

DES ENONCES D'EXERCICES, DE PROBLEMES...

Ces énoncés ont été élaborés dans le cadre de la mise à l'essai du programme de seconde (partie analyse) : certains ont été effectivement proposés aux élèves (seconde C), d'autres non, faute de temps.

Ils abordent :

- des activités numériques : introduction, comportement, comparaison de suites,
- des études de fonctions : introduction, études locales, études globales, utilisation ou élaboration de graphiques.

Les échecs passés, dans le domaine de l'analyse, montrent que l'acquisition d'un contenu mathématique n'a pas nécessairement à reposer sur le préalable formel : bonnes définitions dont on tirerait les conséquences.

Un substrat est indispensable : il assure l'assise de l'acquisition.

Il paraît donc nécessaire de reconnaître la valeur de comportements jusque-là un peu négligés :

- démarches empiriques... pour se faire une idée : cela passe par l'utilisation d'expériences numériques, par l'utilisation du graphisme, par l'utilisation d'exemples qu'on ne peut pas totalement maîtriser avec les élèves ;

- comparaison d'exemples : au lieu de partir de grands ensembles de fonctions (ensemble des fonctions continues, ensemble des fonctions dérivables...) on préfère étudier des exemples sur lesquels des questions de comparaisons pourront permettre de dégager les aspects qualitatifs classiques (convergences, continuité, dérivabilité).

La forme de ces énoncés peut très certainement être modifiée : l'effort d'adaptation dans ce domaine doit être poursuivi en fonction des choix pédagogiques, et il serait excellent que les échanges puissent se développer à ce niveau.

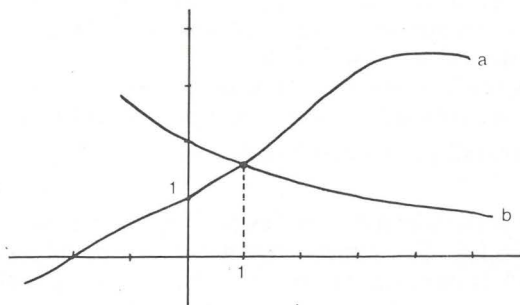
En italique, quelques commentaires.

Enoncé 1 :

Série de questions liées à la notion de fonction qui visent à vérifier en partie l'acquisition du concept de fonction : 1), 2), 3), 5) ; l'aptitude à utiliser un graphique : 4), 7).

Les réactions des élèves sur 1), 2) sont notamment très intéressantes. On peut voir aussi les travaux de R. Barra (IREM de Poitiers).

- 1) Peut-on déterminer une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
 $f(1/2) = 1,65$; $f(2) = 7,39$; $f(3) = 20,09$?
- 2) Peut-on déterminer une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
 $g(1/2) = 1,65$; $g(2) = 7,39$; $g(3) = 20,09$?
- 3) Avec une calculatrice possédant la touche e^x , donner les valeurs de cette touche pour $1/2$, 2 , 3 .
- 4) Peut-on définir une application u de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
 $\forall x \in \mathbf{R} \quad -x^2 \leq u(x) \leq x^2$?
- 5) Une application v de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est telle que $v(1) = -1$. Peut-on déterminer $v(1,1)$?
- 6) Une application w de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est strictement croissante.
Soit l'application W de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $W(x) = [w(x)]^2$.
Est-il vrai que l'application W est strictement croissante ?
- 7) Le graphique ci-dessous représente deux applications a et b de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
A l'aide de ce graphique, résoudre :
 $a(x) > b(x)$ x inconnu
 $a(x) > b(x) - 1$ x inconnu
 $b(x) = 2$ x inconnu



Enoncé 2 :

Il est tiré d'un document élaboré pour une introduction des suites numériques dans le cadre de la mise à l'essai : modifié après analyse des réactions des élèves, il a été utilisé en classe.

Il s'agit d'explorer le comportement de suites simples, qui serviront de référence pour les convergences ultérieures : aucune formalisation de la convergence n'a été donnée.

Les aspects de comparaison de convergences apparaissent vite.

La suite h paraît indispensable pour motiver une mise en forme théorique : noter que pour a entier ($\frac{2^n}{n^a}$) décroît jusqu'à $E\left(\frac{a}{\log 2}\right)$, puis diverge en croissant vers $+\infty$; on exagérerait le phénomène en augmentant a ; le cas $a = 5$ paraît suffisant...

La deuxième partie du texte amorce l'utilisation de majorations pour accéder à d'autres suites ou déplacer la limite (non nulle).

Des introductions plus concrètes de la notion de suite méritent d'être envisagées avant ces considérations.

La deuxième partie du texte amorce l'utilisation de majorations pour accéder à d'autres suites ou déplacer la limite (non nulle).

Des introductions plus concrètes de la notion de suite méritent d'être envisagées avant ces considérations.

On considère les suites de nombres réels a, b, c, d, e, f, g, h définies par :

$$a_n = 10^{-n}, b_n = n^{-1}, c_n = n^{-2}, d_n = \frac{1}{n}, e_n = n^{-3}, f_n = 2^n, \\ g_n = 10^{-4} + n^{-1}, h_n = \frac{2^n}{n^5}$$

1) En choisissant les moyens de calcul les mieux appropriés, déterminer, éventuellement par valeur approchée, les termes de rang n des suites a, b, c, d, e, f, g, h pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

On présentera les résultats dans un tableau.

Quelles observations peut-on faire sur les ordres de grandeur ?

2) Poursuivre le travail pour $n \in \{10, 20, 50\}$

Que constate-t-on ?

3) Procéder à la comparaison des termes de rang n et de rang $n+1$ pour les suites a, b, c, d, e, f, g . Ces suites peuvent-elles avoir un comportement analogue à la suite h pour des valeurs de n encore plus grandes ?

4) Déterminer un entier p tel que : pour $n > p$, on ait : $a_n < 10^{-2}$.

Reprendre cette étude pour b, c, d, e, f, g .

Comparer les résultats.

5) Reprendre la question 4) avec 10^{-5} à la place de 10^{-2} .

6) Dans quel cas peut-on affirmer que le terme général de la suite approche 0 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment ?

Par exemple, à partir de quel rang le terme de rang n est-il inférieur à 10^{-8} ?

7) Une suite u est supposée telle que

$$\forall n > 5 \quad 0 < u_n < 10^{-n}$$

mais on ne connaît pas son terme général (u_n).

Que peut-on affirmer sur le comportement de u lorsque n croît infiniment ?

Qu'en serait-il si on supposait plutôt $\forall n > 21 \quad 0 < u_n < \frac{1}{n^2}$

ou si on supposait $\forall n > 21 \quad 0 < u_n < 10^{-10} + \frac{4}{n}$?

Donner des suites exemplaires.

Qu'en serait-il si on supposait $\forall n > 21 \quad u_n < \frac{1}{n}$?

8) Une suite v dont le terme de rang n n'est pas connu vérifie cependant :

$$\forall n > 5 \quad 0 < v_n - 2 < \frac{1}{n}$$

Que peut-on déduire de cela ?

9) Soit la suite i telle que $i_n = 3 + \frac{5}{n^2}$

Quel est le comportement de i lorsque n croît infiniment ?

Donner une suite approchant 3 d'autant qu'on veut, plus vite que i_n .

Dans les deux cas préciser une condition suffisante pour que le terme de rang n ne diffère de 3 que de 10^{-4} au plus.

Enoncé 3 :

Le cadre expérimental est dominant ici : il s'agit, outre quelques considérations de symétrie, d'étudier certains aspects locaux du sinus.

La question 3) est encore une utilisation de graphique : on peut constater les difficultés des élèves à cet égard.

On pose $I = [-1 ; 3, 2]$

1) En utilisant la calculatrice, représenter graphiquement la restriction de la fonction sinus à I (unité : le radian) dans le plan ponctuel de repère orthonormé (unité 5 cm).

2) Estimer, avec la meilleure précision possible, les réels de I dont le sinus est nul.

Estimer, avec la meilleure précision possible, le réel de I où le sinus est maximum.

En se servant du graphique, décrire la variation du sinus sur I . Trouver une formule liant $\sin x$ et $\sin(\pi - x)$.

3) On pose $u_0 = 1$, puis $u_1 = \sin u_0$, puis $u_2 = \sin u_1, \dots$ et ainsi de suite.

En utilisant le graphique de 1) expliquer ce que donne la répétition infinie du processus introduit dans cette question.

4) Au voisinage de 0, la fonction sinus est-elle approximable par une fonction affine ? Laquelle ?

D'après les résultats fournis par la calculatrice, sur quel intervalle a-t-on : $|\sin x - x| < 10^{-2}$?

En déduire un intervalle sur lequel $|\sin 5x - 5x| < 10^{-2}$.

Estimer de même la fonction sinus au voisinage de π .

5) Soit u l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $u(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

Représenter, par choix de points, la restriction de u à I (faire le schéma sur celui de 1).

Evaluer le réel de I où u est maximum.

Quelle semble être la valeur de ce réel ? Peut-on le démontrer ? Est-ce un maximum local ou un maximum global ?

6) Que constate-t-on dans la comparaison de sinus et de u au voisinage de 0 ?

Sur quel intervalle a-t-on :

$$|\sin x - u(x)| < 10^{-2} \quad |\sin x - u(x)| \leq 5 \cdot 10^{-2} ?$$

Utiliser les résultats précédents pour majorer

$$|v(x) - u(2x) + 2u(x)| \text{ sur } [-0,7 ; 0,7] \text{ avec } v(x) = \sin 2x - 2 \sin x.$$

Représenter la restriction de v à $[-0,7 ; 0,7]$ par l'approximation qu'en fournit le résultat précédent.

Enoncé 4 :

Celui-ci a été proposé en devoir de synthèse à faire à la maison : retour sur les suites de référence, utilisation de comparaisons, étude globale d'une fonction, étude locale en 0 par majoration.

Soulignons que la résolution de $\frac{x}{1+x^2} = y$ (x inconnu) est certainement en dehors des objectifs du nouveau programme.

I. Pour n entier naturel, on pose :

$$a_n = n^{-1} ; b_n = n^{-2} ; c_n = \frac{1}{n^2 + 1} ; d_n = \frac{n}{n^2 + 1} ; e_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$f_n = \frac{n^3}{n^2 + 1} ; g_n = 10^{-3} + \frac{n}{n^2 + 1} .$$

1) En calculant des valeurs approchées des termes de ces suites pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 1000, 10\,000\}$ déterminer celles dont le terme général approche 0 d'autant qu'on veut quand n croît infiniment.

2) Comparer les réels x^{-2} et x^{-1} ; $\frac{1}{x^2 + 1}$ et $\frac{1}{x^2}$; $\frac{x}{x^2 + 1}$ et $\frac{1}{x}$

3) a) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $0 < a_n < 10^{-5}$?

b) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < b_n < 10^{-5}$

c) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < c_n < 10^{-5}$

d) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < d_n < 10^{-5}$

e) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < d_n < 10^{-50}$

Pour répondre à b, c, d, e on utilisera a) et 2).

4) Que se passe-t-il pour e_n, f_n, g_n lorsque n croît infiniment ?

II. Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

1) Pour y paramètre réel, résoudre l'équation $y = f(x)$ (x inconnu).

Comment interpréter le résultat ?

2) a et b étant des réels, écrire $f(a) - f(b)$ sous une forme factorisée.

En déduire que la restriction de f à $[0; 1]$ est croissante ; quelle est la variation de la restriction de f à $[1, +\infty[$?

Quelle est la variation de f sur $\mathbf{R}^-$? (penser à la parité).

3) A l'aide des calculs faits en I ébaucher une représentation graphique de f en plan de repère orthonormé.

III. 1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \quad 0 \leq |f(x) - x| \leq |x^3|$.

2) En choisissant un repère orthonormé d'unité 10 cm, représenter graphiquement la restriction de f à $[-1; +1]$ et l'application identique de $\mathbf{R}$.

Enoncé 5 :

Portant sur des utilisations de comportement locaux de fonctions pour créer des suites permettant d'approximer des solutions d'équations.

Le I est encore une exploration de fonctions simples destinées à servir de référence : la construction d'échelles de comparaison paraît fondamentale.

Les II, III et IV introduisent la méthode de Héron pour le calcul de racines carrées. Laplace n'avait-il pas raison de dire : "Lisez Euler, c'est notre maître à tous." ?

C'est en V et VI que la justification théorique du processus d'approximation est abordée : en fait, il s'agit de la méthode de Newton-Raphson, mais l'introduction d'Euler est un modèle de non-formalisme... à méditer !

Le choix de 23 est basé sur le fait que $4,8 - \sqrt{23} < \frac{5}{1000}$

ce qui permet, en deux itérations, de dépasser la capacité des calculatrices : le calcul numérique final vaut la peine et la rapidité de convergence joue un rôle essentiel.

Le VII reprend la technique sur un autre exemple : $x^3 = 2x + 1/2$; on n'y cherche pas de justification théorique... à dessein... pour le moment.

Le caractère irrationnel de $\sqrt{20}$ est seulement abordé en fin de travail : en effet, son étude initiale n'est-elle pas artificielle ?

Quelques remarques : la méthode de Héron... très à la mode.. peut être abordée par d'autres moyens, notamment par un procédé géométrique d'approximations d'un carré par des rectangles. On obtient ainsi deux suites adjacentes... ce qui est très profitable : tant pour justifier la convergence que pour approfondir le concept de réel (deux suites convergent vers le même). De toutes façons, mieux vaut éviter de parachuter l'algorithme.

On trouvera des développements dans les travaux du groupe analyse de l'IREM de Marseille.

I. Soient a, b, c, d, e, f , les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$a(x) = x, b(x) = x^2, c(x) = x^3, d(x) = \sqrt{x}, e(x) = \sqrt{\sqrt{x}}, f(x) = x^4$$

1) Pour x de $\left\{ \frac{n}{10}, n \in \mathbf{N}, 0 \leq n \leq 10 \right\}$ déterminer les images de x

par a, b, c, d, e, f , (éventuellement par approximation). Présenter les résultats dans un tableau.

2) A l'aide de ces résultats, donner une représentation graphique des restrictions de a, b, c, d, e, f à $[0;1]$ dans le plan de repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 10 cm).

II. Voici un texte du grand mathématicien LÉONARD EULER à propos de calculs d'approximations : "...Or si p est une fraction entre zéro et l'unité, le carré de p , son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de p seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, et d'après cela, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul".

1) Commentez ce texte à partir des résultats de I.

2) Feriez-vous comme EULER, et estimeriez-vous que $16 + 8p$ est une approximation de $(4 + p)^2$ lorsque p est dans $[0,1]$?

Estimez-vous que $1 + x + x^2$ est approximable par $1 + x$? Dans quelles conditions ?

Estimez-vous que $1 + x + \sqrt{x}$ est approximable par $1 + x$?

Illustrer les réponses par des représentations graphiques.

III. Continuons la lecture du texte d'EULER : "... en cherchant par approximation la racine de l'équation $x^2 = 20$, on voit ici que x est plus grand que 4 et plus petit que 5 ; en conséquence on fera $x = 4 + p$ et on aura $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$; mais comme p^2 est très petit, on négligera ce terme et restera l'équation $16 + 8p = 20$; d'où $8p = 4$; on déduit de là $p = \frac{1}{2}$, $x = 4,5$ ce qui approche déjà beaucoup plus près de la vérité. Si

on suppose à présent $x = 4,5 + p$, on est assuré que p signifie une fraction encore plus petite qu'auparavant, et on pourra négliger p^2 à bien plus forte raison. On aura donc $x^2 = 20,5 + 9p = 20$, $9p = -\frac{1}{4}$ et par consé-

quent $p = -\frac{1}{36}$ donc $x = 4 + \frac{17}{36} \dots$ "

Vérifier et poursuivre le calcul d'EULER pour encore une valeur approchée de $\sqrt{20}$.

IV. Construire, de même, un processus d'approximation de $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

V. 1) Supposons que u_0 soit un réel approximant $\sqrt{a}$; calculer par la technique d'EULER une nouvelle approximation u_1 de $\sqrt{a}$. On la calculera en fonction de u_0 et a .

Calculer $u_1^2 - a$ en fonction de u_0 et a .

En déduire que $u_1 \geq \sqrt{a}$.

2) On pose $e_0 = u_0 - \sqrt{a}$ et $e_1 = u_1 - \sqrt{a}$.

Démontrer que $e_1 = \frac{(u_0 + \sqrt{a})^2}{4u_0^2} e_0^2$

VI. On s'intéresse maintenant au calcul approché de $\sqrt{23}$ par la même technique.

1) Montrer que 4,8 est une évaluation de $\sqrt{23}$. Majorer l'erreur commise.

2) Avec $u_0 = 4,8$, déterminer u_1 sous la forme d'un quotient d'entiers.

3) En remarquant que u_0 , u_1 , $\sqrt{23}$ sont dans $[4;5]$, démontrer que $e_1 \leq 0,2e_0^2$. En déduire un majorant de l'erreur commise en évaluant $\sqrt{23}$ par u_1 .

4) Si on réitère le processus, on obtient une valeur u_2 ; la calculer sous forme de quotient d'entiers.

Combien de décimales du développement de $\sqrt{23}$ peut-on ainsi connaître ?

5) Avec un peu de patience, et du soin, calculer ces décimales.

VII. On considère les applications c du I et h telle que $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$

1) En dressant une représentation graphique de c et h , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 = 2x + \frac{1}{2}$. Est-ce un résultat démontré ?

Estimer ces solutions à partir du schéma.

2) Proposer un processus d'estimation de la solution positive notée α (on essaiera d'obtenir α au $1/100$)

3) En utilisant la technique de L.EULER, proposer une autre méthode Comparer.

4) Comment préciser des évaluations des autres solutions ?

VIII. La notation p qu'EULER utilise désigne-t-elle une fraction ?

Enoncé 6 :

Il envisage des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2$ et $f(x) = \sqrt{x}$: influence du choix de f sur le comportement, comparaison, influence du choix de u_0 . Là aussi des considérations graphiques seront utiles.

On pose $u_0 = 0,5$ puis $u_1 = u_0^2$, $u_2 = u_1^2 \dots$ et ainsi de suite...

$$u_{n+1} = u_n^2.$$

- 1) Calculer les dix premiers termes de la suite u .
- 2) Exprimer u_n en fonction de n et expliquer le comportement de u_n lorsque n croît infiniment.

On pose $v_0 = 0,5$ puis $v_1 = \sqrt{v_0}$, $v_2 = \sqrt{v_1} \dots$ et ainsi de suite ...

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n}.$$

- 3) Calculer les dix premiers termes de la suite v .

Comment varie la suite v ?

4) Démontrer que $1 - v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{1 + \sqrt{v_n}} \leq \frac{2}{3}(1 - v_n)$

En déduire une justification du comportement de v_n lorsque n croît infiniment.

- 5) Déterminer le premier rang à partir duquel : $u_n < 10^{-7}$
Déterminer le premier rang à partir duquel : $v_n > 1 - 10^{-7}$
- 6) Donner une suite approchant 0 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment plus vite que u .

Donner une suite approchant 1 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment moins vite que v .

- 7) Etudier la situation lorsqu'on choisit $u_0 = 5$, $v_0 = 5$.