

QUELQUES RÉFLEXIONS ET EXERCICES SUR LES VALEURS APPROCHÉES

On peut espérer que les nouveaux programmes vont permettre de donner, en Analyse, la prépondérance aux majorations les plus efficaces, en particulier :

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah | \leq M h^2$$

Pourquoi de telles majorations sont-elles importantes ? Sur quelques exemples, à la limite du programme de seconde, mais certainement du programme de première scientifique, j'essaie d'y répondre. "Encadrer, Majorer, Minorer" sont des activités essentielles, en Analyse. Apprendre à nos élèves à *encadrer*, *majorer*, *minorer*, sans engendrer l'ennui est un art difficile, et, pour y arriver, il faut savoir les inclure dans des problèmes intéressants les élèves.

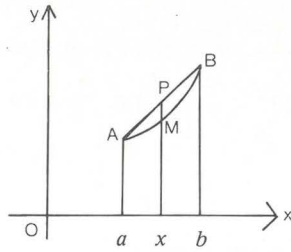
En outre, dès la classe de seconde, en faisant appel à de nombreuses activités numériques où les calculatrices joueront un rôle essentiel et à des inégalités, des échelles de grandeur au voisinage de zéro ou de l'infini seront mises en place ($x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, ..., $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, ... etc.). Ainsi toute nouvelle fonction pourra être située dans l'échelle : les calculatrices permettront de prévoir le résultat, et des inégalités le démontrent.

Les exemples qui suivent sont des thèmes d'activités possibles en seconde. Ces thèmes seront repris en première et en terminale. Au niveau de seconde, ces activités ne peuvent être que des activités de débroussaillage.

1) L'interpolation linéaire :

Soit C la courbe, représentation graphique de $f : x \mapsto y = f(x)$, A et B les points d'abscisses a et b de C ; pour tout x compris entre a et b , on prend comme valeur approchée de $f(x)$ l'ordonnée du point P d'abscisse x situé sur la droite AB . On désigne par M le point de C d'abscisse x ; l'erreur commise dans cette approximation est $|y_M - y_P|$; elle est majorée par $\sup_{x \in [a, b]} |y_M - y_P|$.

Le signe de $y_M - y_P$ permet d'autre part de préciser si les valeurs approchées le sont par excès ou par défaut.



Il est bien évident que ceci n'est pas un premier niveau d'approfondissement et que la nécessité d'extrapoler une fonction (problème inverse), de représenter numériquement un phénomène (dilatation par exemple...) sont des niveaux qui ont précédé.

Nous avons cependant le moyen, par l'intermédiaire de ce problème, d'apprendre à majorer $x^2 + 3x + 2$; pour x appartenant à l'intervalle $[1,2]$, ou encore l'expression $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x}$ lorsque x appartient à l'intervalle $[1,2]$, expressions qui s'introduisent dans les exemples qui suivent.

Exemple I.

Soit $f : x \mapsto x^2$; A et B sont les points de la courbe représentative de f d'abscisses 1 et 2. On montrera que la droite AB a pour équation $y = 3x - 2$; avec les notations précédentes, y_P est la valeur approchée de x^2 ; l'erreur commise dans l'interpolation de f sur l'intervalle $[1,2]$ est

$$y_M - y_P = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

on en déduit $\sup_{x \in [1,2]} |y_M - y_P|$ ou un majorant; d'autre part la valeur approchée de x^2 est donnée par excès.

Exemple II

On reprend l'exemple I avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$, A et B sont les points d'abscisses 1 et 4; la droite AB a pour équation

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad y_M - y_P = \frac{1}{3}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$$

On est conduit à majorer $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$ lorsque x appartient à l'intervalle $[1,4]$.

Exemple II bis.

On prend $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$. On prend pour valeur approchée de $f(x)$ au voisinage de zéro la valeur 1; donner un majorant de l'erreur commise pour tout x de l'intervalle $] -1/2, +1/2[$.

Exemple III.

On choisit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$; les points A et B sont ceux de l'exemple I.
Montrer que l'erreur commise dans l'interpolation linéaire de f sur l'intervalle $[1,2]$ est $\sup_{x \in [1,2]} \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{2x} \right|$; en donner un majorant.

2) Valeurs approchées ; étude locale.

Dans cette partie, nous utilisons des développements limités pour avoir des valeurs approchées et non plus l'interpolation. Des activités sur les échelles au voisinage de zéro ont précédé ces questions.

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$; on remarque que pour $x = 0$, $f(0) = 1$; la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$ est nulle en 0, il est normal de la situer dans l'échelle des fonctions donc de comparer cette différence à x . Un tableau de nombres permettra de voir que la différence est de l'ordre de $\frac{x}{2}$.

On constate alors que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$ est nulle en 0 ; pour la situer dans l'échelle, on la compare à $x \mapsto x^2$ etc.

Il reste à démontrer les résultats trouvés et perçus de façon numérique, et à établir : pour tout x de l'intervalle $[-1, +1]$

$$0 < 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} < \frac{x^2}{2}^*$$

Apprendre à utiliser des inégalités est une activité importante, c'est une approche quantitative de concepts difficiles (continuité, limite, dérivabilité) qui sont, eux, des concepts qualitatifs (notions qui seront développées dans les classes de première).

De l'inégalité $0 < 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} < \frac{x^2}{2}$

on peut déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{x} = 0$

ce que l'on peut écrire

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

* Voir article 13.

Nous obtenons le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 1 (Notion qui sera abordée en première scientifique).

3. Résolution d'équations

Plusieurs niveaux sont à dégager.

Un *premier niveau* consiste à apprendre à résoudre graphiquement des équations du type :

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}, \quad \frac{1}{x} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad x^2 = a + \frac{1}{x+b}, \quad x^2 = a + \frac{1}{b-x}$$

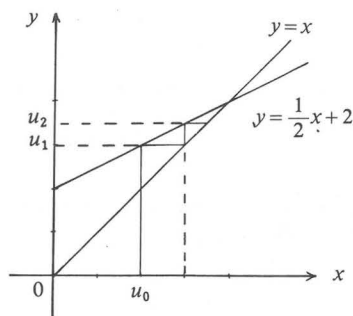
$$x^2 = \frac{2}{x^2}, \text{ etc.}$$

On n'utilisera que les fonctions simples du programme :

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, et celles qui s'en déduisent par translation et par symétries. On apprendra à donner des valeurs approchées des solutions, à préciser si ces solutions sont par excès ou par défaut.

Un *deuxième niveau* consiste à introduire des suites $\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}) \\ u_0 \end{cases}$ résolvant par itération l'équation $f(x) = x$ *. Il sera important de bien choisir les exemples et de mettre en évidence l'aspect graphique : suites convergentes "en escalier" et suites convergentes en "colimaçon".

Par exemple la suite $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ conduit à la résolution de



l'équation $x = \frac{1}{2}x + 2$ admettant 4 pour solution.

On construit sur l'axe Ox les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 comme l'indique la figure ; par la pensée on continue à construire $u_3, u_4, u_5 \dots$ etc.

* Voir article 8.

On devine que la suite (u_n) est croissante et converge vers 4 ; l'étude de $f(u_n) - 4 = f(u_n) - f(4) = \frac{1}{2}(u_n - 4)$ permet, par comparaison à la suite $\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, de montrer que la suite $d_n = |u_n - 4|$ est une suite qui converge vers 0.

Pour obtenir une convergence en colimaçon, on peut utiliser $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$; l'équation $x = -\frac{1}{2}x + 3$ a pour solution 2.

On introduit donc la suite
$$\begin{cases} u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1} + 3 \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On remarquera que

$$u_n - 2 = f(u_{n-1}) - f(2) = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - 2)$$

On est conduit à comparer $d_n = |u_n - 2|$ à la suite $\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Autre exemple : $f(x) = 1 + (x-1)^2$; l'équation $f(x) = x$ a deux solutions 1 et 2.

La suite
$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + (u_n - 1)^2 \\ u_0 \end{cases}$$

va converger vers 1 ou vers 2 suivant les valeurs de u_0 ou même diverger.

On prendra par exemple $u_0 = 0,9$; $u_0 = 2,1$; $u_0 = 4$.

Ces deux niveaux étant atteints, il reste un nouveau niveau d'approfondissement où des inégalités du type $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ avec $0 < K < 1$ jouent des rôles fondamentaux :

Exemple IV.

La résolution graphique de $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ permet de voir que l'équation a deux solutions, de donner une valeur approchée de la solution positive.

On peut alors démontrer que la solution positive est $\sqrt{2}$. La résolution de cette équation par itération conduit à la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \\ u_1 : \text{valeur} \\ \text{approchée de } \sqrt{2} \end{cases}$$

On pose $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$

Nous voulons démontrer que si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, u_{n+1} en est aussi une, et qu'elle est meilleure. On étudie la différence $u_{n+1} - \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= f(u_n) - f(\sqrt{2}) \\ &= \frac{2 + u_n - \sqrt{2}(1 + u_n)}{1 + u_n} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - u_n)}{1 + u_n} \end{aligned}$$

Il est alors immédiat de prouver que

$$\text{si } u_1 > 1 \text{ alors } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$$

$$\text{et donc } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$$

Il reste à écrire cette inégalité pour les valeurs de $n = 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$

pour en déduire $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1 - \sqrt{2}|$.

Remarquons que nous avons utilisé l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \text{ supérieur à } 1 \quad |f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |x - \sqrt{2}|$$

et que la stratégie employée pour démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\sqrt{2}$ consiste à démontrer que la suite

$$(d_n = |u_n - \sqrt{2}|)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers 0 en la comparant à la suite $\left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui nécessite

l'établissement d'une échelle de suites convergeant vers zéro *.

A cette occasion, nous pouvons regretter l'absence d'échelles de suites convergeant vers zéro, dans le programme de seconde. Les suites n'apparaissent que dans le paragraphe sur l'approximation des nombres ; mais, pour traiter convenablement ce paragraphe, il est nécessaire d'étudier la convergence d'une suite vers 0 et d'établir une échelle de suites qui convergent vers 0.

* Voir brochure *Analyse 1* de l'IREM de Marseille et le bulletin Inter-IREM sur l'analyse.