# 20

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE : PROPRIÉTÉS D'INCIDENCE

**OBJECTIFS :**

A partir de la réalisation, puis de l'observation de deux solides de Platon, faciles à construire et cependant moins familiers que le cube : le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier, on se propose :

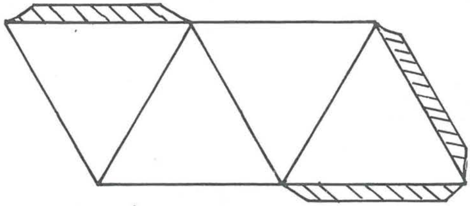
1) de recenser les objets primitifs de la géométrie dans l'espace ;
2) de faire pratiquer à bon escient le vocabulaire ;
3) de découvrir les propriétés d'incidence dans l'espace en partant des propriétés connues dans le plan ;
4) d'amener les élèves à conduire quelques déductions simples.

## Introduction

On appréhende l'espace d'abord par le travail manuel. C'est donc à une séance de travail manuel que je vous invite. Vous avez sans doute déjà fabriqué un cube, un parallélépipède rectangle. Le cube est un polyèdre régulier. En connaissez-vous d'autres ? Plusieurs voix : la pyramide. D'accord, mais à combien de faces ? Comme sur la table là-bas. J'approche l'objet, un splendide tétraèdre régulier construit avec de minces baguettes de bois assemblées à l'aide de petites boules de pâte à modeler.

Je vous propose de créer un « bon » patron de tétraèdre régulier, c'est-à-dire un patron qui ne se désagrège pas en plusieurs morceaux à la découpe.

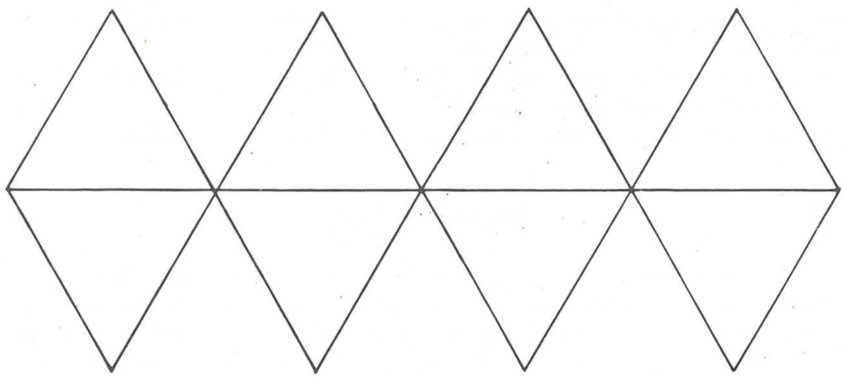
Facile ! cela donne par exemple



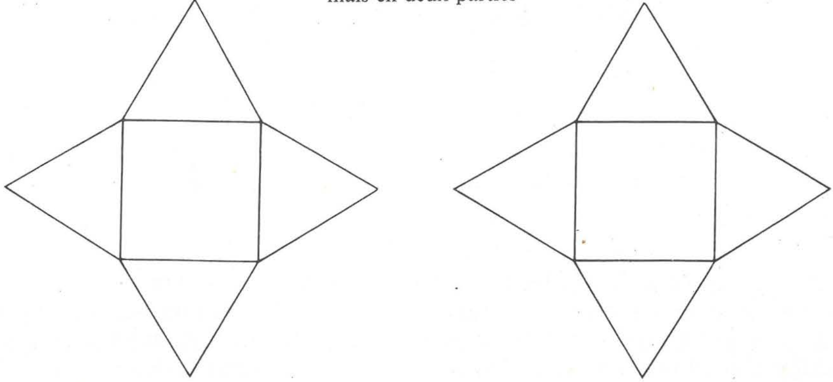
Mais il existe d'autres polyèdres réguliers, l'octaèdre que voici (en baguettes et en pâte à modeler), le fabuleux dodécaèdre, connu depuis l'antiquité et que Dürer a représenté parmi d'autres objets symboliques sur sa célèbre gravure, la Mélancolie. Je montre un exemplaire de dodécaèdre.

Enfin l'icosaèdre dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux. Mais essayez maintenant de faire le patron d'un octaèdre régulier. Cela pose problème. On demande à voir l'objet de plus près. Voici ce qui fut dessiné :

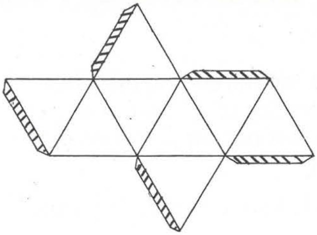
un mauvais patron



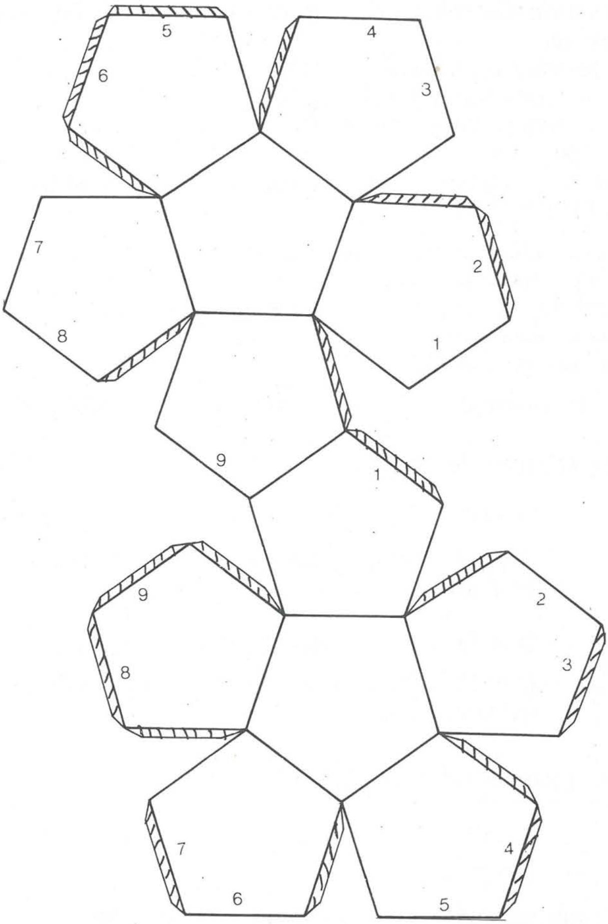
une habile réalisation
mais en deux parties



un « bon » patron



Le choix de l'emplacement des languettes de collage est un bon exercice de reconstitution dans l'espace.
Et pour couronner dignement cette séance de « vision de l'espace », pourquoi ne pas construire le patron d'un dodécaèdre régulier ? ... avec ses languettes !



# A la découverte de l'espace

Pour faciliter une démarche heuristique chez les élèves, je leur demande d'étendre à l'espace ce qu'ils ont retenu des débuts de la géométrie plane, en se guidant au besoin sur l'observation du tétraèdre régulier et de l'octaèdre régulier.

On dresse d'abord la liste des premiers objets de la géométrie plane :

— le point
— la droite
— le plan

et des premières relations intervenant entre eux, relations représentées par les signes $\in$, $\subset$, $=$, $/\!/$.

L'observation des solides permet ensuite de dresser une liste analogue pour l'espace

— le point (nom générique M)
— la droite (nom générique D)
— le plan (nom générique P)
— l'espace E

et de partir à la recherche des relations : $M \in D$ ; $M \in P$ ; $D \subset P$ ; $D_1 /\!/ D_2$ ; $D /\!/ P$ ; $P_1 /\!/ P_2$.

Cela nous amène à déterminer un plan à partir de droites et de points : trois points non alignés,
une droite et un point non situé sur cette droite,
deux droites sécantes,
deux droites parallèles.

Après cette phase d'observation, une première synthèse s'impose :

**positions relatives de deux droites**

$D /\!/ D'$
— $D = D'$
— D et D' sont parallèles et disjointes, elles déterminent un plan.

D n'est pas parallèle à D'
— D et D' sont sécantes, elles déterminent un plan.
— D et D' sont disjointes, elles ne sont pas incluses dans le même plan.

**positions relatives de deux plans**

$P /\!/ P'$
— $P = P'$
— $P \cap P' = \phi$

P et P' sont sécants, leur intersection est une droite.

positions relatives d'une droite et d'un plan

$D \parallel P$ — $D \subset P$ : une droite qui a deux points dans P est incluse dans P.
— D et P sont disjoints.

D et P sont sécants, leur intersection est un point.

Je demande alors si la célèbre propriété vue en géométrie plane : « par un point du plan, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite » peut être transposée dans l'espace en utilisant cette fois les objets de l'espace : point, droite, plan.

Un élève énonce : « par une droite, on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan ». J'émets un doute ; aussitôt ce même élève corrige son énoncé : « par une droite parallèle à un plan, on ne peut mener qu'un plan parallèle à ce plan ».

L'échange a eu lieu si rapidement que les autres élèves n'ont pas compris de quoi il s'agissait. Là encore l'observation des octaèdres éclairera la situation.

L'autre propriété, celle qu'en fait j'attendais d'abord, « par un point on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan » est enfin énoncée.

Nouvelle brève synthèse :

- Par un point M, on ne peut mener qu'une parallèle $D_1$ à $D_2$.
  1) si $M \in D_2$ alors $D_1 = D_2$.
  2) si $M \notin D_2$ alors $D_1$ et $D_2$ sont parallèles et disjointes, elles déterminent un plan.
- Par un point M, on ne peut mener qu'un plan P, parallèle à $P_2$
  1) si $M \in P_2$ alors $P_1 = P_2$
  2) si $M \notin P_2$ alors $P_1$ et $P_2$ sont parallèles et disjoints.
- Par une droite D parallèle à $P_2$, on ne peut mener qu'un plan $P_1$ parallèle à $P_2$
  1) si $D \subset P_2$ alors $P_1 = P_2$
  2) si $D \not\subset P_2$ alors $P_1$ et $P_2$ sont parallèles et disjoints.

Les élèves disposent dès lors de suffisamment de propriétés pour conduire des déductions non triviales.

Le recours à l'observation des deux solides pourra guider leur recherche.

# Premier problème proposé

*Soit une droite D parallèle à un plan P et disjointe de ce plan et soit M un point de ce plan. Etudier l'intersection du plan P et du plan (M,D).*

On cherche d'abord à visualiser cette situation sur les deux solides. Elle existe dans l'octaèdre. La face qui repose sur la table et la table elle-même représentent le plan P.

Première réponse, l'intersection est un point ! Mais une observation plus approfondie révèle la vraie nature de l'intersection ; c'est une droite et elle est parallèle à la droite D.

Essayons maintenant de démontrer tout cela. Il faut d'abord prouver que les deux plans P et (M,D) sont sécants.

Après avoir, pendant une dizaine de minutes, laissé les élèves errer dans de pseudo-raisonnements qui se terminaient invariablement par « forcément » ou « c'est obligé », je suggère une piste. Reportez-vous aux positions relatives de deux plans. Examinez chacune d'elles et cherchez chaque fois la contradiction.

$$\text{Hypothèses : }\begin{cases}\text{D et P sont parallèles et disjoints}\\ \text{M est élément de P}\end{cases}$$

**Raisonnement :**

- si P et (M,D) étaient confondus, D serait incluse dans P, ce qui est impossible puisque, par hypothèse, D et P sont disjoints.
- P et (M,D) ne peuvent être parallèles et disjoints puisqu'il existe au moins un point M qui est commun aux deux plans.

Donc les deux plans sont sécants suivant une droite $\triangle$.

Il reste à démontrer que $\triangle$ et D sont parallèles. On examine de manière analogue les positions relatives de deux droites du plan (M,D).

- Elles ne peuvent être confondues sinon D serait incluse dans P, ce qui est impossible puisque D et P sont disjoints.
- Si D et $\triangle$ étaient sécantes en un point O, D aurait un point, le point O, dans P, ce qui est impossible puisque D et P sont disjoints.

D et $\triangle$ sont donc disjointes et comme elles sont incluses dans le même plan, elles sont parallèles et disjointes.

Cette phase déductive se passe assez bien. Les élèves eux-mêmes l'ont conduite à son terme. C'est un raisonnement par l'absurde, dit un redoublant. Encouragé par ce résultat, je donne à rechercher le problème suivant :

*Soit $D_1$ et $D_2$ deux droites parallèles et disjointes, M un point qui n'appartient pas au plan ($D_1$, $D_2$). Etudier l'intersection des plans (M,$D_1$) et (M,$D_2$).*

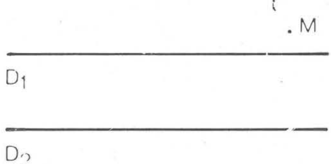
A la séance suivante, déception : certains ont bien vu que l'intersection est une droite parallèle à $D_1$ et $D_2$, d'autres non. Personne n'a démontré quoi que ce soit. Revenons donc à l'octaèdre. La situation du problème y est effectivement matérialisée. L'intersection est un point, dit encore un étourdi ! Mais cette fois, je n'ai pas à intervenir ; plusieurs de ses camarades lui font remarquer que « les plans et les droites c'est infini ». Une ultime manipulation avec un crayon symbolisant la droite d'intersection des deux plans emporte l'adhésion de tous. $(M,D_1)$ et $(M,D_2)$ sont bien sécants et la droite d'intersection $\triangle$ est parallèle à $D_1$ et $D_2$.

Mais pour le démontrer deux élèves seulement proposent des pistes de recherche. L'un pense qu'on pourrait peut-être utiliser le résultat du premier problème. L'autre penche plutôt pour raisonner avec des droites parallèles.

J'indique que ces deux voies sont sérieuses et qu'il convient de les explorer toutes les deux.

**1re recherche :** D'abord se pose la nature de l'intersection des deux plans.

$$\text{Hypothèses} \left\{ \begin{array}{l} D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont parallèles et disjointes} \\ M \text{ n'appartient pas au plan } (D_1, D_2) \end{array} \right.$$



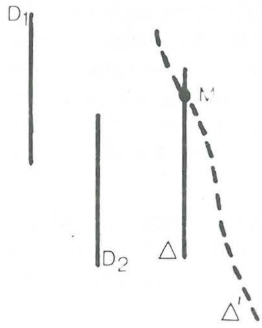

**Raisonnement :**

Il s'agit de prouver que, par exemple, la droite $D_1$ et le plan $(M,D_2)$ sont parallèles et disjoints.

- Si $D_1$ était incluse dans le plan $(M,D_2)$, ce plan contiendrait à la fois $D_1$ et $D_2$ ; ce serait le plan $(D_1,D_2)$ ; il contiendrait M, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $D_1$ n'est pas incluse dans $(M,D_2)$.
- Si $D_1$ était sécante à $(M,D_2)$, le point d'intersection O ne pourrait appartenir à $D_2$, sinon $D_1$ et $D_2$ seraient confondues, ce qui est contraire à l'hypothèse. On pourrait construire dans le plan $(M,D_2)$ la parallèle Ox à $D_2$. On pourrait ainsi mener par le point O deux parallèles à la droite $D_2$, les droites $D_1$ et Ox. Cela est impossible, donc $D_1$ et $(M,D_2)$ sont parallèles et disjoints.

D'après le théorème précédent, le plan $(M,D_1)$ coupe $(M,D_2)$ suivant une droite passant par M et parallèle à $D_1$. Pour la même raison Ox est parallèle à $D_2$.

**$2^e$ recherche :**




Les deux plans $(M,D_1)$ et $(M,D_2)$ se coupent suivant une droite $\triangle$ passant par M (même démonstration que ci-dessus). Malheureusement on ignore si $\triangle$ est parallèle à $D_1$ et à $D_2$. Il faut faire intervenir encore une parallèle.

L'élève avait pensé à la parallèle à $D_1$ et $D_2$ menée par M.

Je la dessine en pointillé ! On m'objecte qu'elle n'est pas droite ! Elle devrait occuper la place de $\triangle$ ! Il y a là un sérieux écueil. Le transfert entre objets réels et objets mathématiques est loin d'être immédiat chez la plupart des élèves. De par sa construction, cette droite $\triangle'$ est incluse dans $(M,D_1)$ et $(M,D_2)$. C'est donc bien la droite $\triangle$.

Cette démonstration séduit davantage les élèves, mais ils l'ont trouvée difficile. Ils la comprennent mais beaucoup estiment qu'ils sont incapables de la retrouver seuls. Seront-ils plus à l'aise avec le problème suivant ?

*Si deux plans sont parallèles et disjoints, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles et disjointes.*

Cette fois ce type de raisonnement semble être assimilé par la plupart des élèves. Quelques-uns éprouvent encore des difficultés. Cela provient le plus souvent d'une vision de l'espace qui n'a pas encore franchi l'obstacle d'une représentation abstraite. Il faudra sans doute bien souvent encore avoir recours aux solides de Platon.