23

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

OBJECTIFS :

- *fonder le vocabulaire de la géométrie dans l'espace sur l'observation des polyèdres réguliers : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre*
- *trouver les propriétés des sous-ensembles orthogonaux dans l'espace en partant des propriétés connues des objets orthogonaux dans le plan*
- *résoudre des problèmes de calcul de longueur ou d'angles dans l'espace.*

Orthogonalité

Je donne d'abord l'étymologie du mot : "orthogonia" signifie, en grec, angle droit ; puis celle de "perpendiculaire" qu'on semble confondre souvent avec "orthogonal" et qui vient du latin "perpendiculum" : le fil à plomb.

Je distribue les polyèdres dont je dispose : tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre et je demande que chacun me montre deux arêtes orthogonales, c'est-à-dire deux arêtes formant un "angle droit".

Ceux qui détiennent les octaèdres donnent vite une réponse mais les autres sont perplexes, doutent qu'il en existe. Je dois leur affirmer qu'il en existe.

Le tétraèdre intrigue les élèves. Mais, influencés par leur conception de l'angle, ils cherchent vainement deux arêtes *sécantes* formant un angle droit. Je dois démystifier cette conception de l'angle.

"Il n'est pas nécessaire que les deux arêtes soient sécantes". Cette fois certains ont compris, pas tous ; ils découvrent des arêtes orthogonales dans le tétraèdre régulier, dans le dodécaèdre. Mais s'ils sont capables de repérer rapidement deux arêtes orthogonales et non sécantes, ils n'arrivent pas à formuler leur conclusion.

Je dois clarifier les idées :

"Deux droites non sécantes D_1 et D_2 sont orthogonales" signifie : Si l'on mène par un point la parallèle D_1' à D_1 et la parallèle D_2' à D_2, les droites D_1' et D_2' se coupent à angle droit.

Pour les élèves qui perçoivent plus lentement la structure de l'espace, j'utilise des polyèdres construits en baguettes minces assemblées avec de la pâte à modeler. Une baguette, que ces élèves manipulent, leur permet de visualiser la situation décrite ci-dessus.

Dès lors toute la classe sait "voir" des arêtes orthogonales, même lorsqu'elles ne sont pas sécantes.

• Je demande ensuite que l'on recense les théorèmes de l'orthogonalité dans le plan ; j'obtiens les réponses suivantes :

1°) Par un point donné on ne peut mener qu'une droite orthogonale à une droite donnée.

2°) Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

3°) Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.

Est-ce tout ? J'espérais que quelqu'un évoquerait la symétrie orthogonale ; espoir déçu ; je dois donc, moi-même, citer le mot. Le tiers de la classe reconnaît avoir entendu cela quelque part, mais de là à donner une définition de la symétrie orthogonale....

"Une projection symétrique" dit quelqu'un ; "Une réflexion comme avec un miroir" dit un autre.

L'élève qui a formulé la première réponse est invitée à expliquer à l'aide d'un dessin au tableau ce qu'elle entend par "projection symétrique".

Elle se donne effectivement une droite, un point, projette le point sur la droite et prolonge d'une longueur égale.

Mais on a le sentiment qu'avec ce dessin, elle a épuisé ses connaissances sur la symétrie orthogonale. Et la classe aussi !

Je demande alors de prendre un autre point et de construire son symétrique par rapport à D, puis encore un autre point de l'autre côté de D ; puis un autre sur D. Et je pose derechef la question : Qu'est-ce qu'une symétrie orthogonale ?

Une voix timide dans le fond de la classe sussure : "C'est une relation".

A partir de cette réponse, la notion se précise ; les souvenirs reviennent : "relation du plan dans le plan" et même "bijection du plan sur le plan".

La droite D reste invariante. Qu'advient-il de la distance de deux points ? "Elle reste la même". On adopte alors la définition : *Symétrie orthogonale autour de D :* bijection du plan sur le plan qui laisse inchangés les seuls points de la droite D et qui conserve les distances.

Définition que j'affine après avoir rappelé l'existence du mot *isométrie* et son étymologie ; on obtient la 4ème propriété : une symétrie orthogonale est une isométrie du plan qui laisse invariante une droite D.

Pour la séance suivante, les élèves devront essayer de transposer ces quatre propriétés à l'espace.

• La première ne se transpose pas : par un point on peut, dans l'espace, mener une infinité de droites orthogonales à une droite donnée.

Un élève a même remarqué que ces droites déterminent un plan.

Ces deux propriétés ne sont pas évidentes pour tous. Je demande donc de visualiser ces propriétés à l'aide d'une baguette mince, astreinte à passer par un sommet du cube et à rester orthogonale à une arête.

Ainsi se fait jour le concept de plan orthogonal à une droite et cette fois le théorème se transpose de deux manières :

— Par un point donné, on ne peut mener qu'un plan orthogonal à une droite donnée.
— Par un point donné, on ne peut mener qu'une droite orthogonale à un plan donné.

Je pose alors la question suivante :

"Vous êtes convaincus maintenant, de par les expériences réalisées, que lorsqu'une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Pouvez-vous énoncer une propriété simple qui permettra de caractériser l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ?"

Après observation des solides, un élève indique qu'il suffit que la droite soit orthogonale à deux droites parallèles du plan.

Comme il n'y a pas de réaction, je dis que cette réponse est fausse et demande à chacun de me montrer sur son solide des contre-exemples.

Il faut attendre quelques minutes avant qu'un élève découvre enfin la propriété caractéristique :

— Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à ce plan.

• Le deuxième théorème se transpose tel quel dans l'espace, qu'il s'agisse de droites ou bien de droites et de plans :

— Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

— Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

— Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Visualisation facile, mais parfois nécessaire, avec le cube.

• Le troisième théorème ne se transpose pas tant qu'il s'agit de droites mais il se transpose lorsqu'il s'agit de droites et de plans :

— Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles

— Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

• Quant à la symétrie orthogonale, il suffit d'évoquer le miroir pour obtenir, à partir de la définition de la symétrie orthogonale du plan, la définition de la symétrie orthogonale par rapport à un plan de l'espace.

Pour terminer ce tour d'horizon de propriétés évidentes ou quasi-évidentes, on évoque ce que l'on entend par deux plans perpendiculaires. On dispose dès lors d'un vocabulaire et d'une batterie de théorèmes permettant d'aborder quelques problèmes de géométrie dans l'espace concernant l'orthogonalité.

Afin de créer un problème, j'effectue des projections qui, pour n'être pas orthogonales, sont néanmoins spectaculaires.

Je pose un petit octaèdre en papier à dessin sur le plateau horizontal du rétroprojecteur. Sur l'écran se dessine en noir un hexagone régulier.

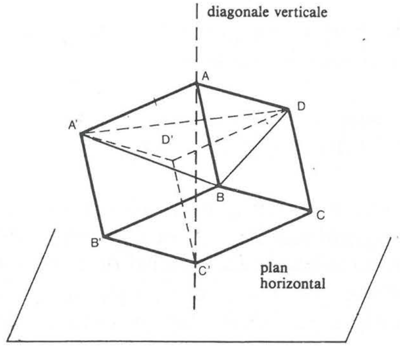
De même, grâce à une petite boule de pâte à modeler, on peut maintenir un cube en équilibre sur l'un de ses sommets, de manière que la diagonale passant par ce sommet soit verticale. (fig. 1)

Sur l'écran, on obtient encore un hexagone régulier. A l'aide de manipulations élémentaires sur ces deux solides, les élèves constatent évidemment le même phénomène par projection orthogonale sur une feuille de papier.

Ces deux problèmes de projection orthogonale sont donnés en travail de recherche à la maison.

Une élève présente une idée intéressante :

Elle a tracé judicieusement des diagonales de faces du cube de manière à mettre en évidence deux triangles équilatéraux ayant pour axe la diagonale verticale du cube. Je demande donc de prouver que la diagonale AC′ du cube est orthogonale au plan du triangle équilatéral A′BD et qu'elle est l'axe de ce triangle équilatéral (c'est-à-dire la droite orthogonale à son plan en son centre de gravité).



Au compte rendu de la séance suivante, personne n'a réussi à démontrer cela, je dois donc donner une indication :

En utilisant un cube construit en baguettes minces, je visualise la diagonale AC'.

Il est clair que la diagonale AC' est incluse dans le plan (AB', C'D), que la droite A'B est orthogonale à la droite AB' (ce sont les diagonales d'un carré), qu'elle est orthogonale à la droite B'C' (car la droite B'C' est orthogonale au plan (AA', BB').

En définitive, la droite A'B est orthogonale à deux droites sécantes B'C' et B'A du plan (AB', C'D), donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan et en particulier à la droite AC'.

AC' est orthogonale à A'B'. On démontrerait de même que AC' est orthogonale à A'D ; ce qui prouve que AC' est orthogonale au plan du triangle A'BD.

Ce raisonnement a été inspiré aux élèves à l'aide de deux remarques préliminaires : "Pour démontrer que AC' est orthogonale au plan A'BD, il suffit de démontrer que AC' est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, A'B et A'D par exemple".

Démontrer que AC' est orthogonale à A'B revient à démontrer que A'B est orthogonale à AC'. Pour cela, il suffit de démontrer que A'B est orthogonale à un plan contenant AC', en l'occurrence le plan AB'C'D.

Très lentement les élèves se sont acheminés vers la solution. Travail d'équipe, fréquentes sollicitations du professeur. Et la rédaction de la solution a révélé une grande dispersion dans la compréhension de ce raisonnement.

Il restait à prouver que le point I où AC' perce A'BD est le centre de gravité de ce triangle.

Nouveau blocage. On regarde encore une fois le cube en baguettes minces dans lequel on visualise les trois triangles rectangles AA'I, ABI et ADI.

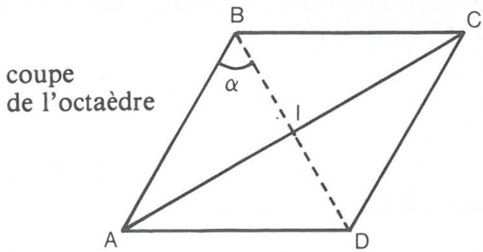
Le théorème de Pythagore permet de démontrer que les segments [A'I], [BI] et [DI] ont même longueur.

A partir de là, sans trop de difficultés, on arrive à démontrer que I est le centre de gravité du triangle A'BD.

Le rétroprojecteur a révélé que la projection d'un octaèdre régulier semblait être un hexagone régulier. Pour être persuadé du fait, il suffit de démontrer que l'axe du triangle équilatéral de la face sur laquelle l'octaèdre repose est le même que l'axe de la face supérieure. En fait on est amené à faire une coupe de l'objet par un plan vertical.

Il apparaît assez rapidement que cette coupe est un losange dont les côtés sont des hauteurs de faces.

Premier problème : reproduire cette coupe. On utilise cette fois des octaèdres en papier à dessin. Pour construire le losange, on a besoin de connaître l'angle de deux faces ayant une arête commune. Cela motive l'introduction du mot *dièdre*. Chaque élève trace sur son octaèdre l'angle à mesurer.



Finalement, si a désigne la mesure d'une arête, AB, BC, CD et AD mesurent $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, tandis que AC mesure $a\sqrt{2}$.

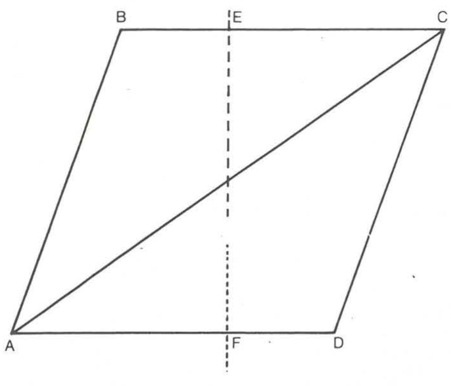
L'angle α est connu par son sinus

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\alpha \simeq 54°,73$$

$$\text{d'où } \widehat{ABC} \simeq 109°,5$$

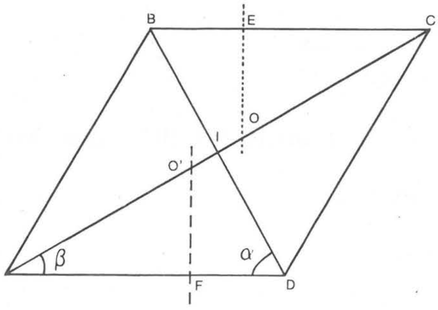
On peut dès lors construire la coupe et vérifier expérimentalement que les perpendiculaires à BC en E et à AD en F sont confondues, E et F étant respectivement les centres de gravité de la face supérieure et de la face inférieure de l'octaèdre.



La démonstration de cette propriété est donnée à deux reprises en travail de recherche à la maison ; j'avais indiqué pourtant qu'elle ne demandait que des connaissances de la classe de troisième.

Paradoxalement, l'excellente coupe qu'avaient réalisée les élèves les fourvoyait dans des voies sans issues.

Je dois leur faire construire une coupe fausse où les deux points O et O ′ sont effectivement distincts.



$$AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AF = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

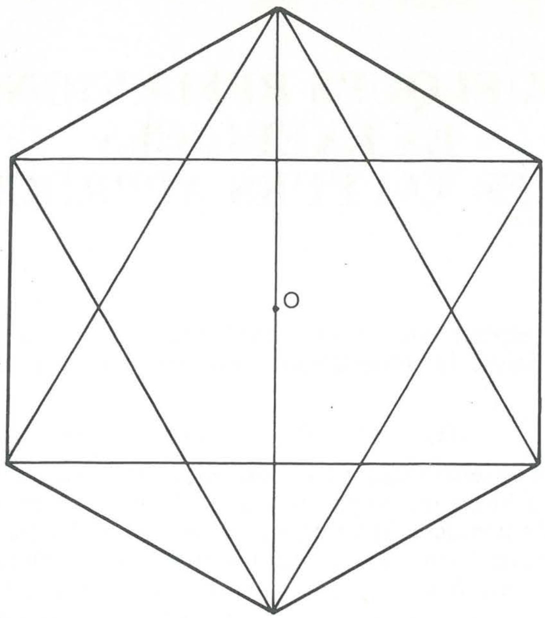
$$O'A = \frac{AF}{\cos \beta}$$

Or $\cos \beta = \sin \alpha$

Donc $O'A = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$O'A = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

O ′ est donc confondu avec I, milieu de [AC] ; de même O. Vus de dessus, les deux triangles équilatéraux étudiés, face supérieure, face inférieure, ont la disposition suivante, ce qui réalise bien, en projection, un hexagone régulier.



Conclusions

Dans la seconde C où cette séquence a été vécue, l'observation et la manipulation des quatre premiers solides de Platon construits en papier à dessin et à l'aide de baguettes minces et de pâte à modeler ont été absolument nécessaires pour atteindre les deux premiers objectifs :

— se forger un vocabulaire précis

— découvrir expérimentalement les notions premières de la géométrie dans l'espace.

Le fil conducteur des théorèmes analogues dans le plan a permis de mettre les élèves en situation de recherche.

— Le troisième objectif, la résolution partielle de problèmes d'orthogonalité, n'a été atteint que par quelques élèves, et encore, avec beaucoup de peine.