 243,75 ; f(−100) = 10 493,75.

Il s'agit maintenant d'approfondir la connaissance de x' et de x''.

Pour x'', par exemple, certains proposent des essais à la calculatrice :

f(6,1) = 0,46	f(6,02) = −0,1095
f(6,05) = 0,1799	f(6,03) = −0,0391
f(6,01) = −0,1799	f(6,04) = 0,0316

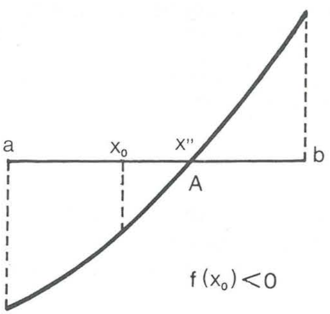
On a donc $6{,}01 < x'' < 6{,}05$ puis $6{,}03 < x'' < 6{,}04$.

Je demande que l'on abandonne cette méthode aléatoire de recherche mais que l'on s'en inspire pour créer un algorithme.

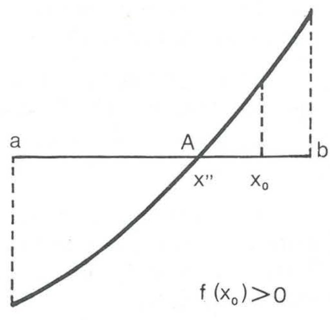
Si l'on grossit la figure au voisinage du point A, on se trouve, lorsqu'on cherche à situer un nombre x_0 de l'intervalle]a,b[par rapport à la racine inconnue x'', dans l'une des deux situations suivantes :

— dans le premier cas on conclut : $x_0 < x'' < b$

— dans le second : $a < x'' < x_0$



(fig. 3)



Il suffit donc de se donner un nombre toujours compris entre a et b, de calculer $f(x_0)$ et de reprendre le calcul avec l'intervalle $]x_0, b[$ si $f(x_0) < 0$, avec l'intervalle $]a, x_0[$ si $f(x_0) > 0$.

Pour faciliter la tâche j'indique que, dans la calculatrice, on peut insérer un programme permettant de calculer la demi-somme des bornes.

Il faut l'écrire au-delà du pas 16 pour que les deux programmes n'interfèrent pas.

GTO 17 LRN 2nd LBL B STO OI RS 2nd LBL C STO O2
+ RCl OI = : 2 = RS LRN

On entre donc a en B, b en C ; on obtient $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ qu'on entre en A.

On part de l'encadrement trouvé par tâtonnement.

f(6,03)	= −0,0391		
f(6,04)	= 0,0316	6,03	$<x''<6{,}04$
f(6,035)	= −0,003775	6,035	$<x''<6{,}04$
f(6,0375)	= 0,01390625	6,035	$<x''<6{,}0375$
f(6,03625)	= 0,0050640625	6,035	$<x''<6{,}03625$
f(6,035625)	= 0,0006441406	6,035	$<x''<6{,}035625$
f(6,0353125)	= −0,015655274	6,0353125	$<x''<6{,}035625$
f(6,03546875)	= −0,0004607178	6,03546875	$<x''<6{,}035625$
f(6,035546875)	= 0,0000917053	6,03546875	$<x''<6{,}035546875$
f(6,035507813)	= −0,0001845078	6,035507813	$<x''<6{,}035546875$

On obtient donc $x'' \simeq 6{,}0355$ à 10^{-4} près par défaut.

« Certains savent déjà que, parmi les équations, les équations du second degré sont des privilégiées car il existe des formules permettant de les résoudre.

En 3ème vous avez résolu des équations du second degré. Comment se présentaient-elles ? »

Je reçois quelques réponses :

$$(x-4)(x-3) = 0 \qquad (1) \qquad\qquad 2x^2-7 = 0 \qquad (2)$$

Le problème pour nous est donc de ramener telle équation que nous ne savons pas résoudre à une équation du type (1) ou (2).

Je suggère la piste suivante : remplacer x par $\alpha + X$ et essayer de choisir α de manière que l'équation obtenue soit du type (2).

$$(\alpha+X)^2 - 5(\alpha+X) - 6{,}25 = 0$$
$$\alpha^2 + 2\alpha X + X^2 - 5\alpha - 5X - 6{,}25 = 0$$

La recherche s'oriente d'abord dans des voies erronées : factorisations sans issue, expression de α en fonction de X, choix aléatoire de α ! Enfin, au bout d'une demi-heure, surgit une bonne idée que je souligne ; quelqu'un écrit :

$$X^2 + 2\alpha X - 5X + \alpha^2 - 5\alpha - 6{,}25 = 0 \qquad (3)$$

Le but semble proche. Comment choisir α pour faire disparaître tous les termes du premier degré ?

Dix minutes passent encore avant qu'une autre élève n'ait l'idée de poser $2\alpha X - 5X = 0$. Inconsciemment, elle sous-entend le quantificateur car elle écrit $X(2\alpha-5) = 0$ d'où $\alpha = \dfrac{5}{2}$.

Tout le monde se jette littéralement sur cette valeur de α tant convoitée et la porte dans (3). Certains, victimes d'erreurs de calcul, sont déçus : ils n'ont pas compris la raison du choix de $\alpha = \dfrac{5}{2}$.

La plupart des élèves obtiennent néanmoins :

$$X^2 - 12{,}5 = 0$$

Calculer X' et X'' puis x' et x'' se fait dès lors rapidement. Tout concorde. $x' = \dfrac{5}{2} - \sqrt{12{,}5}$ $\qquad x'' = \dfrac{5}{2} + \sqrt{12{,}5}$

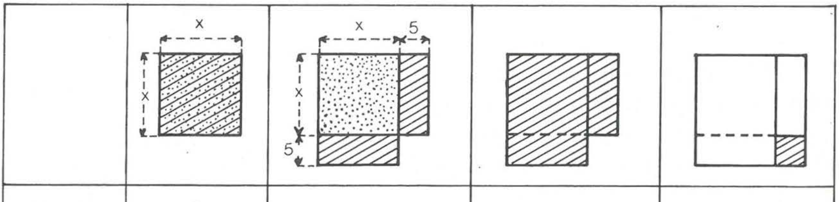
Cependant une courte synthèse s'impose pour montrer surtout comment les idées mises en avant au cours de la recherche peuvent être présentées de manière plus rigoureuse et plus concise.

Le passage au cas général s'effectue ensuite sans difficulté, hormis des erreurs de calcul et l'omission (bien naturelle !) de la discussion relative au discriminant.

• **Comme les Babyloniens** (1 000 ans avant notre ère)

Méthode reprise par des algébristes arabes (IX[e] siècle) en particulier par Al-Khawarizmi (d'où l'étymologie du mot Algorithme).

Soit à résoudre dans **R** $x^2 + 10x = 56$. La méthode est fondée sur des considérations d'aires. Elle est suggérée par le schéma suivant :



Mesure de la surface hachurée	x^2	. . .	. . .	. . .

$$x^2 + 10x + 25 = 56 + 25$$
$$(x+5)^2 = 81$$

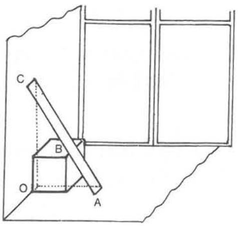
On n'obtient bien sûr qu'une solution mais la voie est ouverte pour la recherche de la factorisation du trinome $x^2 + 10x - 56$.

Autres exercices : $x^2 + 10x = 39$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Quelques problèmes du second degré

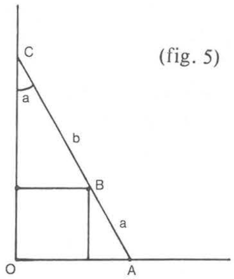
• Voici une petite expérience toute simple que chacun peut réaliser avec une règle plate graduée transparente et un cube. On place le cube dans un angle de fenêtre (fig. 4) et on dispose la règle de manière que ses extrémités A et C s'appuient respectivement sur le bord horizontal et sur le bord vertical de la fenêtre, tandis que le plat de la règle touche l'arête du cube. On lit par transparence les distances CB et BA.



(fig. 4)

L'expérience réalisée en classe donna, compte tenu du fait que le zéro de la règle ne coïncide pas avec son extrémité : 25,2 et 5,8.

Il s'agit maintenant de résoudre ce problème : trouver les longueurs de CB et BA en se donnant uniquement la longueur de la règle (31 cm) et celle de l'arête du cube (5,6 cm).



(fig. 5)

Un élève remarque que, seules, deux positions de la règle conviennent. Et le problème est donné en recherche à la maison. Trois jours après, aucune idée ! pas tout à fait cependant... « il faudrait connaître les angles » dit quelqu'un. « C'est une bonne idée. Calculez sin α ».

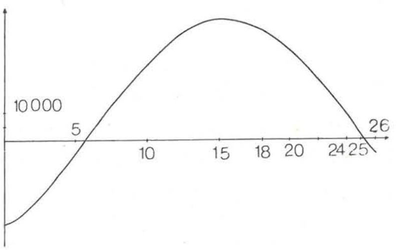
$$\sin \alpha = \frac{5{,}6}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - 5{,}6^2}}{a}$$

A la séance suivante trois élèves ont résolu le problème graphiquement en représentant par points la fonction

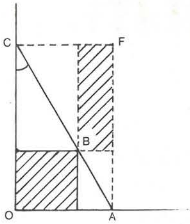
$$f : a \mapsto a^4 - 62a^3 + (31^2 - 2.5{,}6^2)a^2 - 62.5{,}6^2 a - 31^2.5{,}6^2$$
$$\text{soit } a^4 - 62a^3 + 898{,}28a^2 - 1944{,}32a - 30136{,}96$$

Les résultats lus sur le graphique de la figure 6 corroborent les résultats expérimentaux. On affine néanmoins par dichotomie. La calculatrice programmable est bien utile !

(fig. 6)



J'indique alors une autre piste. « Au lieu de choisir a et b comme inconnues, posez $OA = x$ et $OC = y$ et faites intervenir l'aire du rectangle OAFC » (fig. 7).



$$xy = 5{,}6x + \ldots$$

(Remarquer l'égalité des aires des deux surfaces hachurées).

(fig. 7)

• Sur le Petit Robert on lit à « Nombre d'or » :

« Esthétique (dans le partage asymétrique d'une composition picturale). Rapport entre la plus grande des deux parties et la plus petite, égal au rapport entre le tout et la plus grande ».

A partir de cette définition calculer le nombre d'or. Puis construire à la règle et au compas un rectangle dont le rapport des dimensions est le nombre d'or.