18

MATHÉMATIQUE ET ENVIRONNEMENT

I

But de l'exercice

Représenter graphiquement le mouvement des aiguilles d'une montre pendant 12 heures. En déduire les instants où les aiguilles se superposent.

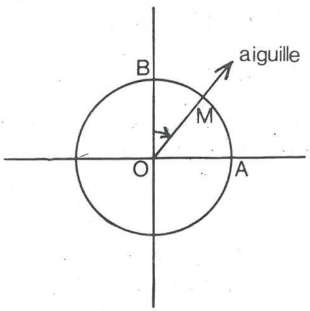
Connaissances préalables

- Equations de droites
- Mesure des angles (en degrés par exemple)

Intérêt de l'exercice

- L'élève doit choisir une méthode pour repérer la position des aiguilles, et voit une application directe de la mesure des angles.
- Deux exemples de périodicité
- Résolution graphique et algébrique de systèmes linéaires.

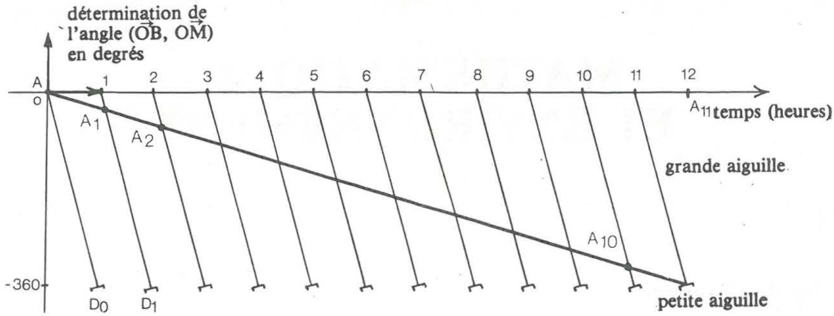
Solution proposée



- Repérage du mouvement des aiguilles :
  - — tournent dans le sens rétrograde
  - — position initiale choisie : MIDI
  - — M repéré par la détermination de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})$ dans $[0°, -360°[$

- Représentation graphique :

L'élève découvre que le mouvement uniforme correspond à un segment de droite pour chacune des deux aiguilles ; la périodicité (période T) se traduit par une translation de vecteur $T.\vec{i}$ pour la grande aiguille.



- Superposition des aiguilles :

  D'abord : lecture graphique : les instants cherchés sont les abscisses des points A_0, A_1,... dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; $A_n \mapsto A_{n+1}$ dans la translation de vecteur $\frac{12}{11}\vec{i} - \frac{360}{11}\vec{j}$ $(0 \leqslant n \leqslant 9)$.

  Ensuite : équation de $\triangle$ (petite aiguille) : $y = -\frac{360}{12}x$

  équation de D_0 (grande aiguille, 1ère heure) : $y = -360x$

  équation de D_1 : par translation de vecteur $\vec{i}$ à partir de D_0 : $y = -360(x-1)$

  équation de D_n : par translation de vecteur $n\vec{i}$ à partir de D_0 : $y = -360(x-n)$

  Instants de superposition = abcisses de A_0, ... solutions d'une équation du 1er degré : on trouve $\frac{12}{11}$(h), ...,

  $n\frac{12}{11}$ (h), ..., $0 < n < 11$

Comportement des élèves

- Très grand intérêt pour ce problème concret
- Des hésitations sur la représentation des segments ouverts (liés au choix de l'intervalle $[0, -360°[$
- Des difficultés sur la détermination des équations de $\triangle$, D_0,...

Temps mis pour la résolution

Deux heures.

II.

Problème historique des "bœufs de Newton"

Sachant que 75 bœufs mangent en 12 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 60 ares, que 81 bœufs mangent en 15 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 72 ares, que x bœufs mangent en 18 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 96 ares, trouver x.

On admet que l'herbe pousse régulièrement, et que les bœufs mangent de façon régulière.

Connaissances préalables :

Equations du 1er degré à une inconnue.

Intérêt de l'exercice :

- Notion de proportion, mal assimilée par les élèves sortant de 3e (confusion fréquente entre égalité et proportionnalité en particulier).
- L'élève doit découvrir ce qui est invariant : la quantité d'herbe mangée *par jour* et *par bœuf*.

Solution proposée :

Notations a : quantité d'herbe initialement dans le pré, par are
h : quantité d'herbe qui pousse dans le pré, par are et par jour.

$$\frac{60\,(a + 12\,h)}{12 \times 75} = \frac{72\,(a + 15\,h)}{15 \times 81} = \frac{96\,(a + 18\,h)}{18\,x}$$

On en déduit $x = 90\,\dfrac{a + 18\,h}{a + 15\,h}$ *et* $\dfrac{a + 12\,h}{a + 15\,h} = \dfrac{8}{9}$ $\qquad a = 12\,h$

Alors $x = 100$

Comportement des élèves :

- Grand intérêt initial, vu la présentation amusante qui peut être faite de l'énoncé.
- De grosses difficultés à découvrir l'invariant : herbe mangée par jour et par bœuf.

III.

Problème :

1° Un feu de signalisation bicolore rouge-vert fonctionne à un carrefour en changeant régulièrement de couleur toutes les 20 secondes.

Un automobiliste se présente au carrefour à l'instant t. Trouver son temps d'attente θ au feu en fonction de t (on supposera qu'à l'instant $t = 0$ le feu passe au vert). Représenter graphiquement la fonction $f : t \mapsto \theta$. Vérifier que c'est une fonction périodique.

2° Deux carrefours successifs sont distants de 200 m. Un automobiliste roule à la vitesse uniforme v (en m/sec.). Quel temps lui faut-il pour aller d'un carrefour à l'autre? La vitesse en ville est limitée à 60 km/h. Que peut-on en déduire ?

Les deux carrefours sont munis de feux identiques à ceux du 1° qui passent au vert ou au rouge simultanément.

Une voiture se présente au 1^{er} feu au vert à un instant t. Déterminer en fonction de t la vitesse nécessaire au minimum pour passer au 2ème feu tant qu'il est encore vert.

Représenter le graphique de la vitesse minimum en fonction de l'instant de passage au 1^{er} feu.

La vitesse étant limitée à 60 km/h, à quel instant, au plus tard, faut-il passer au 1^{er} feu pour trouver le 2ème au vert ?

Ce problème permet de travailler sur
- les fonctions périodiques
- les fonctions affines par morceaux
- les hyperboles tracées par points
- la résolution graphique et numérique d'inéquations.

Grand intérêt des élèves pour ce problème.

IV.

Une solution alcoolisée titre t° si elle contient t parties d'alcool pour 100 parties de mélange.

On dispose d'un flacon A contenant a litres d'alcool pur et d'un flacon B contenant b litres d'eau. On prélève x litres d'alcool dans A et x litres d'eau dans B que l'on reverse respectivement dans B et A.
Soit f la fonction qui à x associe le titre de la solution obtenue en A.
Soit g la fonction qui a x associe le titre de la solution obtenue en B.

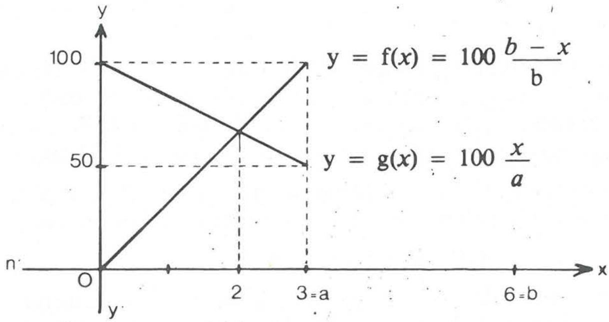
1°) Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de a et b et préciser leur ensemble de définition.

2°) En prenant $a = 6$ et $b = 3$, tracer les courbes représentatives de f et g et en déduire graphiquement la valeur qu'il faut donner à x pour que les solutions obtenues en A et B titrent le même degré.

3°) Dans le cas général, calculer en fonction de a et b la valeur de x pour que les solutions obtenues en A et B titrent le même degré. Vérifier alors le résultat obtenu au 2e.

Le problème admet-il une solution, quels que soient a et b ?

On obtient le graphique :



V.

Coût d'une communication téléphonique :

a) Si tu téléphones de Niort à Angoulême, cela te coûte 0,50 F par tranche de 24 secondes, soit, par exemple, 1,50 F pour une minute, 2,50 F pour deux minutes.

Représente, après avoir explicité f(x) en fonction de x, la fonction f qui donne le coût f(x) en francs d'une communication téléphonique qui dure x minutes (on se limitera à $0 \leqslant x \leqslant 2,5$).

b) Si tu téléphones maintenant au Kenya (toujours de Niort), il t'en coûte 0,50 F pour une durée de 1,3 seconde.

Quel est le coût d'une minute de communication ?

La relation entre le coût en francs de la communication et sa durée en secondes est une fonction constante par intervalles ; la représenter lorsque la durée x (en secondes) décrit l'intervalle [0 ; 60].

Ne peut-on pas envisager d'"approcher" ce graphique par une droite qui donne de "bons résultats" ?

c) E désignant la fonction "partie entière" et h la fonction définie sur **R** de la manière suivante :

Si $x \in \mathbf{Z}$, $h(x) = x$

Si $x \in \mathbf{Z}$, $h(x) = E(x) + 1$,

établir que, pour tout x réel, $h(x) = -E(-x)$.

En déduire que le coût f(x) en francs d'une communication téléphonique au Kenya de x secondes est donné par : $f(x) = -\frac{1}{2} E(-\frac{x}{1,3})$

Application : retrouver le coût d'une minute de conversation.

VI.

Hep, Taxi !

Le prix d'une course en taxi est la somme d'une "prise en charge" fixe (la même, de jour et de nuit) et d'un coût proportionnel à la distance parcourue, à deux tarifs : un de jour, un de nuit de 40 % supérieur. Les trajets de nuit sont ceux s'effectuant entre 21 heures et 7 heures du matin.

1) L'autre matin, Sylvain Dejourénuit a payé 13,40 F pour un trajet de 6 km ; il a réglé 16,60 F pour le trajet retour, fait de nuit.

Quels sont les tarifs de jour et de nuit ?

Tracer la représentation graphique de la fonction donnant le prix en francs d'une course de x km le jour; idem pour la nuit. On prendra 1 cm pour 1 km en abscisse ; 1 cm pour 2 F en ordonnées ; x décrira l'intervalle [0 ; 9].

2) Le lendemain soir, le taxi qui ramenait Sylvain chez lui roulait à la vitesse uniforme de 30 km/h. La course lui a coûté 20,60 F. Parti à 20 h 54, à quelle heure est-il arrivé chez lui ?

Expliciter le prix $h(x)$ en francs, prix indiqué au fur et à mesure par le compteur en fonction de la distance x effectuée en km, du départ jusqu'à l'arrivée. Représenter h sur le même graphique que les fonctions du 1).