MATHÉMATIQUE ACTIVE EN SECONDE

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public) - 1981
N° 43

TABLE DES MATIERES

* Centre Université Economie d'Education Permanente (Lille)

CONTRIBUTION A UNE ESPERANCE

La sortie de cette nouvelle brochure pour la classe de seconde coïncide avec la mise en application d'une réforme du second cycle et avec sa première étape en seconde à la rentrée 1981.

Hasard, direz-vous ?... Naturellement non, répondra-t-on ! La réalité n'est pas aussi simple.

Ce n'est pas la proximité d'une réforme qui a poussé l'A.P.M.E.P. à continuer à s'intéresser à la classe de seconde. Cet intérêt n'est pas nouveau (cf les articles sur noyaux-thèmes dans le Bulletin, la brochure *Pour une mathématique vivante en seconde*) ; il traduit le fait que la classe de seconde est un lieu privilégié où peut se modifier notre vision de l'enseignement des mathématiques dans le second cycle : classe éloignée du baccalauréat qui, sous sa forme actuelle, exerce incontestablement une influence bloquante, classe proche du collège unique, la seconde garde toute une potentialité de questionnement pour ses maîtres. En outre, en raison même de cette situation charnière, les élèves qui fréquentent cette classe sont aptes, peut-être plus qu'ailleurs, à vivre de réelles activités mathématiques, pourvu qu'ils en aient le temps, pourvu que le programme soit adapté et les effectifs réduits.

Les mauvaises conditions de mise en place de la réforme du second cycle, en particulier en ce qui concerne les effectifs, peuvent engendrer un certain pessimisme quant à l'éventualité d'un changement des comportements dans le second cycle. Cependant, si, malgré la conjoncture défavorable, vous souhaitez centrer votre enseignement sur la recherche de problèmes et si vous vous intéressez aux démarches heuristiques des élèves, alors cette brochure devrait vous apporter quelques éléments de référence.

En effet, ses rédacteurs, sans attendre l'application de la réforme, ont essayé de mettre un certain nombre d'activités, dans le cadre des sections d'avant 1981 et parfois dans celui d'une mise à l'essai de certaines parties des programmes devant entrer en vigueur à la rentrée 1981.

En vous présentant ces quelques séquences de travail, souvent accompagnées de leur vécu dans la classe, ils n'ont aucunement l'ambition de vous fournir des modèles, mais, d'une part ils pensent vous apporter une aide, certes modeste, lors des recherches que le changement d'esprit des programmes de 1981 vous conduira inévitablement à réaliser pour préparer un nouvel enseignement, d'autre part ils souhaitent vous encourager à pratiquer l'interdisciplinarité entre professeurs du second cycle.

Si vous découvrez dans cette œuvre collective l'espérance qu'à travers un programme riche, malgré les conditions difficiles, il est possible aux enseignants de seconde de proposer aux élèves des activités susceptibles à la fois de les intéresser et de leur faire acquérir des connaissances mathématiques, alors c'est que vous aurez fait un morceau de chemin avec nous !

Claude LASSAVE, Lucien AUGÉ
Le 9 avril 1981

CETTE BROCHURE DOIT BEAUCOUP, vraiment beaucoup, en dernier ressort, à Mauricette LIMOGE, Lucien AUGÉ et Michel MAGNENET.

Ils y ont d'abord œuvré, avec les autres participants, au sein de la Commission Second Cycle.

Puis, au sein du groupe chargé de la brochure, issu à la fois de cette Commission et du Bureau national, ils ont — aidés notamment par Henri MARTINO-GAUCHI — assuré la plus grosse partie du travail.

Ils l'ont fait, sans ménager leur temps, avec une efficicacité et une obligeance pour lesquelles nous leur adressons nos plus chaleureux remerciements.

Henri BAREIL,
responsable général des brochures
Christiane ZEHREN,
responsable des brochures Second Cycle.

AVERTISSEMENT

Les activités qui figurent dans cette brochure ont été rassemblées par les soins de la Commission nationale du Second cycle de l'A.P.M.E.P.

Effectivement expérimentées dans des classes de Seconde A, AB, C et T, elles ont deux origines :

- certaines de ces activités, pratiquées en 79-80, ont été choisies parce qu'elles étaient en relation avec les contenus des nouveaux programmes de seconde et qu'elles essayaient de l'être avec l'esprit dans lequel l'A.P.M.E.P. souhaite que les programmes soient traités ;
- les autres proviennent de la mise à l'essai, en 80-81, de parties du nouveau programme.

Lorsque la Commission du Second degré a décidé de se lancer dans cette tâche de rédaction, elle s'est fixé comme préoccupation principale l'élève, son comportement dans le travail personnel ou en groupe.

Il s'agit d'abord de problèmes, car il n'y a pas de mathématique sans problème, mais leur "vécu", c'est-à-dire la démarche des élèves, transparaît à tout instant dans certaines activités proposées dans la brochure.

Cette démarche est souvent lente, maladroite, surprenante pour l'enseignant habitué aux présentations dogmatiques ; mais elle a le mérite de placer l'élève en situation de recherche et de lui permettre de goûter ainsi aux joies de la découverte.

La Commission du Second cycle a voulu d'autre part, en créant cette brochure, aider tous ceux parmi les collègues qui considèrent qu'un enseignement noyaux-thèmes a des chances réelles de rallier aux mathématiques de nombreux élèves trop tôt découragés par un excès de formalisme prématuré.

Lucien AUGÉ
Responsable de la Commission Second Cycle

1

UNE EXPLOITATION DU DEVOIR : LA "FICHE D'OBSERVATIONS"

Nous, professeurs, passons beaucoup de temps à corriger des copies, auxquelles les élèves consacrent de leur côté du temps et de l'énergie intellectuelle. Mais que reste-t-il de tous ces efforts, une fois les copies rendues aux élèves et les sujets commentés en classe ?

Trop souvent, le profit pour l'avenir est mince : l'élève se précipite sur sa copie... mais c'est presque uniquement pour regarder sa note ; puis se penche sur son voisin pour regarder... la note du dit voisin ; il écoute ensuite, plus ou moins distraitement, en prenant quelques notes, le corrigé fait au tableau ; et enfin, il range la copie dans ses archives sans jamais la relire ou bien il la détruit.

C'est pour tenter d'améliorer l'efficacité des corrections que j'ai été amené, aux divers niveaux où j'ai enseigné, à la "fiche d'observations" (F.O.). Le principe en est le suivant ;

J'écris, non pas sur la copie, mais sur une fiche que je remplis progressivement tout au long de l'année scolaire, toutes les observations que l'élève a intérêt à garder sous la main :

• les erreurs (nous sommes, je pense, nombreux à considérer l'erreur non pas comme une "faute" appelant une "punition", mais comme un produit normal de toute activité intellectuelle (celle des enfants et... celle des adultes, professeurs compris), produit qui est une précieuse occasion de réfléchir, de rectifier ou d'approfondir ses connaissances, de mieux se connaître soi-même. "Sbagliando s'impara", dit un proverbe italien : "on s'instruit à coup d'erreurs") : erreurs de fond, de méthode, de rédaction, de vocabulaire,... L'élève doit faire le lien entre l'erreur contenue dans sa copie (par exemple $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 4$) et le principe, le théorème,.. que cette erreur a enfreint et que je porte sur la F.O. (par exemple *ab^2 signifie $a \times (b^2)$ et non pas $(ab)^2$*) ; cet effort de sa part me semble bénéfique.

• les négligences matérielles : "Laisse une marge", "Numérote les pages",...

• dans une colonne isolée à l'extrême-droite, des rectifications d'orthographe (sélectionnées dans le grand étalage offert par certaines copies...)

• et enfin, à la suite de ces observations "techniques" relatives à chaque devoir, et s'en distinguant par une autre couleur d'encre, une "appréciation générale" (mais pas de note chiffrée) comportant éventuellement un conseil, une mise en garde, un encouragement, un compliment,... ;

cette dernière partie est susceptible de renseigner aussi les parents, même s'ils ne sont pas compétents en mathématiques.

(Sur la copie, ne figurent que quelques commentaires trop spécifiques du sujet traité pour avoir une importance durable, et les classiques "exact", "faux", points d'exclamation, points d'interrogation, et autres traces rougeoyantes du défoulement du correcteur !)

Je souligne *n* fois toute observation déjà faite à propos de *n* copies précédentes (*n* dépasse rarement 4...). Ainsi apparaissent nettement, sur la F.O., au bout de quelques semaines et dans toute la suite de l'année, les "manques" les plus marquants de l'élève, alors qu'une erreur due à la seule étourderie ne se reproduit plus ; il me paraît important de rendre l'élève conscient de la différence entre une erreur accidentelle et une erreur ancrée dans son esprit, différence qu'il n'établit pas toujours de lui-même. S'il s'agit d'une demande toute simple et extra-mathématique, du type "Laisse une marge", je me réserve le droit d'interrompre la correction à la deuxième ou troisième répétition...

Dans chaque copie que je lui rends, l'élève trouve, encartée, la F.O., qu'il me rend en fin de séance après avoir recopié, sur une fiche qui constitue un double de la mienne et qu'il garde par-devers lui, la "moisson" d'observations propre à ce devoir.

Il dispose ainsi d'un document personnalisé qui lui permet d'être spécialement attentif à ne pas refaire les mêmes erreurs. Lorsque je consulte les élèves par un questionnaire (facultatif !) sur ce qu'ils pensent de mes façons de faire, ils sont toujours nombreux à trouver utile la F.O. ; ceux qui reconnaissent la consulter trop peu reconnaissent aussi, spontanément, qu'ils ont tort de la négliger.

Je contrôle, une ou deux fois dans l'année, la bonne tenue du double conservé par l'élève ; car, dans les petites classes, certains étourdis recopient "de travers" telle ou telle observation...

Je conseille aux élèves (à partir de la seconde), de prendre l'initiative de "nourrir" eux-mêmes leur F.O. personnelle d'observations qu'ils se font tout seuls en diverses occasions. Mais ils sont peu nombreux à avoir assez de maturité pour cela.

Les parents, eux aussi, s'ils pensent à jeter un coup d'oeil de temps à autre sur les appréciations générales figurant sur la F.O., ont, du travail, des résultats, des progrès, du "niveau" (!) de leur enfant, une idée bien plus précise que par une suite de notes chiffrées.

De mon côté, je dispose pour chaque élève d'une sorte de "portrait", qui évolue au cours des semaines, et dont je me sers pour rédiger les bulletins trimestriels et lors des entretiens avec les parents.

La correction d'un lot de copies n'est pas rendue plus longue par cette procédure : je n'en écris pas plus que je ne le ferais si j'écrivais tout sur la copie. Je m'astreins à parcourir rapidement les observations précédentes pour signaler les "erreurs à répétition" ; mais c'est assez rapide, et j'ai l'impression, ce faisant, de rendre service aux élèves... Quant à la remise en ordre des F.O. entre deux lots de copies, elle demande un temps négligeable devant celui de la correction elle-même (J'utilise pour ces F.O. du papier cartonné capable de résister toute une année à de fréquentes manipulations).

"Cette F.O. n'est-elle pas traumatisante pour l'élève ?" Si l'objection vient d'un collègue qui "met des notes", je lui demande avec énergie de se poser d'abord à lui-même la même question à leur propos ! Sinon, je voudrais bien savoir en quoi consisterait une pédagogie totalement "non-traumatisante"...

A titre d'illustration, voici un extrait d'une F.O. d'élève de Seconde C (trait ondulé : appréciation générale ; DM : devoir à la maison ; DS : devoir surveillé) :

DM9 Discussions mal conduites
Tu ne te préoccupes pas assez de l'existence de ce que tu écris ; d'où des incohérences et des erreurs.
Moyen. Une même attitude, illogique, tout au long du devoir.

DS9 Ne confonds pas $\rightarrow$ et $\mapsto$
Equation $\neq$ Inéquation
Assez bien. Ce qui est traité est bien compris.

DM10 Très bien

DS10 Que signifie "intervalle dans **R**" ?
Conjonction d'inéquations dans **R** : pense à la représentation graphique
Tu confonds f et f(x) : 3ème fois
Une erreur de calcul, due à une simplification trop tardive d'une fraction
Assez bien. Réfléchis aux 4 observations ci-dessus.

DM11 Tu confonds "il faut" et "il faut et il suffit" : 4e fois
$\bigwedge \begin{array}{l} a < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{array}$ n'entraîne nullement $c > 0$
Erreurs en passant des vecteurs aux longueurs
Assez bien. Attention à la logique : si, ssi, etc.

DS11 Simplifie les fractions
Erreur sur la notion de degré d'un polynome
Bien

DM12 Tu confonds inconnues et paramètres
Assez bien

DS12 Tu confonds "application" et "application affine"
Très insuffisant

2

POURCENTAGES

Les calculs avec pourcentages nous semblent devoir être entretenus durant toute la scolarité. Cette notion ne figure pas explicitement aux programmes de seconde, mais peut être considérée comme un thème de travail à l'occasion de calculs dans **R, Q** et des études de fonctions.

Voici une partie d'un document, utilisé dans des classes de 2^e^ A et 2^e^ AB ; ce document était destiné à l'élève. Ce n'est pas un **cours** sur « pourcentage » ; il se veut un point de départ pour se poser des questions et contient ensuite de très nombreux exercices (ici, seulement quelques-uns de ces exercices ont été retenus).

Ⓐ **Questionnaire :** avant tout travail sur pourcentages
Ⓑ **Trois exercices** commentés
Ⓒ **Faire le point**
Ⓓ **Des exercices,** avec indication de matériel à utiliser.

Il conviendra de compléter l'aspect mathématique, par exemple avec l'application linéaire, si l'on travaille dans une seconde indifférenciée.

1. Commentaire sur le questionnaire Ⓐ

Nous voulions savoir tout d'abord où en étaient les élèves avec ce mot semi-magique qui s'étale dans les journaux, les livres de géographie, qu'on entend à la radio et qui a même droit à une touche de calculatrice... : pourcentage.

Nous avons donc élaboré ce premier questionnaire A et l'avons soumis aux élèves sans aucun commentaire. Comme nous l'avions prévu, ce fut un échec. Nous ne l'avons pas corrigé en classe mais nous avons distribué le document B sur lequel les élèves ont travaillé en sollicitant souvent notre aide. Ensuite le questionnaire A a été de nouveau distribué. Cette fois les résultats furent bons. Il faut dire qu'au cours de l'étude du document B, de nombreuses questions avaient été posées sur le questionnaire. Cependant la notion de pourcentage n'était pas acquise pour autant. En effet, au cours de l'année de 1^re^ B, alors que nous avions beaucoup insisté sur cette notion en 2^e^ AB, et souvent en compagnie du professeur d'économie, il arrive que celui-ci constate encore des erreurs.

2. Commentaire sur les parties Ⓑ et Ⓒ

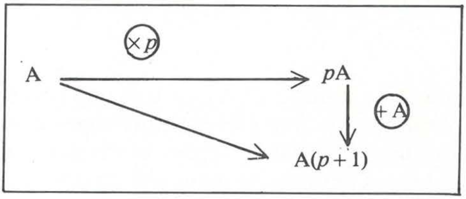
Nous avons tenu à présenter l'usage des pourcentages au moyen d'**opérateurs.** C'est évidemment un parti-pris, mais compte tenu des expériences diverses de ces dernières années, ce nous semble être le meilleur procédé pour apprendre à **agir** avec des pourcentages : utiliser un opérateur multiplicatif ou l'opérateur inverse et travailler sur des exemples simples que l'on rencontre dans des ouvrages divers de géographie, d'économie, ou dans le journal.

Que derrière tout cela, existe une application linéaire, n'est pas notre problème initial : ce n'est qu'après de nombreux exercices, soulevant des questions, que l'on pourra, éventuellement, mettre en évidence cette linéarité avec ses propriétés.

• Deux aspects bien différents dans l'utilisation d'un pourcentage :

a) L'opérateur multiplicatif tout seul (premier exemple)

b) Le « pourcentage d'augmentation » (second exemple) qui fait intervenir à la fois la multiplication et l'addition ou encore « pourcentage de diminution », ce qui est la même chose.



• Un de nos buts a été de **démystifier** une écriture : 8 %... c'est un « truc » formel et nous devons montrer sa simplicité. Nous devons faire comprendre que

« prendre 8 % de A »

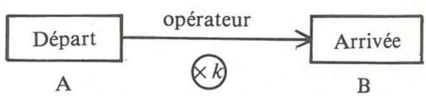
ce n'est rien d'autre que multiplier A par $\frac{8}{100}$ ou 0,08.

Cela dit, se servir d'un pourcentage nécessite une bonne connaissance des décimaux et de leur multiplication.

D'abord rappeler que $\frac{8}{100}$ c'est 0,08... ce qui est loin d'être évident pour certains élèves de seconde. C'est inquiétant, mais c'est un fait.

Reste à calculer $x \times 0{,}08$ ou $x \times \frac{8}{100}$ ou $\frac{x \times 8}{100}$ où l'on retrouve la trop fameuse « règle de trois », pour les nostalgiques.

• Il s'agit, pour nous, de faire « fonctionner » le modèle ci-contre, qui doit rester un modèle dynamique.
Si l'on a su, sur un exemple concret, reconnaître ce qui figure dans chacune des trois cases, il reste alors à calculer ce « qui



manque » et ce n'est qu'une équation simple à résoudre :

$$A = pB \text{ équivaut à } B = A : p \text{ équivaut à } p = A : B$$

Nous croyons à l'efficacité de ce modèle algébrique. Ce qui n'empêche pas, bien sûr, d'évoquer la proportionnalité, avec des tableaux de nombres, et la fonction linéaire. Mais en définitive, nous devons fournir à nos élèves une technique simple et rassurante.

3. Commentaires sur les exercices (D)

Certains exercices ne comportent que très peu (ou pas du tout...) de questions : nous voulons que nos élèves apprennent à se poser des questions à partir de données d'origines réelles et diverses. Il faut donc aller chercher les pourcentages là où ils se trouvent, plutôt que de proposer des problèmes artificiels et préfabriqués.

— C'est volontairement que certains tableaux de données sont pris, sans changement, dans des journaux ou des revues, avec tous les problèmes de « lecture » que cela suppose. Mais un de nos rôles n'est-il pas d'apprendre à lire à nos élèves ?

Exemple : l'exercice (8) ne peut être valablement traité sans commentaire préalable du professeur sur les deux colonnes de pourcentages.

— De nombreux exercices ont un caractère pluridisciplinaire. Ainsi des problèmes démographiques qui sont au programme de seconde en géographie.

Dans l'exercice (9) par exemple, on étudie une évolution de population. L'élève est amené à essayer de prévoir une population pour les années suivantes, par des procédés divers (graphique, tendance sur le graphique, moyenne de pourcentages d'augmentation, etc.). Avec, bien sûr, tous les risques que comporte ce type de prévision...

— Il nous faut démystifier l'utilisation des pourcentages dans diverses activités sociales, économiques ou politiques. D'où le choix volontaire de certains exercices.

Exercice (7) :

Evolution d'un capital à intérêts composés. A propos de cet exercice, les élèves découvrent un monde où la linéarité apparente (annuelle...) n'a plus rien de linéaire si on regarde de près.

Ⓐ QUESTIONNAIRE

	Réponse
① Lu dans un journal : « Haïti atteint le record mondial d'analphabétisation : 93,2 % ». Que signifie cette phrase ? Quel usage pouvez-vous faire de cette information ?	
② Un article vaut 100 F. Il augmente de 10 %. Combien vaut-il alors ?	
③ Un article vaut 2 728 F ; il diminue de 10 %. Combien vaut-il alors ?	
④ Un article valait hier 110 F ; il vaut aujourd'hui 100 F. De quel pourcentage a-t-il baissé ?	
⑤ Le côté d'un carré augmente de 3 %. De quel pourcentage a augmenté son périmètre ? l'aire du carré ?	
⑥ La vie augmente de 9 % par an ; en deux ans elle augmente de 18 %...	VRAI FAUX
⑦ Un article augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Il revient donc à son prix de départ...	VRAI FAUX
⑧ Baisser le prix d'un article de 10 % puis l'augmenter de 10 %, c'est pareil que l'augmenter d'abord de 10 % puis le diminuer ensuite de 10 %...	VRAI FAUX
⑨ Si, à un litre de jus de fruit contenant 20 % de sucre, j'ajoute un litre de jus de fruit contenant 10 % de sucre, j'obtiens du jus de fruit... — contenant 30 % de sucre... — contenant 15 % de sucre...	 VRAI FAUX VRAI FAUX
⑩ Si dans une classe il y a 50 % de filles demi-pensionnaires et 40 % de garçons demi-pensionnaires, on peut alors avec ces données calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans la classe...	VRAI FAUX

Ⓑ PREMIÈRES ACTIVITÉS

• Premier exemple :

L'aire totale de la France est 551 000 km². La région Rhône-Alpes représente 8 % de la superficie de la France.

Expliquez la signification de "... 8 % de la superficie de la France".
Que pouvez-vous calculer avec ces informations ?

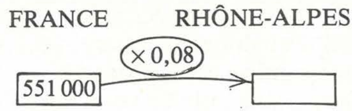
Indications : Pour calculer la superficie de la région Rhône-Alpes...

... Prendre les 8 % de 551 000

C'est-à-dire appliquer à 551 000

l'OPERATEUR (× 0,08)

8 centièmes



• **Second exemple :**

En 1976, 90 500 élèves se sont présentés au Bac de techniciens (Btn). En 1977, il y eut environ 6 % de candidats en plus.

Expliquez "6 % de candidats en plus...".
Que pouvez-vous calculer à l'aide de ces informations ?

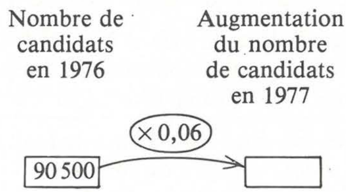
Indications : Pour calculer l'augmentation du nombre des candidats de 1976 à 1977...

... Prendre les 6 % de 90 500

C'est-à-dire appliquer à 90 500

l'OPERATEUR (× 0,06)

6 centièmes



Pour calculer le nombre des candidats en 1977...

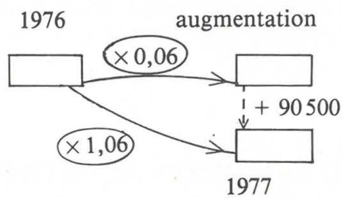
Ajouter à 90 500 l'augmentation calculée

C'est-à-dire calculer :

$$90\,500 + (0{,}06 \times 90\,500) = 1{,}06 \times 90\,500$$

On peut donc éviter de passer par l'intermédiaire du calcul de l'augmentation. Il suffit d'appliquer à 90 5000

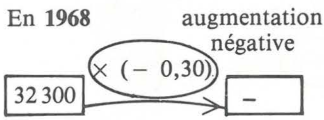
l'OPERATEUR (× 1,06)

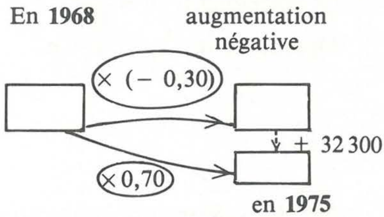


$1{,}06 = \boxed{1} + 0{,}06$

• **Troisième exemple :**

En 1968, le 1er arrondissement de la ville de Paris comptait 32300 habitants. Cette population a diminué de 30 % entre 1968 et 1975.





$\underline{0,70} = \boxed{1} - 0,30$

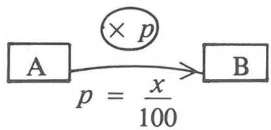
* Attention à "... diminué de 30 %", qui peut être considéré comme une "augmentation négative".

Ⓒ FAIRE LE POINT

Ceci est un **bilan** très sommaire sur l'usage de pourcentages.

1) ***x* % de A**

Un pourcentage est un OPÉRATEUR multiplicatif qui permet, connaissant le nombre A, de calculer le nombre B.



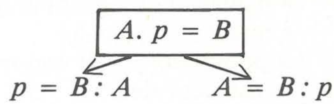
Calculer 6 % de A, c'est multiplier A par 0,06 ($p = 0,06$).

Trouver une augmentation de 6 % de A, c'est multiplier A par 0,06 ($p = 0,06$).

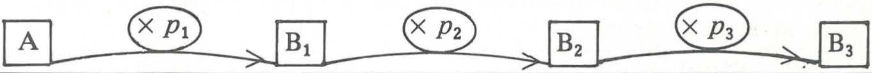
$$B = A \times 0,06$$

Problèmes qui se posent :

Je connais A et p : $B = A.p$
Je connais A et B : $p = B : A$
Je connais B et p : $A = B : p$



OPÉRATEURS EN CHAINE



$B_1 = A \times p_1$
$B_2 = B_1 \times p_2 = A \times p_1 \times p_2$
$B_3 = A \times p_1 \times p_2 \times p_3$

2) **Nouvelle valeur** après augmentation de X % :

$$A' = A + 0{,}06\,A \rightarrow A' = A \times 1{,}06$$

Opérateur p : $p = \dfrac{X}{100}$
Opérateur q : $q = 1 + p$

$$\begin{tikzcd} \boxed{A} \arrow[r, "\times p"] \arrow[dr, swap, "\times (1+p)"] & \boxed{B} \arrow[d, "+A"] \\ & \boxed{A'} \end{tikzcd} \quad (B > 0)$$

3) **Nouvelle valeur** après diminution de X % :

$$A'' = A - 0{,}06\,A$$
$$A'' = A \times 0{,}94$$

Opérateur p : $p = \dfrac{X}{100}$
Opérateur q : $q = 1 - p$

$$\begin{tikzcd} \boxed{A} \arrow[r, "\times (-p)"] \arrow[dr, swap, "\times (1-p)"] & \boxed{B'} \arrow[d, "+A"] \\ & \boxed{A''} \end{tikzcd} \quad (B' < 0)$$

Ⓓ QUELQUES EXERCICES

Matériel souhaitable :

- papier millimétré
- papier semi-logarithmique
- machine à calculer

① La population de la région Rhône-Alpes était de 4 800 000 habitants au recensement de 1975; elle représente 8 % de la population française totale.
Que peut-on en déduire ?

② Dans cette région, la population active est de 2 000 000 d'habitants. Quel est le pourcentage de cette population active par rapport à la population totale de la région ?

③

Aire totale du globe terrestre :	510 millions de km^2 (environ)
Aire totale des mers et océans :	362 millions de km^2 (environ)
Aire du plus grand continent (Eurasie) :	55 millions de km^2 (environ)
Aire du plus petit continent (Australie) :	7,5 millions de km^2

a) Calculer le pourcentage de la surface des océans par rapport à la surface du globe.

Calculer le pourcentage de la surface des terres par rapport à la surface du globe.

Peux-tu faire ce calcul de deux façons différentes ?

b) Quel est le pourcentage, par rapport à la surface des terres, de la surface de l'Eurasie ? de celle de l'Australie ?

c) La surface de l'Océan Pacifique représente 46 % de la surface totale des océans. Quelle est la surface de l'Océan Pacifique ?

④ Anthologie de la musique de Western :
Prix proposé par un club : 53,20 F
Prix public : 61,20 F

Alors ?...

⑤ Calculer les pourcentages qui manquent :

Noms des agglomérations (par ordre de population)	Population des premières agglomérations françaises		
	1968	1975	Variation en %
Paris	8 194 580	8 424 092	+ 2,8 %
Lyon	1 074 823	1 152 863	
Marseille	964 412	1 004 536	+ 4,2 %
Lille	881 439	928 569	+ 5,3 %
Bordeaux	555 152	591 447	
Toulouse	439 764	495 203	+ 12,6 %
Nice	392 635	437 566	+ 11,4 %
Nantes	393 731	433 280	+ 10,0 %
Rouen	369 793	389 462	
Toulon	340 021	378 609	+ 11,3 %
France entière	49 750 000	52 590 000	

Source I.N.S.E.E. (1975)

⑥ Reprendre les exercices du questionnaire A et tenter de répondre aux questions posées.

⑦ Un capital de 20 000 F est placé à la Caisse d'Epargne au taux annuel de 6 %.

a) Quels seront les intérêts au bout d'un an ?

b) Ces intérêts et le capital initial sont laissés en dépôts la seconde année (on dit que les intérêts sont capitalisés) ; de quelle somme dispose-t-on à la fin de la seconde année ?

c) Trouver une formule permettant de calculer le nouveau capital au bout de *n* années.

d) Au bout de combien d'années le capital initial est-il double ?

e) Reprendre la question d) en supposant que le taux annuel est 10 %.

⑧ Commenter ces données. Que permettent-elles de calculer ?

PAYS (par ordre d'importance)	EXPORTATIONS D'ARMEMENTS EN 1974 (en milliards de francs)		
	Montant	%	en % des exportations de marchandises
Etats-Unis	39,8	41,9 %	8,4 %
U.R.S.S.	28,4	27,8 %	2,3 %
France	15,8	16,6 %	7,2 %
Royaume Uni	7,2	7,8 %	4,0 %
Chine	2,0	2,1 %	—
Italie	1,2	1,3 %	0,8 %
All. Fédérale	0,5	0,5 %	0,1 %
Canada	0,5	0,5 %	0,3 %
Suède	0,4	0,4 %	0,6 %
Suisse	0,4	0,4 %	0,6 %
Israël	0,2	0,2 %	2,5 %
Autres	0,6	0,6 %	—
Total	95	100,0 %	2,5 %

⑨ Voici un tableau donnant la population mondiale en millions d'habitants de 1650 à 1966.

Année	1650	1750	1800	1850	1900	1920	1930	1940	1950	1960	1966
Population du monde (en millions)	545	728	907	1175	1620	1834	2008	2216	2476	3010	3350

a) Représentez cette population par un graphique sur du papier millimétré habituel, puis sur du papier « semi-logarithmique » si vous en avez. (Commentaires à faire). Quel est l'intérêt de cette seconde représentation ?

b) Calculez les pourcentages d'augmentation, de 1650 à 1750, puis de 1750 à 1850, puis de 1850 è 1950.

Ces résultats vous permettent-ils raisonnablement de prévoir la population mondiale en 2050 ?

c) Comparez l'augmentation mondiale de 1960 à 1966 à l'augmentation de la population française pendant la même période (se documenter).

d) En supposant que le pourcentage d'augmentation ne change pas d'une année à l'autre entre 1960 et 1966, calculez ce pourcentage moyen d'augmentation annuelle de la population mondiale pour cette période.

(10) Voici un tableau donnant une répartition des entreprises françaises par nombres de salariés de l'entreprise.

Industrie (bâtiment, travaux publics exclus)	Nombre d'entreprises	Nombre de salariés (en milliers)
0 à 9 salariés	302 739	421,8
10 à 49 salariés	34 878	766,6
50 à 199 salariés	10 301	975,7
200 à 499 salariés	2 350	712,1
500 à 999 salariés	776	532,6
1 000 à 4 999 salariés	478	901,9
5 000 et plus	81	1 165,3
Total	351 603	5 476,5

Exploitez ces données.

*

* *

Les tableaux de données ne manquent pas, et on pourra en trouver beaucoup d'autres, à volonté.

- Documents publiés par l'INSE : dans chaque région, il existe un « Observatoire Economique » qui peut fournir des documents sur la région. Voir aussi Services de l'Equipement, de la Météo...
- Documents existant dans les C.D.D.P.
- Les journaux : les pages économiques (Le Monde par exemple)
- Plaquette annuelle « L'année économique et sociale », publiée par Le Monde
- ''Faits et chiffres'' : publié chaque année par le Nouvel Observateur
- Les manuels classiques de géographie, d'économie...

3

THÈME SUR LES POLYNOMES

OBJECTIFS :

- *Calculs sur les polynomes à partir de tables de différences.*
- *Exploitation dans un thème interdisciplinaire :*
  étude du mouvement dans un plan d'une masse ponctuelle soumise à un champ constant.

On pourra relire avec profit dans le Bulletin A.P.M.E.P. n° 300 les articles *Tables de différences*, par Michèle Chouchan (p. 497) et *Espaces vectoriels de polynomes*, par Michel de Cointet (p. 504).

Quelques commentaires préliminaires

Les polynomes interviennent dans tous les secteurs des mathématiques. Tout au long de l'enseignement, les différentes étapes sont, en général, les suivantes :

— découverte d'une expression littérale
— définition d'une fonction polynome
— opérations dans l'ensemble des fonctions polynomes
— diverses écritures des polynomes (forme réduite ordonnée, forme factorisée, combinaison linéaire des polynomes $(x-a)^i$...)
— structure de l'ensemble des fonctions polynomes
— fonctions dérivées, fonctions primitives de fonctions polynomes
— etc.

Quelques collègues ont proposé à leurs élèves de classes de troisième et seconde une étude sur les polynomes à partir de tables de différences. Il s'agit là de notions que l'on rencontre peu dans les manuels des collèges ou des lycées, mais qui nous paraissent intéressantes, car elles permettent de proposer un certain nombre d'exercices originaux et féconds.

A titre d'exemples, nous présentons ici six activités relatives à cette question. Nous avons cru bon de rappeler brièvement la définition des différences successives d'une fonction et de faire quelques remarques concernant l'exploitation de ces activités.

Différence première d'une fonction, différences successives

Etant donnée une fonction numérique f, on appelle *fonction différence première de pas 1* de cette fonction, la fonction $\triangle_1 f$: $x \mapsto f(x+1)-f(x)$ et de même, pour h réel positif non nul donné, on appelle *différence première de pas h de f*, la fonction $\triangle_h f$: $x \mapsto f(x+h)-f(x)$.

On définit de la même manière les différences secondes de f:

$$\triangle_1^2 f : x \mapsto \triangle_1 f(x+1) - \triangle_1 f(x) \ ; \ \triangle_h^2 f : x \mapsto \triangle_h f(x+h) - \triangle_h f(x)$$

et, plus généralement, les différences d'ordre p, naturel non nul, de pas h:

$$\triangle_h^p f : x \mapsto \triangle_h^{p-1} f(x+h) - \triangle_h^{p-1} f(x)$$

On peut démontrer les quelques égalités suivantes:

$$\triangle^m(\triangle^n f) = \triangle^{m+n} f \quad ; \quad \triangle^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, f(x+(n-k)h)$$

$$f(x+nh) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \triangle^k f(x) \ .$$

1. Valeurs numériques d'une fonction polynome et différences successives (activité 1)

L'activité 1 consiste à proposer aux élèves une fonction polynome f de la variable réelle x et à leur faire calculer $f(1), f(2), f(3), \ldots$, puis à leur demander de dresser, à partir des valeurs numériques précédentes, une table de différences de f. Ils seront alors amenés à constater qu'à partir d'une certaine colonne, les différences sont constantes.

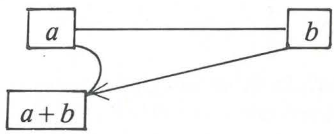
D'un point de vue théorique on démontre que la différence première d'une fonction polynome P_n de degré n est une fonction polynome de degré $n-1$ et, par suite, que $\triangle_h^n P_n$ est une constante, donc que $\triangle_h^{n+1} P_n = 0$ (partant de: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ et remarquant la "linéarité" de la différence $\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\triangle_h P_n(x) = a_0 \triangle_h x^n + a_1 \triangle_h x^{n-1} + \ldots + a_p \triangle_h x^{n-p} + \ldots + a_{n-1} \triangle_h x \ldots$$

il suffit d'utiliser: $\triangle_h x^p = (x+h)^p - x^p = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \, h^k \, x^{p-k}$) .

Dans le cas présent, on considère un polynome de degré 3, les différences troisièmes sont constantes et les différences quatrièmes nulles. On peut alors suggérer aux élèves de prolonger la table déjà dressée en ne calculant que des sommes conformément au schéma suivant:

$i^{\text{ème}}$ colonne $\qquad\qquad$ $(i+1)$ième colonne



On peut également observer que la somme des éléments d'une colonne est égale à la différence entre le premier et le dernier élément de la colonne qui précède.

2. Découvrir une fonction polynome programmée sur une calculatrice (activité 2)

Cette activité destinée à une équipe d'élèves propose, préalablement à l'exploitation des résultats du 1, de "découvrir" une fonction polynome : une fonction polynome étant programmée (par un élève ou par le professeur), quelle est cette fonction ?

L'utilisation d'une calculatrice avec des élèves modifie le comportement du maître et des élèves ; libérés du calcul numérique, ils se posent de nombreuses questions intéressantes, et sont très rapidement à la recherche de méthodes, de justifications et de vérifications.

3. Recherche d'une fonction polynome (activités 3 et 4)

Le but de ces activités est d'utiliser la méthode des différences finies pour déterminer une fonction polynome dont le degré est connu ou non.

1er cas : Si f est une fonction polynome de degré connu, deux par exemple : $f\colon x \mapsto ax^2+bx+c$, le tableau des différences donne une colonne de différences deuxièmes constantes. La différence première de f est une fonction affine : $\triangle_1 f\colon x \mapsto f(x+1)-f(x) = 2ax+a+b$; sa différence seconde est la fonction constante :

$$\triangle_1^2 f\colon x \mapsto \triangle_1 f(x+1)-\triangle_1 f(x) = 2a\ .$$

La constante obtenue dans la quatrième colonne du tableau nous permet d'en déduire a ; connaissant a, $\triangle_1 f$ nous permet de calculer b ; puis c est calculé à l'aide d'une valeur de f.

2ème cas : Si f est une fonction polynome de degré non connu, dans ce cas la table des différences successives est poursuivie jusqu'à l'obtention d'une fonction constante.

Si la différence troisième est une constante λ, alors on peut faire l'hypothèse : $f : x \mapsto a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ alors :

$$\triangle_1^3 f : x \mapsto \triangle_1^2 f(x+1)-\triangle_1^2 f(x) = 6a_0 \qquad (\lambda = 6a_0)$$

$$\triangle_1^2 f(x) = 6a_0x+6a_0+2a_1 \quad ; \quad \triangle_1 f(x) = a_0(3x^2+3x+1)+a_1(2x+1)+a_2$$

les coefficients sont :

$$a_0 = \frac{1}{6}\triangle_1^3 f(0) \qquad a_1 = \frac{1}{2}\triangle_1^2 f(0) - \frac{1}{2}\triangle_1^3 f(0)$$

$$a_2 = \triangle_1 f(0) - \frac{1}{2}\triangle_1^2 f(0) + \frac{1}{3}\triangle_1^3 f(0) \qquad a_3 = f(0)$$

(au besoin on complètera la table des différences pour obtenir les valeurs des différences successives pour la valeur zéro de la variable).

Remarque : Dans le cas où le degré du polynome n'est pas connu, l'unicité de la solution n'est pas assurée ; mais on peut s'imposer la recherche d'une fonction polynome de degré le plus petit.

Exemple d'une table de différence :

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0				
		4 176			
1	4 176		46 800		
		50 976		77 112	
2	55 152		123 912		0
		174 888		77 112	
3	230 040		201 024		0
		375 912		77 112	
4	605 952		278 136		0
		654 048		77 112	
5	1 260 000		355 248		
		1 009 296			
6	2 269 296				

Cette table suggère de rechercher une fonction polynome de degré 3. On trouve : $x \mapsto 12\,852x^3 - 15\,156x^2 + 6\,480x$; avec $g(7) = 3\,710\,952$. En fait, cet extrait de table est obtenu à partir de la fonction f définie par :

$$f(x) = 4\,991x^4 - 840x^5 + 14x^6 + 12x^7 - x^8 \quad , \text{ avec } f(7) = 3\,630\,312$$

Il est évident que, dans ce cas, si l'on continue la table, la dernière colonne n'est pas nulle.

4. Recherche d'une équation d'une parabole (activité 5)

A partir du tracé de quelques points obtenus par l'intermédiaire d'une table à coussin d'air, on peut demander aux élèves de faire un relevé des coordonnées de points et d'utiliser la méthode précédente pour trouver une équation de la courbe... Différentes questions se posent alors aux élèves : choisir un repère, adopter une convention pour la localisation des points..., avec quelle précision doit-on donner les coordonnées ?

5. Somme des termes d'une suite... et table de différences (activité 6)

On peut utiliser la méthode précédente pour déterminer la somme des termes de certaines suites finies simples.

1re ACTIVITE

Valeurs numériques d'une fonction polynome et différences successives

Soit f la fonction polynome de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 2{,}1x^3 - 1{,}7x^2 + 4{,}3x + 5{,}7 \quad .$$

Compléter le tableau ci-dessous :

x	$f(x)$	$\triangle f(x) = f(x+1) - f(x)$	$\triangle^2 f(x) = \triangle f(x+1) - \triangle f(x)$	$\triangle^3 f(x) = \triangle^2 f(x+1) - \triangle^2 f(x)$	$\triangle^4 f(x) = \triangle^3 f(x+1) - \triangle^3 f(x)$
.					
.					
.					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
.					
.					
.					
.					
.					
.					

Quelles sont les propriétés que vous pouvez formuler ? Essayez de les justifier.

2e ACTIVITE

Découvrir une fonction polynome

Elève A : Proposer une fonction polynome de degré 2.
Par exemple : $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$
Programme sur HP 25 : $\uparrow\uparrow\ 2 \times 3 + \times 7 -$
Introduire le programme et donner la notice d'utilisation à votre camarade B.

Elève B : Trouver la fonction polynome de degré 2 que votre camarade A a cachée dans la machine.
(Ne pas utiliser les codes du programme).

3e ACTIVITE

Recherche d'une fonction polynome

Un de vos camarades a choisi une fonction polynome du second degré et vous donne les images qu'il a obtenues pour des valeurs entières successives de x. Ces valeurs figurent dans les deux premières colonnes du tableau ci-dessous.

Devinez la fonction qu'il a choisie.

x	$f(x)$	
3	6	
4	19	
5	38	
6	63	
7	94	

Indications :

Calculez les différences entre les nombres successifs écrits dans la deuxième colonne et inscrivez-les dans la troisième colonne. Puis remplissez de même la quatrième colonne.

Déduisez-en les coefficients de la fonction polynome. Justifiez. Quel est le nombre minimum d'images de x qui vous sont nécessaires ? Connaissez-vous une autre méthode pour trouver la réponse ? Si oui, comparez-les. Quelle est la plus simple ?

4ᵉ ACTIVITE

Recherche de fonctions polynomes. *Autres exemples*

1 — Déterminer la fonction polynome f du deuxième degré sachant que :

x	f(x)	
11	43320	
12	51650	
13	60682	
14	70416	
15	80852	
16	91990	

2 — Même question que 1.
$f(1) = -7$; $f(2) = -15{,}11$; $f(3) = -29{,}56$; $f(4) = -50{,}35$;
$f(5) = -77{,}48$; $f(6) = -110{,}95$; $f(7) = -150{,}76$.

3 — Appliquez la méthode des différences pour trouver la fonction polynome du deuxième degré sachant que :

$f(3) = 55$; $f(6) = 241$; $f(9) = 571$; $f(12) = 1045$; $f(15) = 1663$.

Vous devez adapter la démonstration car ici les valeurs de x se succèdent de 3 en 3.

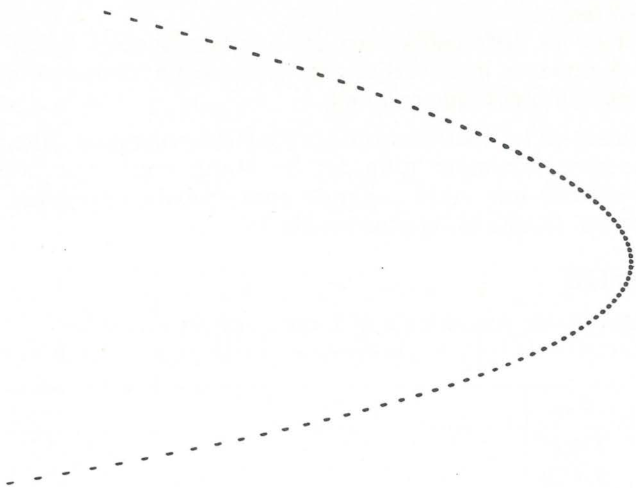
4 — Déterminer la fonction polynome f sachant que :
$f(2) = -2{,}6$; $f(3) = 26$; $f(4) = 134{,}2$; $f(5) = 404{,}2$;
$f(6) = 947$; $f(7) = 1902{,}4$; $f(8) = 3439$; $f(9) = 5754{,}2$.

5ᵉ ACTIVITE : thème interdisciplinaire mathématique-physique

Recherche d'une équation d'une parabole

La table à coussin d'air. Ce dispositif a été mis à la disposition de la plupart des lycées depuis la réforme des programmes de physique (1978). En mécanique la réforme accorde une place importante à la conservation de la quantité de mouvement et donc au vecteur vitesse.

Il existe deux types de tables à coussins d'air :
1) la table elle-même souffle l'air à travers de nombreux trous et le léger galet que l'on pose sur la table s'y déplace pratiquement sans frottement. Sa position est photographiée périodiquement :



avantage : on peut incliner suffisamment la table pour obtenir une parabole fortement concave ;

inconvénient : le marquage des points est peu précis.

2) le galet lui-même souffle l'air. Contenant un moteur et un système de marquage par étincelage électrique, il est plus lourd (voir page 32 - travail de Nathalie)

avantage : le marquage des points est précis ;

inconvénient : on ne peut guère incliner la table, sinon les résultats expérimentaux sont décevants (probablement à cause des frottements parasites).

La manipulation : On lance le galet sur la table de manière à obtenir une trajectoire d'allure parabolique. Sur la courbe de Nathalie (fig. 1, page 33) les points M_i retenus figurent sur le dessin uniquement par leurs numéros i .

Deux points consécutifs correspondent à un intervalle de temps de $\frac{4}{100}$ de seconde.

Premier problème

Comment déterminer le vecteur vitesse en un point ? Nathalie a choisi le point M_{20}. Elle constate que les droites $M_{20-\tau}\ M_{20+\tau}$ (τ prenant les valeurs 3, 7, 9) sont parallèles, et que la vitesse moyenne entre deux tels points ne dépend pas de τ. Cela l'amène à identifier le vecteur vitesse en M_{20} avec le vecteur $\overrightarrow{M_{20-5}\ M_{20+5}}$ en convenant de représenter 1 cm/s par 0,4 cm. Elle détermine de même les vecteurs vitesses en M_{10}, M_{30}, M_{35}. Je demande alors de construire, à partir d'un point S, les couples de points équipollents aux couples (M_{15}, M_{25}) ; (M_5, M_{15}) ; (M_{25}, M_{35}) etc. Surprise, les différents points obtenus sont sensiblement alignés.

Deuxième problème

La trajectoire est-elle effectivement une parabole ? Quels axes choisir ? « La droite qu'on vient de trouver », propose quelqu'un. Une perpendiculaire à cette droite fournira l'axe des x.

Nathalie a gradué ces deux axes de cm en cm, puis, elle a construit le tableau T_e des résultats expérimentaux. Les élèves ont été entraînés à découvrir des polynomes du second degré cachés dans une calculatrice. La ligne $\alpha(x)$ ne devrait comporter que des nombres égaux, ce n'est pas tout à fait réalisé ; c'est pourquoi Nathalie adopte la valeur $-0{,}21$ et construit un tableau théorique T_t qui lui permet de trouver les coefficients *a, b, c* du polynome du second degré cherché.

Pour vérifier l'adéquation de la fonction trouvée à la courbe expérimentale, les élèves viennent programmer leur fonction sur la calculatrice ; ils peuvent ainsi contrôler, pour quelques points choisis au hasard, que la valeur donnée par la calculatrice est voisine de celle mesurée sur le graphique. On attend avec une certaine émotion le verdict de la calculatrice. Pour Nathalie, ce fut satisfaisant :

$f(6) = 9{,}6$ à la calculatrice ; 9,3 sur le dessin.
$f(-7) = 11{,}3$ à la calculatrice ; 11,3 sur le dessin.

DOCUMENT ELEVE

Le 21/5/80 *Nathalie*

Le Lancement du galet

T_e

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	10,6	11,2	11,6	11,7	11,7	11,4	10,8	10,1	9,3	8,3	7
$\triangle(x)$	0,6	0,4	0,1	0	$-0,3$	$-0,6$	$-0,7$	$-0,8$	-1	$-1,3$	
$\alpha(x)$		$-0,2$	$-0,3$	$-0,1$	$-0,3$	$-0,3$	$-0,1$	$-0,1$	$-0,2$	$-0,3$	

$$\frac{-0,2+(-0,3)+(-0,1)+(-0,3)+(-0,3)+(-0,1)+(-0,1)+(-0,2)+(-0,3)}{9}=\frac{-1,9}{9}=-0,21\ldots$$

T_t

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$				11,7	11,7	11,49					
$\triangle(x)$				0	$-0,21$	$-0,42$					
$\alpha(x)$		$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$	$-0,21$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ $\quad\triangle(x)=f(x+2)-f(x)=4ax+4a+2b$

$\triangle(x+2)=4a(x+2)+4a+2b$ $\quad\alpha(x)=8a.$

$8a=-0,21$ $\quad\triangle(x)=4a\,x+4a+2b$

$\boxed{a=-0,02625}$ $\quad=-0,105x-0,105+2b$

$\triangle(-4)=0\rightarrow-0,105(-4)-0,105+2b=0$

$0,420-0,105=-2b$ $\quad\boxed{b=-0,1575}$

$f(x)=-0,02625x^2-0,1575x+c$

$f(-4)=11,7$ $f(-4)=-0,02625.16+0,1575.4+c$

$11,7=0,21+c$ donc $\boxed{c=11,49}$

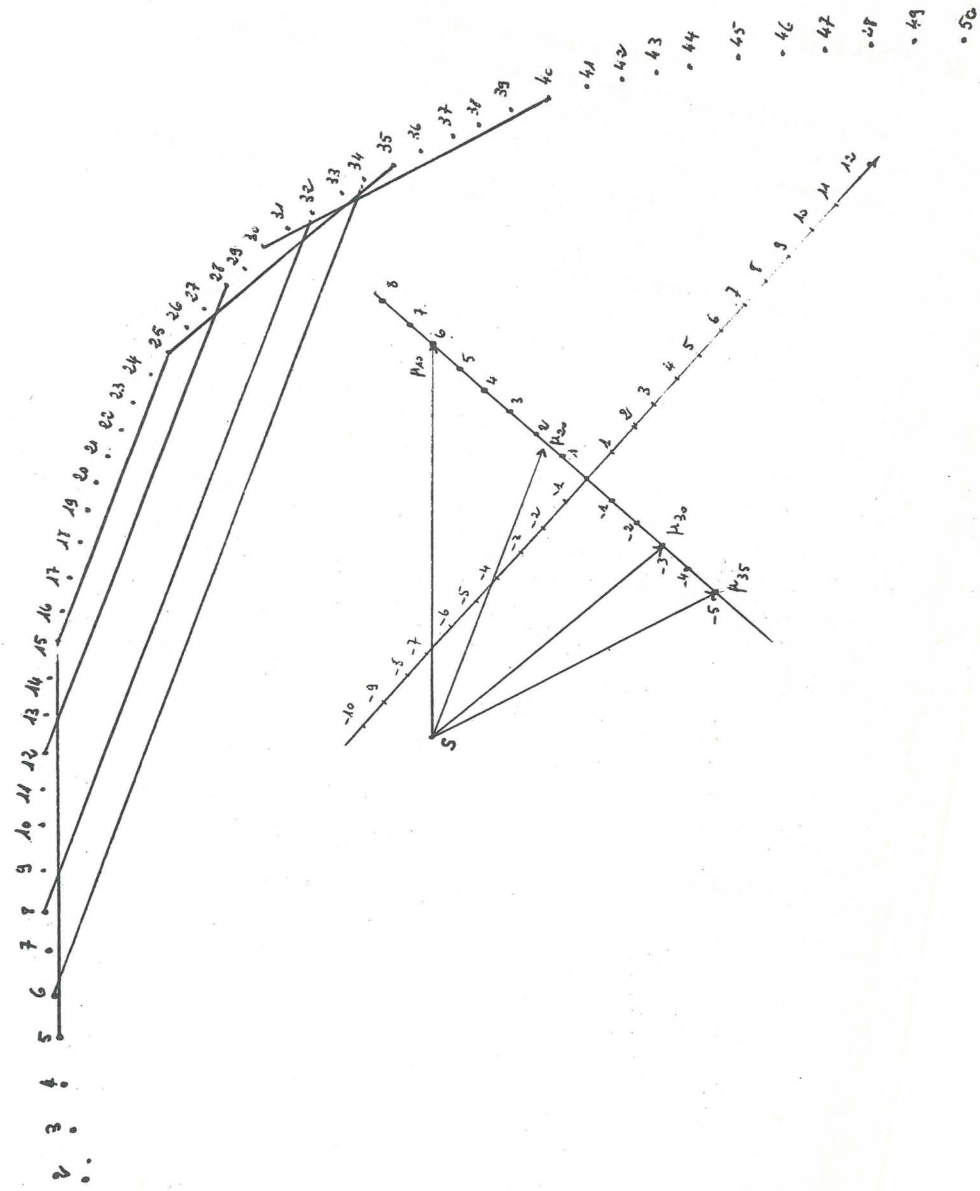
Vérification : $f(x)=ax^2+bx+c$ $f(x)=-0,02625x^2-0,1575x+11,49$

$f(-4)=11,7$ $f(-4)=-0,02625\times(-4)^2-0,1575.(-4)+11,49$

$f(-4)=-0,42+0,63+11,49=11,7$

Polynome $f(x)=-0,02625x^2-0,1575x+11,49.$

Nathalie. 2A4



6e ACTIVITÉ

Suites, calcul de sommes

A l'aide de la méthode des différences, peut-on prévoir, en fonction de n, la valeur des sommes suivantes ($n \in \mathbf{N}_*$).

1. **Calcul de S_n** : $S_n = 1+2+\ldots+n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} i$$ somme des n premiers naturels non nuls.

Complétez le tableau ci-dessous :

n	S_n	$\Sigma_n = S_{n+1} - S_n$	$\Sigma'_n = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n$
1			
2			
3			
4			
5			

En observant la dernière colonne, on peut proposer en se référant aux activités antérieures $S_n = an^2+bn+c$ où a, b, c sont des entiers à déterminer.

2. **Calcul de S'_n** : $S'_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)$$; somme des n premiers naturels impairs. En utilisant un tableau analogue au tableau ci-dessus, donner une expression de S_n en fonction de n.

3. **Calcul de** $\sum_{i=1}^{n} i^2$, somme des carrés des n premiers nombres naturels non nuls.

Autres calculs : $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$; $\sum_{i=1}^{n} i^3$; $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$.

4

MISE A L'ESSAI DU PROGRAMME DE STATISTIQUES EN SECONDE AB

I. Objectifs et méthodes

1) OBJECTIFS

L'hypothèse de départ, facilement vérifiable, est que les élèves ont déjà, en entrant en Seconde, un « vécu statistique » ; il s'agit alors de leur en faire prendre conscience et de partir de là pour :

— mettre de l'ordre dans des connaissances éparses ;
— y rechercher une unité éventuelle ;
— donner un nom à certains outils ;
— les faire opérer dans quelques situations.

Nous avons en fait « traité » non pas le libellé du nouveau programme de Seconde, mais celui du paragraphe « Statistique » du programme de Sciences Economiques et Sociales de Seconde AB, en interdisciplinarité avec cette matière, ce qui nous a semblé le plus judicieux dans ce type de section.

La différence tient à quelques notions supplémentaires : mode, médiane, écart moyen, étendue, quantiles, ... toutes notions utiles en économie.

2) METHODES

Dans les deux classes, la Statistique a été traitée uniquement par demi-groupes à raison de deux périodes consécutives (50 minutes) par demi-groupes et par semaine, pendant 8 semaines, ce qui fait un peu plus des 12 heures prévues à cet effet (soit 10 % environ de l'horaire annuel de mathématique prévu en 81/82 : 4 heures par semaine, dont une seule dédoublée).

Certaines séances ont eu lieu en présence de deux professeurs (SES et Math), chacun jouant à son tour le rôle d'animateur principal.

Les élèves ont formé eux-mêmes des équipes (de 2 à 4) et ont travaillé sur des documents fournis par les professeurs : une enquête réalisée par eux-mêmes serait souhaitable, mais demanderait beaucoup de temps.

La méthode utilisée a favorisé au maximum l'activité des élèves.

Outre la confection des documents, l'activité des professeurs a consisté en :
— un va et vient de groupe en groupe,
— un rôle de synthèse et de mise en ordre des questions et des outils rencontrés,
— un rôle d'évaluation des travaux effectués.

II. Description des activités

1) OBSERVATION DE DIVERS CARACTERES D'UNE POPULATION*

Dans l'environnement immédiat des élèves, la population du lycée semble évidemment la plus facilement observable.

1er temps : Choix des caractères et recensement

Ce choix et ce recensement ont été faits par nous à cause du secret qui entoure les données issues des visites médicales. Les élèves se sont retrouvés avec 11 feuilles de données. Nous avons retenu 7 caractères, dont 5 discrets (sexe, âge, section, niveau, « a passé la visite médicale ») et 2 continus (poids, taille). Mais bien d'autres auraient pu être tirés des dossiers : nombre de frère(s) et sœur(s), catégorie socio-professionnelle du père et de la mère, etc.

2e temps : Consignes données aux élèves

« Après vous être constitués en petits groupes de 2, 3 ou 4, il s'agit de :
1) Dresser une liste de questions que vous vous posez à propos de ces données.
2) Proposer des moyens pour répondre à ces questions. »

Pour certains, il a fallu préciser la première consigne comme suit :
« Cherchez dans deux directions principales :
— comment présenter clairement et simplement cette masse de données ?
— que peut-on en tirer ? »

3e temps : Synthèse des questions et des moyens

On écrit la liste au tableau. On précise. On discute. On regroupe. Puis chaque groupe se choisit une tâche.

* Nous avons profité des enseignements d'un travail de l'IREM de RENNES sur le même thème (document de février 1978).

4ᵉ temps : Réalisation de la tâche

Chaque groupe tente de répondre à la question qu'il a choisie, et a comme consigne de rendre ses conclusions sous forme d'un travail écrit.

5ᵉ temps : Synthèse et redéfinition de la tâche à accomplir

Le premier travail n'ayant pas donné, dans l'ensemble, de résultats satisfaisants, il est critiqué, précisé et redéfini avec les consignes suivantes :
a) Titre du travail : sujet choisi
b) Moyens de traitement choisis avec leur justification (pourquoi et comment ?)
c) Traitement des données proprement dit (tableaux, graphiques, calculs de pourcentages, de moyennes, etc.)
d) Constatations - Interprétations - Prévisions éventuelles - Nouvelles questions
e) Conclusion : réflexion critique sur le sujet choisi et ce qui en a été tiré.

6ᵉ temps : Compte rendu commenté des travaux d'équipe

Voici quelques observations d'ordre général sur cette première activité statistique :

* Démarrage lent (élèves peu habitués à cette méthode de travail).
* Activité considérée comme marginale (« c'est pas des maths ! » et « à quoi ça sert ? »).
* L'importance des statistiques dans l'environnement culturel des élèves laisse heureusement des traces : les notions de base (recensement, sondage, tableaux graphiques, pourcentages, moyennes,...) leur sont assez familières mais bien sûr ne sont pas maîtrisées.
* On se précipite sur les calculs (qui sécurisent !) sans bien savoir pourquoi on les fait : on fait des moyennes, puis des moyennes de moyennes, sans tenir compte bien sûr des pondérations.
* Les consignes d) et e) ci-dessus sont souvent escamotées ;
* Les graphiques ne viennent qu'en dernier, si le professeur insiste : difficultés à distinguer « bâtons » et « histogramme » ; problèmes d'échelles ; représentation par un point d'une classe ou par un même intervalle de classes d'amplitudes différentes, représentation des effectifs ou des fréquences en abscisses, avec bâtons quand même verticaux... ; comparaison de courbes construites avec des unités différentes.
* Nécessité de faire une bonne révision (ou vision ?) des pourcentages en même temps.
* Quelques observations intéressantes sont apparues :
  — pourquoi beaucoup de filles en A et le contraire en C ?
  — pourquoi les élèves sont-ils plus âgés en G qu'en C et D ?

2) ETUDE DE DONNEES ECONOMIQUES

On distribue aux élèves les deux tableaux suivants :

LES SALAIRES AU 1er JANVIER 1980
DANS L'INDUSTRIE ET LE COMMERCE

Combien gagnent les salariés à temps complet

CATEGORIES SOCIO-PROFESSIONNELLES	EFFECTIFS (en milliers)		SALAIRE NET MENSUEL (en francs)	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
CADRES SUPERIEURS	557,7	64	11 697	7 486
Dont : ingénieurs	128,5	4,3	10 473	8 126
cadres administratifs supérieurs	400,2	43,8	12 375	8 254
CADRES MOYENS	1 093,6	420,9	5 991	4 460
Dont : techniciens	490	55,5	5 481	4 207
cadres administratifs moyens	520,8	183,3	6 745	5 273
EMPLOYES	982	1 752,9	3 884	3 057
CONTREMAITRES	411,8	40,3	5 250	4 412
OUVRIERS	5 015,8	1 327,1	3 378	2 422
Dont : ouvriers qualifiés	2 859,6	341,7	3 643	2 749
ouvriers spécialisés	1 643,1	754	3 097	2 371
manœuvres	442,2	229,4	2 559	2 092
mineurs	52,8	2	4 448	4 072
marins et pêcheurs	15,8	0,1	4 351	2 385
APPRENTIS ET JEUNES OUVRIERS	188,3	65	1 271	1 555
PERSONNELS DE SERVICES	168,9	384,5	3 024	2 530
AUTRES CATEGORIES	14	4	4 671	3 701
TOUTES CATEGORIES	8 432	4 058,7	4 423	3 035

1979 - Source : *Année économique et sociale. Le Monde.*

REPARTITION DES CONTRIBUABLES PAR TRANCHE DE REVENU NET GLOBAL

Revenu net global	Revenus de 1975		Revenus de 1976		Variation de l'effectif en % entre 1975 et 1976
	Nombre	%	Nombre	%	
Inférieur ou égal à 7 500F .	2 663	0,02	1 539	0,01	−42,2
7 600 à 10 000F	148 596	1,10	58 053	0,41	−60,9
10 100 à 15 000F	1 916 724	14,20	1 483 062	10,41	−22,6
15 100 à 20 000F	2 457 253	18,21	2 194 558	15,11	−10,7
20 100 à 25 000F	2 123 826	15,74	2 216 812	15,56	+ 4,4
25 100 à 30 000F	1 591 994	11,80	1 728 444	12,14	+ 8,6
30 100 à 40 000F	2 281 486	16,91	2 586 817	18,16	+13,4
40 100 à 50 000F	1 200 242	8,89	1 540 097	10,81	+28,3
50 100 à 70 000F	980 033	7,26	1 351 507	9,49	+37,9
70 100 à 100 000F	438 732	3,25	609 667	4,28	+39,0
100 100 à 200 000F	277 867	2,06	370 154	2,60	+33,2
200 100 à 400 000F	60 912	0,45	82 076	0,58	+34,7
Plus de 400 000F	14 220	0,11	19 817	0,14	+39,4
Totaux	13 494 548	100	14 242 603	100	+ 5,5

Source : INSEE

Puis les élèves, toujours par équipes, doivent répondre aux questions suivantes :

1) D'où viennent ces données ? Comment, à votre avis, ont-elles été recueillies ?

2) S'agit-il de données brutes ou ont-elles déjà subi des manipulations ?

3) Les données sont-elles surabondantes (y a-t-il des résultats que vous auriez pu calculer à partir des autres ?) ?

4) Quelle(s) autre(s) présentation(s) pouvez-vous faire de ces données ?

5) Quelles constatations en tirez-vous ?

Le travail s'est déroulé en partie en classe, puis s'est terminé à la maison et chaque groupe a fait un compte rendu écrit.

Observations :

* Assez grande motivation des élèves pour un tel sujet.
* Donc travail plus approfondi que sur le sujet précédent, qui peut aussi s'expliquer par le fait qu'entre temps une synthèse avait été faite sur les principaux outils statistiques utilisés en Economie à leur niveau.
* Mais difficulté à expliquer ce que l'on fait et pourquoi on le fait.
* Difficulté à faire des constatations qui ne soient pas une paraphrase des données.

* Hétérogénéité des niveaux : bonne vision économique chez certains (on sent qu'il y a du "vécu" derrière), alors que d'autres confondent "salaires" et "revenus"...

3) QUELQUES EXERCICES "DIDACTIQUES"

La troisième activité-élève a consisté à étudier, en équipes, la fiche d'exercices suivante et, comme dans les deux précédentes, à rendre un travail écrit.

Exercice 1 : Un élève a obtenu au cours de l'année les notes suivantes en mathématique :

1ᵉ note	2ᵉ	3ᵉ	4ᵉ	5ᵉ	6ᵉ	7ᵉ	8ᵉ	9ᵉ	10ᵉ	11ᵉ	12ᵉ	13ᵉ	14ᵉ
7	10	8	12	12	13	10	12	11	7	10	8	15	12

1) Comment peut-on présenter autrement la liste des notes ?
2) Quel(s) dessin(s) peut-on faire ?
3) Quelle est la note dominante ? la moyenne ?
4) Quelles sont les moyennes trimestrielles (1ᵉʳ trimestre : 5 notes ; 2ᵉ trimestre : 6 notes ; 3ᵉ trimestre : 3 notes) ?
La moyenne annuelle est-elle la moyenne des notes trimestrielles ?

Exercice 2 : Au baccalauréat, un candidat a obtenu les notes suivantes :

Matière	H - G	F	Philo	L.V.	Math	SP
Note	6	7	7	13	14	10
Coefficient	2	2	2	2	4	4

1) Sachant qu'il doit avoir "la moyenne" (10) pour réussir, calculer sa moyenne sans les coefficients, puis avec.
2) Trouver des coefficients pour que la moyenne soit supérieure à 12 (avec les mêmes notes).
3) Peut-on, toujours avec les mêmes notes, trouver des coefficients tels que la moyenne du candidat soit inférieure à 8 ?

N.B. — Dans le 2) et le 3), on suppose que la somme des coefficients est toujours 16.

Exercice 3:

1) Tracer la droite d'équation : $6x - 2y + 4 = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

2) "Tirer" y en fonction de x . Quel est le coefficient de x ? le terme constant ?

3) Si $x = 0$, que vaut y ? Remarque ?

4) Si $x = 3$, puis $x = 4$, quelles sont les valeurs correspondantes de y ? Quelle est leur différence ? Remarque ? En est-il de même pour $x = 7$ puis $x = 8$? pour $x = 2{,}5$ puis $x = 3{,}5$? Explication ?

5) En déduire une méthode pour trouver graphiquement l'équation sous la forme $y = ax + b$ d'une droite donnée dans le plan.

Exercice 4: Dans un plan orthogonal, construisez et joignez les points dont les coordonnées sont données par :

x	7	8	10	11	15	16	17	18	25	26	28	30	31
y	10	15	17,5	15	25	33	27	33	52	46	55	50	60

1) En prenant comme unités : 0,5 cm sur Ox et 3 mm sur Oy } dans le même repère

2) En prenant comme unités : 1 cm sur Ox et 1 mm sur Oy

3) Y a-t-il une "courbe" pour laquelle les points semblent "plus alignés" que sur l'autre ?

4) Tracez une "droite d'ajustement" et donnez-en une équation.

Observations :

Cette feuille supplémentaire d'exercices avait pour but essentiel de reprendre tout ce qui avait déjà été vu en statistique et qui est nécessaire à une première approche.

Les erreurs fréquentes (calcul de moyennes, échelles différentes pour des courbes à comparer) sont illustrées par des exemples (ex. 1 et 4).

L'exercice 2, moyenne pondérée, devait illustrer une "leçon" sur les indices (à la demande du professeur d'économie) et préparer l'explication des différences qui peuvent exister entre les différents indices de la vie économique (INSEE, CGT, CGT-CFDT, Confédération des familles...).

L'exercice 4, préparé par l'exercice 3, était ambitieux ; montrer d'abord que l'allure d'une courbe et les conclusions que l'on en tirait dépendaient beaucoup des unités. Ensuite, si l'on ajustait, graphiquement, "à vue de nez", une droite à la distribution étudiée, lire les caractéristiques "a" et "b" de la droite ; enfin, à l'aide de l'équation de la droite, faire des prévisions (non fait).

D'un point de vue pratique, peu de difficultés et beaucoup d'intérêt. Mais évidemment, impossibilité de dire "quand" on a le droit de faire un ajustement.

III. Tentative d'évaluation et conclusions

1) DU POINT DE VUE DES ELEVES

Réticence, au début, dans une classe qui ne tenait pas au sujet mais a des problèmes d'intégration dans une nouvelle problématique scolaire (en fait classe difficile constituée d'une majorité d'élèves peu adaptés au moule scolaire classique: il a d'abord fallu apprendre à vivre en groupe et apprendre à travailler, même sans motivation... Il ne faudrait pas oublier que c'est *la difficulté principale* de l'enseignement en Seconde AB, et qu'un changement de programme ne la fera pas disparaître!).

L'autre classe semble avoir posé moins de problèmes, et l'intérêt fut assez soutenu, surtout pour les situations économiques. En effet, l'étude de la population du lycée quant à l'âge, le poids, la taille, etc. demande un investissement assez considérable pour des résultats assez minces, voire décevants; l'observation des données semble indiquer que seul le désordre a distribué les poids et les tailles!

Chaque équipe a rendu trois travaux écrits faisant le bilan des activités menées en classe, puis terminées à la maison.

Ces travaux ont prouvé que les élèves maîtrisaient assez bien :
— la lecture et la réalisation de tableaux à double entrée;
— les calculs de certains paramètres (moyenne, médiane, etc.);
— la réalisation de graphiques (surtout diagrammes en bâtons, histogrammes, diagrammes circulaires) *dans des cas simples* (classes d'amplitudes égales, unités non imposées, pas de problème de cadrage).

Mais ils ont montré aussi une grande maladresse dans le choix des unités, la graduation des axes, les comparaisons, l'interprétation des faits, et peu de goût pour la réflexion critique...

2) DU POINT DE VUE DES PROFESSEURS

Le professeur d'économie, comparant avec le passé, pense avoir recueilli assez vite les fruits d'une telle initiation statistique en début d'année.

Les professeurs de maths que nous sommes constatent que ces activités se sont cantonnées *au niveau du débroussaillage* (comme conseillé dans les commentaires), et que de toute façon *il ne peut être question d'aller au-delà dans le temps imparti.*

Ce qui signifie que *toute maîtrise* des concepts et outils introduits *est exclue en fin de Seconde* sauf pour ceux qui auront été amplement utilisés par d'autres disciplines...

3) DU POINT DE VUE DU PROGRAMME ET DES COMMENTAIRES

La phrase du programme:

"Il est conseillé de faire porter ces activités sur l'étude d'*une seule situation* (...)"

est reprise dans les commentaires sous la forme:

"les séquences d'activités statistiques (limitées à l'étude d'*une seule situation*) ..."

Nous comprenons la volonté des auteurs de limiter les activités statistiques dans le temps.

Mais les concepts statistiques peuvent-ils jaillir de l'observation d'*une seule situation*? N'est-ce pas la confrontation de plusieurs situations qui donne un sens et une motivation à l'introduction de nouveaux concepts?

5

STATISTIQUE EN SECONDE AB EN LIAISON AVEC LES SCIENCES ECONOMIQUES

OBJECTIFS :

• Pratique de l'interdisciplinarité (12 heures de mathématiques, 12 h de sciences économiques et sociales).

• Observation des élèves et de leur comportement face à l'organisation du travail de groupe.

• Pour le professeur de mathématiques, plus particulièrement :

* expérimentation de la partie "statistique" du programme de seconde entrant en vigueur à la rentrée 81,

* liaison avec les autres rubriques de ce programme.

CONTENU :

Nous avons estimé préférable, compte tenu des problèmes d'harmonisation des programmes et d'emploi du temps des professeurs, de distinguer deux phases dans l'expérience :

Phase 1 : maths-SES

Prise de contact avec la démarche statistique, découverte des problèmes posés, recherche de solutions.

Support initial retenu : prise en charge d'une enquête.

Phase 2 : maths-géographie

Utilisation et extension des méthodes et techniques rencontrées.

Support retenu : étude de la climatologie audoise (à partir de relevés).

Seule la phase 1 qui a été menée à bien à ce jour (fin février) est exposée ici.

Compte rendu de la phase 1 (Maths-SES)

Deux étapes ont été distinguées :

I : Prise de contact avec les statistiques.
II : Réalisation d'une enquête.

ETAPE I

Pour favoriser ce premier contact, nous avons choisi un thème "simple", et une population réduite.

— *En SES*: les élèves définissent des motivations d'entrée en seconde AB.

Activités:
- formuler des motivations claires, et exclusives
- préciser les objectifs (on décide d'étudier si "les filles ont les mêmes motivations que les garçons").

Problèmes rencontrés:
- de vocabulaire (peu précis ou maladroit)
- création de classes vides (certaines motivations proposées n'ont été choisies par aucun élève de la classe).

— *En mathématiques* (une heure) - classe entière

Une élève fait un compte rendu du travail réalisé en économie.

Ensuite s'installe un débat sur
- les premières conclusions (évidence de la classe dominante)
- les méthodes d'analyse.

1 Nécessité de calculer des pourcentages pour pouvoir comparer les comportements filles-garçons. *D'importantes difficultés apparaissent*: aucun élève n'est capable de formuler un calcul correct (explications du type "un pourcentage c'est quand on fait le produit en croix", toutes liées à la notion de rapport). Devant cette confusion, il est décidé de consacrer une séance à ce problème.

2 Représentation graphique:
- diagrammes à bâtons: proposés par un élève. Pas de problème de réalisation; discussion relative à l'échelle, et pour savoir s'il est légitime de joindre les extrémités.
- diagrammes à secteurs: suggérés par le professeur. Les élèves se chargent de les réaliser pour la semaine suivante.

— *En mathématiques* (une heure): en présence du professeur de SES jouant le rôle d'observateur.

1 Diagrammes à secteurs: un seul élève a utilisé le rapporteur; la plupart ont calculé en cm la longueur de la circonférence, divisé celle-ci par le nombre d'élèves de la classe, et reporté au compas (confusion entre arc et corde).

2 Calcul des pourcentages: difficile; la notion de rapport est mal connue.

A l'interprétation proposée:

$$\begin{array}{r|l} 17 & ? \\ 32 & 100 \end{array} \qquad \times \frac{100}{32}$$

les élèves préfèrent:

$$\begin{array}{r|l} 17 & x \\ 32 & 100 \end{array} \qquad 17 \times 100 = 32 \times x \ldots$$

3 Tableaux de pourcentages - Diagrammes associés.

4 Formulation de conclusions; tentatives d'interprétation. Hypothèses émises par les élèves: les différences de comportement garçons-filles pourraient provenir:

• du fait qu'il y a relativement peu de garçons dans la classe
• du fait que les filles sont "plus jeunes" que les garçons.

5 Pour confirmer ou infirmer ces hypothèses:

• un groupe d'élèves se charge d'étendre l'étude à toutes les secondes du lycée
• une élève prend en charge l'étude de l'âge des garçons et des filles de la classe.

— *En mathématiques* (une heure) - classe entière: âge des garçons et des filles de la classe.

La notion d'âge moyen a été spontanément mise en place.

• **Mise au point:**
constitution de classes - exemple d'histogramme
calcul de moyennes - rôle des centres de classe
notion de fréquence

• **Conclusion de l'étude**: contrairement à l'hypothèse faite, la classe conclut que les filles sont "plus âgées" que les garçons. Plus que la comparaison des divers diagrammes, c'est celle des moyennes qui a convaincu les élèves.

• **Nouveau problème rencontré**: conversions. Aucun élève n'est capable de convertir les moyennes d'âge obtenues en années, mois, jours.

— *En mathématiques* (une heure): exploitation du travail précédent: fréquences cumulées, courbes, notion de médiane.

• La notion de fréquence a paru artificielle, les élèves préférant parler de pourcentages.
• L'interpolation intervenant dans le calcul de la médiane a été très difficile à obtenir. Peu d'élèves ont été capables de la reproduire (contrôle lors du devoir hebdomadaire).

Remarques concernant ce premier contact

Cette première étape, très instructive, a mis en évidence:

• d'un point de vue mathématique: de grandes difficultés pour tout ce qui touche à la proportionnalité;

• d'un point de vue pédagogique: l'intérêt de favoriser le travail de groupe; deux attitudes ont été relevées par "l'observateur":

* passivité relative lors des interventions du professeur
* activité dès qu'il s'agit de manipuler un tableau, de se partager le travail, ou d'utiliser les calculatrices.

ETAPE II L'enquête.

1 *Choix du thème* (en économie) : "La moto au lycée"
Un groupe de six élèves se charge de recenser les questions, et de mettre au point le questionnaire, sous le contrôle du professeur de SES.

2 *Test du questionnaire* (une heure) classe entière ; en présence des deux professeurs.
Questions dirigeant le futur dépouillement. Dernière mise au point du questionnaire (voir Annexe I).

3 *Préparation du dépouillement*
• en mathématiques (1/2 heure) : constitution d'une table de conversion permettant de calculer rapidement le kilométrage moyen annuel d'une moto achetée neuve, connaissant sa date d'achat et son kilométrage
• en présence des deux professeurs (1/2 heure, groupe "organisateur" de six élèves) : discussion concernant l'organisation du dépouillement.

4 *Dépouillement* : en demi-classe (4h chacune), soit en présence des deux professeurs, soit un professeur par demi-classe.

Les tableaux de dépouillement ont été constitués par les professeurs, pour gagner du temps, et aussi parce qu'une excessive maladresse aurait compromis la suite de l'étude.

Méthode utilisée :

* Chaque groupe de deux élèves dépouille les réponses d'une classe du lycée, et remplit un dossier pour cette classe.
* Chaque groupe de quatre élèves se charge ensuite d'un groupe de questions ; il dispose des tableaux correspondants découpés dans tous les dossiers qu'il compile dans un ou plusieurs tableaux terminaux.

Principal problème : contrôle des erreurs (en utilisant des totaux partiels).

5 *Analyse et interprétation* : chaque groupe de 4 élèves étudie un thème.

• Il dispose d'un dossier comportant
  * un ou plusieurs tableaux terminaux ;
  * des consignes formulées par les professeurs à partir des objectifs fixés avec la classe.

Exemple : "Etudier les variations dans le temps des prix pour chaque cylindrée".

• Il doit restituer, sur stencil :
  * les tableaux terminaux sur lesquels il a travaillé ;
  * les nouveaux tableaux qu'il a éventuellement été amené à constituer ;
  * des interprétations graphiques.

• Il doit préparer un commentaire sur ses méthodes et ses conclusions.

Ce travail est fait "à la maison" dans un délai de 3 semaines.
Chaque groupe est parrainé par un professeur (deux mises au point d'un quart d'heure ont été nécessaires pour la plupart).

6 *Exposé des méthodes et conclusions* : 1/2 heure par groupe, soit 4 heures, devant la classe entière, et en présence des deux professeurs. Chaque élève dispose de toutes les études faites par les divers groupes. Il doit ensuite rédiger un "devoir" sur un thème transversal.

Remarques concernant ces activités

— malgré leur complexité, les tableaux ont été aisément manipulés ;

— les calculs de pourcentages ont été faits avec plus d'aisance, et de bons progrès ont été faits dans leur interprétation ; le rapporteur a été utilisé dans la plupart des cas pour les diagrammes à secteurs ;

— certains groupes ont buté sur des erreurs "de fond" qu'ils ont été amenés à corriger.

Exemples :

• Problèmes de "croisement" dans le calcul des pourcentages, et d'interprétation de ces pourcentages. Le groupe "qui a une moto ?", devant étudier les différences de comportement filles-garçons face à la possession d'une moto, calcule le pourcentage de filles de A (ou de garçons de A) parmi les élèves ayant une moto ; la comparaison de ces pourcentages fait essentiellement apparaître la forte proportion de filles en section A (résultat non significatif à l'égard des objectifs fixés). L'étude est donc corrigée, les élèves calculant, cette fois, le pourcentage d'élèves possédant une moto parmi les filles de A (puis parmi les garçons de A).

• Erreur dans les calculs de moyennes : le groupe "évolution dans le temps des prix d'achat suivant la cylindrée" devait aussi donner, pour chaque année, le prix moyen d'achat d'une moto neuve au lycée. Il a simplement fait la moyenne, non pondérée, des prix moyens obtenus pour chaque cylindrée, sans tenir compte des différents effectifs ; cette démarche erronée a paru naturelle à beaucoup d'élèves (voir Annexe II).

— Interventions des professeurs : pour préciser entre autres :

* la notion d'histogramme
* la notion de moyenne : son calcul, sa signification, ses "limites" (perte d'information par rapport à l'histogramme)
* le problème du découpage des intervalles de classe (par exemple le découpage choisi pour les cylindrées renforce artificiellement la catégorie des 125 à 500 cm^3 qui comporte une grande variété de modèles (voir Annexe III)
* le problème des intervalles extrêmes (par exemple pour le prix des motos neuves, l'expression "moins de 1600 F" a signifié pour un groupe "de 0 à 1600 F", pour un autre "de 500 à 1500 F").

• les limites d'une telle enquête : par exemple, l'évolution des prix moyens des motos de moins de 50 cm^3 correspond à peu près au modèle théorique vu en économie, mais celle du prix moyen des motos de cylindrée comprise entre 80 et 125 cm^3 paraît "aberrante" : cela est lié au faible effectif (10) correspondant (voir Annexe IV).

BILAN

1 *Sur la méthode*

• L'étape "prise de contact", même si elle a, apparemment, pris du temps (on pourrait d'ailleurs en réduire la durée), s'est révélée très utile : elle a permis aux élèves, à partir d'une étude simple, de disposer de quelques outils indispensables (en particulier : pourcentages).

• La 2ᵉ étape (pour nous : l'enquête) nous paraît indispensable : il est important que les élèves soient confrontés à un grand nombre de résultats numériques, nécessitant la mise en place d'une méthode d'analyse ; d'autre part, les problèmes rencontrés lors de l'interprétation des résultats conduisent à une critique de la méthode choisie, et à la prise de conscience des "limites" d'une telle étude.

• Qu'apporte la réalisation de l'enquête proprement dite ?
 * une motivation naturelle : il s'agit de répondre, dans la plupart des cas, à des questions que se posent les élèves,
 * une réflexion sur la façon de conduire le dépouillement (constitution et manipulation de tableaux, organisation du travail de groupe...),
 * la possibilité, si de nouvelles questions apparaissent, de retourner à la source d'information.

• Aspect enrichissant du travail de groupe : chacun s'est presque entièrement pris en charge et a organisé son activité, et cette organisation a été payante : peu d'erreurs de calcul ont été relevées ; un réel effort de présentation a été fait par beaucoup.

Un inconvénient de la méthode employée est que tous les groupes n'ont pu aborder toutes les notions (en particulier, 3 groupes sur 8 seulement ont construit des histogrammes). Cela nous a paru largement compensé par l'apport du travail de groupe ; cependant, pour minimiser cet aspect négatif, inciter les élèves à une étude plus approfondie des documents et des méthodes, et aussi pour tenter d'estimer leur acquis, nous avons proposé des travaux individuels :

1 Des exercices "ponctuels", à l'occasion du devoir hebdomadaire
Exercice I : "Calculer les prix moyens et médians d'achat de la moto dans chaque section A, B, C, D, G. Illustrer par un graphique. Commenter."

Observations
 * les techniques de calcul ont enfin été exploitées sans trop de problèmes

* la plupart des commentaires ont porté, non pas sur l'étude des comportements des diverses sections, mais sur la comparaison des deux valeurs centrales : on remarque que, dans chaque cas, la médiane est inférieure à la moyenne ; que la section à plus forte moyenne (G) n'est pas la section à plus forte médiane (B) ; que les écarts moyenne-médiane sont plus importants dans certaines sections que dans d'autres (voir Annexe V).

Quelques conclusions (ex. : "on peut dire que la médiane est indépendante de la moyenne") ou tentatives d'explication ont été ébauchées ; elles ont permis, lors de la correction, de préciser les caractères propres de chaque valeur centrale, et d'aborder le problème de la dispersion d'une série statistique ; ce problème a d'ailleurs été plusieurs fois rencontré ; il sera naturel de l'étudier en classe de première.

Exercice II : "Construire un histogramme illustrant le document : prix des réparations des motos de moins de 50 cm^3."

Observations : La notion d'histogramme a nécessité une mise au point ; comme nous le prévoyions, peu d'élèves, hormis ceux qui avaient déjà manipulé cette technique lors du travail de groupe, ont répondu correctement. Certains n'ont même pas tenu compte des amplitudes des divers intervalles lors du report en abscisses des montants des réparations.

2 Un devoir sur un des thèmes suivants, au choix :
"Les filles et la moto, au lycée" - "La section B et la moto, au lycée" - "Acheter une moto, l'utiliser et l'entretenir, combien ça coûte ?"

Observations

* les techniques les plus utilisées ont été : diagrammes à bâtons et à vecteurs ; calculs de pourcentages et de moyennes ;

* pour beaucoup, les commentaires ont été assez réduits ; certains ont cependant formulé des hypothèses pour tenter d'expliquer les phénomènes observés ;

* quelques-uns, mais assez peu, ont eu l'idée d'étudier la spécifité de la population observée par comparaison (par exemple, pour "les filles et la moto", de comparer systématiquement les comportements filles-garçons).

Ces réactions montrent la difficulté de la phase d'interprétation, à laquelle les élèves n'accordent pas toujours une grande importance : pour beaucoup, les divers graphiques et calculs constituent, autant ou plus qu'un moyen d'analyse, le but principal de l'étude.

2 *Sur le contenu mathématique*

• Les notions prévues par le programme sont "passées" assez naturellement, sauf celle de fréquence, qui a paru artificielle, les élèves préférant parler de pourcentages, peut-être parce qu'ils leur paraissent plus concrets ("ramenons la population à 100") et aussi par manque de familiarité avec les nombres décimaux compris entre 0 et 1.

• Diverses rubriques du programme ont pu être abordées. En particulier :

* calculs numériques ; opérations dans **R** ; valeurs approchées ; chiffres significatifs ;
* utilisation de calculatrices ;
* représentations graphiques : tracé d'une courbe par points ; lecture d'un graphique ;
* secteurs angulaires ; mesure d'un secteur angulaire.

• Il reste que d'importantes difficultés ont été rencontrées touchant à la proportionnalité. Il semble que, par la pratique, la plupart des élèves parviennent à calculer et à interpréter un pourcentage ; quelques-uns ont compris la méthode d'interpolation linéaire.

3 *Sur l'apport de l'interdisciplinarité*

• ***pour les élèves*** : lien entre les diverses disciplines ; ajustement des vocabulaires utilisés ; mise en évidence du rôle "outil" des mathématiques.

• ***pour les professeurs*** :

* intérêt de points de vue différents : sur les élèves, sur le contenu
* possibilité de disposer d'un observateur : moyen d'apprécier la qualité de l'attention, de la participation de tel élève ou groupe d'élèves, et aussi l'impact réel du travail du professeur animateur
* utilisation complémentaire des "compétences" respectives.

Exemple :
validité des méthodes de calcul
ou de représentation graphique → professeur de mathématiques
commentaire et interprétation des résultats → professeur de SES

* possibilité d'une meilleure utilisation du temps : les notions de statistiques qui interviennent en SES et en mathématiques sont vues ici une seule fois.

• ***Pour le professeur de SES*** : apport d'une "caution" mathématique.

• ***Pour le professeur de mathématiques*** :

* motivation concrète pour les élèves, pour des activités mathématiques
* découverte des besoins d'un "utilisateur" de mathématiques.

En conclusion : Ces travaux montrent l'intérêt et les limites des activités du type "débroussaillage" : elles permettent une réflexion et une prise en charge du travail, pour chaque élève, mais elles doivent être accompagnées ou suivies de contrôles et de mises au point. Jusqu'ici nous nous sommes volontairement gardés de toute formalisation, malgré la demande de quelques élèves ("Pourriez-vous nous faire un cours ?"). Sur certains points, le besoin de cette formalisation se fait maintenant sentir (en particulier pour justifier les méthodes de calcul des moyennes pondérées) : elle sera, je crois, indispensable en classe de première.

Une remarque, pour finir : L'interdisciplinarité a pu jouer ici son rôle grâce aux moyens qui nous ont été accordés, et qui ont permis de dédoubler ou d'assouplir la structure de la classe, et aussi d'alléger le travail des professeurs (temps de présence accru, concertation, présence commune...). Ces conditions ne seront probablement pas remplies lorsque le programme entrera effectivement en vigueur. Pourtant cette expérience nous a convaincu que, au moins en ce qui concerne les statistiques, la collaboration interdisciplinaire est très profitable.

Annexe I

QUESTIONNAIRE

Classe *Date de naissance* *Etes-vous G ou F ?*
G ☐ F ☐

- Est-ce que la moto peut être d'après vous considérée comme un sport ?
  oui ☐ non ☐ ne se prononce pas ☐
- Est-ce que la moto peut être d'après vous considérée comme un moyen de transport dangereux ?
  oui ☐ non ☐ ne se prononce pas ☐
- Aimeriez-vous pratiquer la compétition si vous en aviez les moyens financiers ?
  oui ☐ non ☐ ne se prononce pas ☐
- Avez-vous une moto ? oui ☐ non ☐

Si oui, continuez le questionnaire.

Si non, aimeriez-vous en avoir une ? oui ☐ non ☐

- Comment avez-vous financé cet achat ? (cocher plusieurs cases si nécessaire). *N° de case par ordre de préférence.*

argent des parents	économie, argent de poche...	salaire d'un travail saisonnier	autres moyens (préciser)

• Moto achetée neuve ou d'occasion ? marque ? prix ?

prix / qualités	moins de 1500	entre 1500 et 3000	entre 3000 et 4000	entre 4000 et 5000	entre 5000 et 7000	plus de 7000
neuve						
occasion						

grandes marques / cylindrée	Peugeot	Moto-bécane	Piaggo	Honda	Yamaha	Suzuki	Kawa-saki	autres
moins de 50								
50 à 80 (80 non compris)								
80 à 125 (125 non compris)								
125 à 500 (500 non compris)								
plus de 500								

• Dans quel but principal l'avez-vous achetée ?

transport scolaire	indépendance vis-à-vis des parents	loisir	compétition	d'imiter des camarades	autres

• Vos parents vous laissent-ils libres de sortir avec cette moto ?

très peu	un peu	beaucoup	totalement

• Réparez-vous vous-même votre moto ?
jamais ☐ quelquefois ☐ toujours ☐

• Etes-vous d'accord avec les interdictions imposées par la loi ?

non	un peu	totalement

• Date d'achat (approximative) année mois

année	mois

• Quels sont vos frais annuels d'assurances ?

moins de 200F	entre 200 et 300F	entre 300 et 700F	entre 700 et 1000F	plus de 1000F	ne sait pas

• Quels sont vos frais de réparation et d'entretien pour un an ? (si vous avez une moto depuis plus d'un an)

moins de 200 F	entre 200 et 500 F	entre 500 et 1000 F	plus de 1000 F	ne sait pas

• Quel est le kilométrage de votre moto ? ne sait pas

	ne sait pas

Annexe II

EVOLUTION DU PRIX D'ACHAT DES MOTOS NEUVES

Tableau final

prix	moins de 1500					1500 à 3000					3000 à 4000					4000 à 5000				
année d'achat / cylindrée	av 77	77	78	79	80	av 77	77	78	79	80	av 77	77	78	79	80	av 77	77	78	79	80
moins de 50	7	3	5	6	3	12	6	26	44	19	1	1	2	6	10	0	0	1	1	1
50 à 80	2	1	0	0	0	0	2	1	2	3	0	1	3	1	3	1	0	0	3	2
80 à 125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
125 à 500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
plus de 500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL																				

prix	5000 à 7000					plus de 7000					TOTAL				
année d'achat / cylindrée	av 77	77	78	79	80	av 77	77	78	79	80	av 77	77	78	79	80
moins de 50	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	20	10	34	58	34
50 à 80	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	3	4	4	8	10
80 à 125	0	0	0	2	1	0	0	1	0	1	0	0	1	3	6
125 à 500	0	0	5	7	8	0	0	0	0	1	0	0	6	8	9
plus de 500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
TOTAL															

Prix moyen

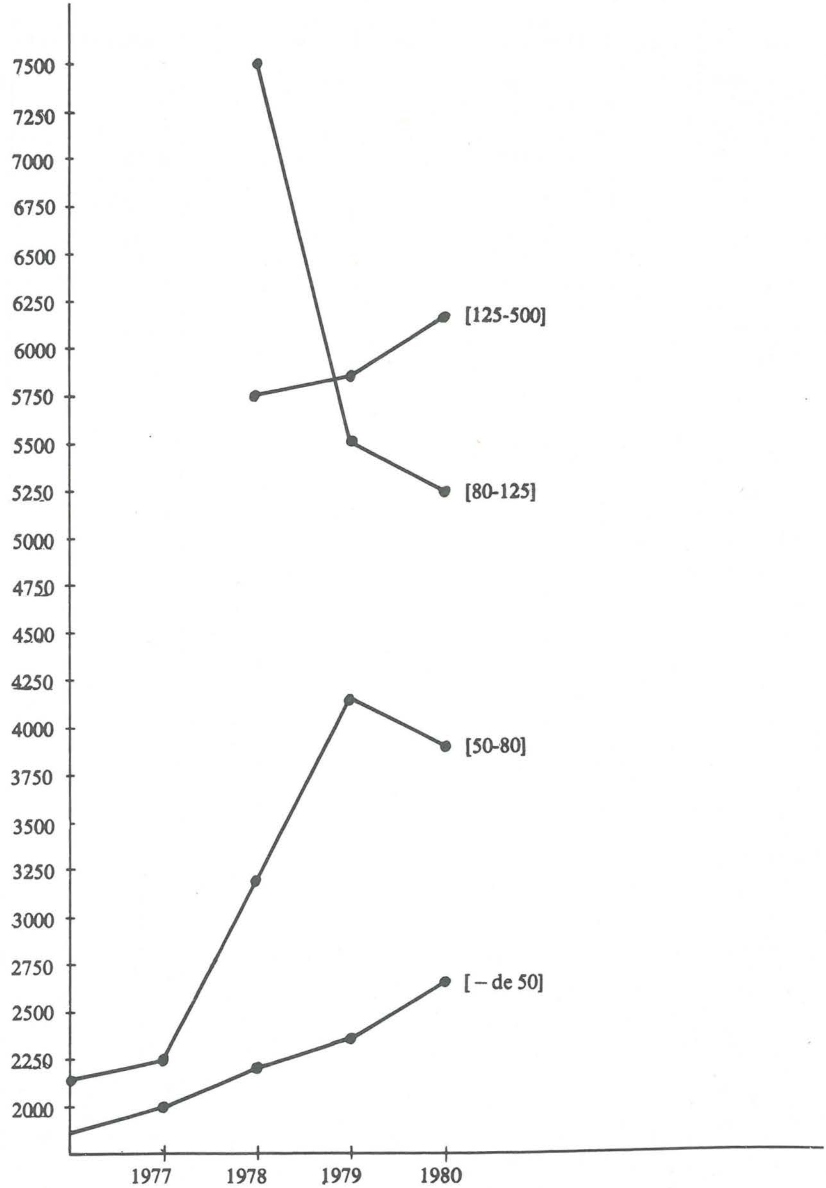
année / cylindrée	avant 1977	1977	1978	1979	1980
moins de 50	1875	2000	2206	2353	2684
50 à 80	2167	2250	3188	4188	3825
80 à 125	0	0	7500	5500	5250
125 à 500	0	0	5750	5813	6167
plus de 500	0	0	0	0	7500
toutes motos	2021	2125	4661	4463	5085

dernière ligne erronée, corrigée en classe

Annexe III

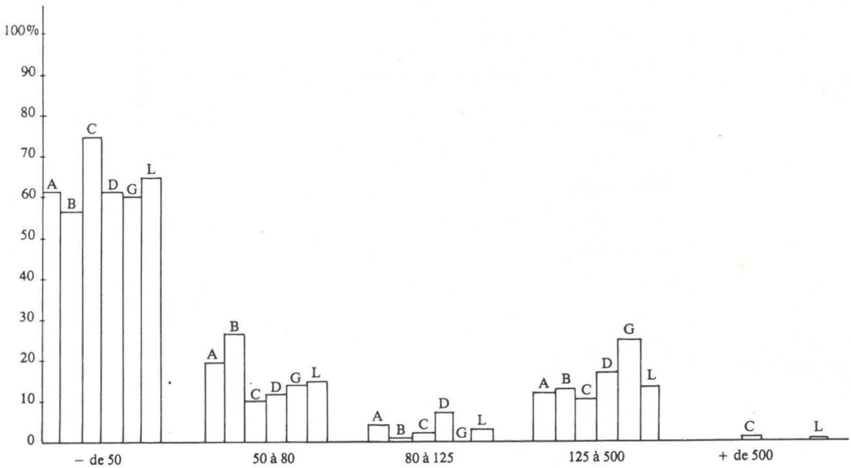
ÉVOLUTION DU PRIX D'ACHAT DES MOTOS NEUVES

Courbes des prix moyens par cm^3

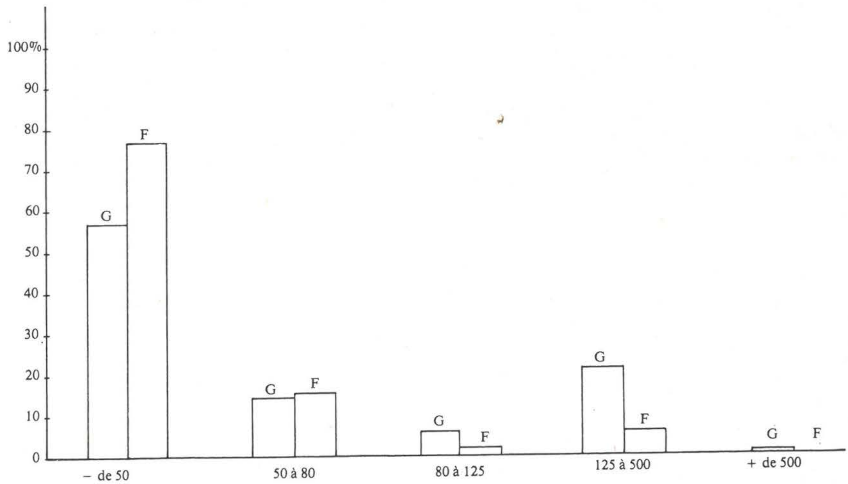


Annexe IV

CYLINDRÉE



Lycée - section - cylindrée en %



Cylindrée - Sexe

Annexe V

PRIX D'ACHAT

Prix d'achat	Filles		Garçons		A		B	
	effect	%	effect	%	effect	%	effect	%
moins de 1500	41	25,8	29	18,2	15	30,6	12	17,1
1500 à 3000	83	52,2	63	39,6	26	53	26	37,1
3000 à 4000	22	13,8	26	16,3	2	4	20	28,5
4000 à 5000	8	4,9	18	11,3	5	10,2	6	8,5
5000 à 7000	4	2,5	22	13,8	1	2	6	8,5
plus de 7000	1	0,6	1	0,6	—	—	—	—
TOTAL	159	100	159	100	49	100	70	100
prix moyen								
prix médian								

rempli par chaque élève

Prix d'achat	C		D		G		Lycée	
	effect	%	effect	%	effect	%	effect	%
moins de 1500	28	23,1	13	22	2	10,5	70	22
1500 à 3000	56	46,2	29	49,1	9	47,4	146	46
3000 à 4000	15	12,3	8	13,6	3	15,8	48	15
4000 à 5000	10	8,2	3	5	2	10,5	26	8,2
5000 à 7000	10	8,2	6	10,2	3	15,8	26	8,2
plus de 7000	2	1,6	—	—	—	—	2	0,6
TOTAL	121	100	59	100	19	100	318	100
prix moyen								
prix médian								

rempli par chaque élève

6

UTILISATION DE CALCULATRICES PROGRAMMABLES

Notre lycée polyvalent est équipé depuis quatre ans d'une douzaine de calculatrices programmables. Nous les utilisons particulièrement en Travaux Dirigés de Seconde, C et T.

Nous tenons à ce que les élèves ne perçoivent pas ces machines comme un nouvel avatar de la magie. Mais qu'au contraire, grâce à une initiation progressive, ils parviennent à une réelle compréhension de leur mode de fonctionnement, et aussi à une attitude active, inventive, face à un instrument qui peut facilement intimider le débutant. Ce n'est qu'exceptionnellement que nous fournissons un programme tout fait, utilitaire. A ce propos, ceux qui sont indiqués dans les notices de fabricant sont, en général, mal adaptés et surtout peu formateurs (1).

I. Etape "calculatrice"

Il nous paraît nécessaire de passer du temps (au moins 2 h) sur cette étape, dans deux buts :

— se familiariser avec l'usage de la machine

— revoir sous un autre éclairage des notions fondamentales de calcul.

I.1 - Sur les nombres

— notation scientifique, utilisant les puissances de 10 ;

— principe de l'arrondi pour la dernière décimale : par exemple affichage de $\frac{2}{3}$;

— priorité (éventuelle) à la multiplication et à la division par rapport à l'addition et à la soustraction ; calculs en chaîne ;

— utilisation des mémoires ;

— moyens de calculer les puissances 3^e, 4^e... d'un nombre éventuellement négatif. Par exemple : $\times\ x^2$; x^2x^2 ; $\times\ x^2x^2$...

(1) Il n'est pas nécessaire que chaque élève possède une calculatrice programmable. Mais, si l'objectif est d'apprendre aux élèves à programmer, une calculatrice pour deux élèves est indispensable.

Sur les nombres, deux prises de conscience nous paraissent nécessaires :

— on peut aussi se tromper en calculant avec une machine, même si, le plus souvent, l'erreur provient de l'opérateur. Il faut donc contrôler l'*ordre de grandeur* du résultat ;

— la calculatrice, le plus souvent, n'affiche que des *valeurs approchées*, et même ne "connaît" que des valeurs approchées, éventuellement plus précises que les précédentes (souvent, deux décimales supplémentaires). Par exemple, calcul de $(\sqrt{2} - 1{,}414) \times 10^4$.

I.2 - Sur les fonctions

— inventaire des fonctions disponibles (et connues des élèves), y compris le "passage à l'opposé", touche distincte du signe – opératoire ;

— à la différence des opérations, on entre un seul nombre, qui est aussitôt remplacé par son image ;

— ensembles de définition : par exemple, essais de calcul de $\sqrt{-2}$, $\frac{1}{0}$;

— composition des fonctions : il suffit d'appuyer successivement sur les deux touches ! Par exemple $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{|x|}$, $(\sin x)^2$, $\sin(x^2)$ ...;

— fonction réciproque d'une fonction.

II. Programmation

II.1 - Fonctions

a) *Sensibilisation*

On donne aux élèves une fonction simple, par exemple un polynome du second degré, à représenter par points. Les calculs sont vite fastidieux, surtout si on veut une courbe précise. On fournit alors le programme de cette fonction en expliquant, à ce propos, le rôle des touches correspondantes concernant : mode programme et mode calcul, instructions, adresses, compteur d'instruction, ordre d'arrêt ...

b) *A vous de jouer !*

Les élèves sont alors en mesure de programmer n'importe quelle fonction courante. Ils doivent, bien sûr, vérifier l'exactitude des résultats par plusieurs contrôles à la main. Cette phase nous paraît pédagogiquement très intéressante. Elle fait apparaître :

— la réalité d'une fonction, suite bien définie d'instructions ;

— par contre, le caractère volatil de la fameuse variable (au début, il se trouve toujours des gens qui cherchent la touche x...). Intérêt d'une mise en mémoire pour utiliser le *même* nombre dans les calculs successifs.

Ces programmes sont surtout intéressants s'ils sont utilisés. Ce peut être (voir exemple détaillé en annexe) :

— pour une représentation graphique précise ;

— pour la résolution approchée, mais néanmoins précise, d'une équation mise sous la forme $f(x)=0$, l'existence des racines étant admise à partir du graphique ;

— pour la confirmation du sens de variation, et spécialement la recherche d'un maximum ou d'un minimum.

Les tâtonnements correspondants nous paraissent très formateurs. Les élèves sont amenés à organiser leurs essais pour en limiter le nombre. Ils retrouvent parfois empiriquement des méthodes telles que l'interpolation linéaire. Le plus souvent, bien incapables d'expliquer leur démarche, ils avancent pourtant vite vers l'objectif fixé... parfois plus vite que leur professeur...

II.2 - Suites

a) *Suites récurrentes*

Quand une fonction est programmée, il arrive que des élèves, au lieu d'introduire arbitrairement une nouvelle valeur de la variable, utilisent l'image qui vient d'être calculée : ils réinventent par là la notion de suite récurrente.

Il est facile et "payant" de programmer une suite récurrente, par exemple : $U_{n+1}=\dfrac{1}{1+U_n}$, en prévoyant à chaque tour, soit un arrêt bref, soit un relancement par l'opérateur.

b) *Suites additives (séries)*

Soit par exemple à faire calculer $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$. Plutôt que de vouloir économiser une mémoire par un stratagème, il paraît plus parlant d'en utiliser deux :

— une pour la valeur de n , que l'on augmente de 1 à chaque tour,

— une pour la valeur de S_n, que l'on augmente de $\dfrac{1}{n}$ à chaque tour.

c) *Limites*

Pas besoin d'un cours pour que les élèves se demandent, sur une suite donnée, "ce qui va se passer à la fin".

— Dans le premier exemple indiqué, un graphique montre que l'on oscille autour d'une "valeur limite" dont on a des encadrements successifs de plus en plus précis. A l'étonnement général, cette valeur ne paraît pas dépendre du terme initial U_0 choisi.

— Dans le second, toutes les hypothèses sont permises. En tout cas, ce n'est pas la machine qui "démontrera" la convergence même si, après quelques années d'effort, son affichage reste constant...

— Voici un troisième exemple, lui aussi vécu en classe, et concernant une suite géométrique. Si la population mondiale continue à croître comme entre 1970 et 1980, le coefficient multiplicateur en n années est $(1{,}019)^n$. Avec la calculatrice, on peut vite savoir, dans l'hypothèse indiquée, non seulement combien nous serons en l'an 2000 ou 2100, mais aussi dans combien de temps nous serons deux fois plus nombreux, cent fois plus nombreux... Ce type d'exemple paraît plus motivant que d'étudier le comportement de $2x$ ou de x^2 pour x grand.

II.3 - Tests

On franchit une nouvelle étape avec l'utilisation d'un test. Il suffit de prévoir une question à réponse binaire et la suite à donner dans les deux cas de réponse. Lors de l'exécution, la machine prend d'elle-même le bon aiguillage. Voici trois cas où nous l'avons utilisé avec succès.

a) *Fonction définie par intervalles*

Soit par exemple f définie par :
— si $x<2$, $f(x)=2x-1$
— sinon $f(x)=x^2-4$.

La programmation d'une telle fonction fait apparaître au moins deux points :
— il n'y a qu'une application de **R** dans **R**
— il est plus facile de tracer sa représentation graphique au voisinage de 2 et l'idée de limite apparaît naturellement.

b) *Un exemple de suite entière*

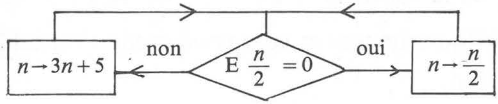
Soit l'application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par :

— si n est pair, $f(n)=\frac{n}{2}$

— sinon $f(n)=3n+5$

et la suite récurrente : $U_{n+1}=f(U_n)$ (bien sûr, elle n'est pas présentée ainsi aux élèves !). Par groupes, les élèves cherchent "ce qui se passe" en partant de petits nombres, et voient apparaître des cycles. Mais pour de plus grands ?

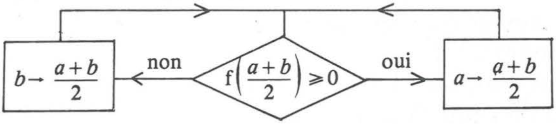
Pour programmer cette suite, il faut une touche "partie entière". Voici un organigramme (une mémoire suffit).



c) *Résolution d'équation par dichotomie*

Soit une "bonne" fonction f qui paraît croissante dans $[a,b]$, et telle que $f(a)<0$; $f(b)>0$. On a tout lieu de penser que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[a,b]$ une solution unique.

C'est à la portée d'un élève de Seconde muni d'une calculatrice programmable d'en trouver une valeur approchée, à la précision de cet instrument. Il suffit de tester le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et de remplacer alors, soit a , soit b , par $\frac{a+b}{2}$ (pour plus de précision, voir annexe).



Dans ces activités, nous limitons nos ambitions. Nous ne cherchons ni à exploiter toutes les possibilités de la machine, ni à optimiser les programmes, en cherchant systématiquement à réduire le nombre d'instructions ou de mémoires. Quand un élève a fait son programme, le plus important, c'est qu'il fonctionne.

Et s'il ne fonctionne pas, il faut arriver à voir pourquoi, et à le montrer à son auteur. Cela suppose pour le professeur un minimum de familiarité avec l'instrument et sans doute un certain nombre d'heures en tête à tête avec lui. Effort largement payé par la satisfaction de ne plus être, dans la classe, celui qui apporte tout, théorèmes, questions et réponses, mais un simple médiateur qui propose, écoute, dialogue.

Enfin, ces jeunes à qui on aura donné le temps d'approcher progressivement ce monde de l'informatique, qui auront constaté que ce n'est pas l'ordinateur qui choisit, peut-être seront-ils plus difficiles à berner par certains discours de la publicité ou du pouvoir...

Annexe

Etude de la fonction f : $x \mapsto -4x^2+3x+3$ sur TI57

1) Calcul de quelques images et commencement d'un tableau de valeurs.

2) Programmation

a) LRN (passage en mode programme)

b)

Instructions	*Commentaires*
STO 1	la variable x est recopiée dans la m é m o i r e 1
$x^2 \times 4 +/-$	$x^2 \times (-4) = -4x^2$
$+$ RCL 1	retour de x
$\times 3 + 3 =$	calcul de f(x)
R/S	ordre d'arrêt pour lecture
RST	mise à 0 du compteur d'instructions

c) LRN (retour au mode calcul). RST (inutile semble-t-il sur les derniers modèles)

d) exécutions du programme
- frappe d'une valeur (pour la variable)
- R/S

autant de fois que l'on veut.

3) Tableau de valeurs et tracé précis d'une représentation graphique

Ce tracé amène deux questions :
— maximum de f
— intersections avec l'axe des abscisses.

4) Résolution de l'équation f(x) = 0 .

Approche progressive, en quatre étapes:

a) Le graphique fait apparaître deux solutions probables α et β avec

$$1 < \alpha < 2 \qquad \text{et} \qquad -1 < \beta < 0 .$$

b) On cherche à préciser ces valeurs, par tâtonnement. Beaucoup d'élèves se montrent fort habiles dans cette recherche; par exemple, l'un a obtenu sept décimales justes en une dizaine de minutes.

c) On peut systématiser les essais, et les faire effectuer par la machine, selon l'organigramme indiqué ci-dessus.

On cherche des encadrements de α :

$$a < \alpha < b$$

* Choix des mémoires

numéro	1	2	3
contenu	a	b	$\frac{a+b}{2} = c$

Initialisation des mémoires : 1 STO 1 , 2 STO 2 .

Programme (après LRN).	*Commentaires*
RCL 1 + RCL 2 = : 2 =	Calcul de $c = \frac{a+b}{2}$
R/S STO3 (ou : Pause)	Affichage de c et mise dans M3
$x^2 \times 4 +/- +$ RCL 3 $\times 3 + 3 =$	Calcul de f(c)
$x \geqslant t$	A-t-on : f(c) $\geqslant$ 0 ?
GTO 1	Si oui, aller à LBL 1
RCL 3 STO2 RST	Si non, mettre c dans M1 et boucler
LBL 1 RCL 3 STO 1 RST	Si oui, mettre c dans M2 et boucler.

* Exécution : LRN (RST) R/S R/S R/S ...

En moins de deux minutes on obtient sept décimales invariantes. On peut être certain de l'encadrement de α en faisant sortir alors les contenus des mémoires 1 et 2.

Les élèves suivent fort bien le déroulement des opérations. Voici les premiers états des mémoires 1, 2, 3 :

1	2	3
1	2	1,5
1	1,5	1,25
1,25	1,5	1,375
1,25	1,375	1,3125
....	....	....

Le même programme peut servir à rechercher β.
Il suffit de changer l'initialisation : $a = 0$
$b = -1$

d) Résolution mathématique

Par la classique transformation du polynome du second degré on parvient aux racines :

$$x' = \frac{3 + \sqrt{57}}{8} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{3 - \sqrt{57}}{8} .$$

On reconnaît : $\alpha = x'$ et $\beta = x''$.

5) *Recherche du maximum*

a) Le graphique fait apparaître un tableau de variations du type :

x		γ	
f(x)	$\nearrow$		$\searrow$

avec $\gamma \simeq 0,5$.

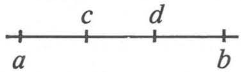
b) On cherche à préciser γ, par tâtonnement. C'est plus délicat que pour α et β, puisque, à chaque étape, il faut considérer non plus deux, mais *trois* valeurs. Par exemple les inégalités : $f(0,3) < f(0,4)$ et $f(0,4) > f(0,5)$ prouvent seulement : $0,3 < \gamma < 0,5$. Là encore, beaucoup d'élèves se montrent efficaces (pas nécessairement ceux qui font de "bons devoirs"), et parviennent assez vite à : $\gamma \simeq 0,375$. Ils sont troublés de constater que $f(x)$ ne semble pas varier quand x varie de 10^{-4} autour de γ. La fonction serait-elle constante sur un petit intervalle ?

c) La justification mathématique du sens de variation et de la valeur de γ, ainsi que la réponse à la question précédente, s'obtiennent assez aisément à l'aide du taux de variation.

d) Il est possible de faire effectuer le tâtonnement par la calculatrice, par exemple selon l'organigramme suivant :

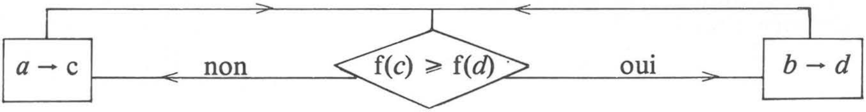
Soit un encadrement $a < \gamma < b$.

On fait comparer les images de c et d :



$$c = \frac{2a+b}{3} \; ; \; d = \frac{a+2b}{3}$$

(on peut trouver ces écritures à l'aide du barycentre)



Il faut donc quatre mémoires.

Mais la programmation de ce processus paraît difficile pour un élève de Seconde.

7

ÇA ALORS... SUITE

OBJECTIFS

- A partir d'une situation dynamique faire appréhender les concepts de suite récurrente et suite convergente
- Susciter le comportement de recherche devant un fait mathématique
- Affiner les moyens d'expression, codage, tableaux, arbre.
- Utiliser une calculatrice programmable.

"Vous n'avez besoin que d'un crayon, d'une feuille de papier et de curiosité.

Vous prenez un nombre de 4 chiffres non tous identiques".

6808 convient, 8888 ne convient pas.

1) On forme avec les chiffres du nombre choisi, placés dans l'ordre décroissant, un nouveau nombre :

8860

2) Avec les mêmes chiffres, placés dans l'ordre croissant des nombres qu'ils représentent, on forme un nouveau nombre :

0688

3) On retranche le second nombre du premier :

$$8860 - 0688 = 8172$$

4) Avec 8172, on reprend la même procédure.

Résumons

$$\begin{array}{r} 8860 \\ -\,0688 \\ \hline 8172 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 8721 \\ -\,1278 \\ \hline 7443 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 7443 \\ -\,3447 \\ \hline 3996 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 9963 \\ -\,3699 \\ \hline 6264 \end{array}$$

— "A vous de jouer maintenant. Choisissez un nombre (si possible différent de 6808). Faites les calculs".

— "Jusqu'où Monsieur" ? — "Combien de soustractions, Monsieur ?".

— "Ne vous préoccupez pas de cela, faites les calculs !"

— "Qu'est-ce que c'est que ça ? je trouve toujours 6174".

— "Ça alors, moi aussi, et pourtant on n'est pas parti du même nombre"...

— "Vous venez d'obtenir des suites de nombres".

Ainsi

$$6808 \longrightarrow 8172 \longrightarrow 7443 \longrightarrow 3996 \longrightarrow 6264 \longrightarrow 4176 \longrightarrow 6174$$

Ces nombres sont les termes d'une suite. Chacun d'eux a un rang qui dépend du rang de celui qui le précède. Par exemple on adopte souvent la notation suivante :

$u_0 = 6808 \quad u_1 = 8172 \quad u_2 = 7443 \ldots\ldots \quad u_6 = 6174 \quad u_7 = 6174$ etc.

— "Au bout de combien de soustractions avez-vous obtenu 6174 ?"

— "3,2,6,4,13,1..."

— "Celui qui en a obtenu 13 a fait une erreur de calcul".

L'élève recompte et trouve effectivement son erreur.

Finalement personne ne trouve plus de sept soustractions, ce qui signifie que toutes ces suites ont au plus huit termes.

— "Vous constatez qu'à partir d'un certain rang, on trouve toujours 6174. On dit que la suite converge vers 6174".

Certains élèves sont intrigués par ces deux faits :
— la convergence vers 6174
— le nombre de termes différents, nombre qui semble être au plus huit.

Pour répondre à leurs questions, on peut procéder ainsi :

Soit le nombre $\left\{ \begin{array}{l} \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \\ a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \\ a \neq d \end{array} \right.$

On a : $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(a-d) + 90(b-c)$

Donc le calcul se fait facilement en considérant le couple $(a-d)$, $(b-c)$

8860 donne 8172, soit, en ordonnant, 8721.

Au couple (8,2) ; $8 = 8-0$; $2 = 8-6$, correspond le couple (7,5), $7 = 8-1$; $5 = 7-2$.

Posons $A = a-d$, $B = b-c$; on peut définir une fonction f :

$$\left| \begin{array}{ccc} [1,9] \times [0,9] & \longmapsto & [1,9] \times [0,9] \\ \left\{ \begin{array}{l} (A,B) \\ A \geqslant B \end{array} \right. & \longmapsto & (A',B') \end{array} \right.$$

Chaque case (A,B) du tableau 1 contient le *nombre* obtenu, en classant par ordre décroissant, les naturels représentés par les chiffres de $999A + 90B$ et le *couple* (A',B') correspondant. La construction de ce tableau est facilitée si on utilise une calculatrice programmable dans laquelle on programme la fonction : $(A,B) \longmapsto 999A + 90B$.

Avec une TI 58 ou une TI 59, on obtient le programme (P) où l'on rentre les valeurs de la variable A en A et celles de la variable B en B.

```
        LRN
000  76 LBL
001  11  A
002  42 STO
003  00  00
004  91 R/S
005  76 LBL
006  12  B
007  42 STO
008  01  01
009  09  9
010  09  9
011  09  9
012  65  ×
013  43 RCL
014  00  00
015  85  +
016  09  9
017  00  0
018  65  ×
019  43 RCL
020  01  01
021  95  =
022  91 R/S
```

Exemple :

pour 6808 , A=8 , B=2.

A la calculatrice on frappe 8,A,2,B ; elle donne 8172.

Au couple (8,2) correspond donc le couple (7,5)

TABLEAU 1

B \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	(9,0) 9990	(8,1) 9981	(7,2) 9972	(6,3) 9963	(5,4) 9954	(5,4) 9954	(6,3) 9963	(7,2) 9972	(8,1) 9981
1	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810
2	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
3	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
4	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
5	(8,0) 9441	(6,0) 8442	(4,0) 7443	(2,0) 6444	(1,1) 5544	(2,0) 6444	(4,0) 7443	(6,0) 8442	(8,0) 9441
6	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
7	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
8	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
9	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810

On notera, dans le tableau(1), les "symétries" intéressantes, les axes de symétrie étant matérialisés par des lignes en pointillé.

On peut dès lors réduire le tableau(1) aux tableaux 2 et 3.

Tableau 2

B \ A	1	2 9	3 8	4 7	5 6
0	(9,0)	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)

Tableau 3

B \ A	1 9	2 8	3 7	4 6	5
1 9	(9,7)	(8,6)	(8,4)	(8,2)	(8,0)
2 8	(8,6)	(7,5)	(6,4)	(6,2)	(6,0)
3 7	(8,4)	(6,4)	(5,3)	(4,2)	(4,0)
4 6	(8,2)	(6,2)	(4,2)	(3,1)	(2,0)
5	(8,0)	(6,0)	(4,0)	(2,0)	(1,1)

A l'aide de ces deux tableaux, on peut construire un arbre montrant qu'un cheminement de couple en couple conduit inexorablement au couple (6,2). Cela établit la convergence de la suite et le fait que chaque suite a huit termes au plus.

Voici une petite partie de l'arbre :

(6,2) — (4,2) — (6,3) — (4,0) — (5,3) — (3,3)
(6,2) — (4,2) — (6,3) — (4,0) — (5,3) — (7,3)
(6,2) — (4,2) — (6,3) — (4,0) — (5,3) — (7,7)
(6,2) — (6,8)
(6,2) — (8,4) — (7,1)
(6,2) — (8,6) — (8,1) — (2,0) — (5,4) — (6,0) — (8,5)

```
          LRN
000   76  LBL
001   11   A
002   42  STO
003   00   00
004   91  R/S
005   76  LBL
006   12   B
007   42  STO
008   01   01
009   09   9
010   09   9
011   09   9
012   65   ×
013   43  RCL
014   00   00
015   85   +
016   09   9
017   00   0
018   65   ×
019   43  RCL
020   01   01
021   95   =
022   91  R/S
```

Exemple :

pour 6808 , A = 8 , B = 2.

A la calculatrice on frappe 8,A,2,B ; elle donne 8172.

Au couple (8,2) correspond donc le couple (7,5)

TABLEAU 1

B \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	(9,0) 9990	(8,1) 9981	(7,2) 9972	(6,3) 9963	(5,4) 9954	(5,4) 9954	(6,3) 9963	(7,2) 9972	(8,1) 9981
1	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810
2	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
3	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
4	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
5	(8,0) 9441	(6,0) 8442	(4,0) 7443	(2,0) 6444	(1,1) 5544	(2,0) 6444	(4,0) 7443	(6,0) 8442	(8,0) 9441
6	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
7	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
8	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
9	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810

On notera, dans le tableau (1), les "symétries" intéressantes, les axes de symétrie étant matérialisés par des lignes en pointillé.

On peut dès lors réduire le tableau(1) aux tableaux 2 et 3.

Tableau 2

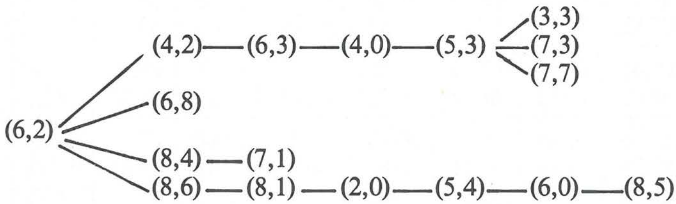
A B	1	2 9	3 8	4 7	5 6
0	(9,0)	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)

Tableau 3

A B	1 9	2 8	3 7	4 6	5
1 9	(9,7)	(8,6)	(8,4)	(8,2)	(8,0)
2 8	(8,6)	(7,5)	(6,4)	(6,2)	(6,0)
3 7	(8,4)	(6,4)	(5,3)	(4,2)	(4,0)
4 6	(8,2)	(6,2)	(4,2)	(3,1)	(2,0)
5	(8,0)	(6,0)	(4,0)	(2,0)	(1,1)

A l'aide de ces deux tableaux, on peut construire un arbre montrant qu'un cheminement de couple en couple conduit inexorablement au couple (6,2). Cela établit la convergence de la suite et le fait que chaque suite a huit termes au plus.

Voici une petite partie de l'arbre :



8

ACTIVITES NUMERIQUES : UNE SUITE A RECURRENCE LINEAIRE

OBJECTIFS : Le but de cette étude est de :

— faire manipuler les élèves avec une suite de nombres ;
— de les sensibiliser à un algorithme ;
— de leur faire découvrir pas à pas un langage adapté aux suites ;
— de leur faire utiliser une calculatrice ;
— d'utiliser un graphique lié à une activité numérique.

Prérequis

- calculs dans l'ensemble des décimaux, ou des rationnels.
- relation d'ordre $\leqslant$ et propriétés.
- représentation graphique d'une fonction affine.

Bibliographie :

Bulletin A.P.M. n° 308 - Avril 1977. Article de M. Glaymann. *Initiation aux méthodes itératives et utilisation de calculateurs avec des enfants.*

Plan :

- Document élève.
- Commentaires sur le document élève.
- Quelques remarques d'élèves.
- Programmes.

Document élève.

Suite de nombres

1. Calcul

Ecrire sous forme décimale les nombres définis ci-dessous :

$$\begin{array}{lll}
u_1 = 2 & & \\
u_2 = 0{,}5 \times u_1 + 3 & & u_2 = 4 \\
u_3 = 0{,}5 \times u_2 + 3 & & u_3 = 5 \\
u_4 = 0{,}5 \times u_3 + 3 & & u_4 = \\
u_5 = 0{,}5 \times \ldots & & \ldots\ldots
\end{array}$$

i	u_i	$u_{i+1} - u_i$
1	2	
2	4	2
3	5	1
4	—	—

2. Faire un programme de calcul de cette suite de nombres

Remplir le tableau ci-contre (1ère et 2ème colonne) jusqu'au vingtième au moins. Indiquer par un astérisque si c'est une valeur approchée.

3. Observer les nombres obtenus

Que peut-on dire ? Ecrire toutes les idées que vous suggère ce tableau de nombres.

4. Comment organiser les idées

4.1. Comparer les nombres u_1, u_2, u_3, ...

4.2. Interprétation géométrique :
Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $(O, \vec{i})$ désigne l'axe des abscisses, $(O, \vec{j})$ l'axe des ordonnées.

Tracer l'ensemble D des points M $(x ; 0{,}5x+3)$ (x réel). Tracer l'ensemble $\triangle$ des points N de coordonnées $(x ; x)$; (x réel).
Puis placer les points $I_1(u_1 ; O)$; $M_1(u_1 ; 0{,}5u_1+3)$
$N_2(u_2 ; u_2)$; $I_2(u_2 ; 0)$
$M_2(u_2 ; 0{,}5u_2+3)$; $N_3(u_3 ; u_3)$... ainsi de suite.
S'il y a d'autres remarques, les noter.

4.3. Calculer u_2-u_1 ; u_3-u_2 ; u_4-u_3 ; ... ; $u_{i+1}-u_i$,...
(Remplir la 3ème colonne du tableau).
Peut-on en déduire que, pour tout entier i non nul, $u_i<u_{i+1}$?

4.4. A partir de quel entier k a-t-on : $|u_{k+1}-u_k|<10^{-3}$? Même question pour : $|u_{k+1}-u_k|<10^{-4}$...

4.5. Comment peut-on choisir l'entier j pour que l'on ait : $|u_j-6|<10^{-7}$? Démontrer que, pour tout entier n non nul, si $n>j$ alors $|u_n-6|<10^{-7}$.

5. D'autres exemples.... généralisation

5.1. Reprendre l'étude précédente en changeant la valeur initiale

$u_1 = 1{,}5$	$u_2 = 0{,}5\times u_1+3$...	$u_k = 0{,}5\times u_{k-1}+3$
$u_1 = 8$	$u_2 = 0{,}5\times u_1+3$...	$u_n = 0{,}5u_{n-1}+3$
$u_1 = 6$	$u_2 = 0{,}5\times u_1+3$...	$u_{i+1} = 0{,}5\times u_i+3$

5.2. Reprendre l'étude précédente avec :

	$u_1 = 2$	$u_2 = 0{,}7u_1+4$	$u_3 = 0{,}7u_2+4$.....
5.3.	$u_1 = 2$	$u_2 = 1u_1+3$	$u_3 = 1u_2+3$.....
5.4.	$u_1 = 2$	$u_2 = 2u_1+3$	$u_3 = 2u_2+3$.....

5.5. $u_1 = 2$ $\qquad u_2 = -u_1+3 \qquad u_3 = -u_2+3$.....

5.6. $u_1 = 2$ $\qquad u_2 = -2u_1+3 \qquad u_3 = -2u_2+3$.....

.....d'une façon générale, u_1 est un nombre donné et les autres se calculent par la relation $u_{n+1} = au_n+b$, $n \in \mathbf{N}_*$; a et b sont deux nombres réels donnés.

Faire d'autres essais. Indiquer un classement possible des différents cas en choisissant une des propriétés mises en évidence (chaque fois qu'il est possible, faire une démonstration).

• **Commentaires sur le document élève**

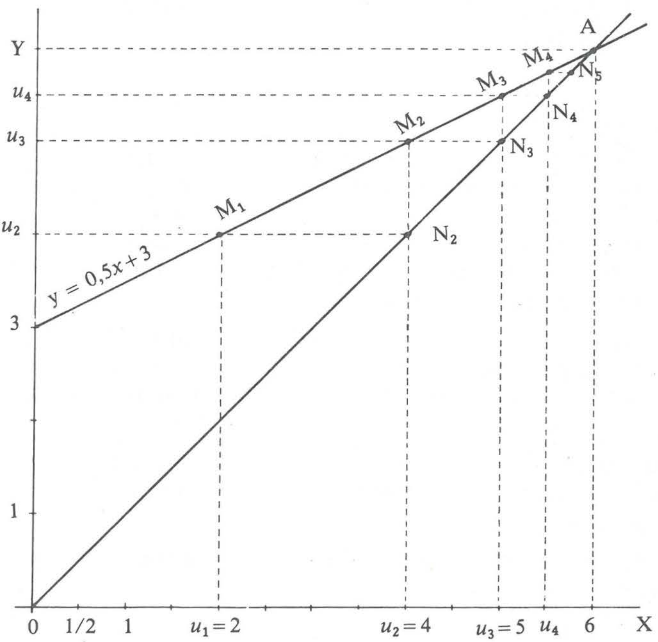
Les élèves sont amenés à faire beaucoup de calculs simples, d'où l'intérêt d'utiliser des calculatrices, afin que les objectifs mathématiques ne soient pas « noyés ».

f désigne la fonction définie par $f(x) = 0{,}5x+3$; $x \in \mathrm{R}$.

On peut utiliser des égalités du type $f(x)-f(y) = k.(x-y)$.
En effet : $u_i = f(u_{i-1})$; $u_{i+1}-u_i = f(u_i)-f(u_{i-1}) = 0{,}5\times(u_i-u_{i-1})$.
En posant $d_i = u_{i+1}-u_i$:

$u_3-U_2 = 0{,}5\times(u_2-u_1)$; $d_2 = 0{,}5d_1$; $d_3 = 0{,}5\times d_2 = (0{,}5)^2\times d_1$
$d_4 = 0{,}5\times d_3$; $d_4 = (0{,}5)^3\, d_1$... ; $d_i = (0{,}5)^{i-1}\, d_1$.

Le paragraphe 4.2. du document élève nous montre comment on peut mettre en évidence sur un graphique les nombres u_1, u_2, u_3..., puis les différences d_1, d_2, d_3... et la relation entre ces différences.



$d_1 = M_1N_2$
$d_2 = M_2N_3$
$d_3 = M_3N_4$
$d_4 = M_4N_5$

L'observation de la suite des nombres, puis du graphique, suggère à l'élève un certain nombre de propriétés.

- le signe de $u_{i+1} - u_i$ est le même que celui de $u_i - u_{i-1}$.
- le signe de $u_{i+1} - u_i$ est le même que celui de $u_2 - u_1$.
- la suite (u_i) est croissante.
- la différence entre deux termes consécutifs, à partir d'un certain rang, peut être aussi petite que désiré.
- c'est l'observation du tableau de nombres qui nous permet de suggérer un entier k tel que $|u_{k+1} - u_k| < 10^{-4}$ (ou encore $(0,5)^{k-1} \times 2 < 10^{-4}$)
- la suite converge vers 6.

Le tableau de nombres peut être complété par une quatrième colonne, celle des différences $u_i - 6$. On remarque que l'on peut utiliser des égalités du type : $f(x) - 6 = \frac{1}{2} . (x - 6)$.

En effet :

$$u_{i+1} = f(u_i) = 0,5u_i + 3 \ ;$$
$$u_{i+1} - 6 = 0,5u_i - 3 \quad u_{i+1} - 6 = 0,5 \times (u_i - 6)$$
$$u_2 - 6 = 0,5(u_i - 6) \ ; \ u_3 - 6 = 0,5 \times (u_2 - 6) = (0,5)^2(u_1 - 6)$$
$$u_{i+1} - 6 = 0,5^2.(u_{i-1} - 6) = (0,5)^i \times (u_1 - 6)$$

L'observation du tableau nous permet de proposer un entier j tel que :
$|u_j - 6| < 10^{-7}$ (ou encore $(0,5)^{i-1} . |u_1 - 6| < 10^{-7}$)

Un autre graphique peut être proposé aux élèves, en plaçant i en abscisse et u_i en ordonnée.

Quelques remarques d'élèves

- En observant les nombres obtenus, on voit que quand i croît, u_i croît également, mais plus i est important, moins la différence $(u_{i+1} - u_i)$ est importante. Ce tableau de nombres suggère une courbe qui est très inclinée pour des abscisses faibles mais qui finit par être presque parallèle à l'axe des abscisses quand celles-ci sont importantes. La fonction tend alors à devenir constante mais sans jamais atteindre 6.

- A partir du chiffre 6, les nombres d'indice pair se terminent par 875 et les nombres d'indice impair par 375. La calculatrice n'ayant que 9 chiffres après la virgule, u_i est une valeur approchée à partir du nombre 13. u_i tend vers 6 sans y parvenir.

- On constate qu'à partir de u_{11}, la fonction est constante. On constate également que la différence $u_{i+1} - u_i$ diminue de moins en moins rapidement pour finir par être nulle.

- J'ai une autre remarque : les ordonnées des points sont toujours supérieures aux abscisses.

• **Programmes**

Les différents programmes donnés ici sont ceux correspondant à l'utilisation d'une calculatrice programmable (TI 57 ou HP 33) ; il est facile d'adapter les instructions à toute autre calculatrice programmable, voire même à une calculatrice non programmable ; dans ce dernier cas, l'élève note des résultats intermédiaires et effectue lui-même les tests.

Il est certainement possible de proposer des programmes plus élégants. Ce sont pour la plupart d'entre eux des programmes d'élèves.

Programme de calcul des nombres de la suite (§2).

×	**Notice TI57**	↑	**Notice HP 33**
.	OFF ON	.	OFF ON
5	LRN introduire le prog LRN	5	en mode prgm introduire les
+	RST	×	instructions
3	introduire $u_i = 2$ frapper RS	3	en mode RUN. GT0 00
=		+	
2nd Pause	lire u_2, u_3...	fPause	introduire $u_i = 2$ frapper RS
RST	pour arrêter appuyer sur RS	GT0 01	lire u, u_2...
R/S			pour arrêter appuyer sur RS

Le programme précédent peut être complété pour obtenir les différences de termes consécutifs de la suite.

	Notice TI 57		**Notice HP 33**
+/−	OFF ON	CHS	OFF ON
ST0 1	1) LRN introduire	ST0 1	1) en mode PRGM :
+/−	le programme LRN	CHS	introduire le programme
×	2) RST	↑	2) en mode RUN. GT0 00
.	3) introduire $u_i = 2$	.	3) introduire $u_i = 2$
5	puis frapper R/S	5	frapper R/S
+	4) lire u_2, $u_2 - u_1$, u_3, $u_3 - u_2$,...	×	lire u_2, $u_2 - u_1$; u_3 ; $u_3 - u_3$....
3	5) pour un autre essai	3	pour arrêter, appuyer sur R/S
=	appuyer sur R/S puis	+	pour un autre essai
2nd Pause	reprendre au paragraphe 2	fPause	appuyer sur GT0 00 et
2nd Pause		fPause	reprendre au paragraphe 3
ST0 0		ST0 0	
SUM 1		ST0 + 1	
RCL 1		RCL 1	
2nd Pause		fPause	
2nd Pause		fPause	
2nd Pause		fPause	
RCL 0		GT0 01	
RST			
R/S			

Le paragraphe 4.4. du document-élève propose d'ajouter au programme un test d'arrêt.

	Notice TI 57		Notice HP 33
+/− ST0 1 +/− X 0 . 5 + 3 = 2nd Pause 2nd Pause ST00 SUM 1 *RCL1 2nd $\lvert x \rvert$ 2nd Pause 2nd Pause 2nd Pause 2nd INV x$\geqslant$t R/S RCL0 RST R/S	1) LRN introduire le programme LRN 2) RST 3) introduire l'incertitude de $\lvert u_{i+1} - u_i \rvert$; par exemple 10^{-4} : frapper 1EE+/−4 ST07 4) introduire $u_1 = 2$ puis frapper sur R/S 5) lire u_2 ; $\lvert u_2 - u_1 \rvert$; u_3 ; $\lvert u_3 - u_2 \rvert$;... lorsque les calculs sont terminés, est affichée la première différence $\lvert u_i - u_{i-1} \rvert$ inférieure à 10^{-4}, en rappelant le contenu de la mémoire R_0, on a le dernier u_k calculé.	CHS ST0 1 CHS ↑ . 5 X 3 + fPause fPause ST00 ST0+1 *RCL1 gABS fPause fPause fPause RCL3 fx>y R/S RCL0 GT0 01	1) en mode PRGM introduire les instructions 2) en mode RUN : GT000 3) introduire l'incertitude ST03 4) introduire $u_1 = 2$ puis frapper R/S. 5) lire u_2, $\lvert u_2 - u_1 \rvert$; u_3 ; $\lvert u_3 - u_2 \rvert$ lorsque les calculs sont terminés, est affichée l'incertitude donnée. En rappelant la mémoire R_0, on a le dernier terme calculé.

* **Remarque :** on peut ajouter les instructions 1 SUM 2 (ou 1 ST0+2) ce qui permet de compter le nombre de termes calculés ; après arrêt de la calculatrice on presse sur RCL2 pour obtenir l'entie k. Ne pas oublier de mettre 0 dans R_2 pour un autre essai.

Après avoir remarqué que les nombres sont rangés dans l'ordre croissant et que la suite converge vers 6 (des démonstrations sont possibles dans certaines classes) on peut rechercher la plus petite valeur de l'entier j vérifiant $|u_j - 6| < 10^{-7}$, par exemple en utilisant le programme :

X	**Notice TI 57**	↑	**Notice HP 33**
. 5 + 3 = 2nd Pause ST01 1 SUM0 RCL1 − 6 = 2nd $\lvert x \rvert$ 2nd INV x ⩾ t GT01 RCL1 RST 2nd Lbl 1 RCL0 + 1 = R/S	1) LRN introduire le programme LRN 2) RST 3) OST00 4) 1EE +/− 7 ST07 5) introduire $u_1 = 2$ puis frapper R/S 6) lire les u_i puis la machine affiche le rang du premier terme vérifiant $\lvert u_j - 6 \rvert < 10^{-7}$. Pour un autre essai, reprendre au paragraphe 2.	. 5 X 3 + fPause ST01 1 ST0 + 0 RCL1 6 − gABS RCL3 fx > y GT020 RCL1 GT001 RCL0 1 +	1) en mode prgm. introduire les instructions. 2) en mode run : GT000 OST00 3) 1 EEX 7 CHS ST03 4) introduire $u_i = 2$ puis frapper R/S 5) lire les u_i puis la machine affiche le rang du premier terme vérifiant $\lvert u_j - 6 \rvert < 10^{-7}$. Pour un autre essai reprendre un paragraphe 2.

L'étude de la suite (u_n) définie par u_1 et la relation $u_{n+1} = au_n + b$; $n \in \mathbb{N}_*$, a et b deux nombres donnés, peut être abordée par le calcul numérique ou géométriquement. Ayant une vingtaine de résultats, les élèves peuvent alors classer puis, éventuellement, justifier.

Programme TI 57 :
ST01 R/S ST02 R/S ST00 2nd Lbl 1 (RCL 0 × RCL 1 + RCL 2) 2nd Pause 2nd Pause GT01 R/S.

Programme HP 33 :
ST01 R/S ST02 R/S ST00 RCL0 RCL1 × RCL2 + fPause fPause GT0O6.

Notice : OFF ON
1) introduire le programme
2) initialiser en mode calcul
3) introduire a R/S, b R/S, u_1 R/S
4) lire u_2, u_3, u_4, u_5.... pour arrêter, appuyer sur R/S. Pour un autre essai reprendre au paragraphe 2.

9

EXEMPLE DE SUITE CONVERGEANT VERS π : METHODE DES ISOPERIMETRES

Pour obtenir des compléments d'information sur π, on recommande la lecture de la brochure que le Petit Archimède a consacrée à la question.

OBJECTIFS :

- *Calculs sur les radicaux*
- *Retour sur le programme de 3ᵉ : relations métriques, constructions géométriques*
- *Initiation au processus de récurrence*
- *Usage de calculatrices, programmables ou non*

PRE-REQUIS :

- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Dans un triangle ABC rectangle en A :$AH^2 = BH.CH$ (H étant le pied de la hauteur issue de A).
- Le théorème sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.
- Quelques notions de programmation.

Déroulement du thème. Classe de 2ᵉ C (9 garçons, 6 filles)

6 heures réparties sur un mois avec des compléments de travail à la maison.

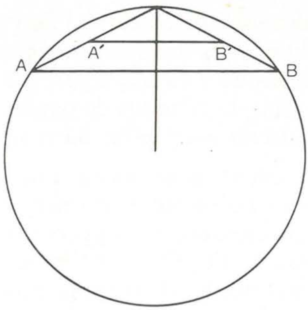
Je demande d'abord aux élèves de construire un cercle de rayon aussi grand que possible, puis d'y inscrire un carré. Facile... Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de construire sur cette figure déjà en place un octogone régulier de même périmètre que le carré.

Apparaissent des octogones de périmètres plus grands, plus petits, et même des octogones non réguliers ; les élèves sont facilement convaincus de leur erreur lorsque je leur rappelle les vertus toutes simples de l'inégalité triangulaire.

Enfin, au bout d'une demi-heure de recherche, deux d'entre eux obtiennent un bon octogone. Pour les autres, le travail se poursuivra à la maison.

A la séance suivante, surprise ! tout le monde n'a pas un bon octogone. Cela m'amène à présenter au rétroprojecteur le principe de la construction (fig. 1).

Figure 1



Si AB est le côté d'un polygone régulier de n côtés,
A′B′ est le côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés.

Les élèves ayant dès lors une figure exacte, je leur demande de construire un polygone régulier de 16 côtés ayant même périmètre que l'octogone.

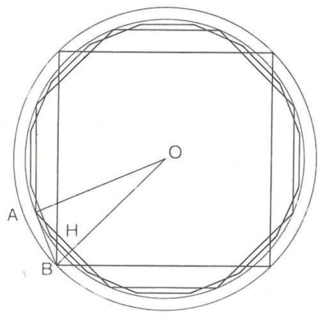
Nouveau blocage qui provient du fait que, contrairement à ce qui se passait dans la phase précédente, le cercle circonscrit au nouvel objet (l'octogone), si utile pour la construction, n'est pas tracé.

Cette recherche qui s'avère délicate est donnée comme travail à la maison.

Le compte rendu révèle encore de nombreuses erreurs qu'on peut réfuter grâce à l'inégalité triangulaire, mais aussi, pour certains, une maladresse réelle dans la manipulation des instruments.

Dans cette phase, le travail réclame effectivement beaucoup de soin. Une seule élève présente un travail net et correct. Je dois donc montrer encore au rétro-projecteur le principe de la construction et finalement tout le monde construit la figure (2).

Figure 2



Que se passe-t-il si l'on poursuit les constructions suivant un processus analogue ?

"Le polygone va devenir un cercle". C'est la réponse la plus fréquente. J'indique alors que ce travail a été entrepris dans la perspective de calculer des approximations de π (π qui figure au-dessus du tableau avec 50 décimales. Il s'agit en fait de la bande de papier que le Petit Archimède a eu l'excellente idée d'insérer à cet effet dans sa brochure sur π).

Comment donc procéder pour avoir une approximation de π ? Mesurer le périmètre d'un polygone et diviser le nombre obtenu par le double du rayon du cercle circonscrit, suggère un élève. Pour des raisons d'ordre pratique je demande d'opérer sur l'apothème et non le rayon, ce qui ne soulève pas d'objection, les deux longueurs semblant se confondre lorsque le nombre de côtés augmente indéfiniment.

a_0 et c_0 désignent l'apothème et le côté du carré
a_1 et c_1 désignent l'apothème et le côté de l'octogone.

La première approximation est vite découverte sans mesurer quoi que ce soit:

$$\frac{L}{2a_0} = \frac{8a_0}{2a_0}, \text{ donc } \frac{L}{2a_0} = 4$$

Pour la seconde, j'indique qu'au lieu de mesurer, on peut trouver une relation entre a_0 et a_1 en utilisant une certaine relation métrique dans le triangle rectangle.

Dans le meilleur des cas, les élèves ont retenu la relation de Pythagore. Les redoublants, eux, n'en connaissent aucune. Alors on organise la chasse aux relations métriques et finalement on obtient celle qui doit servir dans le cas présent. Je le dis et donne le travail en recherche à la maison. Echec complet. Il me faut orienter la recherche en matérialisant le triangle AOB et sa hauteur AH (fig. 2).

Ces renseignements permettent à la plupart des élèves de découvrir l'équation

$$a_1(a_1 - a_0) = \frac{a_0^2}{4}$$

(ils tiennent compte du fait que $L = 4c_0 = 8a_0$).

On la met sous la forme

$$a_1^2 - a_0a_1 - \frac{a_0^2}{4} = 0$$

L'usage des radicaux ne va pas sans mal. D'autre part l'équation a deux solutions et la construction géométrique n'en révèle qu'une.

$$a'_1 = \frac{a_0(1+\sqrt{2})}{2} \qquad a''_1 = \frac{a_0(1-\sqrt{2})}{2}$$

Le choix entre les deux n'est pas aisé tant que les formules ci-dessus ne sont pas obtenues.

Pour avoir la deuxième approximation de π, on forme $\dfrac{L}{2a_1}$.

"Quelle valeur faut-il prendre pour a_0 ?" disent ceux (et ils sont les plus nombreux) qui ont obtenu une formule du genre :

$$\frac{8a_0}{a_0+\sqrt{2a_0^2}}$$

D'autres, en revanche, donnent la seconde approximation de π $\dfrac{8}{1+\sqrt{2}}$ et en calculent une valeur approchée au centième : 3,31.

On passe maintenant au polygone régulier de 16 côtés. L'équation du second degré qui lie a_2 et a_1 est en général assez rapidement découverte :

$$a_2(a_2-a_1)=\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 \qquad \text{Or } 16C_2=L=8a_0 \qquad \text{d'où } C_2=\frac{a_0}{2}$$

$$a_2^2-a_1a_2-\frac{a_0^2}{4^2}=0$$

$$a_2^2-\frac{a_0(1+\sqrt{2})}{2}\,a_2-\frac{a_0^2}{4^2}=0$$

Calculs délicats sur les radicaux, mieux maîtrisés cependant que les précédents.

$$a'_2=\frac{a_0[1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,]}{4} \qquad a''_2=\frac{a_0[1+\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,]}{4}$$

On obtient une nouvelle approximation de π : $\dfrac{16}{1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

dont une valeur approchée au centième près est 3,18.

Il est clair qu'à ce stade les élèves ne pouvaient conjecturer l'équation générale du second degré

$$a_{n+1_2}-a_na_{n+1}-\frac{a_0^2}{4^{n+1}}=0$$

Le calcul pour le polygone de 32 côtés a été nécessaire

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+\dfrac{a_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$\frac{L}{2a_{n+1}}=\frac{8a_0}{a_n+\sqrt{a_n^2+\dfrac{a_0^2}{4^n}}}$$

Même à la calculatrice non programmable, les calculs deviennent fastidieux. J'écris donc pas à pas avec l'aide des élèves le programme (p.80) que deux d'entre eux enregistrent sur nos deux calculatrices.

Une question se pose : pour les trois premières approximations le résultat était indépendant de a_0. Ici au contraire il faut introduire a_0.

La réponse ne dépend pas de la valeur choisie. Les élèves s'en rendent compte en manipulant à tour de rôle la calculatrice et en introduisant des a_0 différents.

Pour faire comprendre ce phénomène, je dois reprendre le calcul des premières approximations

$$\frac{8a_0}{2a_0} = \frac{8a_0}{a_0(1+\sqrt{2})} = \frac{8}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{8a_0}{\frac{a_0(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}})}{2}} = \frac{16}{1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

qui montre les simplifications par a_0 et permet donc de les prévoir pour les calculs suivants.

Programme de calcul des termes successifs :

$$2a_i\ ,\ \frac{\mathrm{L}}{a_i}\ ,\ i$$

à partir de la formule

$$a_{i+1} = \frac{a_i + \sqrt{a_i^2 + \frac{a_0^2}{4^n}}}{2}$$

Programme sur TI58 ou TI59 : LRN , LBL , A , STO , 00 , RS , STO , 01 , RS , LBL , C , STO , 02 , RS , RCL , 00 , X², ÷ , 4 , Y$^{\mathrm{x}}$, RCL , 02 , + , RCL , 01 , X² , z , $\sqrt{\mathrm{X}}$, + , RCL , 01 , = , RS , ÷ , 2 , = , STO , 01 , RCL , 00 , X , 8 , ÷ , RCL , 01 , ÷ , 2 , = , RS , 1 , SUM , 02 , RCL , 02 , RS , GTO , 13 , LRN

Rentrer a_0 en A, 0 en C

RS donne $2a_1$

RS donne $\frac{\mathrm{L}}{2a_1}$

RS donne 1 c'est-à-dire l'indice

RS donne $2a_2$

etc.

Résultats pour $a_0 = 5$:

indice	nombre de côtés	apothème $\times 2$	approximation de π
0	4	10	
1	8	12,07106781	3,313708499
2	16	12,56834873	3,182597878
3	32	12,69146298	3,151724907
4	64	12,72216727	3,144118385
5	128	12,72983871	3,14222363
6	256	12,73175628	3,141750369
7	512	12,73223566	3,141632081
8	1024	12,73223555	3,14160251
9	2048	12,73238545	3,141595118
10	4096	12,73239295	3,14159327
11	8192	12,73239482	3,141592808
12	16384	12,73239529	3,141592692
13	32768	12,73239541	3,141592663
14	65536	12,73239544	3,141592656
15	131072	12,73239544	3,141592654
16	262144	12,73239545	3,141592654

On ne peut aller plus loin, tout au moins en n'utilisant que la capacité normale de la machine.

Les 9 premiers chiffres sont exacts ; le 10e est donné par excès.

Evaluation

Le thème "π par les isopérimètres" a été suivi du test ci-joint.

Les objectifs avaient été annoncés 15 jours avant.

Il s'est déroulé après que le thème eut été traité par les élèves.

Dans l'intervalle de ces 15 jours, les élèves m'ont demandé des compléments d'information.

Durée : 1 heure.

• Les critères retenus pour l'évaluation :

1 acquis 0 non acquis

sont les suivants :

pour l'objectif 1 : réussir à former les équations (1) ou (1′) et (3) ou (3′)

pour l'objectif 2 : obtenir (2) ou (2′)

pour l'objectif 3 : voir comment les élèves ont "sorti" a_0 du radical dans (2), par exemple ; voir comment ils ont cherché à simplifier les différentes formules comprenant des radicaux.

pour l'objectif 4 : le fait d'avoir cherché à calculer les rapports
$\frac{P}{2a_0}, \frac{P}{2a_1}, \frac{P}{2a_2}$

pour l'objectif 5 : la découverte de 5 ou (5′)

pour l'objectif 6 : le calcul des valeurs approchées, même lorsque l'élève opère sur des formules fausses sous réserve que pour ces formules il trouve les résultats correspondants exacts.

• Le temps imparti était un peu court.

• Il ne faut pas se dissimuler le fait que l'appréciation "acquis", "non acquis" est au mieux une présomption qui doit inciter l'élève à se poser des questions et le maître à approfondir certains points.

Test sur le calcul de π par la méthode des isopérimètres

1°) Inscrire dans un cercle de rayon R un hexagone régulier. Quel est,en fonction de R, son périmètre ? son apothème ?

2°) Construire un côté du dodécagone régulier de même périmètre. Calculer son apothème a_1.

3°) Calculer l'apothème a_2 d'un polygone régulier de 24 côtés de même périmètre.

4°) Conjecturer la formule donnant l'apothème a_n d'un polygone régulier de 6.2^n côtés (j'indique la signification de 6.2^n : formule associant à l'indice de l'apothème le nombre de côtés du polygone correspondant).

5°) Donner des approximations de π (valeurs exactes ou approchées).

OBJECTIFS :

1°) reconnaître si les élèves ont compris le processus permettant de calculer l'apothème a_{i+1} lorsqu'on connaît l'apothème a_i

2°) reconnaître s'ils savent résoudre une équation du second degré

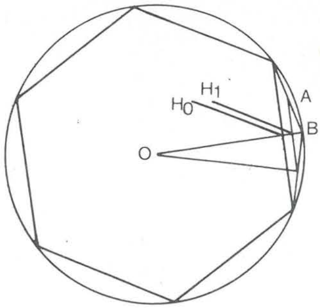
3°) reconnaître comment ils maîtrisent les calculs sur les radicaux

4°) voir s'ils sont capables de conjecturer :

1) le fait que le rapport $\frac{P}{2a_n}$ est une approximation de π

2) la formule donnant a_{n+1} en fonction de a_n

5°) voir s'ils savent utiliser leurs calculatrices.



1°) Si P désigne le périmètre de l'hexagone et a_0 son apothème,

$$P = 6\,R$$
$$a_0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

2°) $AH_1^2 = OH_1.H_1B$ donc $AH_1^2 = OH_1.H_0H_1$

$$\left(\frac{R}{4}\right)^2 = a_1(a_1 - a_0)$$

$$(1)\quad a_1^2 - a_0a_1 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 = 0 \qquad a_1 = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + \frac{R^2}{4}}}{2} \qquad (2)$$

Les élèves ont préféré exprimer a_1 en fonction de a_0 uniquement

$$(1')\quad a_1^2 - a_0a_1 - \frac{a_0^2}{12} = 0 \qquad a_1 = \frac{1}{2}\,a_0\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad (2')$$

3°)

$$(3)\quad a_2^2 - a_1a_2 - \left(\frac{R}{8}\right)^2 = 0 \quad a_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \frac{R^2}{16}}}{2} \qquad (4)$$

$$(3')\quad a_2^2 - a_1a_2 - \frac{a_0^2}{48} = 0 \qquad a_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \frac{a_0^2}{12}}}{2} \qquad (4')$$

4°)

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + \frac{R^2}{4^{n+1}}}}{2} \quad \text{en fonction de R} \qquad (5)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + a_0^2.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}}}{2} \quad \text{en fonction de } a_0 \qquad (5')$$

5°) Calcul des valeurs approchées de π.

$$P = 6\ R = \frac{12a_0}{\sqrt{3}}$$

Avec l'hexagone : $\dfrac{P}{2a_0} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{6}{\sqrt{3}} \simeq 3{,}46$

Avec le dodécagone: $\dfrac{P}{2a_1} = \dfrac{\dfrac{12}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{12}{2+\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{12}{2+\sqrt{3}} \simeq 3{,}21$

Avec le polygone de 24 côtés: $\dfrac{P}{2a_2} = \dfrac{P}{a_1+\sqrt{a_1^2+\dfrac{a_0^2}{12}}}$

$$= \frac{P}{\dfrac{1}{2}\,a_0\,(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})+\sqrt{\dfrac{1}{4}\,a_0^2\,(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{a_0^2}{12}}}$$

$$= \frac{\dfrac{12}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})+\sqrt{\dfrac{1}{4}(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{1}{12}}} \simeq 3{,}15$$

On pouvait bien sûr "simplifier" cette formule, mais telle quelle, elle se prête bien au calcul machine avec mémorisation de $1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Résultats du test

Objectifs annoncés préalablement aux élèves

	1	2	3	4	5	6
	Processus du calcul de a_{i+1} en fonction *de* a_i	**Résolution** d'une équation du second degré	**Conjectures** calculs sur les radicaux	signification de $\frac{P}{2a_n}$	$a_{n+1} = f(a_n)$	usage des calculatrices
1	1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0	1
6	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	1
8	0	1	0	1	0	1
9	1	1	0	0	0	0
10	0	1	0	1	0	0
11	1	1	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	1
14	0	0	0	1	0	0
15	1	1	0	0	1	0
	7	13	3	11	1	9

Commentaires :

Du test il ressort que trois points semblent acquis par le plus grand nombre des élèves :

- la résolution de l'équation du second degré
- le principe de la méthode du calcul de π par les isopérimètres
- l'usage des calculatrices.

Deux points à approfondir :

- les calculs sur les radicaux
- l'art de conjecturer une formule.

10

FONCTIONS

Introduction par des procédés divers dans trois classes de seconde (A, AB, C) en 80-81.

1. OBJECTIFS

Partir de graphiques ou de tableaux de valeurs effectivement tirés d'ouvrages d'économie, biologie, sciences physiques,... (et mathématique) et prendre conscience de leur imprécision, des unités difficiles à lire ou à reporter, des renseignements ponctuels, discontinus qu'ils fournissent, des traits sans signification qui joignent les points représentatifs des phénomènes étudiés, des différents types de variables. Mettre en évidence petit à petit les notions de fonction, d'ensemble d'existence, de variation sur un intervalle, de parité, de périodicité,...

2. LES METHODES DE TRAVAIL

Ne croyant à aucune méthode qui serait la panacée universelle, nous avons décidé de faire alterner : travail sur fiche ou sur document, individuel ou en groupe, travaux présentés par le professeur au tableau, synthèses collectives, travail de soutien ou d'approfondissement avec une partie de la classe. Dans les trois classes, trois heures par semaine sont consacrées à l'introduction de la notion de fonction.

3. LES SUJETS ETUDIES

① *Document élève :* une pseudo-copie d'élève à corriger et compléter dans le but de faire revoir du calcul numérique et du calcul littéral.

② *Document élève :* graphiques donnant l'âge moyen au premier mariage des hommes et des femmes entre 1821 et 1945 (source : Institut National d'Etudes Démographiques).

③ *Document élève :* tableau des mille premières décimales de π (source : Petit Archimède).

④ "Fabrication" d'une sinusoïde.

⑤ *Document élève :* schéma en bandeaux donnant le menu d'une gélinotte suivant les douze mois de l'année (source : Biologie 6ème Bordas).

⑥ *Document élève :* tableau donnant, en fonction du temps, les températures de trois flacons nus et entourés de peau de mouton et de lard (source : manuel de physique premier cycle).

⑦ *Document élève :* tableau donnant la taille d'un criquet en fonction de son âge et graphique donnant le poids en fonction de l'âge (source : manuel de biologie premier cycle).

⑧ *Document élève :*

I - Pour un triangle rectangle d'hypoténuse donnée, étude, en fonction d'un côté de l'angle droit de mesure *x*, du second côté, de l'aire, de la hauteur.

II - Variation du périmètre d'un rectangle d'aire donnée.
Variation de l'aire d'un rectangle de périmètre donné.

Voici ces sujets :

①

NOM de l'élève : Dominique BIDON

Date : 19 Sept. 1980

Classe : 2de

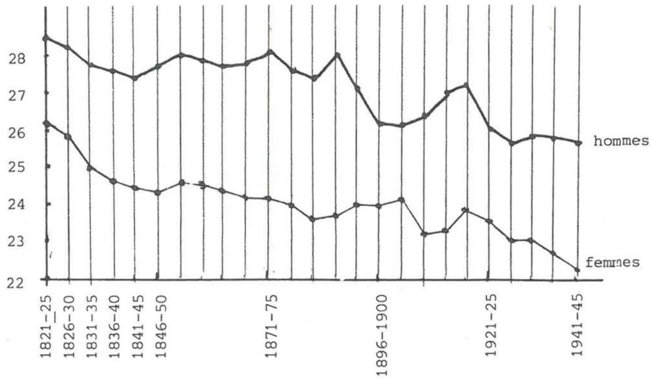
Complète le tableau suivant:

1er côté d'un rectangle	2ème côté d'un rectangle	Demi-périmètre	Périmètre	Aire
25	12	37	74	300
40	10	50	100	4000
60	140	100	200	8400.
25	5	30	60	125
6a	6a	12a	24a	36a
b	2	b + 2	2b+2	2b
19	c	19+c	2(19+c)	19c
17	d	17+d	34+2d	17d
2x	x	3x	$3x^2$	4x
2a	c	2a + c	4a+c	2ac
2u	2v	2(u+v)	4u+v	4uv
m + 2	m+2	m + n + 4	2m+2n+8	mn+4
a + b	a + b	2a+2b	4a+2b	a^2+b^2
2a				$6a^2c$
	x - y			$x^2 - y^2$

②

AGE MOYEN AU PREMIER MARIAGE
entre 1821 et 1945

On s'intéresse à l'âge moyen au premier mariage pour les hommes et pour les femmes. Cet âge moyen a été calculé sur des périodes de cinq ans (1821-25 ; 1826-30 ; ... ; 1941-45). Voici, ci-dessous, le graphique obtenu par l'INED*. Sur ce graphique, les points ont été joints pour visualiser les variations de l'âge moyen, les segments n'ont pas d'autre signification.



① Quel est l'âge moyen pour les hommes dans la tranche 1896-1900 ? 1881-86 ?

. Mêmes questions pour les femmes ?

. Qui s'est marié à 26 ans (âge moyen) et quand ?

. Peut-on affirmer, en voyant ce graphique, que personne ne s'est marié à 21 ans ?

. A quel âge moyen les femmes se sont-elles mariées le plus fréquemment ?

② Faire toutes les remarques que vous inspirent ces graphiques.

③ Construire un graphique donnant, en fonction de la période, l'écart des âges moyens entre les deux sexes.

---

* INED : Institut National d'Etudes Démographiques.

③

π

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989

Dans la première centaine des décimales de π , on a compté huit fois le chiffre 1, dix fois le chiffre 4, quatorze fois le chiffre 9 ;

dans la deuxième centaine, on a compté douze fois le chiffre 2, ...

Organisez-vous pour compléter le tableau ci-dessous:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1ère cent.	8	8	12	11	10	8	9	8	12	14
2ème cent.	11	12	12	8	12	12	7	4	13	9
3ème cent.	7	10	11	12	15	7	15	7	9	7
4ème cent.	13	13	9	8	10	12	11	5	10	9
5ème cent.	6	16	10	11	6	11	6	12	9	13
6ème cent.	9	8	10	13	11	5	14	14	6	10
7ème cent.										
8ème cent.										
9ème cent.										
10ème cent.										
1er millier										

① Faire un graphique représentant la répartition des chiffres dans le 1er millier de décimales.

② Faire maintenant un graphique tenant compte de la répartition des chiffres dans chacune des dix centaines.

Pour information, dans le 1er million de décimales, il y a :

99 959 fois le chiffre 0
99 758 fois le chiffre 1
100 026 fois le chiffre 2
100 229 fois le chiffre 3
100 230 fois le chiffre 4
100 359 fois le chiffre 5
99 548 fois le chiffre 6
99 800 fois le chiffre 7
99 985 fois le chiffre 8
100 106 fois le chiffre 9

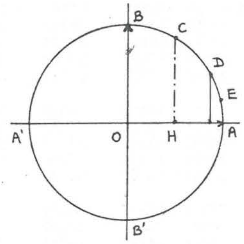
④ Ce qui a été dit aux élèves :

Pour les élèves

<u>Fabrication d'une sinusoïde</u>

Matériel: compas, papier millimétré.

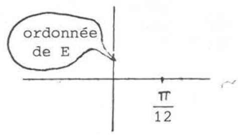
Dessiner un cercle de centre O, de rayon 6 cm puis deux diamètres perpendiculaires en O : AA' et BB'.
H est le milieu de [OA] . La droite HC est perpendiculaire à la droite OA.
Quelle est la nature du triangle OAC ?
Quelle est donc la mesure du secteur $\widehat{AOC}$ en degrés ? en radians ?
Construire avec le compas la bissectrice OD du secteur $\widehat{AOC}$ puis la bissectrice OE du secteur $\widehat{AOD}$.



Partager ensuite le cercle en 24 arcs égaux et le graduer en degrés et en radians à partir du point A, en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

M étant l'un des points du cercle, son ordonnée dépend de la mesure de l'arc AM . Il s'agit de représenter la variation de l'ordonnée de M en fonction de la mesure x de l'arc AM.
(On choisit le radian pour ne pas mélanger les deux unités).

L'unité étant le rayon du cercle, on note sin x l'ordonnée de M.



<u>Nos objectifs</u> :

Peut-on joindre les points obtenus ? Expliquer pourquoi , et choisir un ou deux autres points. Bien insister.

Eventuellement "pousser" pour obtenir une représentation graphique sur un intervalle plus large que $[0 , 2\pi]$. Choisir l'unité sur l'axe des abscisses pour obtenir au moins deux périodes.

Recommencer avec l'abscisse de M (fonction cosinus) puis la fonction tangente obtenue en présentant l'axe des tangentes parallèle à OB.

Avec le cercle et ces courbes, chercher les symétries, trouver des égalités

(ex. $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$;
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + \pi) = -\cos x$; ...etc.).

Observer ce que trouvent les élèves.

Penser à $\sin 2x \neq 2 \sin x$; à $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{4}$; $\sin\frac{\pi}{6}$; ... etc.

On peut revoir les constructions de segments de longueur $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... à partir d'un segment unitaire.

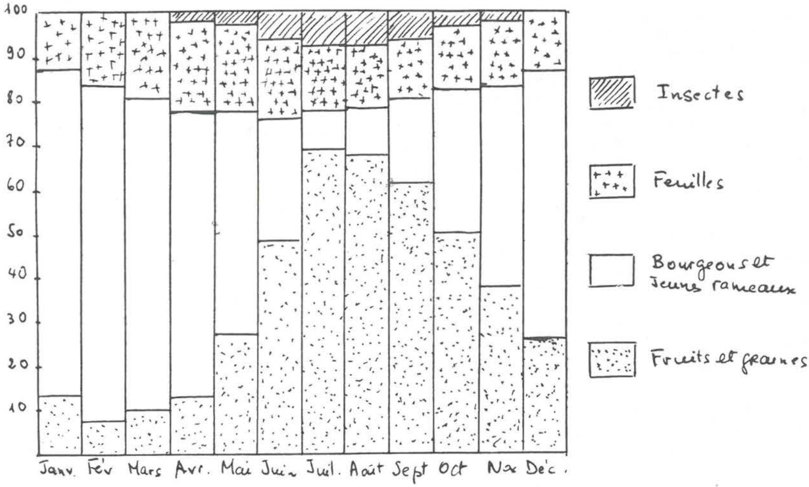
⑤

LE MENU DE LA GELINOTTE

"Examinons les aliments consommés au cours de l'année par la gélinotte, oiseau des sous-bois de hêtres.

La gélinotte mange toute l'année la même quantité de feuilles; elle consomme beaucoup plus de fruits et de graines, beaucoup moins de bourgeons et de jeunes rameaux, en été qu'en hiver. Les insectes entrent dans son alimentation d'avril à novembre seulement. Cette variation du régime a plusieurs causes: d'une part, la gélinotte trouve peu d'insectes en hiver, d'autre part, ses préférences suivent ses besoins, qui ne sont pas les mêmes toute l'année.

De nombreux animaux sont ainsi capables de s'adapter aux conditions de milieu, en particulier à la quantité de nourriture disponible."



Extrait du livre de Biologie 6ème
Collection Désiré Bordas (77)

(1) En juillet, quelle est la part prise par les insectes dans la quantité de nourriture absorbée par la gélinotte ?

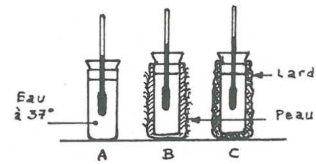
Quelle est celle des bourgeons et jeunes rameaux ? Celle des fruits et graines ? celle des feuilles ?

A quel mois la part des fruits et graines est-elle de 27% ? A quel mois celle des feuilles est-elle de 20% ?

(2) Représenter par un graphique les variations de la part prise par les fruits et graines dans la nourriture de la gélinotte suivant les douze mois de l'année.

Mêmes questions pour les bourgeons et jeunes rameaux, pour les feuilles et pour les insectes.

⑥



Dans trois flacons, on met de l'eau à 37°.

Le flacon A est nu; le flacon B est entouré de peau de mouton et le flacon C est entouré de lard gras.

Le tableau suivant donne les températures de l'eau des trois flacons de deux en deux minutes. On admettra qu'entre deux relevés consécutifs de température, celle-ci décroît proportionnellement au temps écoulé.

Temps en min	Température en degrés		
	flacon nu	flacon avec peau	flacon avec lard
0 min	37°	37°	37°
2	32	35	34
4	28	33	31
6	24	31	29
8	21	29	27
10	19	27	25
12	17	26	23
14	15	25	22
16	14	24	21
18	13	23	20
20	12	22	19

1. Représenter graphiquement, sur une même figure, les variations des températures des trois flacons en fonction du temps écoulé.

2. Entre quels flacons et à quel moment l'écart des températures est-il le plus grand ?

⑦

LES MUES DU CRIQUET

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille* d'un criquet s'accroît donc brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance discontinue.

① Ainsi

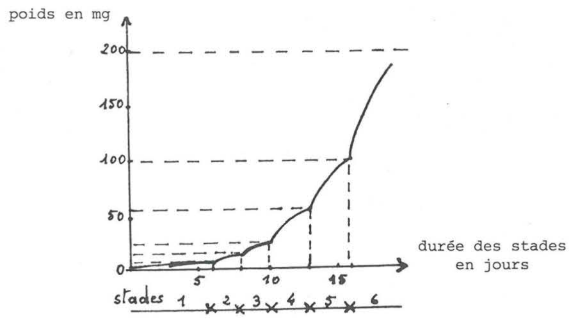
Ainsi	de 0 à 6 jours	un criquet mesure	9 mm
	de 6 à 8 jours	un criquet mesure	12 mm
	de 8 à 10 jours	un criquet mesure	16 mm
	de 10 à 13 jours	un criquet mesure	21 mm
	de 13 à 16 jours	un criquet mesure	27 mm

Après le 16ème jour, le criquet est adulte et sa taille ne change plus: elle est de 40 mm. Il a donc subi cinq mues.

Représenter graphiquement les variations de la taille du criquet de 0 à 20 jours en négligeant la durée des mues.

Comment apparaissent les mues du criquet sur le graphique ?

② Par contre, le poids du criquet croît entre les mues comme l'indique le graphique ci-dessous:



Quelle(s) remarque(s) peut-on faire sur la croissance du poids du criquet entre deux mues ?

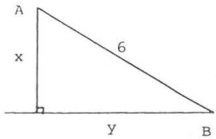
Chercher des exemples d'animaux dont la croissance est discontinue.

---

* Pour un biologiste, la taille d'un criquet est celle de sa cuticule.

⑧

[I] Triangles rectangles d'hypoténuse de longueur 6



AB = 6

Où sont les sommets des triangles rectangles dont AB est l'hypoténuse ?

. Calculer y en fonction de x.
Quelles sont les valeurs que peut prendre le réel x ? Désigne par I l'ensemble de ces valeurs.
Construire des points de la représentation graphique de la fonction f qui à x associe y

$$f \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y \end{array} \right. \qquad \text{notation: } y = f(x)$$

. Calculer l'aire z du triangle d'hypoténuse 6 et dont un côté de l'angle droit est x.
Construire des points de la représentation graphique de la fonction a.

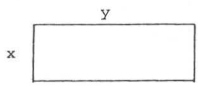
$$a \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto z \end{array} \right. \qquad z = a(x)$$

. Calculer la hauteur h du triangle d'hypoténuse 6 et dont un côté de l'angle droit est x.
Représenter graphiquement la fonction u.

$$u \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto h \end{array} \right. \qquad h = u(x)$$

[II] Histoire de rectangles

x et y sont les mesures des côtés d'un rectangle, une unité étant choisie.



aire de ce rectangle: xy

périmètre de ce rectangle: x + y

1. On se propose de déterminer, parmi les rectangles d'aire 36, celui ou ceux qui ont le plus petit périmètre.

x	...
y	...
x + y	...

Exprimer le demi-périmètre x + y en fonction de x.

On appelle p la fonction qui, au réel x, associe le réel x + y qu'on notera p(x). Quel est son ensemble d'existence ?

Construire des points de la représentation graphique de la fonction p.
Cette représentation permet-elle de résoudre le problème proposé ?

2. On se propose de déterminer, parmi les rectangles de périmètre 24, celui ou ceux qui ont la plus grande aire.

x	...
y	...
xy	...

Exprimer l'aire xy en fonction de x.

On appelle q la fonction qui, au réel x, associe le réel xy qu'on notera q(x). Quel est son ensemble d'existence ?

Construire des points de la représentation graphique de la fonction q.
Cette représentation permet-elle de résoudre le problème proposé ?

4. COMMENTAIRES

①

Nombre de fautes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pourcentage d'élèves en A	6,2	12,5	3,1	15,6	12,5	15,6	12,5	9,5	3,1	3,1	3,1	0	3,1
Pourcentage d'élèves en B	12,9	12,9	16	19,3	9,7	3,2	3,2	3,2	0	3,2	0	3,2	
Pourcentage d'élèves en C	31,4	25,7	20	14,2	5,7	2,8							

Les élèves ont mis de 20 min. à 40 min.

② Dans la classe de Seconde AB, les interprétations du graphique ont été faites avec le professeur d'Economie* qui, étant libre à l'heure du cours de Mathématique, a pu y assister. Dans les autres classes, les élèves ont posé des questions au professeur d'histoire.

Pour la question ③, pas mal de difficultés en A où les élèves ayant choisi de reporter les longueurs ont souvent omis de reporter l'unité et choisi comme unité le cm (alors que l'unité du document représentait 8 mm). En C, les élèves ont fait, à ce propos, des calculs de proportionnalité.

*** Commentaires du professeur d'Economie**

Le professeur d'économie a bien insisté sur la nécessité de faire l'analyse en deux temps :

1) Voir la tendance générale
2) Faire les remarques locales.

1) TENDANCE GENERALE

— les hommes et les femmes se marient de plus en plus tôt ;
— la femme se marie plus jeune que l'homme ; l'écart est en général de 2 - 3 ans ;
— la diminution est plus rapide chez les femmes ;
— en gros, les deux courbes se ressemblent ;
— il faut expliquer les creux et les bosses par l'arrivée d'événements historiques.

2) REMARQUES LOCALES

On est amené à s'interroger sur deux époques, surtout visibles sur le graphique des hommes :

— Baisse brusque de l'âge moyen de 1886 à 1900 : cette baisse semble avoir une explication plus socio-économique que politique : elle est liée aux nouvelles conditions de vie nées de l'industrialisation et de l'exode rural.
— La hausse 1916 - 1920 (aussi bien Hommes que Femmes) correspond bien sûr à la guerre ; elle empêche (ou retarde) les unions.

③ Pas mal d'intérêt pour ce document de la part des élèves ; espérons qu'après lui π ne sera plus jamais 3,14 ! Il faut une heure pour compléter la table et vérifier les résultats.

En Seconde AB, on a accordé une certaine importance à l'aspect statistique, on s'est efforcé d'examiner les méthodes de décomptage et surtout de vérification.

Les élèves prennent conscience de l'importance du choix de la place des nombres en ordonnée dans l'interprétation d'un graphique : pour ceux qui ont commencé à 90 il semble que les décimales se répartissent très inégalement alors que pour les autres elles se répartissent de manière semblable.

Pour ②, le but recherché était de faire spontanément des sommes de fonctions. Assez bizarrement plusieurs élèves en A, en AB et C ont fait un graphique pratiquement illisible avec un troisième paramètre (tantôt la décimale, tantôt la centaine) illustré par la couleur — en utilisant donc 10 couleurs —.

④ C'est ce travail sur la sinusoïde, riche dans de nombreuses directions (constructions avec règle et compas, médiatrice, bissectrice, calculs de proportionnalité, choix des unités sur les axes, formules de trigonométrie, symétries du cercle, triangle équilatéral,...) qui a duré le plus longtemps.

L'examen conjoint du cercle et de la sinusoïde a permis de constater que $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$,...
Un petit coup de pouce a été nécessaire pour "tourner" en sens inverse sur le cercle trigonométrique et la sinusoïde est repartie de l'autre côté de l'origine...

On construit ensuite — en classe ou à la maison, suivant les sections — la représentation de $x \mapsto \cos x$ et on remarque que la nouvelle courbe se déduit de la précédente par translation.

⑤ Pas de difficulté pour les lectures, l'unité du document présenté étant le cm. Dans les trois classes des représentations diverses ont été choisies : points, bâtons, rectangles.

En commentant les graphiques, les élèves remarquent que les deux courbes représentatives de la consommation des "fruits" et des "bourgeons" sont symétriques (ils disent "contraires", "inverses") par rapport à une droite parallèle à l'axe des x.

En Seconde AB, on est même amené à faire un retour en arrière sur les coordonnées du milieu d'un segment et l'on cherche l'ordonnée du milieu de chacun des 12 segments. Cette ordonnée est effectivement voisine de 40.

⑥ Pas de difficulté pour les représentations graphiques. La phrase "décroît proportionnellement au temps écoulé" a souvent du être expliquée. Les plus futés ont su démontrer les alignements de points (en A et AB au moyen de vecteurs liés, en C au moyen du déterminant, alors que nous croyions que des équations de droite seraient recherchées...)

En Seconde AB où l'on travaillait parallèlement avec le professeur d'économie sur pourcentages et pourcentages d'augmentation, il n'a pas été facile de faire comprendre que si l'augmentation par an est régulière, alors le pourcentage d'augmentation d'une population diminue, tandis que si le pourcentage d'augmentation est régulier, alors l'augmentation de la population ne l'est pas.

⑦ Cette première représentation d'une fonction en escalier crée des problèmes après le caractère discret de la plupart des phénomènes représentés au préalable. C'est aussi un problème que celui des "discontinuités" provenant des mues dont la durée est supposée "négligeable" par les biologistes. Dans les Secondes A et AB, on étudie à cette occasion les tarifs postaux, on en profite pour introduire petit à petit des intervalles semi-ouverts qui s'avèrent indispensables pour bien comprendre les tarifs rédigés comme suit :

jusqu'à	20g	50g	100g	500g
ordinaires	1,40	2,50	3,50	7,20

Pour le graphique du ②, les élèves remarquent spontanément que le poids croît plus vite après la perte de la cuticule qu'avant de la quitter ; quelques-uns aussi (plus nombreux en C, il faut le noter) pensent que ces "festons" sont une "erreur décorative" de l'imprimeur, habitués peut-être qu'ils ont été à voir des fonctions affines par morceaux).

⑧

$\boxed{\text{I}}$ Au premier coup d'œil, pour la plupart des secondes A, la moitié des secondes AB, et quelques secondes C, il n'y a que deux triangles rectangles : ceux dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux côtés de la feuille...

Pour représenter y en fonction de x, personne ne pense à reporter les longueurs en utilisant le cercle de diamètre AB. On préfère faire des calculs, c'est l'occasion d'utiliser une table de carrés pour encadrer $\sqrt{a}$ (avec beaucoup de difficulté en A), d'utiliser les machines en AB, et en C.

On discute pour savoir si on choisira $[0,6]$ ou $]0,6[$. On ne sent pas toujours la nécessité de choisir plus de valeurs sur $[5,6[$ que sur $]0,1]$. Quelques-uns constatent — ceux du moins qui ont pris la même unité sur les axes — que la courbe a l'air d'un quart de cercle. Ensemble on le démontre.

x	$z = a(x)$
1	2,955
2	5,65
3	7,785
4	8,94
5	8,30
3,9	8,892
4	8,94
4,1	8,979
4,2	8,988
4,3	8,987
4,4	8,976
4,19	8,9876
4,20	8,988
4,21	8,98835
4,22	8,9886
4,23	8,988875
4,24	8,9888
4,25	8,98875

Pour la représentation de z en fonction de x ($z = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$), les calculs à la main, et en utilisant une table de carrés (en seconde A) donnent les résultats ci-contre. Que le maximum ait lieu pour x compris entre 4,1 et 4,3 est difficile à faire comprendre, tous les élèves ont la certitude que le maximum est pour $x=4,2$. Les calculs faits par un ordinateur WANG sont soumis aux élèves. L'ordinateur donne le maximum de l'aire (8,9999999999) pour $x=4,24264$. Enfin, pour faire bonne mesure, et montrer que, dans ce cas, "l'homme" surpasse l'ordinateur, on cherche ensemble (et non sans peine) le maximum de z, donc de

$$-x^4 + 36x^2 = -(x^2-18)^2 + 18^2 \quad .$$

On trouve ainsi $x = 3\sqrt{2}$ et 9 pour l'aire. En Seconde C, les élèves ayant eu l'idée de chercher l'aire d'un triangle rectangle isocèle, ils n'ont eu ensuite qu'à vérifier que, pour tout x, $a(x) \leqslant 9$.

$\boxed{\text{II}}$ — Etude du périmètre des rectangles d'aire 36

$$p : x \longmapsto 2 + \frac{36}{x}$$

• L'ensemble de définition fournit l'occasion d'introduire $]0, +\infty[$.

• Pour la recherche du *minimum* la situation est bien différente de la précédente puisque la valeur entière 6 donne un résultat qui "finit juste".

x	3	4	5	6	7
$p(x)$	15	13	12,2	12	12,14

On s'assure que $x + \frac{36}{x}$ n'égale 12 que pour cette valeur 6, en résolvant $x + \frac{36}{x} = 12$ donc $(x-6)^2 = 0$.

Enfin, on démontre soit qu'on ne peut jamais avoir $x + \frac{36}{x} < 12$

soit qu'on a toujours $x + \frac{36}{x} \geqslant 12$.

A remarquer qu'en seconde A, les 3/4 de la classe se disent plus convaincus par la première démonstration que par la seconde ! En seconde C, cette fois encore, on a pensé directement à étudier le carré d'aire 36.

• Autre problème soulevé : *le comportement de p aux bornes* de l'intervalle. On constate que $p(x) > x$

que $p(x) - x$ diminue quand x grandit et sans jamais s'annuler

que la droite d'équation $y = x$ est "sous" la courbe. En seconde AB et C le mot *asymptote* est prononcé.

En seconde AB, on cherche à calculer x pour que $p(x) = 10\,000$. Echec, on n'y arrive pas... on admet que c'est possible et l'on parle encore d'asymptote. On note la différence de comportement de p pour x voisin de 0 et pour x de plus en plus grand.

• Dans les trois classes, on *résout graphiquement des équations* du type $x + \frac{36}{x} = \text{Cte}$

Etude de l'aire des rectangles de périmètre 24

La représentation d'un côté en fonction de l'autre ($x \mapsto 12 - x$) permet de démontrer *l'alignement des points*. Ici encore le problème du *maximum* se résout facilement par le calcul.

De nouveaux problèmes sont soulevés :

- *Symétrie de la courbe* (seconde A, AB, C)
- *Position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$* en seconde AB, où les élèves croyaient que $q(x)$ surpassait toujours x. Dans les trois sections, on remarque que la courbe monte plus vite "vers 0" "qu'avant 6".
  En seconde AB, on se lance dans des calculs interminables (à la machine) pour comparer *les accroissements de l'ordonnée.* On constate avec surprise au passage que

$$q(a+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left(q(a)+q(a+1)\right)$$

est toujours égal à 0,25. La démonstration est faite avec les lettres.

5. CE QUI A ETE REVU OU VU AU PASSAGE

Le théorème de Pythagore ⑧ ④
Le triangle équilatéral, hauteurs et angles ④
Mesures d'un angle en radians, degrés, grades (passage de l'une à l'autre) ④
Equation d'un cercle ⑧
Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle ⑧
Alignement de points dans le plan rapporté à un repère ⑥
Aire du rectangle et du triangle ⑧
Radicaux. Encadrement de radicaux, utilisation de tables de carrés ⑧
Utilisation des tables de valeurs trigonométriques ④
Calculs de proportionnalité ② ④ (à propos des représentations et des choix d'unité)
Utilisation d'une calculatrice ⑧
Résolution d'équations ⑧
Interprétation graphique de la résolution d'une équation ⑧
Mise sous la forme canonique d'un trinome du second degré ⑧

11

AVEC LA PARABOLE

Ces activités sur la parabole contiennent du dessin, un peu d'analytique, un peu d'histoire (Archimède), des calculs d'aires à partir de la propriété d'Archimède, quelques indications (sommaires, trop timides...) sur "paraboles et techniques".

Les pages qui suivent ont été, *en partie*, utilisées dans une classe de seconde littéraire, en fin d'année, en 76 et 77.

Elles sont, en principe, **destinées à l'élève** ; il n'est pas indispensable de TOUT faire.

Utilisées avant qu'il soit question des "nouveaux programmes" de Seconde, elles pourront, peut-être, apporter des idées dans le cadre des programmes en vigueur à la rentrée 81.

Elles constituent peut-être un **thème** : dans les activités proposées se mêlent dessin, coordonnées, représentations graphiques, transformations géométriques, problèmes métriques, etc.

Des élèves peu portés à l'abstraction y trouveront leur compte, sur un sujet un peu nouveau — ce fut une des raisons du succès en Seconde A — et les autres pourront aller plus loin, avec les translations, l'analytique et, pourquoi pas, une approche de l'intégration... Vaste programme !

Mars 81

• 1 DESSIN

Marquer un point F, tracer une droite D ne contenant pas ce point F.

Vous allez construire avec règle et équerre des points à égale distance de F et de la droite D.

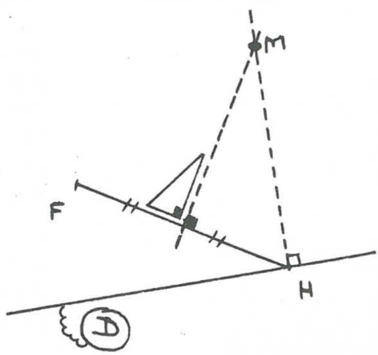
Pour commencer, qu'est-ce que la "distance d'un point à une droite" ?

Choisir un point H sur D. Tracer la perpendiculaire à D en H. Tracer [FH] et la médiatrice de [FH].

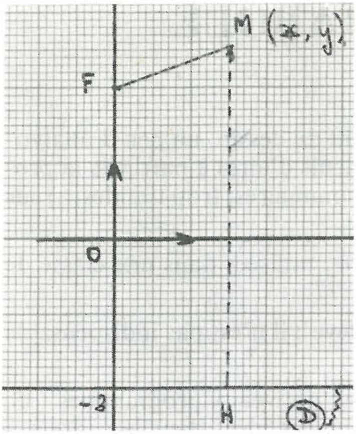
..... Recommencer....

Tracer un grand nombre de points. Les joindre par une courbe continue....

Cette courbe est une PARABOLE de foyer F et de directrice la droite D.



• 2 EQUATION



Tracer un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
F : point (0 ; 2)
D : droite d'équation $y = -2$
M(x,y) : H est le projeté orthogonal de M sur D.
Coordonnées de H ?

Composantes de $\overrightarrow{MH}$? de $\overrightarrow{MF}$?

Trouver l'équation de l'ensemble des points M tels que MH = MF , c'est-à-dire

$$\| \overrightarrow{MH} \|^2 - \| \overrightarrow{MF} \|^2 = 0$$

Exercices :

1. Donner une définition de la parabole, en termes géométriques.

2. Recommencer l'exercice 2 avec

F(0 ; 1/2)	et	D : $y = 1/2$
F(0 ; −1)	et	D : $y = +1$
F(0 ; −4)	et	D : $y = 2$
F(0 ; 0)	et	D : $y = -5$

3. En utilisant le dessin (1) ou la recherche par l'équation (2), montrer que la parabole possède un axe de SYMETRIE.

4. Et si le point F est pris SUR la droite D, quel est l'ensemble des points M à égale distance de F et de D ?

• 3 FONCTIONS — EQUATIONS

$\boxed{f : x \mapsto x^2}$

Construction d'une représentation graphique de f.
Etude de la courbe : axe de symétrie.
Variations de cette fonction.
Sommet.
Que dire de f(x) si x devient très grand "positif" c'est-à-dire si " x tend vers plus l'infini" ?
Et si " x tend vers moins l'infini" (x très grand en valeur absolue et négatif) ?

La courbe représentative est une PARABOLE d'axe yy'.
On dit aussi que cette courbe a pour équation $y = x^2$.

$f : x \mapsto -x^2$

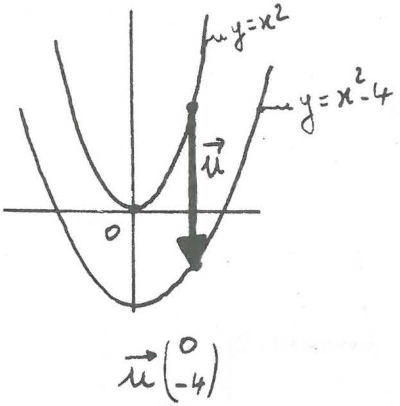
Reprendre la même étude.

En supposant construite la parabole d'équation $y = x^2$, comment construire la parabole d'équation $y = -x^2$ par une application ponctuelle simple ?

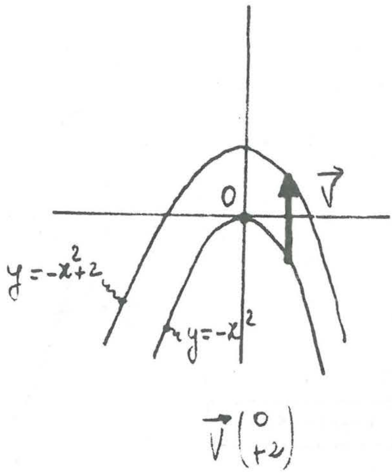
$h : x \mapsto 2x^2$
$p : x \mapsto -2x^2$

Même étude.

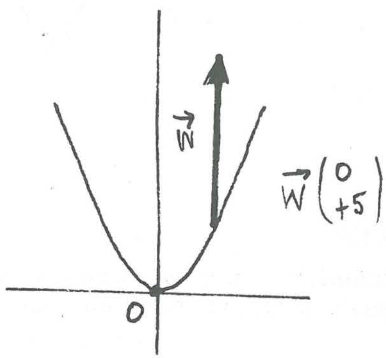
$x \mapsto x^2 - 4$



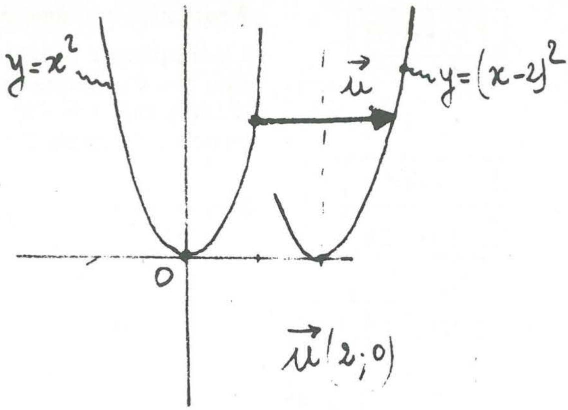
$x \mapsto -x^2 + 2$



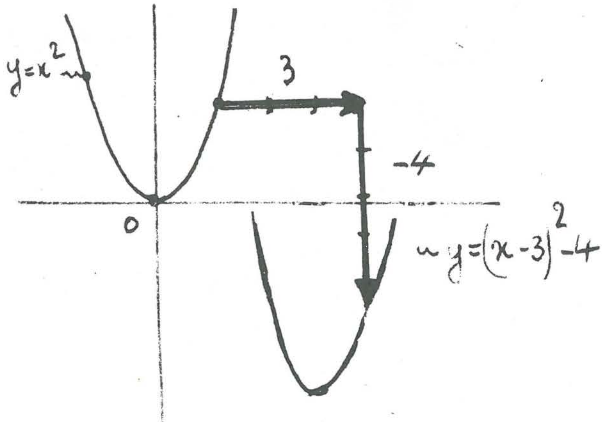
$x \mapsto x^2 + 5$



$\boxed{x \to (x-2)^2}$

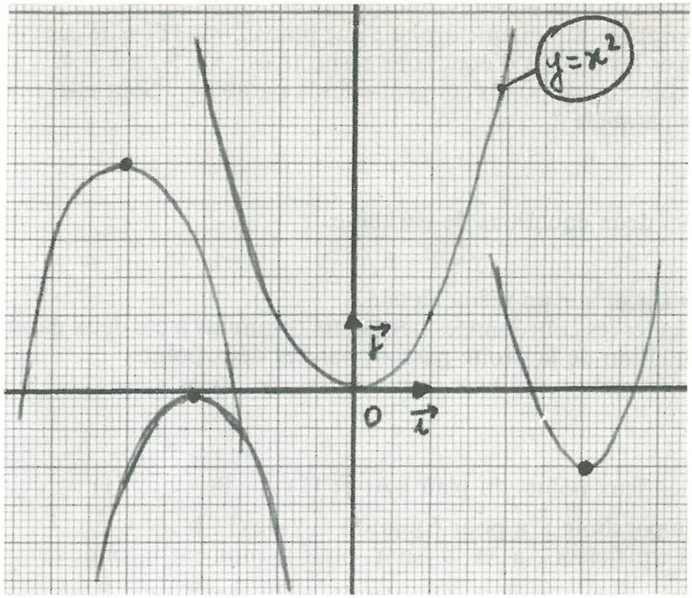


$\boxed{x \to (x-3)^2 - 4}$



• 4 DIVERS TRACÉS

4.1 Sur du papier millimétré, tracer avec soin une parabole d'équation $y = x^2$. La décalquer et la reproduire sur une feuille de carton fort ; la découper.



En utilisant ce modèle en carton, tracer d'autres paraboles identiques sur le repère choisi : marquer d'abord le sommet S, tracer l'axe de symétrie parallèle à $(O,\vec{j})$ et dessiner la courbe en suivant le bord du carton.

Trouver l'équation de chaque parabole ainsi tracée.

4.2 Tracer la parabole d'équation $y=0{,}5x^2$.
Sur le même repère, tracer les droites d'équations respectives :

$$y=x \quad ; \quad y=x+3 \quad ; \quad y=x+5 \quad ; \quad y=x+1$$
$$y=x+0{,}5 \quad ; \quad y=x-0{,}5 \quad ; \quad y=x-2 \quad ; \quad y=x-4$$

Certaines de ces droites parallèles sont *sécantes* à la parabole : le démontrer et calculer les coordonnées des points communs à la droite et à la parabole (L'équation du second degré a été préalablement étudiée).
Certaines de ces droites n'ont pas de point commun avec la parabole : le démontrer.
Une de ces droites a un seul point commun avec la parabole ; elle lui est *tangente*. Calculer les coordonnées du point de contact.

Pour les droites sécantes, marquer le milieu du segment déterminé par la parabole sur chaque droite : que pouvez-vous dire de ces milieux ?
Tracer les droites d'équations respectives : $x=5$; $x=-4$.
En combien de points coupent-elles la parabole ? Sont-elles tangentes à la parabole ?

4.3 Voici deux équations de paraboles :

$$y=x^2-6 \qquad ; \qquad y=4-x^2$$

Les tracer sur un même dessin.
Calculer les coordonnées des points communs à ces deux paraboles et l'équation de la droite passant par ces deux points.

4.4 Voici deux points du plan : A(4 ; 12) B(−2 ; −1).
Une parabole P a pour équation $y=ax^2+b$.
Les cœfficients a et b sont, pour le moment inconnus.

Pouvez-vous trouver un couple (a,b) pour que P passe par le point A ?
Pouvez-vous trouver plusieurs couples, c'est-à-dire plusieurs paraboles ?
Pouvez-vous trouver un couple (a,b) tel que la parabole P passe par les deux points A et B ?

• 5 PROPRIETE D'ARCHIMEDE

Archimède s'est intéressé à la parabole et découvrit une propriété que vous allez à votre tour étudier.

Sur du papier millimétré, tracez avec soin la moitié de parabole d'équation

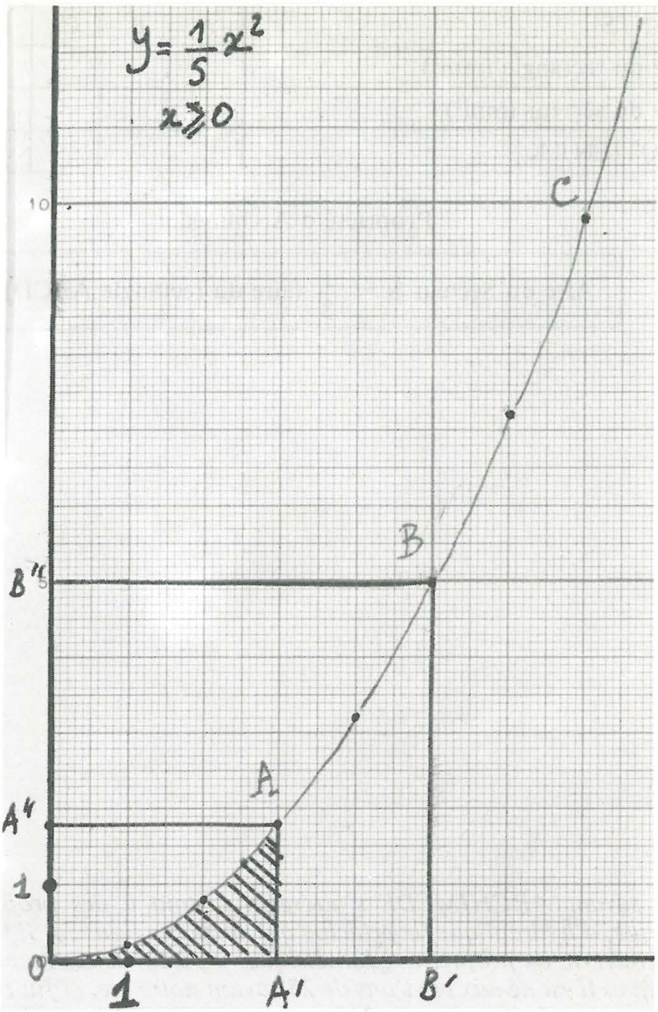
$$y=0{,}2x^2 \qquad (\text{avec } x \geqslant 0) \qquad (\text{unité: 1 cm})$$

Marquez tous les points d'abscisses entières, en particulier :

A(x=3) B(x=5) C(x=7) D(x=9) E(x=10)

Les perpendiculaires aux axes issues de A coupent ces axes en A' et A''. Mêmes notations pour B : B' et B'', etc.

Calculez, en mm², l'aire du rectangle AA'OA'', puis l'aire du rectangle BB'OB'', CC'OC'', etc.



Evaluez, en comptant les carreaux, l'aire (hachurée) située dans chaque rectangle et "au-dessous" de la parabole.

Remplir le tableau des résultats.
Faites les moyennes des résultats de la classe.
Calculer chaque fois le quotient K :

$$K = \frac{\text{aire du rectangle}}{\text{aire du secteur}}$$

POINTS	A	B	C	D	E
Aire du rectangle (mm^2)					
Aire du secteur (mm^2)					
QUOTIENT K					

Propriété d'Archimède

$$\text{Aire du Secteur S} = \frac{1}{3}\ (\text{aire du rectangle ABCD})$$

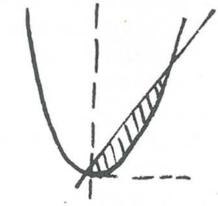
Le savant ARCHIMEDE s'intéressa surtout à des problèmes de mécanique, d'hydraulique (le principe qui porte son nom...). Il fut amené à la découverte de propriétés géométriques à partir de ses recherches en mécanique. Il est né aux environs de 287 avant notre ère, et fut tué par un soldat au siège de Syracuse en 212 avant notre ère.

On lui doit de très nombreux traités sur la sphère, le cylindre, le cône, les spirales, le cercle, les corps flottants et la parabole. C'est lui, semble-t-il, qui démontra le premier la propriété que vous venez d'étudier à propos d'une aire délimitée par un arc de parabole.

Une biographie d'Archimède a été écrite par un certain Héraclite. Il serait le fils d'un astronome, PHIDIAS, et parent d'un roi de Syracuse, le roi HIERON.

C'est Archimède qui disait : "Donne-moi un point d'appui où je puisse me tenir ferme et j'ébranlerai la terre".

Quelques exercices utilisant la propriété d'Archimède

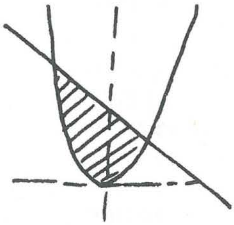


5.1 *Tracer la parabole d'équation :*

$$y = 0{,}1x^2$$

et la droite d'équation $y = x$.

Calculer l'aire de la surface comprise entre la parabole et la droite.

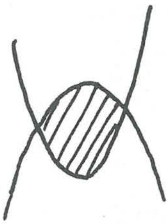


5.2 *Tracer la parabole d'équation*

$$y = x^2$$

et la droite d'équation $y = 8 - 2x$.

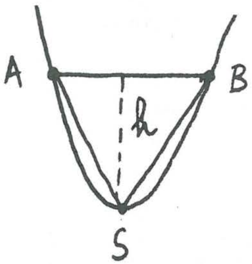
Calculer l'aire de la surface ayant pour frontières cette parabole et cette droite.



5.3 *Tracer les deux paraboles d'équations respectives :*

$$Y = X^2 \quad \text{et} \quad Y = 8 - X^2$$

Calculer l'aire de la surface ayant pour frontières ces deux paraboles.



5.4 *Proposition XXIV d'Archimède (ouvrage consacré à la parabole)*

On considère une parabole et une droite, perpendiculaire à son axe de symétrie, qui la coupe.
La surface délimitée par la parabole et la droite équivaut aux quatre tiers du triangle de même base et de même hauteur.

5.5 *Partager un rectangle en trois surfaces de même aire à l'aide de deux arcs de paraboles.*

SUR ARCHIMEDE.....

"Archimède était comme une sorte d'aigle solitaire. Jeune homme, il avait étudié quelque temps à Alexandrie en Egypte, où il s'était fait deux amis sincères : Conon, un mathématicien doué pour qui Archimède avait un grand respect à la fois personnel et intellectuel, et Eratosthène également bon mathématicien, mais très fat. Ces deux amis, particulièrement Conon, paraissent avoir été les seuls de ses contemporains à qui il confiât volontiers ses idées, étant assuré d'être compris. Il a communiqué certains de ses plus beaux travaux, par lettres, à Conon. Plus tard, après le décès de Conon, Archimède entretint une correspondance avec Dosithée, un élève de Conon. ....

.... Archimède a découvert des méthodes générales pour trouver les aires des figures planes curvilignes et les volumes des corps délimités par des surfaces courbes, et il a appliqué ces méthodes à plusieurs cas particuliers tels que le cercle, la sphère, le segment de parabole, l'aire comprise entre deux rayons et deux spires successives d'une hélice, les segments sphériques, les parties de surfaces engendrées par les révolutions de rectangles (cylindres), triangles (cônes), paraboles (paraboloïdes), hyperboles (hyperboloïdes), ellipses (ellipsoïdes) autour de leurs axes principaux. Il a donné une méthode pour calculer π, le rapport de la circonférence à son diamètre, et a fixé la valeur de π entre 31/7 et 310/71. Il a indiqué aussi des méthodes pour calculer approximativement les racines carrées, ce qui prouve qu'il a été le précurseur des Hindous dans l'invention des fractions continues périodiques. En arithmétique, dépassant de beaucoup la méthode peu pratique et anti-scientifique des Grecs de représenter les nombres par des symboles, il a inventé un système de numération permettant d'écrire ou d'énoncer des nombres aussi grands que l'on veut. En mécanique, il a posé quelques postulats fondamentaux, découvert les lois des leviers et appliqué les principes mécaniques de ceux-ci au calcul des aires et des centres de gravité de plusieurs surfaces planes et des volumes de corps de formes diverses. Il a créé toute la science de l'hydrostatique et l'a appliquée à trouver des positions de repos et d'équilibre de corps flottants de plusieurs sortes.

Archimède n'a pas été l'auteur d'un chef-d'œuvre, mais d'un très grand nombre de chefs-d'œuvre. La stricte brièveté, la logique rigoureuse de son exposition ne laissent pas deviner la METHODE par laquelle il est arrivé à ces résultats admirables. Heureusement, en 1906, J.L. Heiberg, l'historien érudit des mathématiques des Grecs, a fait à Constantinople l'émouvante découverte d'un traité jusqu'alors égaré, adressé par Archimède à son ami Erastosthène, intitulé : THEOREMES DE MECANIQUE, METHODES. Archimède y explique comment, en comparant, par la pensée, une figure ou un solide dont l'aire ou le volume sont inconnus, à un autre déjà connu, il a été conduit à la connaissance de l'élément cherché : le résultat une fois connu, il était alors relativement facile (pour lui) de le démontrer mathématiquement. En un mot, il a mis à profit ses *connaissances en mécanique pour faire progresser ses mathématiques. C'est là un des titres qui permettent de le compter parmi les esprits modernes : il a utilisé TOUTES CHOSES ET CHAQUE CHOSE QUI S'OFFRAIT D'ELLE-MÊME, COMME UNE ARME POUR ATTAQUER SES PROBLÈMES.''*

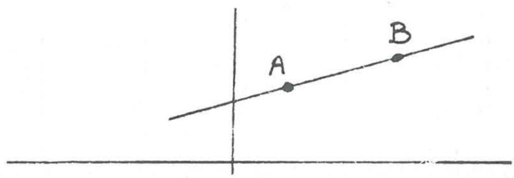
Les grands Mathématiciens
E.T. BELL

• 6 PENTE — TANGENTES

Rappels :

Pente d'une droite en repère orthonormé :

$$A(x_A, y_A) \qquad B(x_B y_B) \qquad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$



Pente de la droite AB

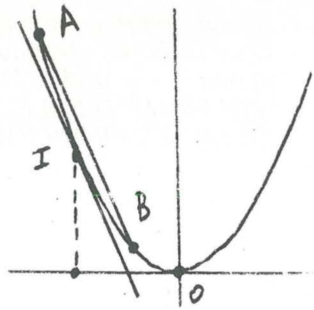
$$p = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Tracer la parabole d'équation $y = 0{,}2x^2$. Marquer en particulier les points suivants :

Points	A	B	C	D	E	F	H
x	– 10	– 6	– 2	0	3	6	11
y							

Calculer la pente de la droite AB ; tracer cette droite.
Marquer sur la parabole le point I ayant pour abscisse la demi-somme des abscisses de A et B. Par I, tracer la droite de même pente que AB : elle est tangente à la parabole.

Même travail avec la droite BC, avec CO, avec OE, EF, FH,....



On obtient, sur la parabole, les points intermédiaires : I, J, K, L, M, Q ; pour chaque point vous avez tracé la tangente à la parabole, après avoir calculé la pente de cette tangente.

Points	I	J	K	L	M	Q
x	-8	-4				
$y = 0{,}2x^2$	12,8					
Pente						

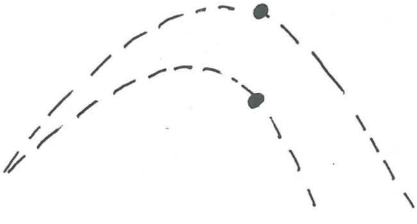
Comment s'exprime la pente de la tangente en fonction de x ?

Recommencer cette activité avec la parabole d'équation $y = x^2$ puis avec $y = 3x^2$.

• 7 PARABOLES et TECHNIQUES

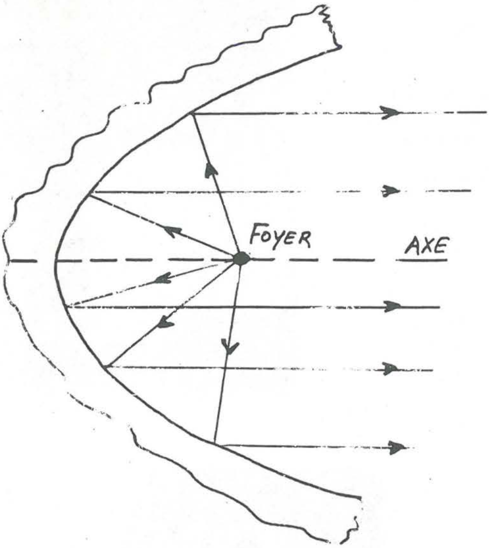
En mécanique

Un objet lancé dans le vide décrit une trajectoire à peu près parabolique ; l'axe de la parabole est vertical.

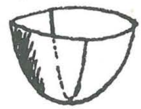


En optique

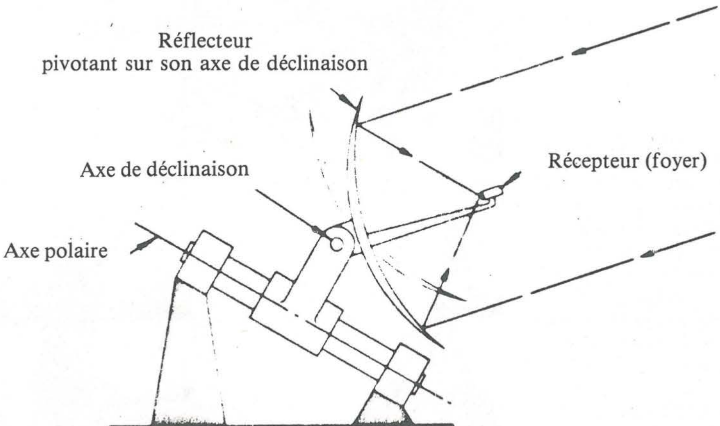
Si un miroir a la forme d'une parabole et si une source lumineuse est placée au foyer de la parabole, les rayons réfléchis sur la surface réfléchissante sont des rayons parallèles à l'axe de la parabole. On obtient un faisceau de rayons parallèles (phares de voitures, torches,....).

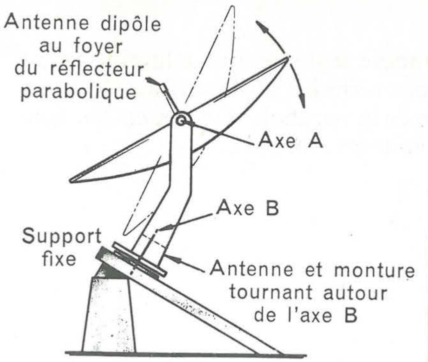


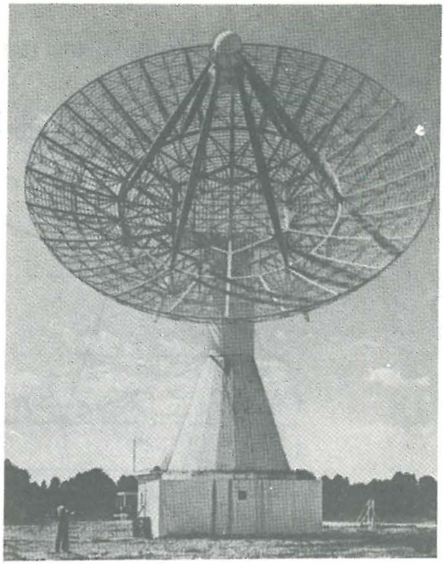
Surface parabolique... **radars - électronique - télescopes...**



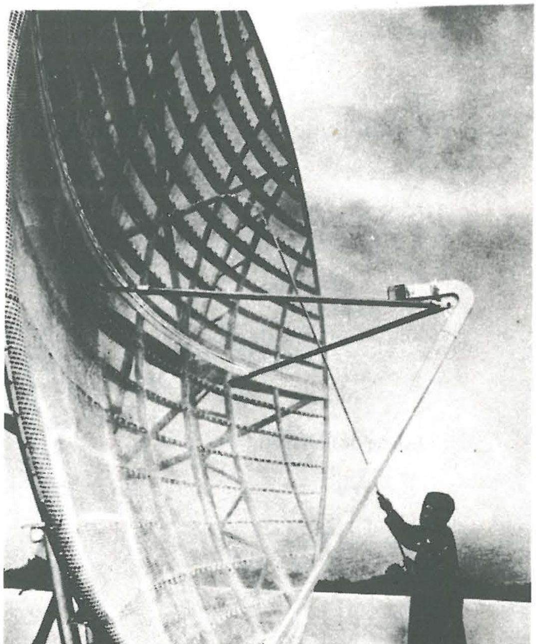
UN RADIOTELESCOPE A MONTAGE EQUATORIAL







Des stations de radars puissants, comme celui montré ici, suivent l'astronaute et maintiennent le contact.



Le Japon veut "prévoir" l'arrivée d'un typhon, avertir les populations et prendre toutes mesures utiles. Cet énorme radar, installé au sommet de l'observatoire de Muruto, tourne vingt-quatre heures sur vingt-quatre et peut détecter un typhon à plus de 400 kilomètres de distance. (Photo Agip).

(La partie fixe du grand télescope de Nançay).

12

RECHERCHE D'EXTREMUMS

OBJECTIFS

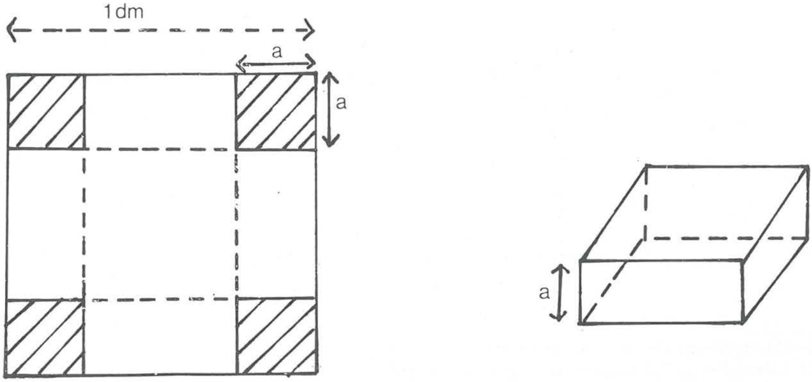
- *Mettre un problème en équation (choisir la variable, voir que le problème posé se ramène à la détermination d'un extremum d'une fonction).*
- *Faire des calculs à la machine.*
- *Faire des représentations graphiques pour en déduire des informations.*
- *Lorsqu'on étudie le problème pour un volume V choisi, montrer l'intérêt d'une étude mathématique plus poussée conduisant à un résultat simple, valable pour toute valeur de V.*
- *Donner une illustration des notions de variable, paramètre, fonction, encadrement.*
- *Montrer que, pour un volume donné, la quantité de matière nécessaire à la fabrication d'un récipient dépend de la forme de ce récipient, ce qui surprend beaucoup les élèves.*

I. Recherche de maximum pour un volume

1. Le cendrier

On découpe les quatre coins d'une plaque métallique carrée d'un décimètre de côté et on remonte les bords. Quelles doivent être les dimensions de la découpe pour que le volume obtenu soit maximum ?

Dessin



Une recherche possible

1 - *Mise en équation* : Volume de la boîte obtenue :

$V=(1-2a)\times(1-2a)\times a$; $V=4a^3-4a^2+a$; $V=((4\times a-4)\times a+1)a$.

a est compris entre 0 et 0,5.
Comment déterminer le nombre a pour que le volume soit maximum ?

2 - *Traitement numérique et graphique*

Une machine à calculer avec une mémoire permet un calcul rapide. Voici un programme :

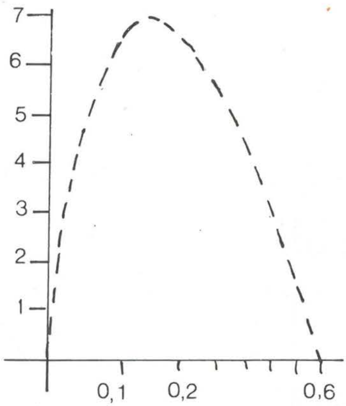
- avec une TI57 : STO 1(1 − 2 × RCL 1) x^2 × RCL 1 = R/S
- avec une HP25 : ↑ 4 × 4 − RCL 1 × 1 + RCL 1 X

Il est possible de dresser un tableau de valeurs, puis d'effectuer un tracé point par point :

a en dm	V en dm^3
0	0
0,05	0,0405
0,1	0,0640
(2) 0,15	0,0735
0,2	0,0720
0,25	0,0625
0,3	0,0480
0,35	0,0315
0,4	0,0160
0,45	0,0045
0,5	0

On recommence à 0,16 avec un pas de 0,001

a = 0,16	V = 0,07398400	
a = 0,161	V = 0,07400912	
a = 0,163	V = 0,07404999	
a = 0,164	V = 0,07405978	
a = 0,165	V = 0,67406850	
a = 0,166	V = 0,0740731	
a = 0,167	V = 0,07407385	(1)
a = 0,168	V = 0,07407053	



(1) Changement de sens de croissance.
(2) Le maximum se trouve entre 0,166 et 0,168.

D'autres questions peuvent se poser : par exemple, recherche de a pour un volume donné.

3 - Généralisation à une plaque rectangulaire de longueur x, de largeur y. Si le parallélépipède rectangle a une hauteur a, le volume V est $(x-2a)\times(y-2a)\times a$.

Quelques réactions d'élèves

L'énoncé paraît bien court aux élèves. Certains en sont tout perplexes. Il faut calculer le volume, proposent certains (ce qui n'a pas paru évident à d'autres).

La formule est rapidement établie.

Question : Comment trouver a puisque l'on ne nous donne pas la valeur maximum de V ? L'élève ne s'aperçoit pas que, même si V était donné, il faudrait résoudre une équation du 3e degré.

Bien que V soit fonction de a (d'après la formule trouvée), une élève pense que V est constant, car, plus la tranche augmente, plus le fond diminue. On propose alors les cas triviaux $a=0$ et $a=\frac{1}{2}$. Elle exclut alors ces cas de sa conclusion hâtive. Une autre propose, pour vérifier l'affirmation de sa camarade, de calculer V pour deux valeurs particulières. Ce qui est fait ; les valeurs trouvées sont différentes.

Certains proposent des valeurs "au hasard" et affirment que c'est pour $a=\frac{1}{4}$ ou $a=\frac{1}{3}$ que le volume sera maximum. Pourquoi ? Comment le vérifier ?

Il vient alors à l'idée de certains qu'il faut calculer V pour un certain nombre de valeurs de a, comprises entre 0 et 1/2 (ceci est vite perçu).

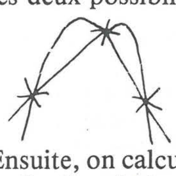
On calcule V pour $a=0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Aucun ne proposera de faire un graphique.

A partir des valeurs trouvées, les élèves ont du mal à situer le maximum.

Exemple :	$a=0{,}1$	$V=0{,}0640$
	$a=0{,}2$	$V=0{,}0720$
	$a=0{,}3$	$V=0{,}0480$

Le maximum est situé entre 0,1 et 0,2. Le fait qu'il puisse être entre 0,2 et 0,3 ne leur saute pas aux yeux. Seul un dessin du professeur présentant les deux possibilités le leur fera admettre.



(Malgré cela, l'idée de faire un graphique ne leur vient pas à l'esprit).

La difficulté pour situer le maximum à partir des valeurs subsistera encore pour certains.

Ensuite, on calcule V pour $a=0{,}15$. Certains proposent 0,25, ce qui est inutile d'après la valeur trouvée pour 0,15.

Après, c'est 0,14 qui est essayé, puis 0,16...

N'ayant pas utilisé de calculatrice programmable, faute de temps, on ne pourra aller plus loin que 0,166. Mais certains pressentent que la calculatrice serait saturée à un certain stade, ce qui ne permettrait pas d'avoir toute la précision désirée.

Les élèves voudraient connaître la valeur exacte et se demandent comment on fait pour la trouver.

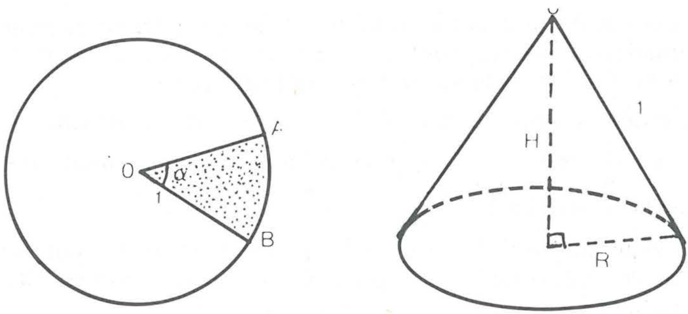
Cet exercice leur a plu car il leur a semblé "sortir de l'ordinaire", et a donné l'occasion de manipuler les calculatrices.

2. Le cône

Problème : Etant donné un disque métallique de centre O et de rayon une unité, on découpe un secteur angulaire AOB de mesure α et les deux bords AO et BO de la partie restante sont soudés.

Trouver α pour que le volume du cône obtenu soit maximum.

Dessin



Une recherche possible

La première idée est de calculer le volume en fonction de α, mais ce n'est pas forcément la bonne méthode. En fait, il suffit de déterminer l'un des paramètres du problème :

— soit α un angle de découpe
— soit l'angle au sommet du cône obtenu
— soit la hauteur du cône
— soit le rayon du cercle de base.

Le volume du cône : $V = \frac{\pi}{3} R^2 H$ ou $V = \frac{\pi}{3} \times (1 - H^2) \times H$.

$H^2 + R^2 = 1$ et $\alpha = 2\pi(1 - R)$, α est exprimé en radians. Rechercher H pour que V soit maximum, c'est rechercher H pour que $(1 - H^2) \times H$ soit maximum. Une calculatrice nous permet d'effectuer de nombreux calculs et de localiser une valeur approchée de H, puis la valeur correspondante de α .

Quelques réflexions

L'énoncé est donné, et paraît bien bref aux élèves. Après quelques minutes de réflexion, le professeur encourage à faire des dessins... un début difficile dans la recherche des formules et du choix le plus judicieux du paramètre (Quelques élèves seulement retrouvent les formules à utiliser). Le professeur donne alors les formules permettant de calculer le volume d'un cône, l'aire d'un disque, la longueur d'un arc de cercle.

Un élève programme, sur TI 57, l'expression du volume en fonction de l'angle α, puis arrive très rapidement à localiser la valeur de α pour que le volume du cône soit maximum.

D'autres exercices d'un style analogue ayant déjà été proposés, les élèves peuvent réinvestir les méthodes déjà rencontrées.

L'heure n'est pas assez "longue" pour que tous les groupes terminent.

II. Comment fabriquer des boîtes de conserve en utilisant le moins de métal possible

Enoncé

Un fabricant de boîtes de conserve veut fabriquer des boîtes cylindriques de 1000 cm^3 en utilisant le moins de métal possible.

Il calcule donc les dimensions qu'il faut donner aux boîtes pour que leur surface soit minimum. Quelles sont ces dimensions ?

Après avoir fait ce calcul, il se rend compte qu'il utilise plus de métal que ce qu'il a calculé, car il y a des chutes. En fait, pour faire un disque de diamètre D, on utilise un carré de côté D dans lequel il est inscrit. Le fabricant refait donc ses calculs en tenant compte de cette remarque, ce qui donne de nouvelles dimensions. Lesquelles ?

Mais avant d'entreprendre la fabrication, il réfléchit : "Puisque, pour faire les fonds et les couvercles des boîtes, je dois utiliser des carrés, ne serait-il pas plus judicieux de construire des boîtes parallélépipédiques ; ainsi, il n'y aurait pas de pertes de métal". Quelle sera sa conclusion ?

Peut-on répondre aux mêmes questions en remplaçant 1000 cm^3 par un volume V quelconque ?

Solution

Il faut d'abord mettre le problème en équation. Soit D le diamètre et h la hauteur de la boîte cylindrique. On a :

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}\pi D^2 + \pi D h$$

Si on veut que $V = 1000$, il faut : $h = \dfrac{4000}{\pi D^2}$, d'où $S = \dfrac{1}{2}\pi D^2 + \dfrac{4000}{D}$

On doit chercher pour quelle valeur de D, S est minimum. Comme on ne peut utiliser de dérivée en seconde, on commencera par chercher à faire un tracé point par point de la courbe représentative de $D \mapsto S(D)$ (On pourra, par exemple, commencer par calculer S pour des valeurs entières de D). Il est nécessaire, pour faire les calculs, de disposer de machines, si possible programmables.

On constatera alors que S passe par un minimum pour une valeur de D comprise entre 10 et 12 (à ce niveau, l'existence du minimum paraîtra évidente aux élèves).

On peut chercher à améliorer ce résultat, sans perdre de vue le problème posé, pour savoir quelle précision paraît raisonnable. Ici, un résultat à 1 mm près paraît suffisant. On peut alors constater que $10{,}8 \leqslant D_0 \leqslant 11$ (D_0 étant la valeur de D pour laquelle S est minimum).

On choisira donc $D = 10{,}9$ et $h = 10{,}8$, ce qui donne $V \simeq 1007{,}78$ et $S \cong 556{,}45$.

Si l'on considère maintenant que, pour faire le fond et le couvercle, on utilise deux carrés de côté D, on a :

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \quad \text{et} \quad S = 2D^2 + \frac{4V}{D}$$

Par un procédé analogue au précédent, on trouvera $9{,}9 \leqslant D_0 \leqslant 10{,}1$.

En prenant $D_0 = 10$, cela donne $h = 12{,}8$, $V \simeq 1005{,}31$ et $S \cong 602{,}12$.

Enfin, si l'on construit une boîte parallélépipédique, on aura :

$$V = D^2 h \quad \text{et} \quad S = 2D^2 + \frac{4V}{D}$$

On constate que la surface utilisée est la même que dans le cas précédent ; on est conduit à prendre $D = h = 10$, ce qui donnera une boîte cubique avec $V = 1000$ et $S = 600$.

On ne peut donc décider, de ce seul point de vue, s'il est préférable de faire une boîte cylindrique ou une boîte cubique. On peut alors réfléchir à d'autres critères de choix.

On notera qu'on n'a rien démontré ; pour faire une démonstration, il faut connaître la valeur exacte de D_0 ; ici, il faut donc conjecturer, puisqu'on n'a pas d'autre moyen de déterminer cette valeur.

Dans le premier cas, la conjecture est que S est minimum quand $D = h$, c'est-à-dire que D_0 est tel que $V = \dfrac{\pi D_0^3}{4}$; dans le second cas, la conjecture est que $D_0^3 = V$. (On doit s'efforcer de faire trouver cela aux élèves ; s'ils ne le trouvent pas sur le seul exemple étudié, on peut leur faire refaire les calculs pour d'autres valeurs de V, mais cela risque d'être fastidieux ; on peut se contenter de leur indiquer d'autres résultats, qu'ils auraient pu trouver par le même procédé).

Dans le premier cas, on obtient :

$$\begin{aligned} S(D) - S(D_0) &= \frac{1}{2}\pi(D^2 - D_0^2) + 4V\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi(D^2 - D_0^2) + \pi D_0^2 \frac{D_0 - D}{D} \quad (\text{car } 4V = \pi D_0^3) \\ &= \frac{\pi(D - D_0)}{2D} (D^2 + DD_0 - 2D_0^2) \end{aligned}$$

Or $$D^2 + DD_0 - 2D_0^2 = (D - D_0)(D + 2D_0)$$

D'où :

$$S(D) - S(D_0) = \frac{\pi(D - D_0)^2(D + 2D_0)}{2D}$$

ce qui prouve que $S(D) \geqslant S(D_0)$.

Dans le deuxième cas, un calcul analogue donne :

$$S(D) - S(D_0) = \frac{2(D - D_0)^2(D + 2D_0)}{D}$$

Quelques réactions d'élèves de 2e T

— Cet exercice faisant suite au "cendrier" a été mieux compris mais les erreurs de calcul ont été plus nombreuses. Le résultat a effectivement surpris les élèves qui ont vérifié chez eux si les dimensions des boîtes de conserve étaient à peu près celles qu'ils avaient trouvées.

— Cet exercice, par son aspect concret, a intéressé les élèves, mais il leur a semblé plus difficile qu'un exercice plus théorique.

— Ce thème peut être suivi d'une enquête chez les fabricants de boîtes de conserve mais aussi de chauffe-eau électriques... Pourquoi ces appareils ont-ils une forme cylindrique, voire sphérique ?

Problème : Comparer les surfaces d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre de même volume et de même "hauteur".

13

COMPORTEMENT GLOBAL D'UNE FONCTION, COMPORTEMENT LOCAL D'UNE FONCTION EXEMPLES D'ETUDES AU VOISINAGE DE ZERO

OBJECTIFS

- *Expérimenter, conjecturer, démontrer.*
- *Utilisation de majorations dans le calcul des valeurs de fonctions.*
- *Recherche de conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration.*
- *Approximation locale d'une fonction par une fonction affine.*
- *Perspective: développement limité d'une fonction au voisinage d'un point.*

POINTS DU PROGRAMME TRAITES

- Sens de variation d'une fonction.
- Savoir interpréter une représentation graphique.
- Majoration.
- Exemples d'études au voisinage de zéro:

$$x \longmapsto (1+x)^2 \quad ; \quad x \longmapsto (1+x)^3 \quad ; \quad x \longmapsto \frac{1}{1+x} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{1+x}$$

CONNAISSANCES PREALABLES

- Définition d'une fonction croissante (décroissante) sur un intervalle.
- Savoir utiliser la relation d'ordre dans R, compatibilité de l'addition et de la multiplication avec la relation d'ordre.
- Connaître le sens de variation des fonctions:

$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x^3 \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$

PLAN

I. *Documents élèves* — Préliminaire.

II. *Motivations issues de la physique — Remarques et prolongements destinés aux professeurs*

A - Etude d'un phénomène physique : la dilatation.

B - Des calculs de valeurs approchées à la machine.

C - Observations de graphiques.

D - Approximations de fonctions par des fonctions affines (tous les exemples ne sont pas à traiter avec les élèves).

E - Développements limités.

F - Des exemples d'utilisation empruntés à la physique.

I. Documents élèves

Document 1

1. Une tige a une longueur ℓ_0 à 0°C, à t°C cette tige a une longueur ℓ telle que $\ell = \ell_0 \times (1 + \lambda t)$; le réel λ s'appelle coefficient de dilatation linéaire.

Plomb :	$\lambda = 2{,}95 \times 10^{-5}$	Zinc :	$\lambda = 2{,}90 \times 10^{-5}$
Aluminium :	$\lambda = 2{,}33 \times 10^{-5}$	Cuivre :	$\lambda = 1{,}70 \times 10^{-5}$
Verre ordinaire :	$\lambda = 7 \times 10^{-6}$	Pyrex :	$\lambda = 3 \times 10^{-6}$
Fer :	$\lambda = 1{,}22 \times 10^{-5}$		

Si $\ell_0 = 1$ m , déterminer ℓ lorsque t est : 10, 20, 50, 100 pour chaque λ .

2. Une plaque carrée de 1 m de côté à 0°C est portée à une température de t°C. On admet que chaque côté se dilate en suivant la loi définie dans 1.

Quelle est l'aire de cette plaque lorsque t est égal à 10 ; 20 ; 50 ; 100 pour chaque λ ? Donner les résultats sous forme de tableaux (valeurs approchées à 10^{-5} près).

3. Un cube de 1 m de côté à 0°C est porté à une température de t°C . Quel est son volume à t°C ?

4. Les hypothèses sont celles de l'exercice 2 ; si une plaque de cuivre a pour aire 1,01 m², quelle est la longueur de son côté ? quelle est la température ?

5. Le cube de 1 m de côté à 0°C est une cuve à mazout en fer dont $\lambda = 1{,}22.10^{-5}$, donc* $K \simeq 3{,}66.10^{-5}$.

Calculer son augmentation de volume entre l'hiver (– 10°C) et l'été (+ 30°C). Calculer l'augmentation de volume de 1 m³ de mazout à 0°C entre les mêmes températures (– 10°C et + 30°C). Le mazout a un coefficient de dilatation cubique de $1{,}3.10^{-3}$.

Quelles conséquences peut-on prévoir ?

---

* Voir page 134.

Document 2: Donner les valeurs approchées de ces fonctions pour x donné.

x	$\sqrt{1+x}$
-10^{-1}	
-10^{-2}	
-10^{-3}	
-10^{-4}	
0	
10^{-5}	
10^{-4}	
10^{-3}	
10^{-2}	
10^{-1}	

x	$\dfrac{1}{1+x}$
-10^{-1}	
-10^{-2}	
-10^{-3}	
-10^{-4}	
0	
10^{-5}	
10^{-4}	
10^{-3}	
10^{-2}	
10^{-1}	

x	$\dfrac{1}{(1+x)^2}$

x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Document 3:

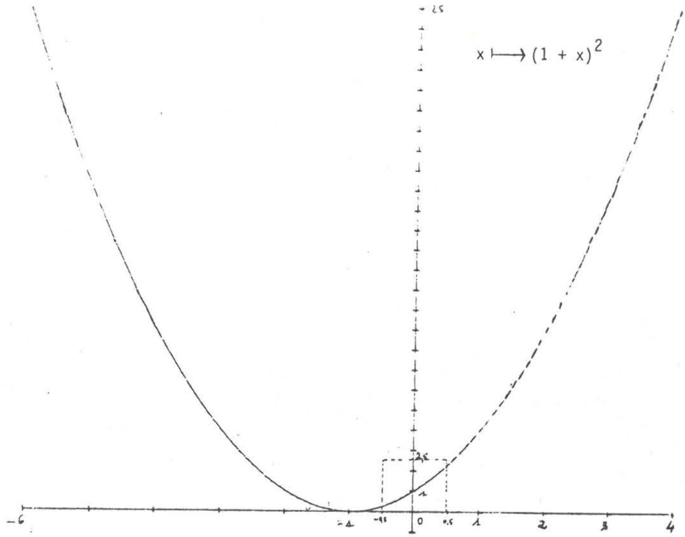


Figure 1

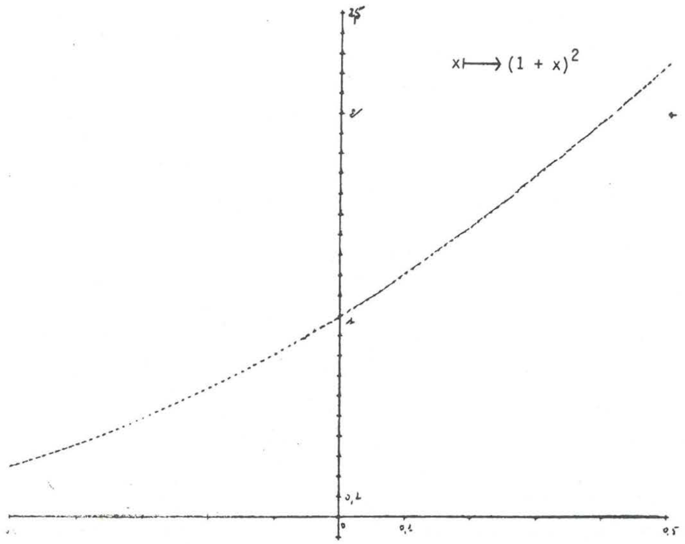


Figure 1 bis

Figure 2

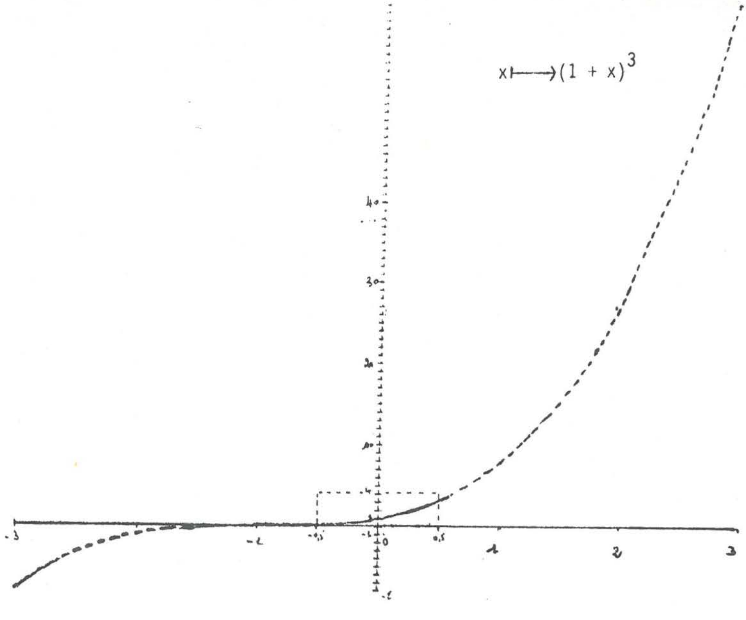


Figure 2 bis

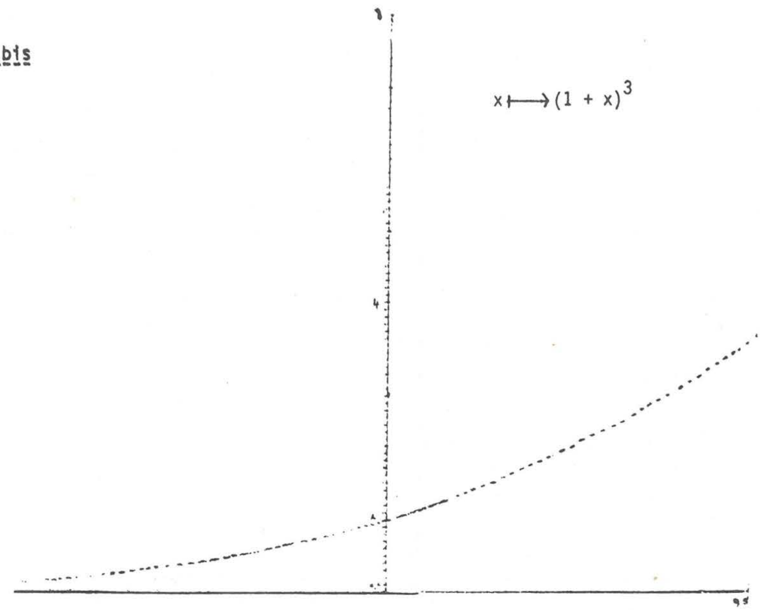


Figure 3

$x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

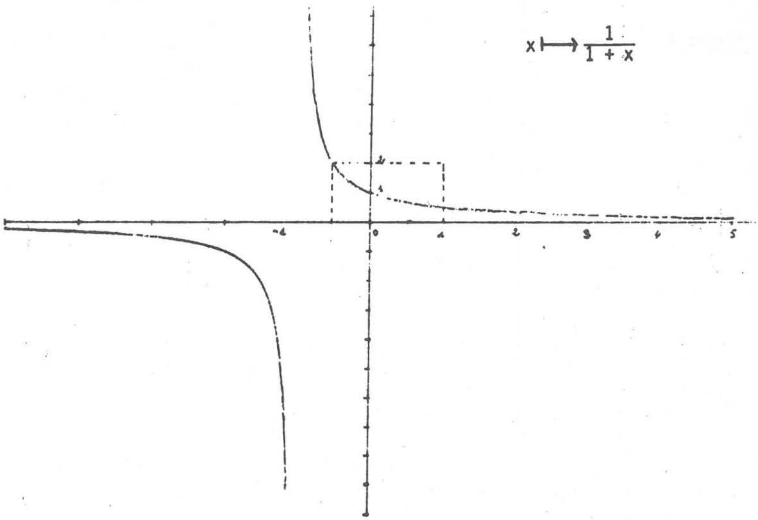


Figure 3 bis

$x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

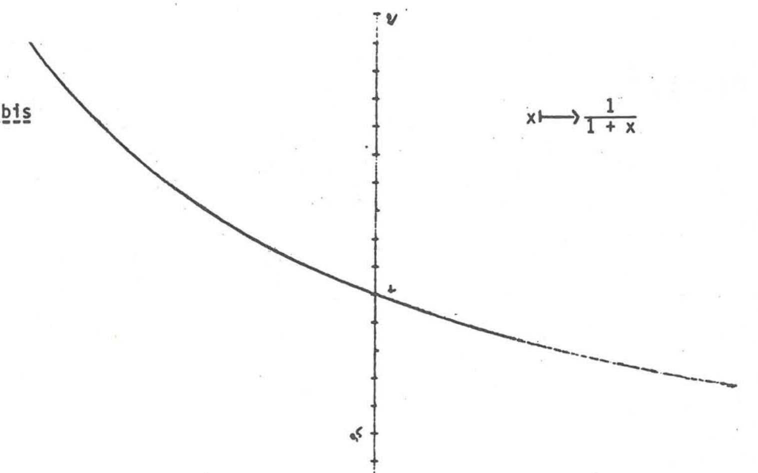


Figure 4

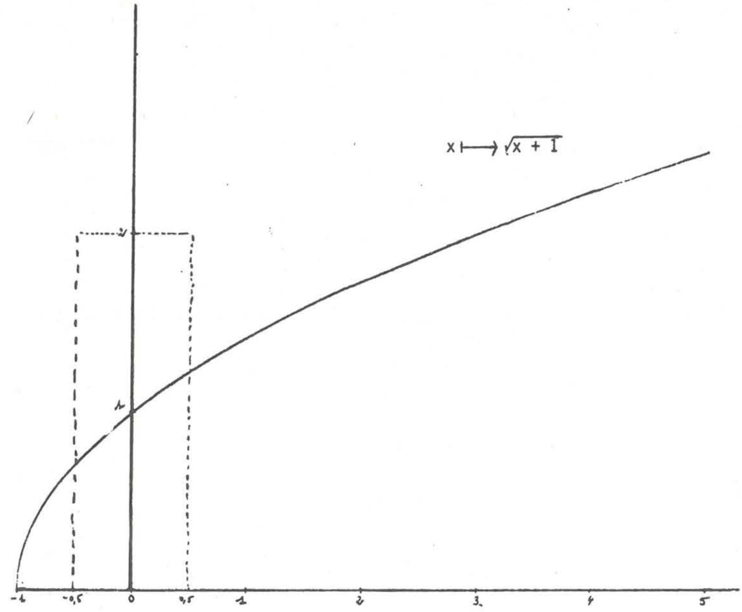


Figure 4 bis

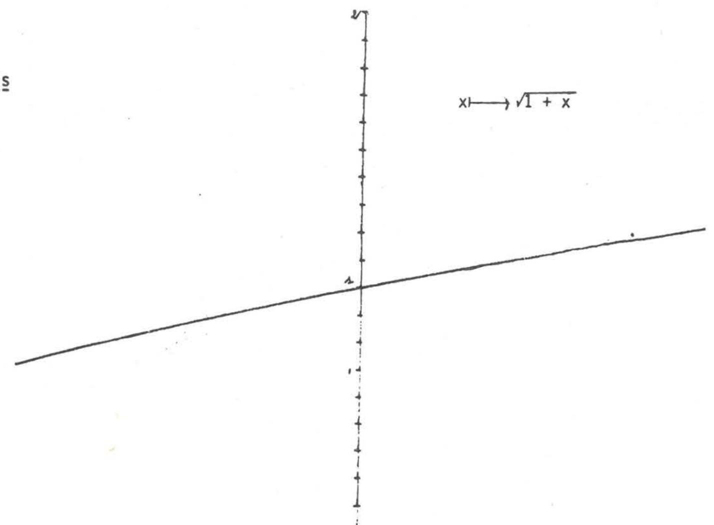


Figure 5

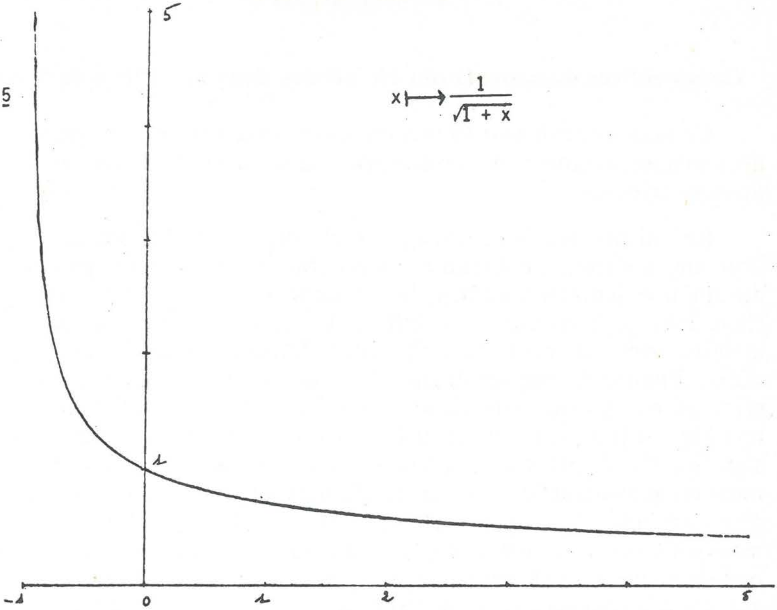
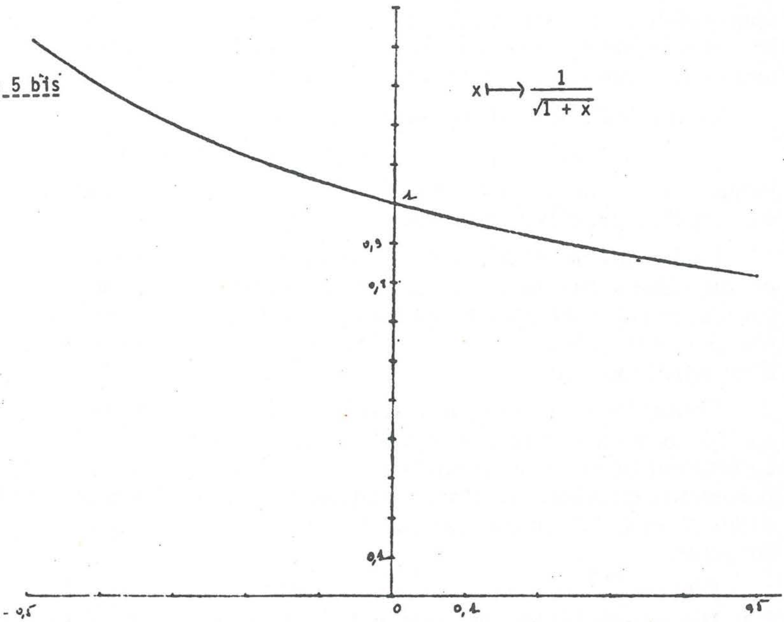


Figure 5 bis



Préliminaire

Comment ces documents ont été utilisés dans une classe de Seconde

Ce document de travail met en œuvre diverses notions qui sont abordées progressivement et parallèlement à d'autres activités, au cours du premier trimestre.

En liaison avec le professeur de physique, les phénomènes de dilatation sont abordés. Le document 1 est étudié par les élèves en temps libre durant une semaine environ, ils travaillent en groupe ou en individuel selon leur goût et leurs possibilités. Chaque fois qu'ils le désirent, des informations ou mises au point sont données en quelques minutes en début d'heure de mathématique. Puis un compte rendu de ce travail est effectué par un ou deux élèves, cela donne l'occasion de comparer des résultats, d'indiquer que, peut-être, tous les chiffres donnés ne sont pas significatifs, de prévoir des réponses sans utiliser une calculatrice, simplement en négligeant certains termes du développement du carré ou du cube d'une somme; mais, la semaine suivante, cette approximation est systématique dans le document 2 que les élèves ont à étudier à la maison. Lorsque les résultats sont comparés en classe, un élève est invité à me dicter ses valeurs approchées; puis, parfois, je note les valeurs approchées avant qu'il n'ait eu le temps de les donner; grand étonnement; puis je recommence... Une fois les tableaux remplis, l'observation des nombres est plus approfondie, on est amené à suggérer une formule plus simple, à contrôler... Enfin, on propose une expression qui permette d'avoir rapidement une valeur approchée... Mais est-elle "valable" pour tous les nombres?

La fin de l'heure est consacrée à l'étude des différences

$$(1+x)^2-(1+2x) \qquad \text{et} \qquad (1+x)^3-(1+3x) \ ,$$

lorsque x est un nombre voisin de zéro; la recherche d'une majoration est suggérée aux élèves pour l'heure suivante.

La 3e semaine est consacrée à l'observation de tracés, le document 3 est distribué à chaque élève. La première heure me permet d'expliquer succinctement comment une machine peut effectuer ces tracés, d'observer tous les dessins (Ceux-ci sont également projetés sur un écran à l'aide d'un rétroprojecteur).

Toutes les suggestions des élèves sont notées au tableau; c'est pour les figures bis que je suis un peu plus précis dans les questions; peut-on, en utilisant une règle en plexiglass, "ajuster" une portion de courbe? Si oui, mettre en évidence l'erreur commise. Puis on convient de retenir une droite "tangente" au tracé au point $A(0,1)$, une équation de droite est suggérée.

L'heure suivante est consacrée à l'étude "mathématique" des figures 2 et 2bis en suivant les idées que je développe par ailleurs. En s'inspirant des questions posées dans l'étude précédente, les élèves sont invités à travailler par groupe sur une figure donnée (1, 1 bis, 3, 3 bis), (les figures 4, 4 bis, 5, 5 bis sont réservées pour un approfondissement ultérieur), et peuvent me poser toutes les questions qu'ils souhaitent ; de temps en temps je leur suggère une idée. Je donne, parallèlement, des exercices de calculs algébriques d'encadrement, de majorations dans certaines conditions, qui seront utilisés lors d'une séance de synthèse.

Ces différents résultats d'approximations sont utilisés par exemple en physique dans les classes terminales (voir paragraphe F). Il est possible de construire, au cours du 2e trimestre, un devoir s'inspirant des conditions du paragraphe F, permettant aux élèves de réinvestir des notions rencontrées.

II. Motivations - Remarques et prolongements destinés aux professeurs

A - ETUDE D'UN PHENOMENE PHYSIQUE - LA DILATATION

Le document 1 est distribué aux élèves.

Les élèves doivent faire du calcul numérique, en s'aidant éventuellement d'une calculatrice. Les résultats sont donnés avec quatre ou cinq chiffres après la virgule, et regroupés dans des tableaux.

L'unité de longueur choisie est le mètre.

		$\ell=\ell_0(1+\lambda t)$ $\ell_0=1m$ Dilatation linéaire				$S=S_0(1+\lambda t)^2$ $S_0=1m^2$ Dilatation surfacique				$V=V_0(1+\lambda t)^3$ $V_0=1m^3$ Dilatation cubique			
	$\lambda \backslash t$	10	20	50	100	10	20	50	100	10	20	50	100
Fer	1,22 10^{-5}												
Zinc													
Aluminium													
Cuivre													
Verre													
Pyrex													

Faire remarquer que pour un matériau donné et une température donnée, les valeurs approchées de S et de V s'obtiennent par une formule plus simple.

Les physiciens utilisent : $S \simeq S_0 \times (1+2\lambda t)$ $V \simeq V_0 \times (1+3t\lambda)$; λt étant un nombre petit.

Le coefficient λ est le coefficient de dilatation linéaire,
2λ le coefficient de dilatation surfacique,
$K = 3\lambda$ le coefficient de dilatation cubique (*exemple*: $K = 10^{-3}$ pour l'alcool ; *remarque*: dilatation non linéaire pour l'eau).

On peut établir les relations entre ℓ et ℓ' ; S et S' ; V et V', longueur, surface, volume du matériau à t°C et à t'°C respectivement.

Ces relations sont plus intéressantes dans la pratique ; la dilatation se produit, en général, entre deux températures t et t' différentes de 0°C.
Par exemple : armature de fer du béton entre −20°C et +50°C.

B - TABLES DE VALEURS NUMERIQUES D'UNE FONCTION (utilisation de calculatrices)

Le document 2 est distribué aux élèves.
On donnera les valeurs approchées avec 4 ou 5 chiffres après la virgule.

Les élèves sont amenés à observer ces valeurs et à trouver un "truc" qui permet de calculer mentalement une valeur approchée.

Les tableaux peuvent suggérer de former les différences $\sqrt{1+x}-1$; $\frac{1}{1+x}-1$; ....

C'est alors que l'on constate que :

— si x est voisin de zéro, $\sqrt{1+x}$ est voisin de $1+\frac{1}{2}x$

— si x est voisin de zéro, $\frac{1}{1+x}$ est voisin de $1-x$

— si a est voisin de zéro, $\frac{1}{(1+a)^2}$ est voisin de $1-2a$

— si α est voisin de zéro, $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ est voisin de $1-\frac{1}{2}\alpha$

A la recherche de justifications

Si l'observation des tableaux de valeurs numériques ne permet pas aux élèves de proposer une expression de la valeur approchée, on peut avoir recours à une autre technique.

Par exemple pour $\sqrt{1+x}$

$1+x$ peut être considéré comme le début d'un carré

$$1+x = 1+2 \,.\, \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \;;$$

dans une première approche, si x est petit, $\frac{-x^2}{4}$ est négligeable et

$$\sqrt{1+x} \simeq \sqrt{1+2.\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}} \qquad \text{soit} \quad 1+\frac{1}{2}x \,.$$

Il est possible de proposer une meilleure approximation et de la justifier par une autre méthode. Voir les calculs ci-dessous.

Pour tout réel supérieur à -1, on peut écrire:

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}$$

Si $x \neq 0$ il vient:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \;; \text{ or } \quad \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}+\epsilon(x)$$

$$\epsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+\sqrt{1+x})}{2(1+\sqrt{1+x})}$$

$$\epsilon(x) = \frac{1-\sqrt{1+x}}{2(1+\sqrt{1+x})} \qquad\qquad \epsilon(x) = \frac{-x}{2(1+\sqrt{1+x})^2}$$

Soit : $\sqrt{1+x}$ peut s'écrire :

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}.x - \frac{x^2}{2} \,.\, \frac{1}{(1+\sqrt{1+x})^2}$$

Posons

$$g(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{1+x})^2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{4}+\epsilon'(x) \quad ;$$

$$\epsilon'(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{1+x})^2} - \frac{1}{4} = \frac{2-x-2\sqrt{1+x}}{4(1+\sqrt{1+x})^2}$$

$$\epsilon'(x) = \frac{2\dfrac{-x}{1+\sqrt{1+x}}-x}{4(1+\sqrt{1+x})^2} \qquad\qquad \epsilon'(x) = -x.\frac{3+\sqrt{1+x}}{4(1+\sqrt{1+x})^3}$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \,.\, \left(\frac{1}{4} - x.\frac{3+\sqrt{1+x}}{4(1+\sqrt{1+x})^3}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{8} \,.\, \left(\frac{3+\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{1+x})^3}\right)$$

Posons $$\epsilon''(x) = \frac{3+\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{1+x})^3}$$

Sous la condition $|x| < 1/2$,

$$\frac{3+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3} < \epsilon''(x) < \frac{3+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3} = \gamma \ ;$$

En résumé:

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{|x|^3}{8}\cdot\gamma < \sqrt{1+x} < 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{|x|^3}{8}\gamma$$

$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$ à $\frac{\gamma x^3}{8}$ près.

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{8}.\epsilon''(x)\ .$$

* ***Pour la recherche d'une valeur approchée de*** $\frac{1}{1+x}$, on peut s'intéresser d'abord à $\frac{1}{1-x}$ et utiliser des identités connues.

$1-x^2 = (1-x).(1+x)$ d'où: $\frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}$

$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ d'où: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}$

$(1-x^n) = (1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1})$ d'où $\frac{1}{1-x} = 1+x+\ldots x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$

Une autre présentation des calculs permet aussi de proposer des approximations de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de zéro.

$$\frac{1}{1+x} = 1-\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x.\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x\left(1-x.\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2\left(1-x.\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3.\frac{1}{1+x}$$

Posons $\quad \epsilon(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3.\epsilon(x)$

Si $|x|<1/2$ alors $\frac{2}{3}<\epsilon(x)<2$ d'où $|\epsilon(x)|<2$ et par conséquent:

$$1-x+x^2-2|x|^3 < \frac{1}{1+x} < 1-x+x^2+2|x|^3$$

* ***Pour la recherche d'une valeur approchée de*** $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ il est intéressant de suggérer aux élèves la composition de deux formules approchées

$$\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} \simeq 1-\frac{1}{2}x$$

d'où $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1-\frac{1}{2}x$.

De même pour $\frac{1}{(1+x)^2}$.

Remarques : Les techniques de calcul qui précèdent peuvent être continuées à l'ordre désiré et également pour d'autres "bonnes" fonctions. On peut obtenir sous certaines conditions :

— le développement à l'ordre zéro : $\quad f(x)=f(0)+x.\epsilon(x)$
— le développement à l'ordre un : $\quad f(x)=f(0)+a.x+x^2.\epsilon'(x)$
— le développement à l'ordre deux : $\quad f(x)=f(0)+ax+b.x^2+x^3(\epsilon''(x))$

Le développement à l'ordre deux au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0)+a(x-x_0)+b(x-x_0)^2+(x-x_0)^3.\epsilon''(x-x_0)$$

a, b réels à trouver; ϵ, ϵ', ϵ'' fonctions à déterminer.

Ces résultats font l'objet du programme de première. Lorsque l'on recherche un développement au voisinage du réel x_0 non nul, le changement de variable $X=x-x_0$ est effectué, et l'on est ramené au cas précédent.

C - REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS A L'AIDE D'UN TRACEUR DE COURBES

Observations

Les représentations graphiques des fonctions étudiées sont tracées à l'aide d'un mini-ordinateur et de sa table traçante.

Un programme permet de calculer $f(x_i)$ connaissant x_i .

A l'intérieur d'un rectangle préalablement choisi, les abscisses minimum, maximum sont données, ainsi que les ordonnées minimum et maximum ; le traceur permet de tracer le point de coordonnées $(x_i\,;\,f(x_i))$. On peut alors tracer des milliers de points et éventuellement joindre par un segment de droite deux points extrêmement voisins.

Ces tracés sont donnés aux élèves (document 3).

Ces tracés peuvent être décalqués — ou un tracé point par point effectué par l'élève avec l'aide d'une calculatrice.

L'observation du graphique permet de faire constater qu'une fonction donnée est croissante ou décroissante, sur un intervalle à choisir.

Les figures bis sont des agrandissements d'une partie du tracé de départ (le traceur nous permet de faire un effet de zoom). Les élèves sont alors invités à ajuster cette partie du tracé par une droite... Laquelle ?

D - DEMONSTRATIONS

1. *Etude de la fonction* $\begin{array}{c} x \overset{f}{\longmapsto} (1+x)^2 \\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \end{array}$ (figure 1)

f peut être étudiée sur toute partie de $\mathbf{R}$.

Plan de calcul

$$\boxed{x} \xrightarrow{\text{ajouter 1}} \boxed{1+x} \xrightarrow{\text{prendre le carré}} \boxed{(1+x)^2} \longrightarrow \boxed{f(x)}$$

Sens de variation : en utilisant des propriétés simples, on détermine :

$$\left(\begin{array}{l} \forall x \in]-\infty\,;-1[\\ \forall x' \in]-\infty\,;-1[\end{array} \quad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')\right)$$

f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$; de même f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 1 bis)

— On trace sur la figure 1 bis la droite $\triangle$ d'équation $y = 1 + 2x$.

— On met en évidence sur le dessin les points $M(x;(1+x)^2)$; $N(x;1+2x)$ puis $\overline{NM} = (1+x)^2 - (1+2x)$. $\overline{NM} = x^2$. Si x est voisin de zéro, $(1+x^2) - (1+2x)$ est voisin de zéro. $1+2x$ est une valeur approchée par défaut de $(1+x)^2$ à x^2 près.

La fonction affine $x \longmapsto 1+2x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \longmapsto (1+x)^2$.

2. *Etude de la fonction* $\begin{array}{c} x \overset{f}{\longmapsto} (1+x)^3 \\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \end{array}$ (figure 2)

Plan de calcul

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{1+x} \longrightarrow \boxed{(1+x)^3}$$

f peut être étudiée sur toute partie de $\mathbf{R}$.

On démontre que $\left(\begin{matrix}\forall x \in \mathbf{R} \\ \forall x' \in \mathbf{R}\end{matrix} \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')\right)$

f est croissante sur $\mathbf{R}$.

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 2bis)

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

On trace la droite $\triangle$ d'équation $y = 1+3x$, puis $M(x;(1+x)^3)$, $N(x;1+3x)$, $\overline{NM} = (1+x)^3 - (1+3x) = 3x^2+x^3$.

$\epsilon = 3x^2+x^3$ est l'erreur commise en remplaçant $(1+x)^3$ par $1+3x$.

On se propose de trouver un majorant de cette erreur.

Par exemple, si l'on s'impose $x \in]-0{,}5; +0{,}5[$: trouver un majorant de ϵ. $\epsilon = x^2(3+x)$; si $-0{,}5 < x < +0{,}5$ alors $2{,}5x^2 < x^2.(3+x) < 3{,}5x^2$.

Si $-0{,}5 < x < 0{,}5$ alors $0 \leqslant (1+x)^3 - (1+3x) < +3{,}5x^2$

Si $-0{,}1 < x < +0{,}1$ alors $0 \leqslant (1+x)^3 - (1+3x) \leqslant 3{,}1x^2$

En résumé

Sous la condition $|x| < 0{,}5$, $(1+3x)$ est une valeur approchée par défaut de $(1+x)^3$ à $3{,}5x^2$ près.

La fonction affine $x \longmapsto 1+3x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \longmapsto (1+x)^3$.

3 — ***Etude de la fonction***: $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x} \quad \text{(figure 3)}$$

f peut être étudiée sur toute partie de $\mathrm{R} - \{-1\}$.

Plan de calcul Ajouter 1. Prendre l'inverse

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{1+x} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+x}}$$

Sens de variation. f décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$

Attention: $-2 < 2$ et $f(-2) = -1 < f(2)$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 3 bis).

On trace la droite $\triangle$ d'équation $y = 1-x$; $M(x ; \frac{1}{1+x})$; $N(x ; 1-x)$.
$\overline{NM} = \frac{1}{1+x} - (1-x)$; $\overline{NM} = \frac{x^2}{1+x}$; si x voisin de zéro, $1-x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ à $\frac{x^2}{1+x}$ près; majoration de l'erreur: par exemple si l'on s'impose: $x \in]-\frac{1}{2} ; +\frac{1}{2}[$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{1+x} < 2$; si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ alors $\frac{2}{3}x^2 < \frac{x^2}{1+x} < 2x^2$

En résumé: Si $\frac{1}{2}<x<+\frac{1}{2}$, alors $0<\frac{1}{1+x}-(1-x)<2x^2$

ou bien: si $-0{,}1<x<0{,}1$, alors $0{,}9x^2<\frac{1}{1+x}-(1-x)<1{,}2x^2$

Sous la condition $|x| < 1/2$; $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

La fonction affine $x \longmapsto 1-x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$.

4 — ***Etude de la fonction***: $\begin{array}{l} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{1+x} \end{array}$ (figure 4)

f peut être étudiée sur toute partie de $[-1\ ;\ +\infty[$

Plan de calcul

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{1+x} \longrightarrow \boxed{\sqrt{1+x}}$$

Sens de variation: f est croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 4 bis)

On trace la droite $\triangle$ d'équation: $y = 1 + \frac{1}{2}x$ $\quad M(x;\sqrt{1+x})$ $N(x;1+\frac{1}{2}x)$; $\overline{NM} = \sqrt{1+x} - (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)$. Si x est voisin de zéro, $1+\frac{1}{2}x$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$.

$$\sqrt{1+x} - (1+\frac{1}{2}x) = \frac{-\frac{1}{4}x^2}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x}$$ ce nombre est négatif sur son ensemble de définition.

Recherchons un majorant de $\frac{x^2}{4(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x)}$.

Si l'on s'impose par exemple: $x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$

alors $\frac{4}{\sqrt{2}} + 3 < 4(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x) < 5 + 4\sqrt{3/2}$

donc $$\frac{1}{4(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x)} < \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{2}}+3} < 0{,}18$$

En résumé: si $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ alors $0\leqslant-\sqrt{1+x}+(1+\frac{1}{2}x)\leqslant 0{,}18x^2$

ou bien si $-0{,}1<x<0{,}1$ alors $0\leqslant-\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\leqslant 0{,}14x^2$.

Sous la condition $|x| < 1/2$; $1 + \frac{1}{2}x$ est une valeur approchée par excès de $\sqrt{1+x}$ à $0{,}18\ x^2$ près.

La fonction affine $x \longmapsto 1 + \frac{1}{2}x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

5 — ***Etude de la fonction***: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \overset{f}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \text{(figure 5)}$$

f peut être étudiée sur toute partie de $]-1\,;+\infty[$

Sens de variation: f est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$

Etude locale de f au voisinage de zéro (figure 5 bis)

On trace la droite $\triangle$ d'équation: $y = 1 - \frac{1}{2}x$; $M(x;\frac{1}{\sqrt{1+x}})$; $N(x;1 - \frac{1}{2}x)$; $\overline{NM} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - (1 - \frac{1}{2}x)$.

Pour rechercher une majoration, on utilise les majorations de 3°) et 4°).

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - (1 - \frac{1}{2}x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}\right)+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x)\right)$$

$$\overline{NM} = \frac{(1 + \frac{1}{2}x) - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}.(1 + \frac{1}{2}x)} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x)$$

d'après 4°) $0 \leqslant (1 + \frac{1}{2}x) - \sqrt{1+x} \leqslant 0{,}18\ x^2$ si $|x| < 1/2$

d'après 3°) $0 \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} - (1 - \frac{1}{2}x) \leqslant 1{,}2 \,.\, \frac{x^2}{4}$

et $\frac{3}{4}\sqrt{1/2} \leqslant \sqrt{1+x}.\ 1+\frac{1}{2}x$

On en déduit :

$$0 \leqslant \overline{NM} \leqslant \frac{0{,}18\,.\,4\sqrt{2}}{3}x^2 + \frac{1{,}2}{4}x^2$$

et $\left(\frac{4\times 0{,}18\sqrt{2}}{3}+\frac{1{,}2}{4}\right)x^2 \leqslant 0{,}64x^2$.

En résumé: Si $-1/2 < x \leqslant 1/2$ alors $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - (1-\dfrac{1}{2}x) \leqslant 0{,}64x^2$.

Sous la condition $|x| < 1/2$; $1 - \dfrac{1}{2}x$ est une valeur approchée par défaut, à $0{,}64\ x^2$ près.

La fonction affine $x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{2}x$ approche, au voisinage de zéro, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Voici un certain nombre de fonctions étudiées au voisinage de zéro; d'autres, aussi, sont intéressantes: par exemple $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{(1+x)^2}$; on démontre que $1-2x$ est une valeur approchée de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à $8x^2$ près sous la condition $|x| < 1/2$.

E — GÉNÉRALISATION

Dans le paragraphe précédent, des approximations de fonctions au voisinage de zéro par des fonctions affines sont proposées, mais on peut étudier des approximations au voisinage d'un réel x_0 , par des fonctions simples (par exemple des fonctions polynomes). C'est le principe des développements limités.

Voici quelques formules:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\, x^{n-1} + x^{n-1} . \alpha(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\times 4}x^2 + \ldots + (-1)^{p-1}\ \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times(2p-3)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2p}\ x^p + x^p.\alpha(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^2 + \ldots + (-1)^p\ \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2p}\ x^p + x^p.\alpha(x)$$

F — QUELQUES EXEMPLES EMPRUNTÉS A LA PHYSIQUE

1 — La pesanteur terrestre varie en fonction de l'altitude ; la loi de la gravitation universelle (Newton) montre que:

$$g(z) = \frac{g(0) \times \mathrm{R}^2}{(\mathrm{R} + z)^2}$$

$g(0)$: Intensité du champ de pesanteur à l'altitude 0

z: Altitude du point considéré

R: Rayon de la terre ($\mathrm{R} \simeq 6400$ km)

$g(z)$: Intensité du champ de pesanteur à l'altitude z.

On se propose d'étudier les variations de $g(z)$ lorsque z varie au voisinage de $z_0 = 0$, ou plutôt d'étudier les valeurs approchées de $g(z)$ au voisinage de 0. Par quelle fonction affine simple peut-on obtenir une valeur approchée de $g(z)$?

L'écriture de $g(z)$ est modifiée : $g(z) = \dfrac{g(0)}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2}$.

$\dfrac{z}{R}$ est un nombre voisin de zéro.

Rappel :

$\dfrac{1}{(1+x)^2} \simeq 1 - 2x$ à $8x^2$ près.

$1 - 2x$ est une valeur approchée par défaut de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à $8x^2$ près

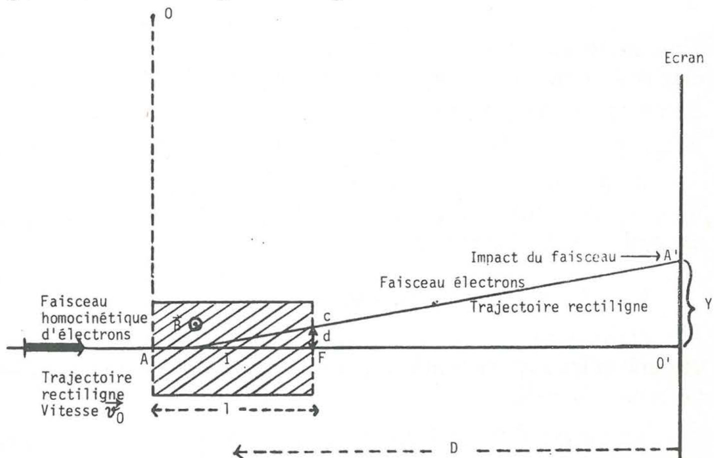
$g(z) \simeq g(0) \quad 1 - \dfrac{2z}{R}$; majorant de l'erreur : $g(0) \times 8 \times \left(\dfrac{z}{R}\right)^2$

Valeurs numériques

$g(0) = 9{,}81\ \mathrm{N\ kg^{-1}}$ en France.
Prendre pour z : 100 m ; 1000 m ; 9 km (les plus hautes montagnes) ; 50 km (presque plus d'air) ; 300 km (vide, périgée des satellites artificiels).

2 — *Déviation d'un faisceau d'électrons dans un champ magnétique uniforme*

Le champ magnétique est représenté par le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure. Il est produit par des bobines dans un espace approximativement parallélépipédique, dont la trace dans le plan de figure est un rectangle de longueur l.



OA = R
AF = l
FC = d

$\overset{\frown}{AC}$ arc de cercle de rayon R — R grand, l et d petits par rapport à R

Calcul de d

Choix d'un repère: A origine; axe des abscisses de support AI
axe des ordonnées de support AO

Equation du cercle de centre O $(0;R)$ de rayon R: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$

Si $x = l$ et $y = d$, $l^2 + (y - R)^2 = R^2$ d'où $(y - R^2) = R^2 - l^2$

$R > l$: $y - R = \sqrt{R^2 - l^2}$ ou $y - R = -\sqrt{R^2 - l^2}$

Soit $y = R + \sqrt{R^2 - l^2}$ ou $y = R - \sqrt{R^2 - l^2}$

donc $d = R - \sqrt{R^2 - l^2}$ ou $d = R\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2}\right)$

Rappel

$\sqrt{1+\alpha}$ a pour valeur approchée par excès $1 + \frac{1}{2}\alpha$, à $0{,}2\,\alpha^2$ près.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right) - 0{,}2\,\alpha^2 < \sqrt{1+\alpha} < \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$d \simeq R \times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2\right)\right) \qquad d \simeq \frac{R}{2} \times \left(\frac{l}{R}\right)^2;$$

On en déduit aussi l'encadrement :

$$\left(1 + \frac{-1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2\right) - 0{,}2\left(\frac{l}{R}\right)^4 < \sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2} < 1 + \frac{-1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2$$

$$\frac{R}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2 < d < \frac{R}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2 + 0{,}2\left(\frac{l}{R}\right)^4 \times R\,.$$

Une valeur approchée par défaut de d est $\frac{1}{2R} \times l^2$ à $0{,}2\,\frac{l^4}{R^3}$ près.

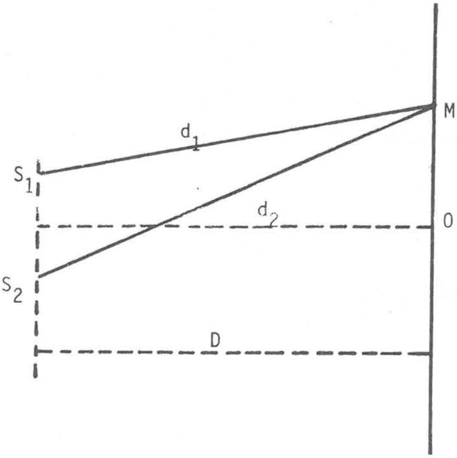
Commentaires: La trajectoire circulaire de centre O et de rayon OA des électrons dans le champ magnétique est remplacée par une trajectoire parabolique $\overset{\frown}{AC}$, d'axe OA. Le faisceau poursuit son trajet suivant la tangente à l'arc $\overset{\frown}{AC}$. Cette tangente passe par I, milieu de AF.

Il devient très commode d'exprimer la "déflexion" du faisceau $Y = O'A'$, connaissant la géométrie du tube employé (télévision par exemple), et la distance d.

3 — *Interférences lumineuses*:

Dans une expérience d'interférences lumineuses, tout se passe comme si les rayons lumineux provenaient de deux sources synchrones et en phase S_1 et S_2.

En un point M de l'écran se superposent les rayons S_1M et S_2M. Le point M sera éclairé au maximum, si la différence $d_2 - d_1$ est égale à $k\lambda$. (k entier; λ longueur d'onde de la lumière utilisée). Le point M sera dans l'obscurité si $d_2 - d_1$ est égale à $(2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}$. Il est donc nécessaire de calculer la différence de marche $\triangle$ en fonction des caractéristiques du dispositif expérimental, c'est-à-dire D; a; x.



S_1M et S_2M : rayons lumineux

$S_1S_2 = a$

$S_1M = d_1$

$S_2M = d_2$

$OM = x$

Calcul de la différence de marche $\triangle = d_2 - d_1$

$$d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \quad ; \quad d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_2 = D\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{D}\right)^2} \quad ; \quad d_1 = D \times \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2}$$

Recherche d'une approximation de d_1, d_2 puis de $d_2 - d_1$, a et x étant petits par rapport à D.

Rappel:

$$\sqrt{1 + \alpha} \simeq 1 + \frac{1}{2}\alpha \text{ à } 0{,}2\,\alpha^2 \text{ près.}$$

$$1 + \frac{1}{2}\alpha - 0{,}2\,\alpha^2 \leqslant \sqrt{1 + \alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$d_1 \simeq D \times \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right) \quad ; \quad d_2 \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right)$$

$$\text{d'où } d_2 - d_1 \simeq \frac{D}{2} \times \left(\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}\right) \quad ; \quad d_2 - d_1 \simeq \frac{ax}{D}$$

Encadrement de d_1, d_2, puis de $d_2 - d_1$:

$$\mathrm{D}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^2-0{,}2\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^4\right)<\mathrm{D}\sqrt{1+\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^2}<\mathrm{D}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^2\right)$$

$$\mathrm{D}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a}{2}-x}{\mathrm{D}}\right)^2-0{,}2\left(\frac{\frac{a}{2}-x}{\mathrm{D}}\right)^4\right)<d_1<\mathrm{D}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a}{2}-x}{\mathrm{D}}\right)^2\right)$$

Donc :

$$\frac{ax}{\mathrm{D}}-0{,}2\mathrm{D}\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^4<d_2-d_1<\frac{ax}{\mathrm{D}}+0{,}2\mathrm{D}\left(\frac{\frac{a}{2}+x}{\mathrm{D}}\right)^4$$

et $$\left|(d_2-d_1)-\frac{ax}{\mathrm{D}}\right|<\mathrm{D}\times 0{,}2\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\mathrm{D}}\right)^4$$

14

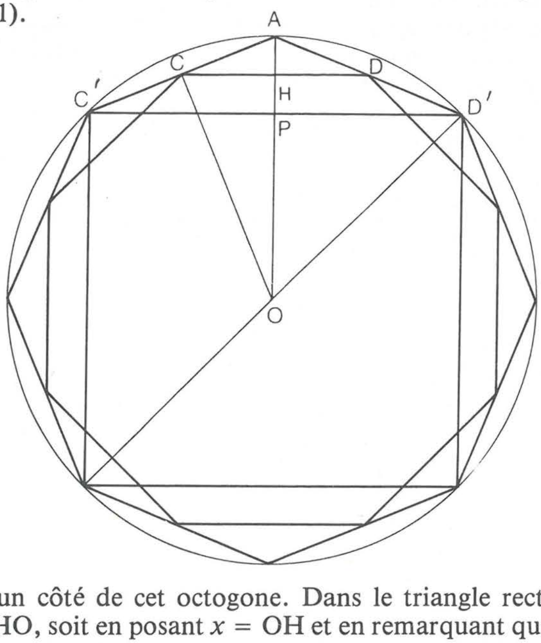
OÙ L'ON SE TROUVE AMENÉ A RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

OBJECTIFS :

- *résolution d'une équation par dichotomie*
- *résolution par changement d'inconnue*
- *résolution babylonienne*

Le second degré arriva sournoisement. Ce fut à propos du calcul de π par les isopérimètres.

Il s'agissait de construire, à partir d'un carré de 40 cm de périmètre, un octogone régulier de même périmètre et de calculer l'apothème de ce dernier (fig. 1).



(fig. 1)

CD est un côté de cet octogone. Dans le triangle rectangle OAC, $HC^2 = HA.HO$, soit en posant $x = OH$ et en remarquant que CD mesure 5 cm :

$$2{,}5^2 = (x-5)\,x$$

Après de vaines tentatives, les élèves se rendent compte que cette équation résiste anormalement. Jusqu'à ce qu'un redoublant s'aperçoive qu'elle est du second degré et le dise..., ce qui jette un froid. Les quelques équations du second degré vues en troisième se résolvaient, elles, mais celles-ci... Le redoublant, quant à lui, a oublié les « formules ».

Le désarroi est tel que je dois intervenir :

« On a deux calculatrices programmables. Elles vont nous servir à construire par points la courbe représentative de la fonction polynome f : $x \mapsto x^2 - 5x - 6,25$ ».

Je donne le programme en indiquant brièvement la signification des sigles mystérieux, car c'est la première rencontre de la classe avec une calculatrice programmable (TI 58-59).

LRN 2nd LBL A STO OO $x^2 - 5 \times$ RClOO $- 6,25 =$ RS LRN

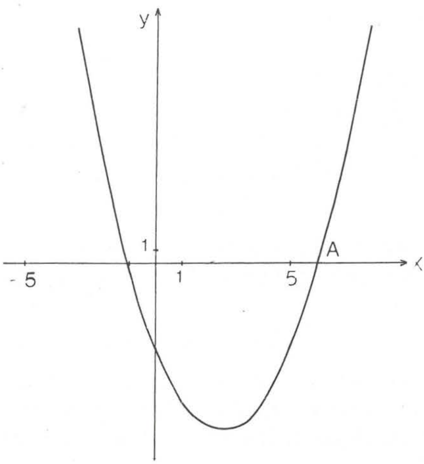
Deux élèves sont chargés des calculatrices ; ils donnent, à la demande, les valeurs de f que désirent leurs camarades. Les résultats arrivent d'abord en désordre ; je les inscris tous au tableau puis fais opérer un premier classement en prévoyant de la place pour des données complémentaires, travail nécessaire pour le choix des unités graphiques.

Après discussion, on choisit un centimètre sur l'axe des abscisses et un demi-centimètre sur celui des ordonnées (fig. 2). Les points sont le plus souvent joints par des segments. J'indique que, pour respecter la réalité, on ne doit pas avoir de points anguleux et donc qu'il faut avoir suffisamment de points pour faire un tracé à main levée. Nouvelles demandes de valeurs de f :

f(2,5) = $-12,5$ f(6,5) = 3,5 f(7,5) = 12,5

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
-3	17,75	1	$-10,25$	5	$-6,25$
-2	7,75	2	$-12,25$	6	$-0,25$
-1	$-0,25$	3	$-12,25$	7	7,75
0	$-6,25$	4	$-10,25$	8	17,75

(fig 2 après réduction)



Il est clair pour tout le monde qu'il y a deux valeurs x' et x'' pour lesquelles f(x) est nulle et qu'on peut les encadrer ainsi :

$$-1{,}25 < x' < -1 \qquad\qquad 6 < x'' < 6{,}25$$

qu'il n'y en a pas d'autre car, pour $x > 8$ ou $x < -3$, le terme x^2 du polynome imposera sa loi et les f(x) correspondants deviendront de plus en plus grands. Quelques essais demandés aux préposés à la calculatrice le confirment : f(50) = 2 243,75 ; f(−100) = 10 493,75.

Il s'agit maintenant d'approfondir la connaissance de x' et de x''.

Pour x'', par exemple, certains proposent des essais à la calculatrice :

f(6,1) = 0,46	f(6,02) = −0,1095
f(6,05) = 0,1799	f(6,03) = −0,0391
f(6,01) = −0,1799	f(6,04) = 0,0316

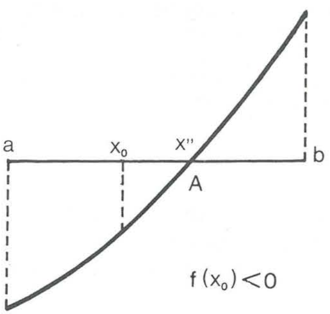
On a donc $6{,}01 < x'' < 6{,}05$ puis $6{,}03 < x'' < 6{,}04$.

Je demande que l'on abandonne cette méthode aléatoire de recherche mais que l'on s'en inspire pour créer un algorithme.

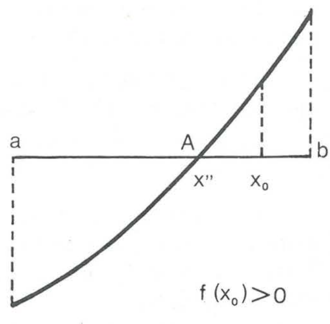
Si l'on grossit la figure au voisinage du point A, on se trouve, lorsqu'on cherche à situer un nombre x_0 de l'intervalle]a,b[par rapport à la racine inconnue x'', dans l'une des deux situations suivantes :

— dans le premier cas on conclut : $x_0 < x'' < b$

— dans le second : $a < x'' < x_0$



(fig. 3)



Il suffit donc de se donner un nombre toujours compris entre a et b, de calculer $f(x_0)$ et de reprendre le calcul avec l'intervalle $]x_0, b[$ si $f(x_0) < 0$, avec l'intervalle $]a, x_0[$ si $f(x_0) > 0$.

Pour faciliter la tâche j'indique que, dans la calculatrice, on peut insérer un programme permettant de calculer la demi-somme des bornes.

Il faut l'écrire au-delà du pas 16 pour que les deux programmes n'interfèrent pas.

GTO 17 LRN 2nd LBL B STO OI RS 2nd LBL C STO O2
+ RCl OI = : 2 = RS LRN

On entre donc a en B, b en C ; on obtient $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ qu'on entre en A.

On part de l'encadrement trouvé par tâtonnement.

f(6,03)	= −0,0391		
f(6,04)	= 0,0316	6,03	$< x'' <$ 6,04
f(6,035)	= −0,003775	6,035	$< x'' <$ 6,04
f(6,0375)	= 0,01390625	6,035	$< x'' <$ 6,0375
f(6,03625)	= 0,0050640625	6,035	$< x'' <$ 6,03625
f(6,035625)	= 0,0006441406	6,035	$< x'' <$ 6,035625
f(6,0353125)	= −0,015655274	6,0353125	$< x'' <$ 6,035625
f(6,03546875)	= −0,0004607178	6,03546875	$< x'' <$ 6,035625
f(6,035546875)	= 0,0000917053	6,03546875	$< x'' <$ 6,035546875
f(6,035507813)	= −0,0001845078	6,035507813	$< x'' <$ 6,035546875

On obtient donc $x'' \simeq 6{,}0355$ à 10^{-4} près par défaut.

« Certains savent déjà que, parmi les équations, les équations du second degré sont des privilégiées car il existe des formules permettant de les résoudre.

En 3ème vous avez résolu des équations du second degré. Comment se présentaient-elles ? »

Je reçois quelques réponses :

$$(x-4)(x-3) = 0 \quad (1) \qquad\qquad 2x^2-7 = 0 \quad (2)$$

Le problème pour nous est donc de ramener telle équation que nous ne savons pas résoudre à une équation du type (1) ou (2).

Je suggère la piste suivante : remplacer x par $\alpha + X$ et essayer de choisir α de manière que l'équation obtenue soit du type (2).

$$(\alpha+X)^2 - 5(\alpha+X) - 6{,}25 = 0$$
$$\alpha^2 + 2\alpha X + X^2 - 5\alpha - 5X - 6{,}25 = 0$$

La recherche s'oriente d'abord dans des voies erronées : factorisations sans issue, expression de α en fonction de X, choix aléatoire de α ! Enfin, au bout d'une demi-heure, surgit une bonne idée que je souligne ; quelqu'un écrit :

$$X^2 + 2\alpha X - 5X + \alpha^2 - 5\alpha - 6{,}25 = 0 \qquad (3)$$

Le but semble proche. Comment choisir α pour faire disparaître tous les termes du premier degré ?

Dix minutes passent encore avant qu'une autre élève n'ait l'idée de poser $2\alpha X - 5X = 0$. Inconsciemment, elle sous-entend le quantificateur car elle écrit $X(2\alpha-5) = 0$ d'où $\alpha = \dfrac{5}{2}$.

Tout le monde se jette littéralement sur cette valeur de α tant convoitée et la porte dans (3). Certains, victimes d'erreurs de calcul, sont déçus : ils n'ont pas compris la raison du choix de $\alpha = \dfrac{5}{2}$.

La plupart des élèves obtiennent néanmoins :

$$X^2 - 12,5 = 0$$

Calculer X' et X'' puis x' et x'' se fait dès lors rapidement. Tout concorde. $x' = \dfrac{5}{2} - \sqrt{12,5}$ $\qquad x'' = \dfrac{5}{2} + \sqrt{12,5}$

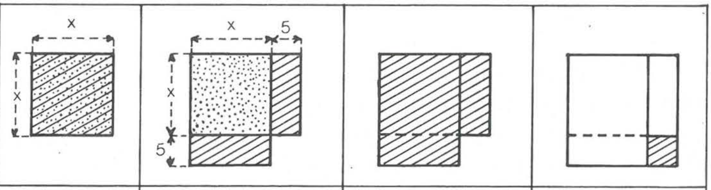
Cependant une courte synthèse s'impose pour montrer surtout comment les idées mises en avant au cours de la recherche peuvent être présentées de manière plus rigoureuse et plus concise.

Le passage au cas général s'effectue ensuite sans difficulté, hormis des erreurs de calcul et l'omission (bien naturelle !) de la discussion relative au discriminant.

• **Comme les Babyloniens** (1 000 ans avant notre ère)

Méthode reprise par des algébristes arabes (IXe siècle) en particulier par Al-Khawarizmi (d'où l'étymologie du mot Algorithme).

Soit à résoudre dans **R** $x^2 + 10x = 56$. La méthode est fondée sur des considérations d'aires. Elle est suggérée par le schéma suivant :



Mesure de la surface hachurée	x^2	...	...	...

$$x^2 + 10x + 25 = 56 + 25$$
$$(x+5)^2 = 81$$

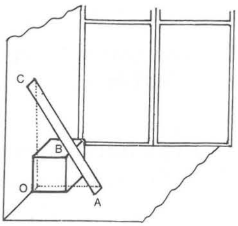
On n'obtient bien sûr qu'une solution mais la voie est ouverte pour la recherche de la factorisation du trinome $x^2 + 10x - 56$.

Autres exercices : $x^2 + 10x = 39$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Quelques problèmes du second degré

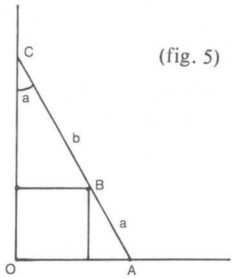
• Voici une petite expérience toute simple que chacun peut réaliser avec une règle plate graduée transparente et un cube. On place le cube dans un angle de fenêtre (fig. 4) et on dispose la règle de manière que ses extrémités A et C s'appuient respectivement sur le bord horizontal et sur le bord vertical de la fenêtre, tandis que le plat de la règle touche l'arête du cube. On lit par transparence les distances CB et BA.



(fig. 4)

L'expérience réalisée en classe donna, compte tenu du fait que le zéro de la règle ne coïncide pas avec son extrémité : 25,2 et 5,8.

Il s'agit maintenant de résoudre ce problème : trouver les longueurs de CB et BA en se donnant uniquement la longueur de la règle (31 cm) et celle de l'arête du cube (5,6 cm).



(fig. 5)

Un élève remarque que, seules, deux positions de la règle conviennent. Et le problème est donné en recherche à la maison. Trois jours après, aucune idée ! pas tout à fait cependant... « il faudrait connaître les angles » dit quelqu'un. « C'est une bonne idée. Calculez sin α ».

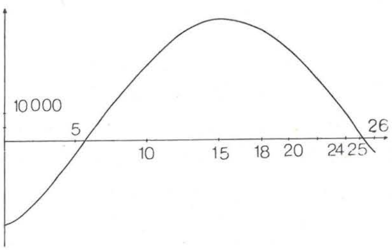
$$\sin \alpha = \frac{5,6}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - 5,6^2}}{a}$$

A la séance suivante trois élèves ont résolu le problème graphiquement en représentant par points la fonction

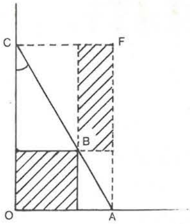
$$f : a \mapsto a^4 - 62a^3 + (31^2 - 2.5,6^2)a^2 - 62.5,6^2a - 31^2.5,6^2$$
$$\text{soit } a^4 - 62a^3 + 898,28a^2 - 1944,32a - 30136,96$$

Les résultats lus sur le graphique de la figure 6 corroborent les résultats expérimentaux. On affine néanmoins par dichotomie. La calculatrice programmable est bien utile !

(fig. 6)



J'indique alors une autre piste. « Au lieu de choisir a et b comme inconnues, posez $OA = x$ et $OC = y$ et faites intervenir l'aire du rectangle OAFC » (fig. 7).



$$xy = 5{,}6x + \ldots$$

(Remarquer l'égalité des aires des deux surfaces hachurées).

(fig. 7)

• Sur le Petit Robert on lit à « Nombre d'or » :

« Esthétique (dans le partage asymétrique d'une composition picturale). Rapport entre la plus grande des deux parties et la plus petite, égal au rapport entre le tout et la plus grande ».

A partir de cette définition calculer le nombre d'or. Puis construire à la règle et au compas un rectangle dont le rapport des dimensions est le nombre d'or.

15

ÉNERGIE ET RENTABILITÉ

OBJECTIFS

- La fonction affine par morceaux.
- Utiliser l'outil mathématique pour décider soi-même d'un choix en toute connaissance de cause.
- Donner aux élèves le goût de la recherche en équipe.

SUJET DE LA RECHERCHE

Nous nous sommes procuré dans une agence EDF des dépliants donnant les tarifs ; nous les avons distribués à tous les élèves qui ont ainsi travaillé sur une situation réelle.

Le Gaz de France propose aux usagers divers abonnements. Chacun d'eux comprend :

— une partie fixe annuelle, répartie en douze mensualités, indépendante de la consommation ;

— un prix unitaire du kWh applicable à la consommation relevée sur le compteur de l'usager.

Prix en vigueur à dater du :

1er MAI 1978

Les prix indiqués ci-contre s'entendent TVA (17,6 %) incluse.

*Le "code tarif", qui figure sur vos factures, permet d'identifier votre abonnement.

abonnement	Code tarif *	Montant mensuel fixe (francs)	Prix du kWh (centimes) applicable à la consommation		
[illegible]	751	8.41	1ere tranche 372 kWh par mois ▶ 17,57	surplus ▶ 13,44	
[illegible]	711	11,78	13,21		B0
B 1	712	36,68	9,03		B1
3 Gb ind.	727	76,36	7,09		B2
3 Gb coll.	729	42,54	7,09		

Tableau 1

I. Plan du travail

1) Par équipes de 2, 3 ou 4, les élèves dégagent, des données de ce tableau, les 3 fonctions affines donnant le prix (en francs) payé par an, en fonction de la consommation C, pour chacun des 3 tarifs.

$$\mathrm{B}_0\,(C) = 141{,}36 + 0{,}1321\ C$$
$$\mathrm{B}_1\,(C) = 440{,}16 + 0{,}0903\ C$$
$$\mathrm{B}_2\,(C) = 916{,}32 + 0{,}0709\ C$$

2) Ils tracent, sur papier millimétré, les droites représentatives des 3 fonctions affines.

3) Ils déterminent les seuils de changement de tarif :

— *C* par les calculs,

— *G* par lecture sur le graphique.

4) A l'aide du graphisme, les élèves trouvent quel est le tarif le plus économique, suivant la consommation annuelle de l'usager.

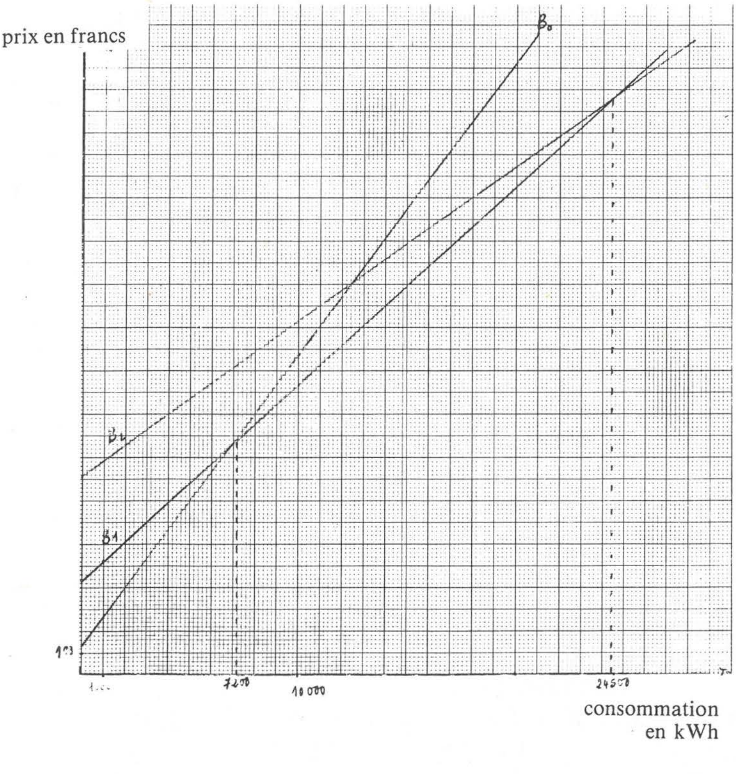
5) Chaque équipe rédige un compte rendu de son travail.

II. Remarques sur le travail des élèves

1) Les calculs sur les nombres décimaux ont été relativement facilités par l'emploi des calculatrices.

2) Une première difficulté a été le choix des unités sur les axes pour la représentation graphique : les élèves, en regardant les factures et en faisant les calculs, se sont rendu compte des grands nombres trouvés pour la consommation en kWh. Après des essais en commun, ils se sont mis d'accord pour représenter 1000 kWh par 0,5 cm

100 F par 0,5 cm.



3) Le calcul des seuils s'est fait par la recherche des coordonnées du point d'intersection des droites.

Exemple (1er seuil) : $141{,}36 + 0{,}1321\,C = 440{,}16 + 0{,}0903\,C$

$$0{,}0418\,C = 298{,}8$$

$$C = \frac{298{,}8}{0{,}0418} = 7148{,}3253 \text{ kWh}$$

Les élèves constatent une différence des résultats G lus sur le graphique et C, très précis, obtenus par les calculs.

Ils calculent alors l'erreur $\triangle = |C - G|$ et l'erreur relative $\frac{\triangle}{C}$ pour chaque seuil.

Ils ont pu ainsi apprécier l'incertitude de leur lecture suivant la qualité de leur graphique.

Exemple de calcul d'erreur sur le 1er seuil :

$$|7148{,}3258 - 7200| = |-51{,}6747| \quad ; \quad \triangle = 51{,}6747$$

$$\text{erreur relative} = \frac{51{,}6747}{7148{,}3258} = 0{,}0072289$$

0,7 % d'erreur pour le 1er seuil.

4) La lecture des facturations gaz de leurs parents (sur une année) et la vérification de la bonne (ou mauvaise) tarification de Gaz de France, les ont intéressés par le contact qu'ils avaient ainsi avec la vie réelle.

Tableau 2

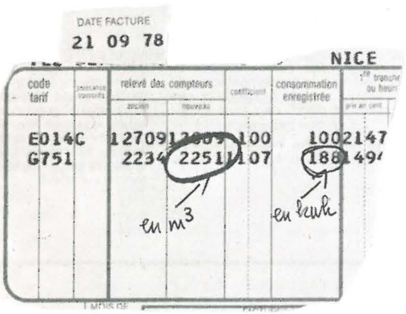
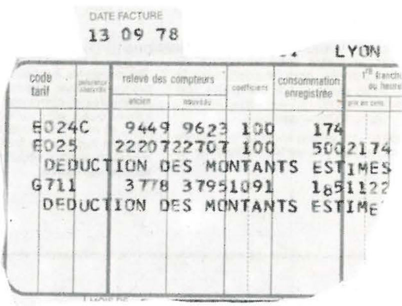


Tableau 3



Sur le tableau 2, G751 signifie gaz tarif de base (Cf. tableau 1).

Consommation : $2251 - 2234 = 17$ m³.

Le coefficient de conversion des m³ en kWh est 11,07 :

$$17 \times 11{,}07 = 188 \text{ kWk.}$$

Sur le tableau 2, G711 signifie tarif 130 (Cf. tableau 1). Le coefficient de conversion est 10,91. On voit que le coefficient varie suivant la région.

5) Chaque équipe a présenté un rapport complet après un travail de recherche qui a demandé plusieurs heures et une synthèse planifiée en commun.

Quelques-unes de leurs remarques témoignent de l'intérêt pour ce genre de travail :

«Relevé du conteur (sic) chez M. B.

9243	9439
9439	9569
9569	9681
9681	9776

9776 − 9243 = 533
533 × 11,07 = 5900,31 kWh.

Monsieur B. est abonné au tarif B_1 (712). La consommation annuelle est de 5900 kWh. Or le seuil est à 7148 kWh. Comme sa consommation est inférieure à ce chiffre, il doit changer de tarif».

«Nous avons trouvé que cette étude de la tarification domestique du gaz est très interressante (sic) et instructive. D'une part, nous avons pu ainsi appliquer des notions mathématiques vues durant notre année scolaire. D'autre part nous avons concrétisé, c'est-à-dire que nous avons utilisé des notions acquises pour un problème de la vie courante. Cela nous a permis aussi de travailler en équipe, ce qui est une expérience enrichissante.

Heureusement que nous avions la calculatrice !».

Un autre groupe apprécie d'avoir appris "comment l'on doit faire pour s'abonner, ce qui servira plus tard" et ajoute : "ce travail... ne ressemble pas aux exercices habituels, il nous change un peu et c'est mieux".

CONCLUSION

Ce travail était une illustration de la fonction affine par morceaux, présentée au préalable théoriquement. Il a fait réfléchir les élèves sur ces notions qui étaient restées jusque-là très abstraites.

D'autres notions ont été aussi éclairées, comme graduations, incertitudes, valeurs approchées, intersection de droites, calcul dans les décimaux.

D'autre part, il a montré aux enfants une intervention utile des mathématiques dans un problème de décision qui se pose dans la vie.

16

LE PETIT DÉJEUNER

OBJECTIFS

Quelques problèmes de diététique faisant intervenir :
- *l'interprétation et l'exploitation de tableaux de données*
- *des activités numériques et graphiques*
- *la résolution de systèmes d'inéquations*
- *les lignes de niveau*
- *l'utilisation de calculatrices*

1er problème (pour se familiariser avec les tableaux de données)

Etes-vous sûr d'avoir un régime alimentaire équilibré ?

L'énergie, évaluée en calories, dont l'homme a besoin, est fournie par trois types de nutriments : les protides, les lipides et les glucides.

La diététique moderne recommande que le petit déjeuner couvre entre le quart et le tiers des besoins journaliers.

Notre petit déjeuner correspond-il aux normes ?

Les tableaux I et II (dont des photocopies ont été distribuées) vous permettent-ils de répondre à cette question ?

Après examen des tableaux, un élève me dit qu'il faudrait connaître le poids de chaque aliment que l'on mange. Dès lors, je suis assailli de questions :

Combien pèse une tranche de pain ? une tasse de lait ? un morceau de sucre ?

J'avais, en prévision, fait quelques pesées :

une tranche de pain	50 g	une cuillerée à café de cacao	5 g
une tasse de lait	120 g	une cuillerée à café de miel	30 g
une pomme	150-200 g	un sucre	5 g
un yaourt	120 g	une biscotte	20 g
un bol de lait	300 g	un petit pain	40 g
du beurre sur une tranche de pain	5 g		

D'autres questions de ce genre me sont posées ; on se contente d'estimations, à charge de vérifier leur validité.

Cependant la recherche a du mal à s'organiser. Incontestablement les élèves éprouvent des difficultés à appréhender un problème aussi ouvert :
— choix personnalisé des données
— lecture et interprétation des tableaux.

Une adolescente de seize ans, solide fourchette au dire de ses camarades, tient à proposer le menu de son petit déjeuner :

deux tartines de pain blanc beurrées, une tartine de confitude, un œuf, un bol de lait en poudre écrémé avec deux morceaux de sucre.

Elle dresse le tableau suivant, calqué sur les tableaux de données.

Aliments en grammes	Calories	Protides	Lipides	Glucides
pain blanc 150	375	10,5	1,2	82,5
beurre 10	76,1	0,08	84	0,05
confiture 15	42,45	0,075	0,015	10,5
œuf .... la pièce	76	6,5	6	0,3
lait 300	1086	108	6	150
sucre 10	40	—	—	10
	1695,55	125,155	97,215	253,35

Si l'on se reporte aux normes déduites du tableau I, on trouve :

calories	protides	lipides	glucides
entre 800 et 1067	entre 24 et 32 g	entre 17,5 et 24 g	entre 135 et 180 g

Notre adolescente manifeste sa stupeur devant ces résultats. On les soumet à la classe. La première réaction est l'amusement, mais lorsque j'indique que ce petit déjeuner me semble tout à fait normal et que, si anomalie il y a, il faut la chercher ailleurs, dans l'interprétation d'un tableau, par exemple, chacun cherche à découvrir la faille. C'est une excellente occasion de développer l'esprit critique. Finalement, quelqu'un trouve un peu bizarres les chiffres concernant le lait. Les calculs sont repris et donnent, cette fois, des résultats cohérents.

TABLEAU I

Normes de l'alimentation humaine. Besoins journaliers.

Adolescents	Calories	Protides	Lipides	Glucides
		en g	en g	en g
10 à 15 ans (1)	2000-3400	60-100	45-75	340-580
15 à 20 ans (2)	3200-3400	95-100	70-75	540-580

(1) Pour chaque norme, on adoptera de préférence la valeur la plus basse vers le début de la période correspondante et la valeur la plus haute vers la fin de cette période.

(2) Pour chaque norme, la valeur la plus basse concerne la jeune fille de taille et de poids moyens, et la valeur la plus haute le jeune homme de taille et de poids moyens.

TABLEAU II

100 g de la partie comestible des aliments fournissent

Aliments	Indications complémentaires	Calories	Protides en g	Lipides en g	Glucides en g
1. Fruits frais					
agrumes	citron, orange, mandarine, pamplemousse	45	0,7	0,2	10
autres fruits	poire, pomme	61	0,3	0,4	14
	raisin	81	1	1	17
	banane, figue fraîche	89	1,4	0,4	20
2. Oeufs					
œuf de poule entier		162	13	12	0,6
œuf de poule la pièce		76	6,5	6	0,3
3. Produits entiers					
lait entier		67	3,4	3,7	4,9
lait écrémé		36	3,6	0,2	5,5
lait en poudre entier		500	25	28	37
lait en poudre écrémé		362	36	2	50
beurre		761	0,8	84	0,5
yaourt		45	3,4	1,5	1
fromage blanc, fromage à pâte, ferme	cantal, gruyère, Hollande, St-Paulin	372	27	28	3
4. Céréales					
flocons d'avoine		367	14	5	66
orge perlé		355	8,5	1	78
pain de blé	complet	220	7,7	1	48
pain de blé	blanc	250	7	0,8	55
pain de seigle		230	7	1	51
biscottes		362	10	2,5	75
biscuits secs		410	11	9	72
pain d'épice		354	9	3,3	72
germe de blé		371	27,3	8,7	44
5. Matières grasses					
beurre		761	0,8	84	0,5
margarine		752	0,8	83	0,4
6. Produits sucrés					
sucre	de canne, de betterave	400	—	—	99-100
confiture		283	0,5	0,1	70(35)
miel		304	0,5	0,2	75
cacao	en poudre	492	21	28	38
chocolat		500	7	24	64
7. Jambon	maigre	172	20	10	0,5
	gras	332	15	30	0,5

2e problème

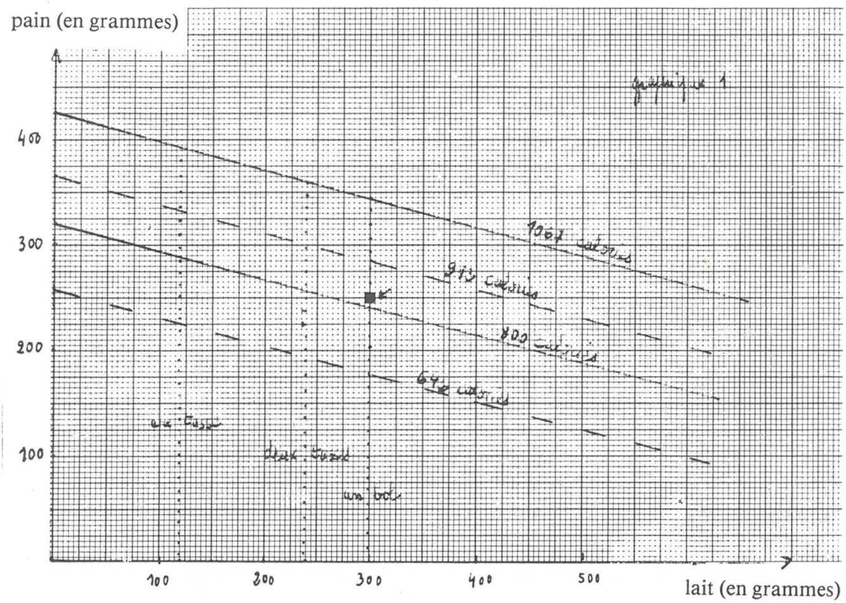
Pouvez-vous établir des petits déjeuners couvrant entre un tiers et un quart de vos besoins journaliers en calories, avec uniquement du pain blanc et une tasse de lait entier, du pain blanc et deux tasses de lait entier, du pain blanc et un bol de lait entier ? Combien de tranches de pain blanc au moins devrez-vous consommer dans chaque cas ?

On est d'abord amené à résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} x \,.\, 0{,}67 + 2{,}5y < 1067 \\ x \,.\, 0{,}67 + 2{,}5y > \ \ 800 \end{cases}$$

Dans le meilleur cas (carré fléché sur le graphique 1) on s'en tire avec 5 tranches de pain et un bol de lait.

Graphique 1



Mais n'est-il pas plus agréable de beurrer les tartines et de sucrer le lait ?

Avec 15 g de beurre et deux sucres, cela améliore la situation : 4 tartines suffisent (traits en pointillé sur le graphique 1).

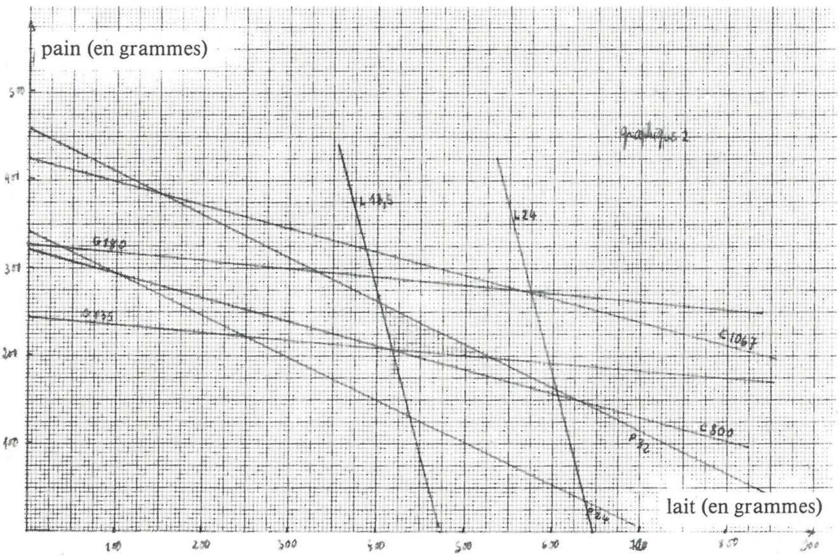
3e problème

Pouvez-vous établir un petit déjeuner qui couvre entre le tiers et le quart de vos besoins journaliers en calories, protides, lipides, glucides et qui ne comprend que du pain blanc et du lait entier ?

Cela revient à résoudre un système de huit inéquations.

$$
(1)\left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} x.0{,}67 \;+ y.2{,}5 \;< 1067 \\ x.0{,}67 \;+ y.2{,}5 \;> \;800 \end{array}\right) & \text{pour les calories} \\
\left.\begin{array}{l} x.0{,}034 + y.0{,}07 < \;32 \\ x.0{,}034 + y.0{,}07 > \;24 \end{array}\right) & \text{pour les protides} \\
\left.\begin{array}{l} x.0{,}037 + y.0{,}01 < \;24 \\ x.0{,}037 + y.0{,}01 > \;17{,}5 \end{array}\right) & \text{pour les lipides} \\
\left.\begin{array}{l} x.0{,}049 + y.0{,}55 < 180 \\ x.0{,}049 + y.0{,}55 > 135 \end{array}\right) & \text{pour les glucides}
\end{array}\right.
$$

Graphique 2



L'ensemble des solutions se lit dans la partie en grisé.

Par exemple, 430 g de lait entier et 225 g de pain assurent un petit déjeuner équilibré.

Les lectures graphiques étant dans ce cas délicates, une vérification à la calculatrice programmable s'impose :

```
000  76  LBL
001  11   A
002  42  STO
003  00   00
004  91  R/S
005  76  LBL
006  12   B
007  42  STO
008  01   01
009  91  R/S
010  76  LBL
011  13   C
012  42  STO
013  02   02
014  91  R/S
015  76  LBL
016  14   D
017  42  STO
018  03   03
019  65   ×
020  43  RCL
021  02   02
022  85   +
023  43  RCL
024  01   01
025  65   ×
026  43  RCL
027  00   00
028  95   =
029  91  R/S
```

LRN LRN

Le programme ci-contre (TI58, TI59) permet de vérifier rapidement si un couple donné est solution du système (1).

Si l'on veut, par exemple, calculer :

$$430.0{,}67 + 225.2{,}5$$

on frappe successivement :

430 A 0,67 B 225 C 2,5 D

la calculatrice donne 850,6, valeur qui est bien comprise entre 800 et 1067.

4^e^ problème

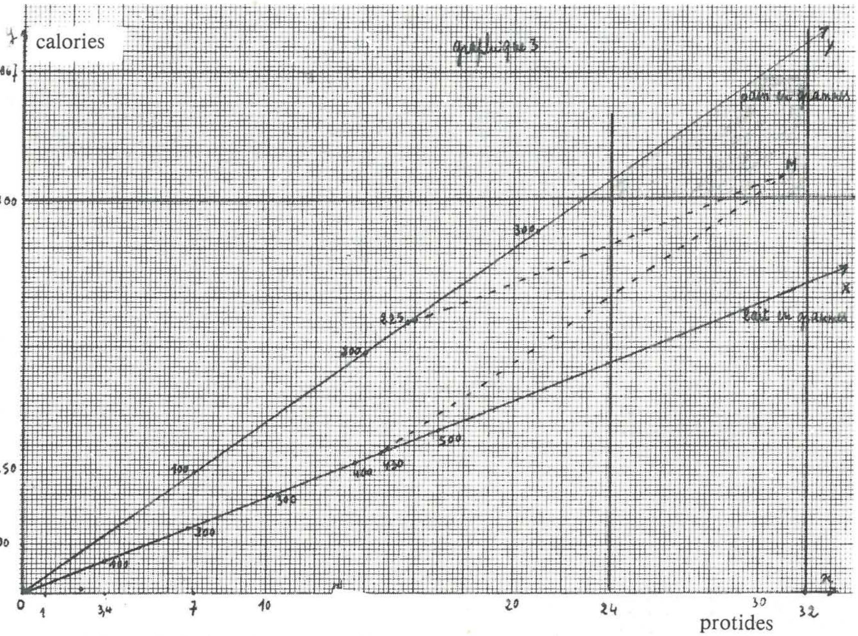
On peut aussi se poser la question de savoir sous quelles conditions (nombre de calories et masse de protides par exemple) on peut équilibrer le petit déjeuner composé uniquement de pain blanc et de lait entier.

Désignons par x la masse des protides (en grammes)
par y le nombre de calories
par X la masse du lait (en grammes)
par Y la masse du pain blanc (en grammes)

On a : $\quad x = 0{,}034X + 0{,}07Y$
$\qquad\quad y = 0{,}67\ X + 2{,}5\ Y$

On doit, bien sûr, éliminer les déjeuners sans pain (droite OX représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{67}{3{,}4}x$) et ceux sans lait (droite OY représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{250}{7}x$).

Graphique 3



OX et OY sont les axes d'un nouveau repère. On repère aisément sur chacun d'eux le point d'abscisse 100, ce qui permet de les graduer en grammes.

Le pentagone en grisé représente l'ensemble des solutions (petits déjeuners de pain blanc et de lait entier conformes aux normes). On constate que le point M (430;225) dans le repère OX, OY appartient effectivement à cette surface en grisé (graphique 3).

Remarques :

• la notion de ligne de niveau a été particulièrement utile pour montrer dans le deuxième problème la signification de la bande comprise sur le graphique 1 entre les droites 1067 calories et 800 calories ;

• l'intervention des calculatrices a, ici, l'immense avantage de permettre de travailler sur des données réelles.

17

CRITIQUE D'UNE INFORMATION

OBJECTIFS :

- Activités numériques fondées sur des calculs avec ou sans calculatrices programmables.
- Inciter les élèves à ne pas accepter sans critique des informations chiffrées fournies par les médias.
- Leur apprendre à réinvestir des connaissances mathématiques même modestes dans l'élaboration d'un processus de contrôle.

Le 21 novembre 1978 à 9 heures, Radio Europe n° 1 a donné l'information suivante :

« .... le taux d'accroissement de la population mondiale est 1,7 mais il est en régression. On prévoit que vers l'année 2050 la population se stabilisera entre 12 et 15 milliards... »

Quelles questions peut-on se poser au sujet de ces chiffres ?

Vécu du thème dans la classe

— « Quelle est la population mondiale ? »

— « On demandera au professeur de géographie ». En attendant, estimons-la à 4 milliards.

— « Que signifie : le taux est 1,7 ? » Est-ce 1,7 ‰ ou 1,7 % ?

— « Comment écrire 1 milliard ? » Quelqu'un suggère 10^9. Supposons le taux constant et égal à 1,7 ‰ . Le résultat est invraisemblable tandis qu'avec 1,7 % on tombe bien dans la fourchette 12-15 milliards. Mais ces 10^9 sont ennuyeux à traîner ; convenons que nos chiffres exprimeront des milliards d'individus.

— Oui, mais on a supposé le taux constant. Or il décroît. On peut penser que cette décroissance sera régulière (s'il n'y a pas de cataclysme !).

— Comment interpréter « régulier » ?

Après de nombreux tâtonnements, quelqu'un songe à la fonction $x \mapsto ax$ où x représente le temps (en années) et ax la diminution du taux. Entre 1978 et 2050 il y a 72 ans.

De ces considérations on déduit le coefficient a :

$$a = \frac{1,7}{7200}$$

Pour prévoir la population en 2050, il faut une calculatrice et même une calculatrice programmable.

— Pouvait-on faire ce calcul sans calculatrice programmable ? Oui, en découpant 72 ans en tranches de 18 ans par exemple.

De 1978 à 1996 on calculera avec un taux de 1,7 ;

de 1996 à 2014, avec un taux de $1{,}7 - \frac{1{,}7}{4} = 1{,}275$;

de 2014 à 2032, avec un taux de $1{,}7 - 2.\frac{1{,}7}{4} = 0{,}85$;

de 2032 à 2050, avec un taux de $1{,}7 - 3.\frac{1{,}7}{4} = 0{,}425$;

à partir de 2050, le taux d'accroissement est nul.

Quelques indications

année	population en milliards d'individus
1978	4
1979	$4.1{,}017$
1980	$4.1{,}017\,(1{,}017 - a)$
1981	$4.1{,}017\,(1{,}017 - a)(1{,}017 - 2a)$
....	
2050	$4.1{,}017\,(1{,}017 - a)(1{,}017 - 2a) \ldots (1{,}017 - 72a)$

```
LRN
76 LBL
11  A
42 STD
00  00
42 STD
01  01
91 R/S
76 LBL
13  C
42 STL
02  02
91 R/S
76 LBL
14  D
42 STD
03  03
91 R/S
76 LBL
15  E
43 RCL
00  00
75  -
43 RCL
02  02
95  =
42 STD
00  00
65  ×
43 RCL
01  01
95  =
42 STD
01  01
97 DSZ
03  03
15  E
91 R/S
LRN
```

Le programme ci-contre sur TI58 ou TI59 permet de résoudre le problème :

Entrer 1,017 en A

a en C

72 en D

Départ : appuyer sur E

Réponse après un temps assez long, car le programme doit être parcouru 72 fois :

1,85.....

En multipliant par 4 milliards, on trouve 7,4 milliards. Ce sera la population en 2050.

Sans la calculatrice programmable, on est amené à calculer :

$4.1{,}017^{18} \,.\, 1{,}01275^{18} \,.\, 1{,}00850^{18} \,.\, 1{,}00425^{18}$

Réponse : 8,5 milliards en 2050.

Ces deux résultats sont du même ordre de grandeur. Ils infirment nettement les chiffres d'Europe n° 1. « Pourquoi ?... écrivons à Europe n° 1 ». Les élèves ont adressé un rapport à Europe n° 1 afin d'avoir une explication sur cette anomalie. Ils attendent encore la réponse ! (juin 1980)

18

MATHÉMATIQUE ET ENVIRONNEMENT

I

But de l'exercice

Représenter graphiquement le mouvement des aiguilles d'une montre pendant 12 heures. En déduire les instants où les aiguilles se superposent.

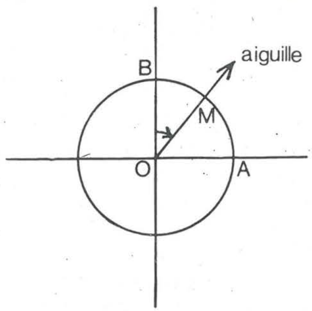
Connaissances préalables

- Equations de droites
- Mesure des angles (en degrés par exemple)

Intérêt de l'exercice

- L'élève doit choisir une méthode pour repérer la position des aiguilles, et voit une application directe de la mesure des angles.
- Deux exemples de périodicité
- Résolution graphique et algébrique de systèmes linéaires.

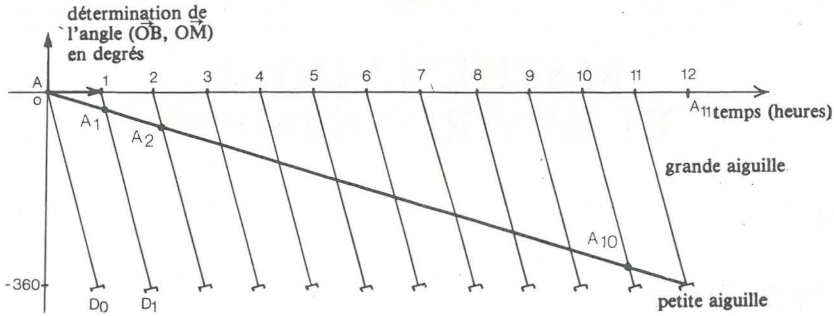
Solution proposée



- Repérage du mouvement des aiguilles :
  — tournent dans le sens rétrograde
  — position initiale choisie : MIDI
  — M repéré par la détermination de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OM})$ dans $[0°, -360°[$

- Représentation graphique :

L'élève découvre que le mouvement uniforme correspond à un segment de droite pour chacune des deux aiguilles ; la périodicité (période T) se traduit par une translation de vecteur $T.\vec{i}$ pour la grande aiguille.



- Superposition des aiguilles :

  D'abord : lecture graphique : les instants cherchés sont les abscisses des points A_0, A_1,... dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; $A_n \mapsto A_{n+1}$ dans la translation de vecteur $\frac{12}{11}\vec{i} - \frac{360}{11}\vec{j}$ $(0 \leqslant n \leqslant 9)$.

  Ensuite : équation de $\triangle$ (petite aiguille) : $y = -\frac{360}{12}x$

  équation de D_0 (grande aiguille, 1ère heure) : $y = -360x$

  équation de D_1 : par translation de vecteur $\vec{i}$ à partir de D_0 : $y = -360(x-1)$

  équation de D_n : par translation de vecteur $n\vec{i}$ à partir de D_0 : $y = -360(x-n)$

  Instants de superposition = abcisses de A_0, ... solutions d'une équation du 1er degré : on trouve $\frac{12}{11}$(h), ...,

  $n\frac{12}{11}$ (h), ..., $0 < n < 11$

Comportement des élèves

- Très grand intérêt pour ce problème concret
- Des hésitations sur la représentation des segments ouverts (liés au choix de l'intervalle $[0, -360°[$
- Des difficultés sur la détermination des équations de $\triangle$, D_0,...

Temps mis pour la résolution

Deux heures.

II.

Problème historique des "bœufs de Newton"

Sachant que 75 bœufs mangent en 12 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 60 ares, que 81 bœufs mangent en 15 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 72 ares, que x bœufs mangent en 18 jours l'herbe qu'il y a et celle qui pousse dans un pré de 96 ares, trouver x.

On admet que l'herbe pousse régulièrement, et que les bœufs mangent de façon régulière.

Connaissances préalables :

Equations du 1er degré à une inconnue.

Intérêt de l'exercice :

- Notion de proportion, mal assimilée par les élèves sortant de 3e (confusion fréquente entre égalité et proportionnalité en particulier).
- L'élève doit découvrir ce qui est invariant : la quantité d'herbe mangée *par jour et par bœuf.*

Solution proposée :

Notations a : quantité d'herbe initialement dans le pré, par are
h : quantité d'herbe qui pousse dans le pré, par are et par jour.

$$\frac{60\,(a + 12\,h)}{12 \times 75} = \frac{72\,(a + 15\,h)}{15 \times 81} = \frac{96\,(a + 18\,h)}{18\,x}$$

On en déduit $x = 90\,\dfrac{a + 18\,h}{a + 15\,h}$ *et* $\dfrac{a + 12\,h}{a + 15\,h} = \dfrac{8}{9}$ $\qquad a = 12\,h$

Alors $x = 100$

Comportement des élèves :

- Grand intérêt initial, vu la présentation amusante qui peut être faite de l'énoncé.
- De grosses difficultés à découvrir l'invariant : herbe mangée par jour et par bœuf.

III.

Problème :

1° Un feu de signalisation bicolore rouge-vert fonctionne à un carrefour en changeant régulièrement de couleur toutes les 20 secondes.

Un automobiliste se présente au carrefour à l'instant t. Trouver son temps d'attente θ au feu en fonction de t (on supposera qu'à l'instant $t = 0$ le feu passe au vert). Représenter graphiquement la fonction f : $t \mapsto \theta$. Vérifier que c'est une fonction périodique.

2° Deux carrefours successifs sont distants de 200 m. Un automobiliste roule à la vitesse uniforme v (en m/sec.). Quel temps lui faut-il pour aller d'un carrefour à l'autre? La vitesse en ville est limitée à 60 km/h. Que peut-on en déduire ?

Les deux carrefours sont munis de feux identiques à ceux du 1° qui passent au vert ou au rouge simultanément.

Une voiture se présente au 1^{er} feu au vert à un instant t. Déterminer en fonction de t la vitesse nécessaire au minimum pour passer au 2ème feu tant qu'il est encore vert.

Représenter le graphique de la vitesse minimum en fonction de l'instant de passage au 1^{er} feu.

La vitesse étant limitée à 60 km/h, à quel instant, au plus tard, faut-il passer au 1^{er} feu pour trouver le 2ème au vert ?

Ce problème permet de travailler sur
- les fonctions périodiques
- les fonctions affines par morceaux
- les hyperboles tracées par points
- la résolution graphique et numérique d'inéquations.

Grand intérêt des élèves pour ce problème.

IV.

Une solution alcoolisée titre t° si elle contient t parties d'alcool pour 100 parties de mélange.

On dispose d'un flacon A contenant a litres d'alcool pur et d'un flacon B contenant b litres d'eau. On prélève x litres d'alcool dans A et x litres d'eau dans B que l'on reverse respectivement dans B et A.
Soit f la fonction qui à x associe le titre de la solution obtenue en A.
Soit g la fonction qui a x associe le titre de la solution obtenue en B.

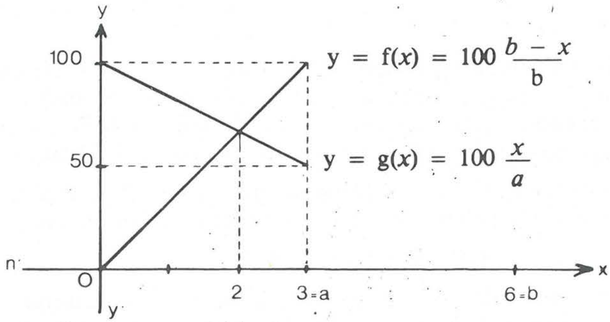
1°) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de a et b et préciser leur ensemble de définition.

2°) En prenant $a = 6$ et $b = 3$, tracer les courbes représentatives de f et g et en déduire graphiquement la valeur qu'il faut donner à x pour que les solutions obtenues en A et B titrent le même degré.

3°) Dans le cas général, calculer en fonction de a et b la valeur de x pour que les solutions obtenues en A et B titrent le même degré. Vérifier alors le résultat obtenu au 2e.

Le problème admet-il une solution, quels que soient a et b ?

On obtient le graphique :



V.

Coût d'une communication téléphonique :

a) Si tu téléphones de Niort à Angoulême, cela te coûte 0,50 F par tranche de 24 secondes, soit, par exemple, 1,50 F pour une minute, 2,50 F pour deux minutes.

Représente, après avoir explicité f(x) en fonction de x, la fonction f qui donne le coût f(x) en francs d'une communication téléphonique qui dure x minutes (on se limitera à $0 \leqslant x \leqslant 2,5$).

b) Si tu téléphones maintenant au Kenya (toujours de Niort), il t'en coûte 0,50 F pour une durée de 1,3 seconde.

Quel est le coût d'une minute de communication ?

La relation entre le coût en francs de la communication et sa durée en secondes est une fonction constante par intervalles ; la représenter lorsque la durée x (en secondes) décrit l'intervalle [0 ; 60].

Ne peut-on pas envisager d'"approcher" ce graphique par une droite qui donne de "bons résultats" ?

c) E désignant la fonction "partie entière" et h la fonction définie sur **R** de la manière suivante :

Si $x \in \mathbf{Z}$, $h(x) = x$

Si $x \in \mathbf{Z}$, $h(x) = E(x) + 1$,

établir que, pour tout x réel, $h(x) = -E(-x)$.

En déduire que le coût f(x) en francs d'une communication téléphonique au Kenya de x secondes est donné par : $f(x) = -\frac{1}{2} E\left(-\frac{x}{1,3}\right)$

Application : retrouver le coût d'une minute de conversation.

VI.

Hep, Taxi !

Le prix d'une course en taxi est la somme d'une "prise en charge" fixe (la même, de jour et de nuit) et d'un coût proportionnel à la distance parcourue, à deux tarifs : un de jour, un de nuit de 40 % supérieur. Les trajets de nuit sont ceux s'effectuant entre 21 heures et 7 heures du matin.

1) L'autre matin, Sylvain Dejourénuit a payé 13,40 F pour un trajet de 6 km ; il a réglé 16,60 F pour le trajet retour, fait de nuit.

Quels sont les tarifs de jour et de nuit ?

Tracer la représentation graphique de la fonction donnant le prix en francs d'une course de x km le jour ; idem pour la nuit. On prendra 1 cm pour 1 km en abscisse ; 1 cm pour 2 F en ordonnées ; x décrira l'intervalle [0 ; 9].

2) Le lendemain soir, le taxi qui ramenait Sylvain chez lui roulait à la vitesse uniforme de 30 km/h. La course lui a coûté 20,60 F. Parti à 20 h 54, à quelle heure est-il arrivé chez lui ?

Expliciter le prix $h(x)$ en francs, prix indiqué au fur et à mesure par le compteur en fonction de la distance x effectuée en km, du départ jusqu'à l'arrivée. Représenter h sur le même graphique que les fonctions du 1).

19

THÈME INTERDISCIPLINAIRE : GÉOGRAPHIE ET MATHÉMATIQUES

OBJECTIFS :

- construction de courbes par points
- problèmes de repérage
- activités numériques

Les activités proposées font intervenir des repérages sur carte ; les unes concernent le repérage de l'épicentre d'un tremblement de terre.

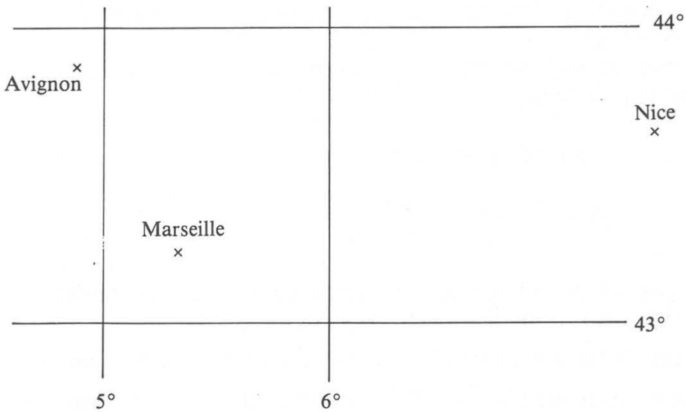
Pour la partie "géologique" on pourra compléter la documentation en se reportant au très intéressant fascicule de la collection "Que sais-je ?" : "Séismes et volcans".

Tremblement de terre

Une secousse tellurique est enregistrée 20,34 s plus tard à Nice qu'à Marseille ; 2,03 s plus tard à Avignon qu'à Marseille. La vitesse de propagation de l'onde sismique est 5,9 km/s.

Déterminer les coordonnées géographiques de l'épicentre du séisme.

Les habitants de quelques villages provençaux ont particulièrement ressenti la secousse. Quels peuvent être ces villages ?



1 cm représente 12 km *.

* N.D.R.L. La figure initiale a été réduite.

On assimile la portion de territoire concerné à une surface plane et les méridiens à des droites parallèles.

Les données permettent de calculer la différence des distances

EN - EM E (épicentre), N (Nice), M (Marseille) et
EA - EM A (Avignon)

A l'échelle de la carte on trouve :

$$\begin{aligned} EN - EM &\simeq 10 \text{ cm} \\ EA - EM &\simeq 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de construire par points deux branches d'hyperboles. Leur intersection fournira approximativement l'épicentre du séisme.

Après un quart d'heure d'essais infructueux, deux élèves réussissent à construire un point d'une hyperbole.

L'un d'eux, par exemple, a tracé le cercle de centre M et de rayon 2 cm, puis le cercle de centre N et de rayon 12 cm.

Mais il faut encore bien des échanges pour que tout le monde comprenne le principe de cette construction, et, surtout, pour qu'apparaissent enfin quelques branches d'hyperbole. Une synthèse s'avère alors nécessaire : au rétroprojecteur j'affine la méthode en construisant des cercles de centre M et de rayon 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm. (fig. 2) ce qui permet d'obtenir chaque fois deux points symétriques par rapport à MN.

Des maladresses, voire des erreurs de construction donnent encore quelques courbes fantaisistes. Il faut insister sur la "régularité" de la courbe et la présence d'un axe de symétrie.

La détermination des coordonnées géographiques pose quelques problèmes :

— d'orientation d'abord : où sont le nord, l'est, l'ouest ?
— de repérage
— de conversion des centimètres en minutes et donc d'intervention de la fonction linéaire

$$X \text{ (en minutes)} = K \,.\, x \text{ (en cm)}$$

$$\text{On trouve } K = \frac{60}{6{,}9}$$

ce qui permet de calculer le nombre de minutes correspondant à 2,1 cm : 18′ ; on trouve donc 5°18′ de longitude est.

Pour la latitude, toute la classe reprend pour K la même valeur ! On corrige et on trouve $K' = \dfrac{60}{9{,}4}$, ce qui donne pour 5,8 cm : 43° 37′ de latitude nord.

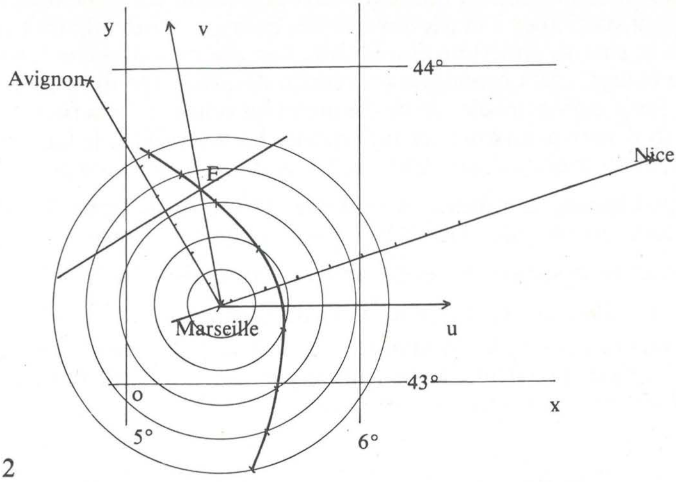


figure 2

1 cm représente 12 km *.

Restent à déterminer les villages voisins de l'épicentre ; ce travail est reporté. Il faut se procurer des cartes.

A la séance suivante, quelques élèves ont apporté la carte Michelin n° 84. On se répartit en groupes autour des cartes pour constater que nos coordonnées géographiques ne nous servent à rien, car, sur les cartes Michelin, elles sont en grades et, de surcroît, le méridien origine est celui de Paris.

On pourrait bien sûr s'en sortir mais au prix de calculs pour le moins fastidieux.

Il vaut mieux chercher un mode de détermination plus aisé. Au bout d'un quart d'heure de réflexion, de discussion, quelqu'un lance une idée : si on utilisait des angles ?

Dans deux groupes les élèves utilisent un procédé qui consiste en fait à un repérage polaire :

— mesurer l'angle $\widehat{uMv}$ (fig. 2)
— mesurer la distance ME, la convertir en km puis en cm pour la carte Michelin (échelle $\frac{1}{200000}$).

* N.D.R.L. La figure initiale a été réduite.

J'expose la méthode à l'aide du rétroprojecteur afin que tous les élèves puissent participer à la découverte des bourgs, ce qui apparaît comme un enjeu et suscite donc une émulation. Peu d'élèves donnent les mêmes noms de village ; cela provoque un certain désarroi. On me sollicite... en vain. Je reste impénétrable. Je ne donnerai les noms qu'à la fin de l'heure lorsque tous les travaux me seront rendus. En attendant, je laisse les élèves confronter leurs calculs, leurs constructions, je les y engage même.

Saint-Cannat, Lambesc, Aiguebelle. Des exclamations de satisfaction saluent ma réponse. Des élèves font une mine dépitée.

L'examen des travaux révèle la nature des erreurs :

— épicentre aberrant (des maladresses de construction)

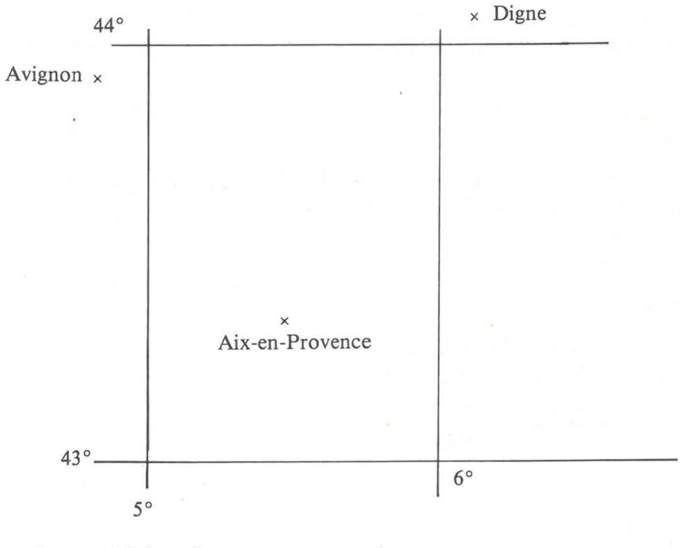
— des erreurs dans la manipulation des instruments mais pratiquement pas d'erreur de calcul ; le travail de groupe et les calculatrices ont à coup sûr favorisé cette performance.

Un autre exercice du même genre

Une secousse sismique est enregistrée 3,46 s plus tard à Avignon qu'à Aix-en-Provence ; 10,78 s plus tard à Digne qu'à Aix. La vitesse de propagation de l'onde sismique est 5,9 km/s.

Déterminer les coordonnées géographiques de l'épicentre du séisme.

Les habitants d'un bourg français ont particulièrement ressenti la secousse. Quel est ce bourg ?



1 cm représente 12 km *.

* N.D.R.L. La figure initiale a été réduite.

20

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE : PROPRIÉTÉS D'INCIDENCE

OBJECTIFS :

A partir de la réalisation, puis de l'observation de deux solides de Platon, faciles à construire et cependant moins familiers que le cube : le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier, on se propose :

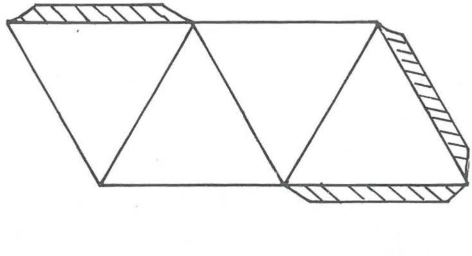
1) de recenser les objets primitifs de la géométrie dans l'espace ;
2) de faire pratiquer à bon escient le vocabulaire ;
3) de découvrir les propriétés d'incidence dans l'espace en partant des propriétés connues dans le plan ;
4) d'amener les élèves à conduire quelques déductions simples.

Introduction

On appréhende l'espace d'abord par le travail manuel. C'est donc à une séance de travail manuel que je vous invite. Vous avez sans doute déjà fabriqué un cube, un parallélépipède rectangle. Le cube est un polyèdre régulier. En connaissez-vous d'autres ? Plusieurs voix : la pyramide. D'accord, mais à combien de faces ? Comme sur la table là-bas. J'approche l'objet, un splendide tétraèdre régulier construit avec de minces baguettes de bois assemblées à l'aide de petites boules de pâte à modeler.

Je vous propose de créer un « bon » patron de tétraèdre régulier, c'est-à-dire un patron qui ne se désagrège pas en plusieurs morceaux à la découpe.

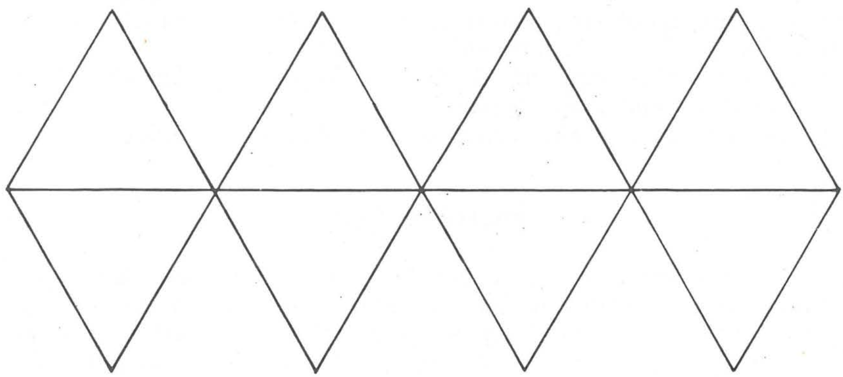
Facile ! cela donne par exemple



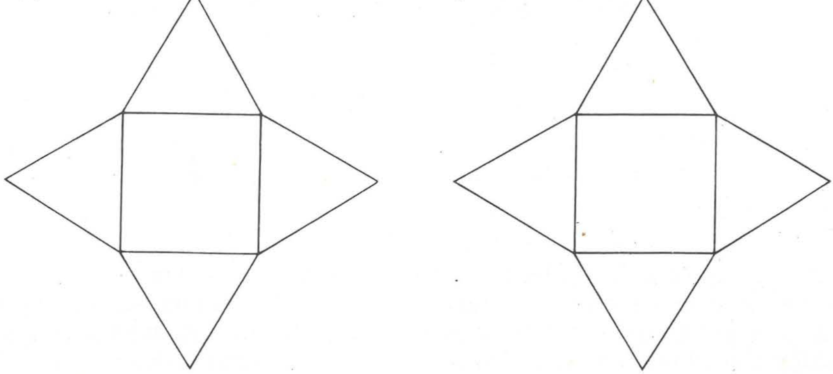
Mais il existe d'autres polyèdres réguliers, l'octaèdre que voici (en baguettes et en pâte à modeler), le fabuleux dodécaèdre, connu depuis l'antiquité et que Dürer a représenté parmi d'autres objets symboliques sur sa célèbre gravure, la Mélancolie. Je montre un exemplaire de dodécaèdre.

Enfin l'icosaèdre dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux. Mais essayez maintenant de faire le patron d'un octaèdre régulier. Cela pose problème. On demande à voir l'objet de plus près. Voici ce qui fut dessiné :

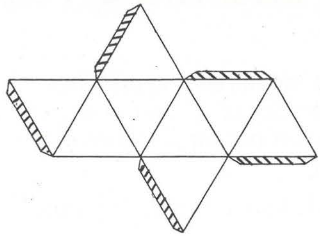
un mauvais patron



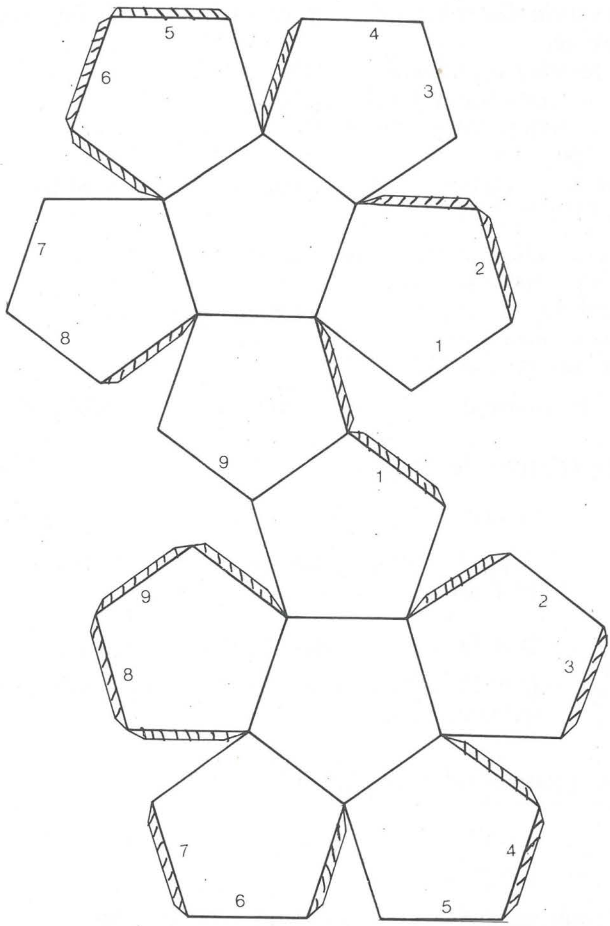
une habile réalisation
mais en deux parties



un « bon » patron



Le choix de l'emplacement des languettes de collage est un bon exercice de reconstitution dans l'espace.
Et pour couronner dignement cette séance de « vision de l'espace », pourquoi ne pas construire le patron d'un dodécaèdre régulier ? ... avec ses languettes !



A la découverte de l'espace

Pour faciliter une démarche heuristique chez les élèves, je leur demande d'étendre à l'espace ce qu'ils ont retenu des débuts de la géométrie plane, en se guidant au besoin sur l'observation du tétraèdre régulier et de l'octaèdre régulier.

On dresse d'abord la liste des premiers objets de la géométrie plane :

— le point
— la droite
— le plan

et des premières relations intervenant entre eux, relations représentées par les signes $\in$, $\subset$, $=$, $/\!/$.

L'observation des solides permet ensuite de dresser une liste analogue pour l'espace

— le point (nom générique M)
— la droite (nom générique D)
— le plan (nom générique P)
— l'espace E

et de partir à la recherche des relations : $M \in D$; $M \in P$; $D \subset P$; $D_1 /\!/ D_2$; $D /\!/ P$; $P_1 /\!/ P_2$.

Cela nous amène à déterminer un plan à partir de droites et de points : trois points non alignés,
une droite et un point non situé sur cette droite,
deux droites sécantes,
deux droites parallèles.

Après cette phase d'observation, une première synthèse s'impose :

positions relatives de deux droites

$D /\!/ D'$
- $D = D'$
- D et D' sont parallèles et disjointes, elles déterminent un plan.

D n'est pas parallèle à D'
- D et D' sont sécantes, elles déterminent un plan.
- D et D' sont disjointes, elles ne sont pas incluses dans le même plan.

positions relatives de deux plans

$P /\!/ P'$
- $P = P'$
- $P \cap P' = \phi$

P et P' sont sécants, leur intersection est une droite.

positions relatives d'une droite et d'un plan

$D /\!/ P$ — $D \subset P$: une droite qui a deux points dans P est incluse dans P.
— D et P sont disjoints.

D et P sont sécants, leur intersection est un point.

Je demande alors si la célèbre propriété vue en géométrie plane : « par un point du plan, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite » peut être transposée dans l'espace en utilisant cette fois les objets de l'espace : point, droite, plan.

Un élève énonce : « par une droite, on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan ». J'émets un doute ; aussitôt ce même élève corrige son énoncé : « par une droite parallèle à un plan, on ne peut mener qu'un plan parallèle à ce plan ».

L'échange a eu lieu si rapidement que les autres élèves n'ont pas compris de quoi il s'agissait. Là encore l'observation des octaèdres éclairera la situation.

L'autre propriété, celle qu'en fait j'attendais d'abord, « par un point on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan » est enfin énoncée.

Nouvelle brève synthèse :

- Par un point M, on ne peut mener qu'une parallèle D_1 à D_2.
  1) si $M \in D_2$ alors $D_1 = D_2$.
  2) si $M \notin D_2$ alors D_1 et D_2 sont parallèles et disjointes, elles déterminent un plan.
- Par un point M, on ne peut mener qu'un plan P, parallèle à P_2
  1) si $M \in P_2$ alors $P_1 = P_2$
  2) si $M \notin P_2$ alors P_1 et P_2 sont parallèles et disjoints.
- Par une droite D parallèle à P_2, on ne peut mener qu'un plan P_1 parallèle à P_2
  1) si $D \subset P_2$ alors $P_1 = P_2$
  2) si $D \not\subset P_2$ alors P_1 et P_2 sont parallèles et disjoints.

Les élèves disposent dès lors de suffisamment de propriétés pour conduire des déductions non triviales.

Le recours à l'observation des deux solides pourra guider leur recherche.

Premier problème proposé

Soit une droite D parallèle à un plan P et disjointe de ce plan et soit M un point de ce plan. Etudier l'intersection du plan P et du plan (M,D).

On cherche d'abord à visualiser cette situation sur les deux solides. Elle existe dans l'octaèdre. La face qui repose sur la table et la table elle-même représentent le plan P.

Première réponse, l'intersection est un point ! Mais une observation plus approfondie révèle la vraie nature de l'intersection ; c'est une droite et elle est parallèle à la droite D.

Essayons maintenant de démontrer tout cela. Il faut d'abord prouver que les deux plans P et (M,D) sont sécants.

Après avoir, pendant une dizaine de minutes, laissé les élèves errer dans de pseudo-raisonnements qui se terminaient invariablement par « forcément » ou « c'est obligé », je suggère une piste. Reportez-vous aux positions relatives de deux plans. Examinez chacune d'elles et cherchez chaque fois la contradiction.

$$\text{Hypothèses : } \begin{cases} \text{D et P sont parallèles et disjoints} \\ \text{M est élément de P} \end{cases}$$

Raisonnement :

- si P et (M,D) étaient confondus, D serait incluse dans P, ce qui est impossible puisque, par hypothèse, D et P sont disjoints.
- P et (M,D) ne peuvent être parallèles et disjoints puisqu'il existe au moins un point M qui est commun aux deux plans.

Donc les deux plans sont sécants suivant une droite $\triangle$.

Il reste à démontrer que $\triangle$ et D sont parallèles. On examine de manière analogue les positions relatives de deux droites du plan (M,D).

- Elles ne peuvent être confondues sinon D serait incluse dans P, ce qui est impossible puisque D et P sont disjoints.
- Si D et $\triangle$ étaient sécantes en un point O, D aurait un point, le point O, dans P, ce qui est impossible puisque D et P sont disjoints.

D et $\triangle$ sont donc disjointes et comme elles sont incluses dans le même plan, elles sont parallèles et disjointes.

Cette phase déductive se passe assez bien. Les élèves eux-mêmes l'ont conduite à son terme. C'est un raisonnement par l'absurde, dit un redoublant. Encouragé par ce résultat, je donne à rechercher le problème suivant :

Soit D_1 et D_2 deux droites parallèles et disjointes, M un point qui n'appartient pas au plan (D_1, D_2). Etudier l'intersection des plans (M,D_1) et (M,D_2).

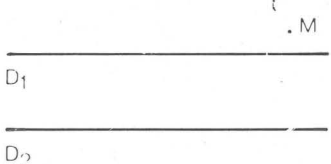
A la séance suivante, déception : certains ont bien vu que l'intersection est une droite parallèle à D_1 et D_2, d'autres non. Personne n'a démontré quoi que ce soit. Revenons donc à l'octaèdre. La situation du problème y est effectivement matérialisée. L'intersection est un point, dit encore un étourdi ! Mais cette fois, je n'ai pas à intervenir ; plusieurs de ses camarades lui font remarquer que « les plans et les droites c'est infini ». Une ultime manipulation avec un crayon symbolisant la droite d'intersection des deux plans emporte l'adhésion de tous. (M,D_1) et (M,D_2) sont bien sécants et la droite d'intersection $\triangle$ est parallèle à D_1 et D_2.

Mais pour le démontrer deux élèves seulement proposent des pistes de recherche. L'un pense qu'on pourrait peut-être utiliser le résultat du premier problème. L'autre penche plutôt pour raisonner avec des droites parallèles.

J'indique que ces deux voies sont sérieuses et qu'il convient de les explorer toutes les deux.

1re recherche : D'abord se pose la nature de l'intersection des deux plans.

Hypothèses $\begin{cases} D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont parallèles et disjointes} \\ M \text{ n'appartient pas au plan } (D_1, D_2) \end{cases}$



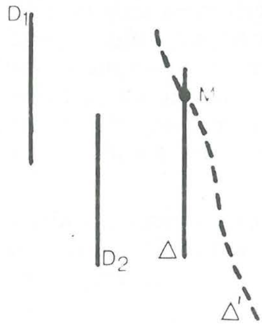
Raisonnement :

Il s'agit de prouver que, par exemple, la droite D_1 et le plan (M,D_2) sont parallèles et disjoints.

- Si D_1 était incluse dans le plan (M,D_2), ce plan contiendrait à la fois D_1 et D_2 ; ce serait le plan (D_1,D_2) ; il contiendrait M, ce qui est impossible par hypothèse. Donc D_1 n'est pas incluse dans (M,D_2).
- Si D_1 était sécante à (M,D_2), le point d'intersection O ne pourrait appartenir à D_2, sinon D_1 et D_2 seraient confondues, ce qui est contraire à l'hypothèse. On pourrait construire dans le plan (M,D_2) la parallèle Ox à D_2. On pourrait ainsi mener par le point O deux parallèles à la droite D_2, les droites D_1 et Ox. Cela est impossible, donc D_1 et (M,D_2) sont parallèles et disjoints.

D'après le théorème précédent, le plan (M,D_1) coupe (M,D_2) suivant une droite passant par M et parallèle à D_1. Pour la même raison Ox est parallèle à D_2.

2e recherche :



Les deux plans (M,D_1) et (M,D_2) se coupent suivant une droite △ passant par M (même démonstration que ci-dessus). Malheureusement on ignore si △ est parallèle à D_1 et à D_2. Il faut faire intervenir encore une parallèle.

L'élève avait pensé à la parallèle à D_1 et D_2 menée par M.

Je la dessine en pointillé ! On m'objecte qu'elle n'est pas droite ! Elle devrait occuper la place de △ ! Il y a là un sérieux écueil. Le transfert entre objets réels et objets mathématiques est loin d'être immédiat chez la plupart des élèves. De par sa construction, cette droite △' est incluse dans (M,D_1) et (M,D_2). C'est donc bien la droite △.

Cette démonstration séduit davantage les élèves, mais ils l'ont trouvée difficile. Ils la comprennent mais beaucoup estiment qu'ils sont incapables de la retrouver seuls. Seront-ils plus à l'aise avec le problème suivant ?

Si deux plans sont parallèles et disjoints, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles et disjointes.

Cette fois ce type de raisonnement semble être assimilé par la plupart des élèves. Quelques-uns éprouvent encore des difficultés. Cela provient le plus souvent d'une vision de l'espace qui n'a pas encore franchi l'obstacle d'une représentation abstraite. Il faudra sans doute bien souvent encore avoir recours aux solides de Platon.

21

UNE SECTION D'UN CUBE

Au groupe de travail que j'animais à Orléans le vendredi 21 novembre 1980, j'ai proposé d'étudier l'exploitation en classe de seconde indifférenciée d'un thème constitué par la réalisation d'une tâche technique précise dont l'énoncé ne comporte pas de difficulté de compréhension. Je propose d'utiliser ce thème dès le début de l'étude de l'espace et même dès le début de l'étude de la géométrie en seconde.

Les élèves reçoivent dès l'abord du travail l'énoncé ci-dessous :

Le cube coupé en deux

ABCD est un carré de 10 cm de côté ; AA′, BB′, CC′, DD′ sont les 4 arêtes, perpendiculaires au plan ABCD, d'un cube ABCDA′B′C′D′.

Le point P est situé sur l'arête AB à 8 cm de A
Le point Q est situé sur l'arête A′B′ à 2 cm de A′
Le point R est situé sur l'arête D′C′ à 8 cm de D′

Le plan PQR coupe le cube en deux morceaux. On se propose de réaliser des maquettes (grandeur réelle) de ces 2 morceaux :

a) en carton mince
b) en polystyrène expansé.

Question subsidiaire : volume des morceaux.

Pour les élèves il s'agit d'un thème très fermé ; les seules libertés qui leur sont laissées sont :

a) pousser plus ou moins loin la réalisation,
b) choisir des méthodes de réalisation et d'étude.

En développant ce thème, j'essayais d'apporter une réponse à une question posée à Clermont-Ferrand en juin par Michel Manivel : "Comment peut-on traiter un thème spatial sans avoir acquis préalablement un minimum de connaissances théoriques ? Quel est le minimum indispensable ?"

Je me proposais de persuader les participants du groupe qu'il est possible de commencer par un thème et de l'utiliser pour motiver les études théoriques qui conduisent aux résultats fondamentaux.

Le travail sur ce thème durera dans la classe pendant au moins 4 heures, probablement 6 heures, peut-être plus. Il importe qu'à chaque séance :

— la tâche technique progresse,
— des résultats généraux soient acquis et notés.

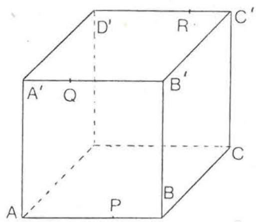
Dans ce que je vais écrire ici, il est difficile de discerner ce que j'avais prévu avant la séance, ce qui a été apporté par les participants et ce que j'ai modifié depuis la séance sous l'influence de ce qui a été dit.

Le découpage que je propose est seulement indicatif. Le maître doit être prêt à l'ajuster constamment suivant les réactions de la classe.

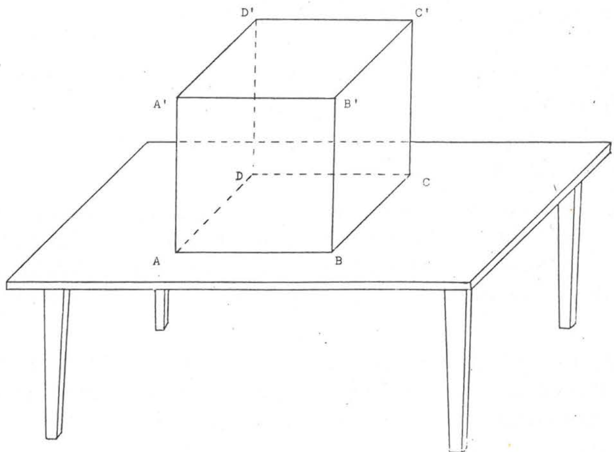
Première séquence : (les séquences ne sont pas d'égales durées, celle-ci est courte).

Faire dessiner une figuration plane de la situation. Je pense que la grande majorité des élèves, à cause de leur vécu, donneront la représentation ci-dessous.

Un petit débat aura lieu dans le groupe sur cette question. Je crois que la plupart des participants ont été d'accord sur ce point.



Je crois qu'il y a même intérêt à représenter le cube posé sur une table :



Contenus à dégager :

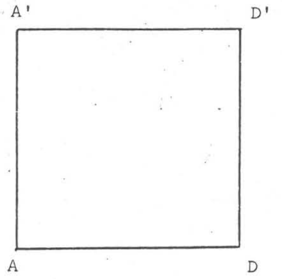
— par 3 points non alignés il passe un plan et un seulement,

— si une droite (PQ) a deux points dans un plan, elle y est contenue toute entière.

Deuxième séquence (plus longue)

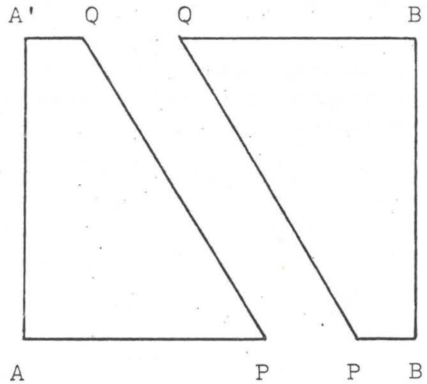
Faire amorcer la construction en papier.

Face de "gauche" du morceau de gauche

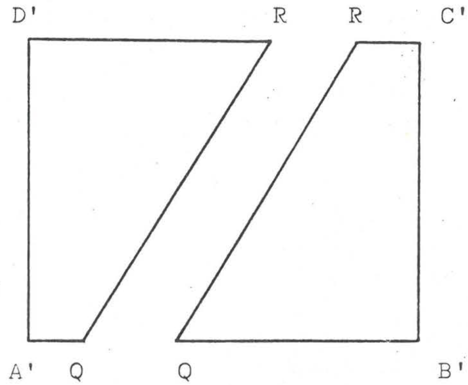


Le carré ADD'A' n'est pas coupé par le plan PQR. Je crois que pour les élèves aucun problème ne se pose. Il ne serait pas opportun de couper les cheveux en quatre.

Faces avant : pas de problème

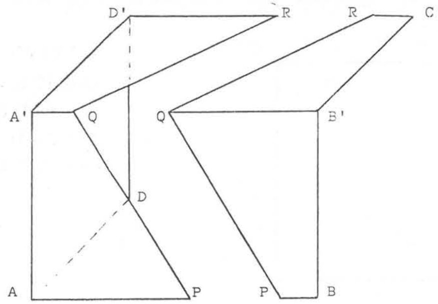


Faces supérieures : pas de problème



Faire réaliser les morceaux ci-dessus en vraie grandeur dans le carton prévu par l'énoncé et les assembler par exemple en scotchant. Faire dessiner ce que nous avons obtenu.

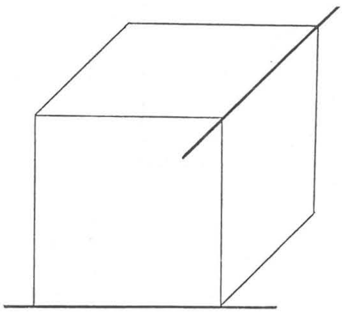
Contenus à dégager : (?)

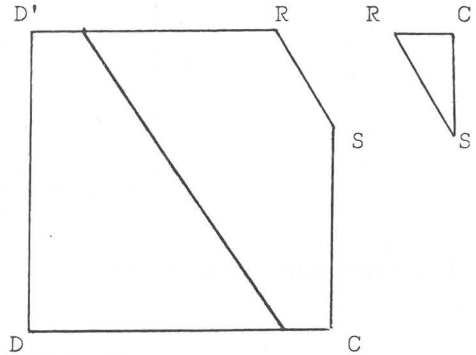


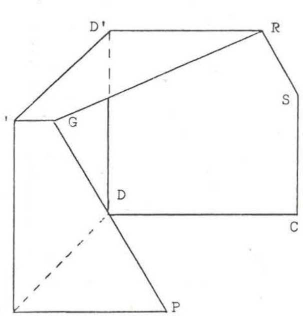
Troisième séquence

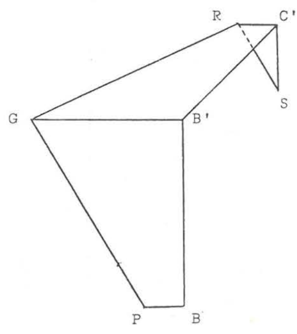
Poursuite de la construction en papier. Face arrière : il faut reconnaître que le plan PQR coupe les faces arrière et avant suivant des droites parallèles.

A cette occasion on discutera les positions relatives de 2 droites dans l'espace et on exhibera, sur le cube c'est facile, des droites qui n'ont aucun point commun sans être parallèles.







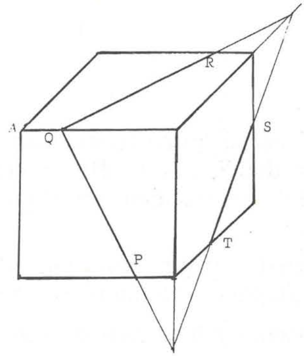


Contenus à dégager dans la synthèse :

— si 2 plans distincts ont 1 point commun alors ils ont une droite commune,
— positions relatives de 2 droites dans l'espace,
— notion de plans parallèles,
— positions relatives de 2 plans,
— sections par un plan (Π) de deux plans parallèles (Π') et (Π").

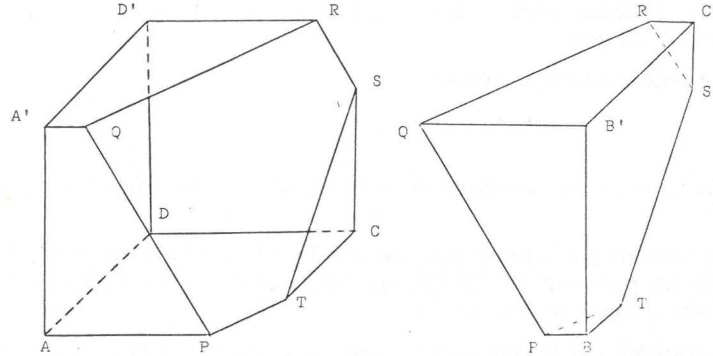
Et aussi figuration des droites parallèles en perspective cavalière.

Remarque : quelques participants ont pensé que des élèves pourraient préalablement chercher l'intersection avec la face de droite de la manière suggérée par le croquis ci-dessous et en déduire les intersections avec la face arrière et la face inférieure.



Quatrième séquence :

Réinvestissement de ce qui précède pour déterminer les faces inférieures (pas de nouvelle difficulté) et détermination des faces de droite. Assembler.



Cinquième séquence :

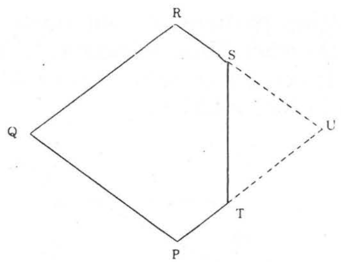
Etude de la face PQR.

Cette séquence est difficile.

Il nous a semblé que dans un premier temps, les élèves verraient bien :

a) que la face a 5 côtés,

b) que PQ et RS sont parallèles ainsi que QR et PT.



Nous avons aussi pensé qu'en tenant compte des particularités de dimension d(AP) = d(DR), les élèves trouveraient vite que d(PQ) = d(QR) et qu'ils trouveraient ces longueurs sur les figures déjà dessinées.

Nous avons pensé qu'ils auraient de la même manière d(PT) = d(RS) et la longueur commune est construite.

La difficulté provient de la détermination de "l'aplatissement" du losange PQRU.

Les méthodes envisageables sont variées. Il serait bien que les diverses équipes dans la classe trouvent des méthodes diverses. La synthèse serait riche.

Il a semblé au groupe qu'il ne serait pas mauvais d'exploiter les particularités dimensionnelles déjà signalées pour obtenir $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{BC'}$ et $d(P,R) = 10\sqrt{2}$ cm.

La construction en résulte.

Avec un énoncé modifié, pour éviter cette particularité, que peut-on faire ?

a) En coupant par 2 plans passant par P et R parallèles à ADD'A', on isole un pavé sur lequel PR est une diagonale. La longueur PR en résulte d'après le programme de 3^e.

b) En coupant par le plan perpendiculaire au plan ABCD et passant par P et R, on obtiendra graphiquement le même renseignement.
Ce sera l'occasion d'introduire la notion de plans perpendiculaires.

c) En choisissant un repère orthonormé (la situation s'y prête), on pourra grâce au produit $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR}$ calculer l'angle Q.
Mais peut-être cela devra-t-il être repris en 1ère.

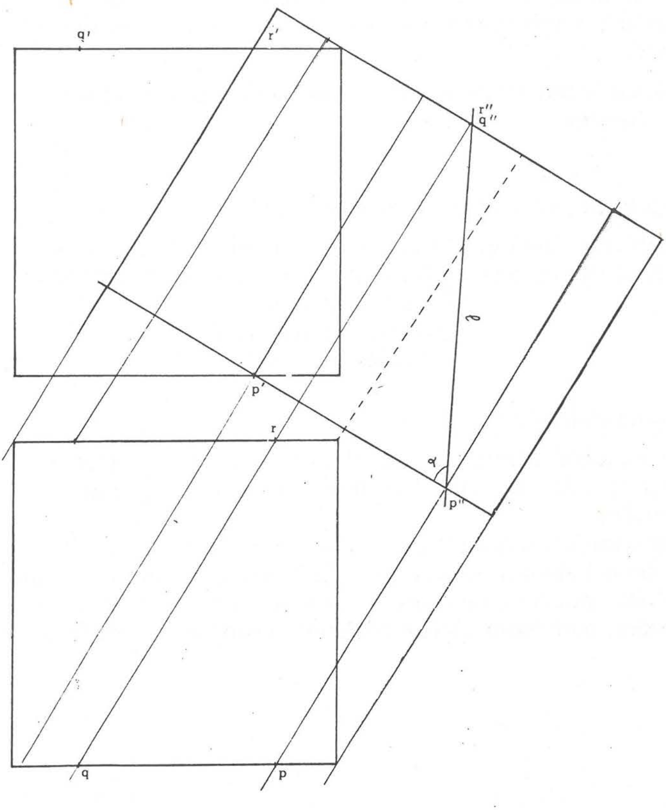
d) En coupant par un plan perpendiculaire à la direction QR, on obtiendra la distance ℓ des parallèles PT et QR. On obtiendra en même temps la mesure ou la construction du rectiligne α des dièdres d'arête PT et QR.

Ce renseignement permettra à la fois d'achever les constructions en carton et de régler le fil-coupeur pour la seconde réalisation demandée.

La voie d permet et demande de préciser les contenus apparentés aux notions de :

— droite perpendiculaire à un plan,
— plans perpendiculaires,
— dièdre.

Pour toute cette partie la figuration en perspective cavalière est inadéquate. C'est une occasion d'introduire la figuration de Monge et de pratiquer un changement du plan frontal de projection (ou de le choisir d'emblée de manière pertinente). Voyez la figure :



Objectifs poursuivis

A) Au groupe de travail d'Orléans :

— persuader les participants qu'on peut partir d'un problème et, chemin faisant, dégager une bonne partie des résultats théoriques qu'on souhaite obtenir dans la classe.

— persuader les participants que cette méthode conduit les élèves à une bonne attitude vis-à-vis de la géométrie et plus généralement des maths.

— persuader les participants que sans partir d'une axiomatique on peut néanmoins raisonner et déduire.

B) Dans la classe de Seconde

— donner aux élèves la bonne attitude mentionnée ci-dessus,

— contribuer à former la vision de l'espace,

— faire acquérir quelques résultats théoriques.

La tâche technique (couper le cube) est un thème. Pour les élèves elle apparaît comme le but et il est bien qu'il en soit ainsi. Elle apporte la motivation et l'encouragement. Elle ne doit pas être dévalorisée aux yeux des élèves.

Elle est le moyen de validation des connaissances et des méthodes de travail acquises.

Prolongement possible pour les plus rapides

Problème analogue mais avec 3 points choisis de manière plus vicieuse, ce qui exigera de faire intervenir des points extérieurs.

P sur le segment AB
Q sur le segment A'D'
R sur le segment CC'

Remarques diverses :

— Je considère comme essentiel que le thème concerne une figure "épaisse". Je crois satisfaire ainsi une exigence formulée par Rudolph Bkouche.
— Il me semble intéressant que le thème soit fermé. Il ne s'agit pas d'étudier dans l'abstrait et le vague "les" sections planes du cube.
— Peut-être pourra-t-on dans les diverses équipes de la classe varier les données, mais pour chacune d'elles le problème sera fermé.

22

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE UN THÈME : LE CUBE

Compte rendu d'une expérience en 2^e T.
(janvier 81)

Le solide le plus familier aux élèves est le cube. Ils en apportent en papier, en carton, en polystyrène, en bois, en acier ; certains sont sciés.

I. Différentes sections

Nous observons les sections obtenues, ce sont en général des rectangles, quelques triangles isocèles, quelques hexagones.

Que peut-on avoir comme section ?
— Triangle équilatéral, rectangle ?
— Carré, rectangle, losange, trapèze ?
— Pentagone, hexagone, hexagone régulier ?

Chacun s'efforce de convaincre ses camarades en faisant des dessins en perspective (cavalière).

OBJECTIFS ATTEINTS :
— Les différentes déterminations d'un plan
— Parallélisme de droites et de plans
— Travailler avec méthode et rigueur dans ces représentations
— Prouver, critiquer.

II. Section particulière

Nous décidons de prendre une section particulière et de la déterminer en vraie grandeur, par le calcul, puis par le dessin. Ils choisissent un losange. Le cube a 6 cm de côté.

1. Par le calcul

Ils utilisent surtout le théorème de Pythagore pour la mesure des côtés. Ils devront faire la construction à la règle et au compas.

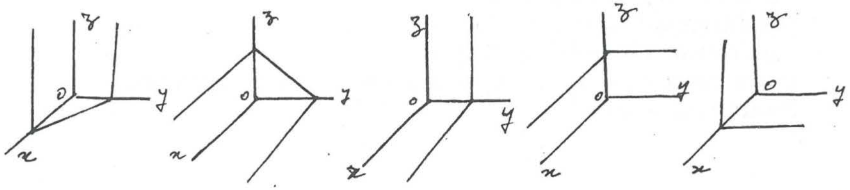
2. Par le dessin

Nous utiliserons la vue de face, de dessus, de gauche ou de droite (la nouvelle génération d'élèves, qui n'a pas fait de technologie, ne connaît donc pas le dessin technique).

Nous nous efforcerons de n'utiliser qu'une seule rotation (transformation très naturelle pour les élèves, surtout pour ceux de l'enseignement technique).

a) Prérequis

La position définitive du « plan de coupe » ne doit pas être quelconque, donc la position initiale non plus. Il est alors nécessaire de se mettre d'accord sur le vocabulaire, et de définir des droites et plans particuliers :
— droite verticale, de bout
— plan vertical, de bout, de profil, horizontal, frontal.
On discute sur leur définition, sur leur représentation.



III. Autres sections

On peut réinvestir cette méthode en choisissant une autre section (hexagone ou pentagone) qui a un axe de symétrie, on introduit alors le plan médiateur qui doit avoir une position particulière.

IV. Autre position du cube

L'une des diagonales est verticale.
— Constructions de trois vues.
— Construction de cales pour le maintenir dans cette position
— Ce cube contient un liquide, graduer (sommairement) cette diagonale.

OBJECTIFS ATTEINTS
— La plupart des précédents
— Comment rendre une droite verticale ? Position initiale ?
— Sections d'un solide par un plan horizontal
— Calculs d'aires et de volumes
— Sections homothétiques.

V. Les ombres

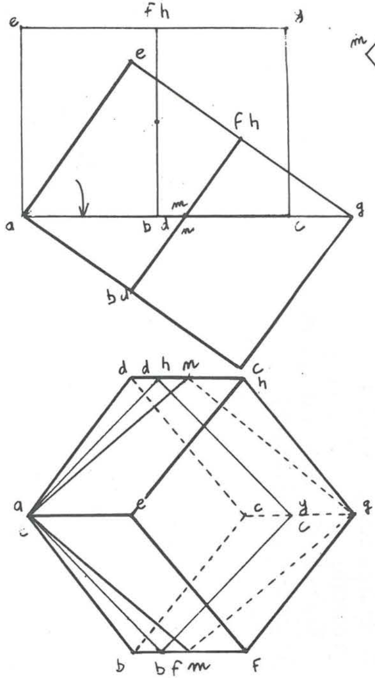
Dans un repère orthonormé, le centre I du cube a pour coordonnées (4,4,4,), l'arête mesure 4 cm.

Ils dessinent le cube qu'ils veulent, mais pour comparer une face avec son ombre et parler de translation ou d'homothétie il faut avoir des faces horizontales.

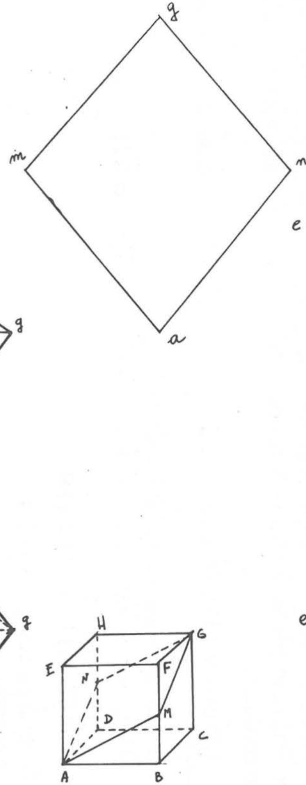
Construire l'ombre de ce cube sur le plan horizontal lorsqu'il est éclairé :
a) par une source lumineuse S(1,0,11)
b) par des rayons lumineux parallèles de direction $\vec{V}(1,2,2)$.

OBJECTIFS ATTEINTS
— Coordonnées d'un point
— Projection d'un « vecteur »
— « Trace horizontale » d'une droite
— Translation, homothétie.

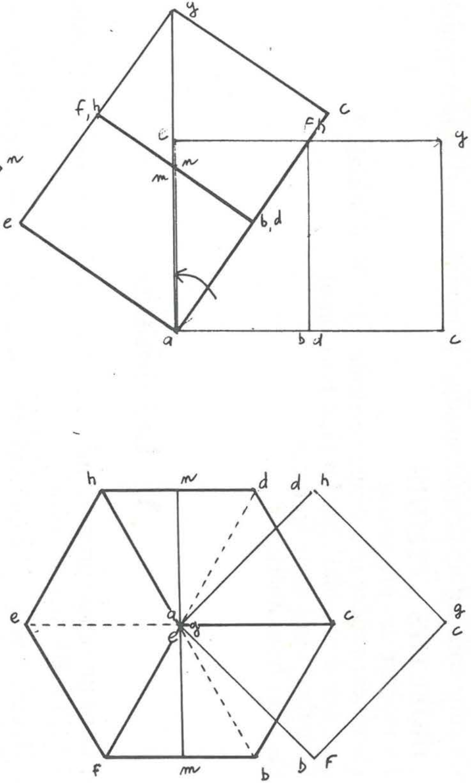
Les dessins qui suivent doivent être, non pas observés, mais exécutés.



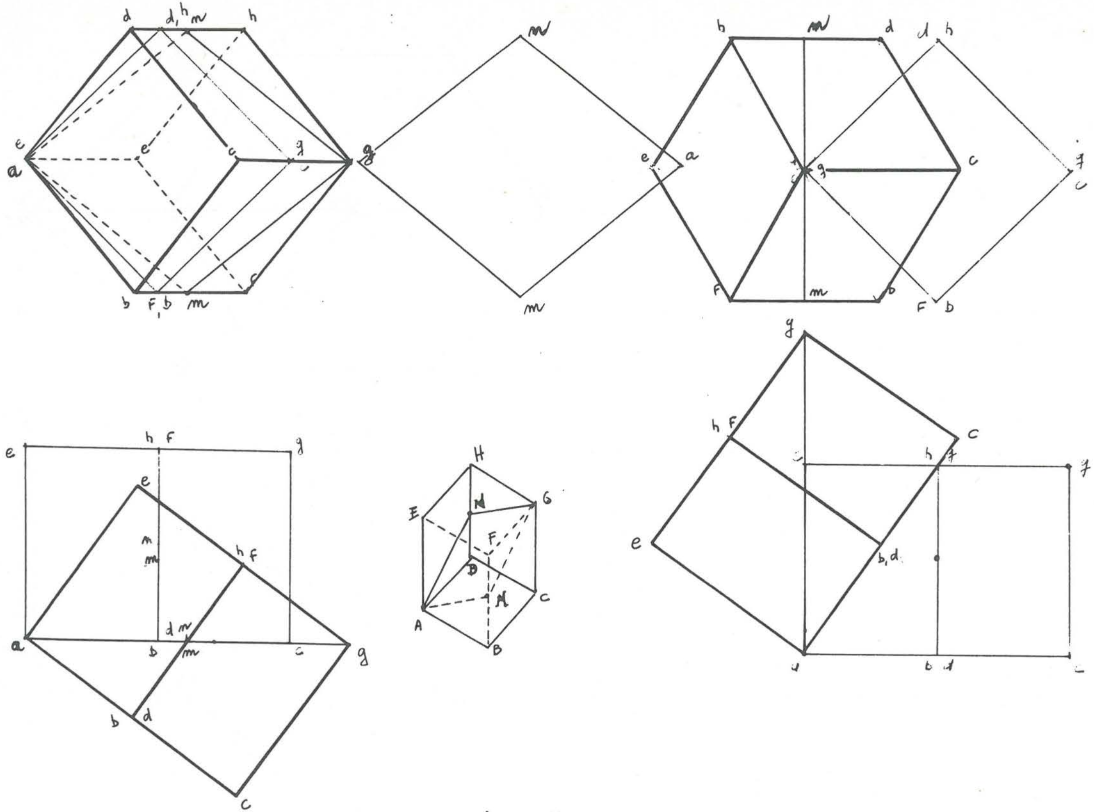
puis horizontal
(préférence des élèves)



rotations d'axe de bout
le plan du losange est de bout



puis de profil

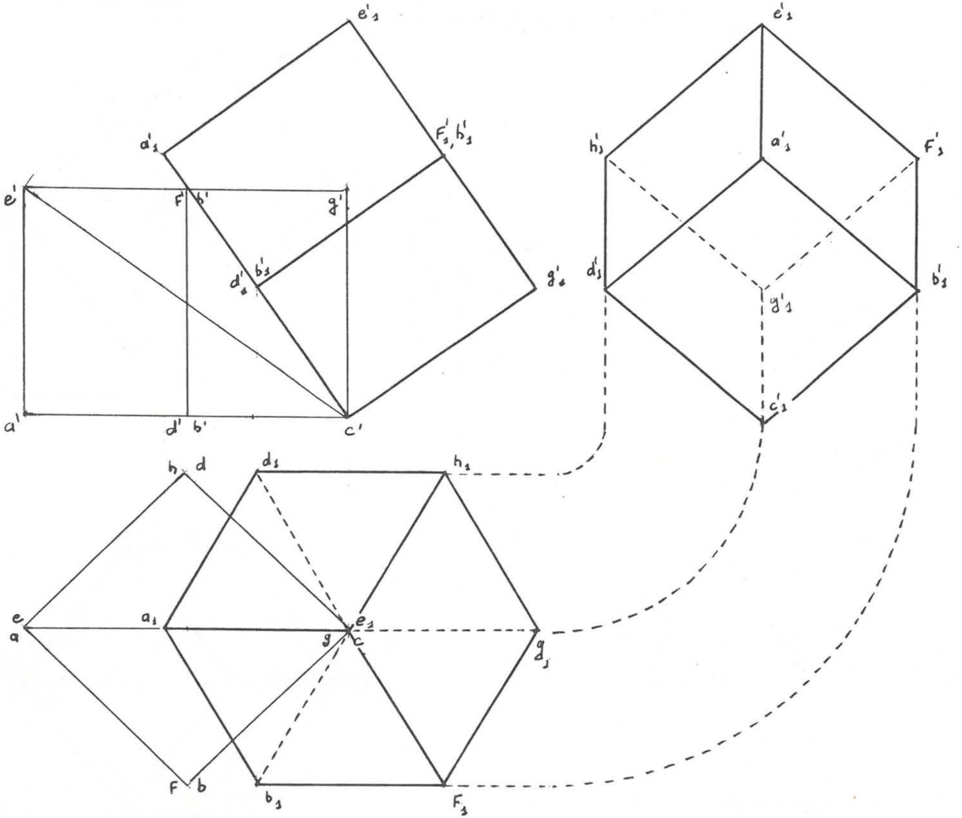


puis horizontal

rotations d'axe vertical
le plan du losange est vertical

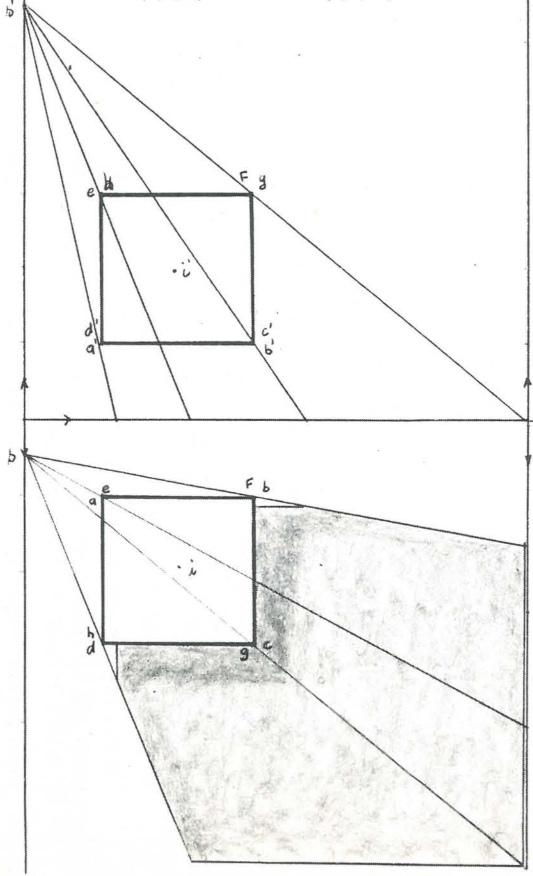
puis de profil

rotation d'axe de bout
une frontale devient verticale

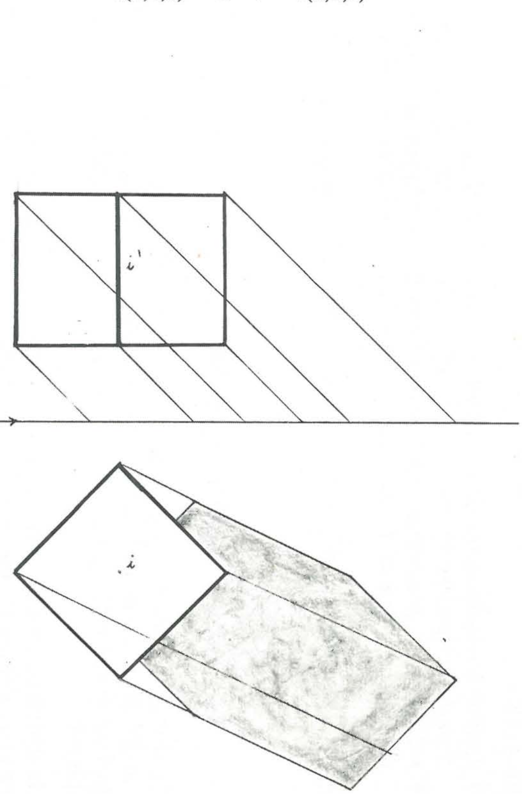


Vue de
gauche

I(4,4,4,)   C = 4   S(1,0,11)



I(4,4,4)   C = 4 $\vec{V}(1,2,2)$



Ombres

23

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

OBJECTIFS :

- *fonder le vocabulaire de la géométrie dans l'espace sur l'observation des polyèdres réguliers : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre*
- *trouver les propriétés des sous-ensembles orthogonaux dans l'espace en partant des propriétés connues des objets orthogonaux dans le plan*
- *résoudre des problèmes de calcul de longueur ou d'angles dans l'espace.*

Orthogonalité

Je donne d'abord l'étymologie du mot : "orthogonia" signifie, en grec, angle droit ; puis celle de "perpendiculaire" qu'on semble confondre souvent avec "orthogonal" et qui vient du latin "perpendiculum" : le fil à plomb.

Je distribue les polyèdres dont je dispose : tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre et je demande que chacun me montre deux arêtes orthogonales, c'est-à-dire deux arêtes formant un "angle droit".

Ceux qui détiennent les octaèdres donnent vite une réponse mais les autres sont perplexes, doutent qu'il en existe. Je dois leur affirmer qu'il en existe.

Le tétraèdre intrigue les élèves. Mais, influencés par leur conception de l'angle, ils cherchent vainement deux arêtes *sécantes* formant un angle droit. Je dois démystifier cette conception de l'angle.

"Il n'est pas nécessaire que les deux arêtes soient sécantes". Cette fois certains ont compris, pas tous ; ils découvrent des arêtes orthogonales dans le tétraèdre régulier, dans le dodécaèdre. Mais s'ils sont capables de repérer rapidement deux arêtes orthogonales et non sécantes, ils n'arrivent pas à formuler leur conclusion.

Je dois clarifier les idées :

"Deux droites non sécantes D_1 et D_2 sont orthogonales" signifie : Si l'on mène par un point la parallèle D_1' à D_1 et la parallèle D_2' à D_2, les droites D_1' et D_2' se coupent à angle droit.

Pour les élèves qui perçoivent plus lentement la structure de l'espace, j'utilise des polyèdres construits en baguettes minces assemblées avec de la pâte à modeler. Une baguette, que ces élèves manipulent, leur permet de visualiser la situation décrite ci-dessus.

Dès lors toute la classe sait "voir" des arêtes orthogonales, même lorsqu'elles ne sont pas sécantes.

• Je demande ensuite que l'on recense les théorèmes de l'orthogonalité dans le plan ; j'obtiens les réponses suivantes :

1°) Par un point donné on ne peut mener qu'une droite orthogonale à une droite donnée.

2°) Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

3°) Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.

Est-ce tout ? J'espérais que quelqu'un évoquerait la symétrie orthogonale ; espoir déçu ; je dois donc, moi-même, citer le mot. Le tiers de la classe reconnaît avoir entendu cela quelque part, mais de là à donner une définition de la symétrie orthogonale....

"Une projection symétrique" dit quelqu'un ; "Une réflexion comme avec un miroir" dit un autre.

L'élève qui a formulé la première réponse est invitée à expliquer à l'aide d'un dessin au tableau ce qu'elle entend par "projection symétrique".

Elle se donne effectivement une droite, un point, projette le point sur la droite et prolonge d'une longueur égale.

Mais on a le sentiment qu'avec ce dessin, elle a épuisé ses connaissances sur la symétrie orthogonale. Et la classe aussi !

Je demande alors de prendre un autre point et de construire son symétrique par rapport à D, puis encore un autre point de l'autre côté de D ; puis un autre sur D. Et je pose derechef la question : Qu'est-ce qu'une symétrie orthogonale ?

Une voix timide dans le fond de la classe sussure : "C'est une relation".

A partir de cette réponse, la notion se précise ; les souvenirs reviennent : "relation du plan dans le plan" et même "bijection du plan sur le plan".

La droite D reste invariante. Qu'advient-il de la distance de deux points ? "Elle reste la même". On adopte alors la définition : *Symétrie orthogonale autour de D :* bijection du plan sur le plan qui laisse inchangés les seuls points de la droite D et qui conserve les distances.

Définition que j'affine après avoir rappelé l'existence du mot *isométrie* et son étymologie ; on obtient la 4ème propriété : une symétrie orthogonale est une isométrie du plan qui laisse invariante une droite D.

Pour la séance suivante, les élèves devront essayer de transposer ces quatre propriétés à l'espace.

• La première ne se transpose pas : par un point on peut, dans l'espace, mener une infinité de droites orthogonales à une droite donnée.

Un élève a même remarqué que ces droites déterminent un plan.

Ces deux propriétés ne sont pas évidentes pour tous. Je demande donc de visualiser ces propriétés à l'aide d'une baguette mince, astreinte à passer par un sommet du cube et à rester orthogonale à une arête.

Ainsi se fait jour le concept de plan orthogonal à une droite et cette fois le théorème se transpose de deux manières :

— Par un point donné, on ne peut mener qu'un plan orthogonal à une droite donnée.
— Par un point donné, on ne peut mener qu'une droite orthogonale à un plan donné.

Je pose alors la question suivante :

"Vous êtes convaincus maintenant, de par les expériences réalisées, que lorsqu'une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Pouvez-vous énoncer une propriété simple qui permettra de caractériser l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ?"

Après observation des solides, un élève indique qu'il suffit que la droite soit orthogonale à deux droites parallèles du plan.

Comme il n'y a pas de réaction, je dis que cette réponse est fausse et demande à chacun de me montrer sur son solide des contre-exemples.

Il faut attendre quelques minutes avant qu'un élève découvre enfin la propriété caractéristique :

— Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à ce plan.

• Le deuxième théorème se transpose tel quel dans l'espace, qu'il s'agisse de droites ou bien de droites et de plans :

— Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

— Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

— Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Visualisation facile, mais parfois nécessaire, avec le cube.

• Le troisième théorème ne se transpose pas tant qu'il s'agit de droites mais il se transpose lorsqu'il s'agit de droites et de plans :

— Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles

— Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

• Quant à la symétrie orthogonale, il suffit d'évoquer le miroir pour obtenir, à partir de la définition de la symétrie orthogonale du plan, la définition de la symétrie orthogonale par rapport à un plan de l'espace.

Pour terminer ce tour d'horizon de propriétés évidentes ou quasi-évidentes, on évoque ce que l'on entend par deux plans perpendiculaires. On dispose dès lors d'un vocabulaire et d'une batterie de théorèmes permettant d'aborder quelques problèmes de géométrie dans l'espace concernant l'orthogonalité.

Afin de créer un problème, j'effectue des projections qui, pour n'être pas orthogonales, sont néanmoins spectaculaires.

Je pose un petit octaèdre en papier à dessin sur le plateau horizontal du rétroprojecteur. Sur l'écran se dessine en noir un hexagone régulier.

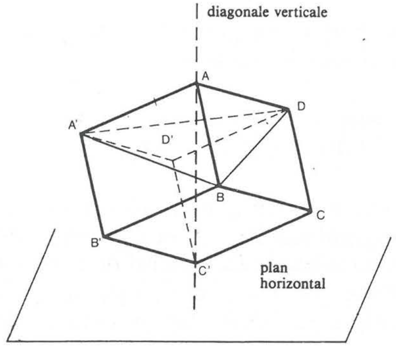
De même, grâce à une petite boule de pâte à modeler, on peut maintenir un cube en équilibre sur l'un de ses sommets, de manière que la diagonale passant par ce sommet soit verticale. (fig. 1)

Sur l'écran, on obtient encore un hexagone régulier. A l'aide de manipulations élémentaires sur ces deux solides, les élèves constatent évidemment le même phénomène par projection orthogonale sur une feuille de papier.

Ces deux problèmes de projection orthogonale sont donnés en travail de recherche à la maison.

Une élève présente une idée intéressante :

Elle a tracé judicieusement des diagonales de faces du cube de manière à mettre en évidence deux triangles équilatéraux ayant pour axe la diagonale verticale du cube. Je demande donc de prouver que la diagonale AC′ du cube est orthogonale au plan du triangle équilatéral A′BD et qu'elle est l'axe de ce triangle équilatéral (c'est-à-dire la droite orthogonale à son plan en son centre de gravité).



Au compte rendu de la séance suivante, personne n'a réussi à démontrer cela, je dois donc donner une indication :

En utilisant un cube construit en baguettes minces, je visualise la diagonale AC′.

Il est clair que la diagonale AC′ est incluse dans le plan (AB′, C′D), que la droite A′B est orthogonale à la droite AB′ (ce sont les diagonales d'un carré), qu'elle est orthogonale à la droite B′C′ (car la droite B′C′ est orthogonale au plan (AA′, BB′).

En définitive, la droite A′B est orthogonale à deux droites sécantes B′C′ et B′A du plan (AB′, C′D), donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan et en particulier à la droite AC′.

AC′ est orthogonale à A′B′. On démontrerait de même que AC′ est orthogonale à A′D ; ce qui prouve que AC′ est orthogonale au plan du triangle A′BD.

Ce raisonnement a été inspiré aux élèves à l'aide de deux remarques préliminaires : "Pour démontrer que AC′ est orthogonale au plan A′BD, il suffit de démontrer que AC′ est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, A′B et A′D par exemple".

Démontrer que AC′ est orthogonale à A′B revient à démontrer que A′B est orthogonale à AC′. Pour cela, il suffit de démontrer que A′B est orthogonale à un plan contenant AC′, en l'occurrence le plan AB′C′D.

Très lentement les élèves se sont acheminés vers la solution. Travail d'équipe, fréquentes sollicitations du professeur. Et la rédaction de la solution a révélé une grande dispersion dans la compréhension de ce raisonnement.

Il restait à prouver que le point I où AC′ perce A′BD est le centre de gravité de ce triangle.

Nouveau blocage. On regarde encore une fois le cube en baguettes minces dans lequel on visualise les trois triangles rectangles AA′I, ABI et ADI.

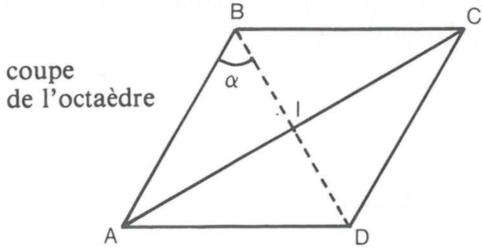
Le théorème de Pythagore permet de démontrer que les segments [A′I], [BI] et [DI] ont même longueur.

A partir de là, sans trop de difficultés, on arrive à démontrer que I est le centre de gravité du triangle A′BD.

Le rétroprojecteur a révélé que la projection d'un octaèdre régulier semblait être un hexagone régulier. Pour être persuadé du fait, il suffit de démontrer que l'axe du triangle équilatéral de la face sur laquelle l'octaèdre repose est le même que l'axe de la face supérieure. En fait on est amené à faire une coupe de l'objet par un plan vertical.

Il apparaît assez rapidement que cette coupe est un losange dont les côtés sont des hauteurs de faces.

Premier problème : reproduire cette coupe. On utilise cette fois des octaèdres en papier à dessin. Pour construire le losange, on a besoin de connaître l'angle de deux faces ayant une arête commune. Cela motive l'introduction du mot *dièdre*. Chaque élève trace sur son octaèdre l'angle à mesurer.



Finalement, si a désigne la mesure d'une arête, AB, BC, CD et AD mesurent $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, tandis que AC mesure $a\sqrt{2}$.

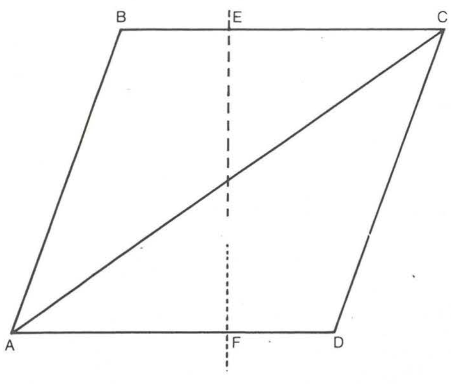
L'angle α est connu par son sinus

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\alpha \simeq 54°{,}73$$

$$\text{d'où } \widehat{ABC} \simeq 109°{,}5$$

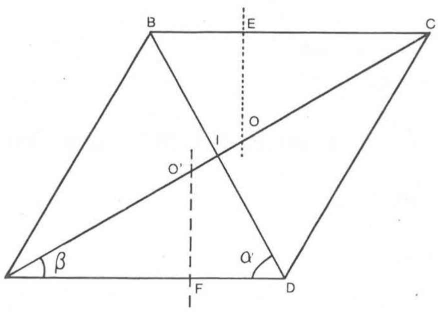
On peut dès lors construire la coupe et vérifier expérimentalement que les perpendiculaires à BC en E et à AD en F sont confondues, E et F étant respectivement les centres de gravité de la face supérieure et de la face inférieure de l'octaèdre.



La démonstration de cette propriété est donnée à deux reprises en travail de recherche à la maison ; j'avais indiqué pourtant qu'elle ne demandait que des connaissances de la classe de troisième.

Paradoxalement, l'excellente coupe qu'avaient réalisée les élèves les fourvoyait dans des voies sans issues.

Je dois leur faire construire une coupe fausse où les deux points O et O ′ sont effectivement distincts.



$$AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AF = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

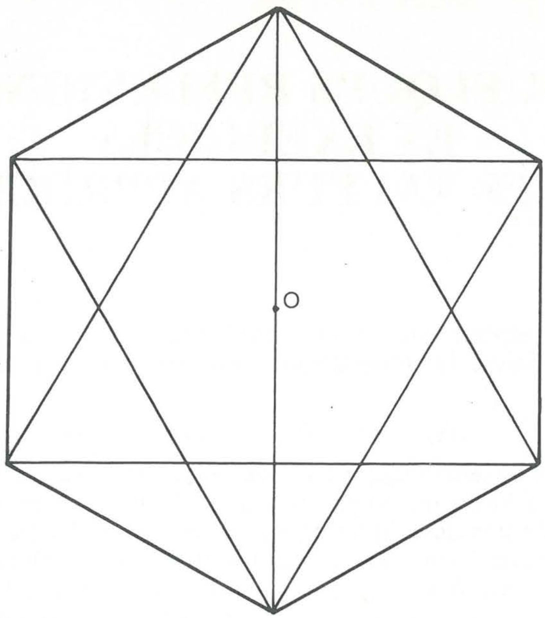
$$O'A = \frac{AF}{\cos \beta}$$

Or $\cos \beta = \sin \alpha$

$$\text{Donc } O'A = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$O'A = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

O ′ est donc confondu avec I, milieu de [AC] ; de même O. Vus de dessus, les deux triangles équilatéraux étudiés, face supérieure, face inférieure, ont la disposition suivante, ce qui réalise bien, en projection, un hexagone régulier.



Conclusions

Dans la seconde C où cette séquence a été vécue, l'observation et la manipulation des quatre premiers solides de Platon construits en papier à dessin et à l'aide de baguettes minces et de pâte à modeler ont été absolument nécessaires pour atteindre les deux premiers objectifs :

— se forger un vocabulaire précis

— découvrir expérimentalement les notions premières de la géométrie dans l'espace.

Le fil conducteur des théorèmes analogues dans le plan a permis de mettre les élèves en situation de recherche.

— Le troisième objectif, la résolution partielle de problèmes d'orthogonalité, n'a été atteint que par quelques élèves, et encore, avec beaucoup de peine.

24

QUELQUES RÉFLEXIONS ET EXERCICES SUR LES VALEURS APPROCHÉES

On peut espérer que les nouveaux programmes vont permettre de donner, en Analyse, la prépondérance aux majorations les plus efficaces, en particulier :

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah | \leq M h^2$$

Pourquoi de telles majorations sont-elles importantes ? Sur quelques exemples, à la limite du programme de seconde, mais certainement du programme de première scientifique, j'essaie d'y répondre. "Encadrer, Majorer, Minorer" sont des activités essentielles, en Analyse. Apprendre à nos élèves à *encadrer, majorer, minorer,* sans engendrer l'ennui est un art difficile, et, pour y arriver, il faut savoir les inclure dans des problèmes intéressant les élèves.

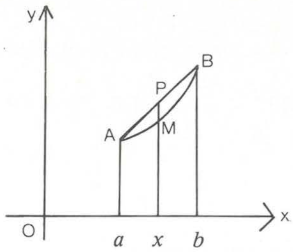
En outre, dès la classe de seconde, en faisant appel à de nombreuses activités numériques où les calculatrices joueront un rôle essentiel et à des inégalités, des échelles de grandeur au voisinage de zéro ou de l'infini seront mises en place ($x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, ..., $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$,... etc.). Ainsi toute nouvelle fonction pourra être située dans l'échelle : les calculatrices permettront de prévoir le résultat, et des inégalités le démontrent.

Les exemples qui suivent sont des thèmes d'activités possibles en seconde. Ces thèmes seront repris en première et en terminale. Au niveau de seconde, ces activités ne peuvent être que des activités de débroussaillage.

1) L'interpolation linéaire :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe, représentation graphique de f : $x \mapsto y = f(x)$, A et B les points d'abscisses a et b de $\mathcal{C}$; pour tout x compris entre a et b, on prend comme valeur approchée de f(x) l'ordonnée du point P d'abscisse x situé sur la droite AB. On désigne par M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x ; l'erreur commise dans cette approximation est $|y_M - y_P|$; elle est majorée par $\sup\limits_{x \in [a,b]} |y_M - y_P|$.

Le signe de $y_M - y_P$ permet d'autre part de préciser si les valeurs approchées le sont par excès ou par défaut.



Il est bien évident que ceci n'est pas un premier niveau d'approfondissement et que la nécessité d'extrapoler une fonction (problème inverse), de représenter numériquement un phénomène (dilatation par exemple...) sont des niveaux qui ont précédé.

Nous avons cependant le moyen, par l'intermédiaire de ce problème, d'apprendre à majorer x^2+3x+2, pour x appartenant à l'intervalle $[1,2]$, ou encore l'expression $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x}$ lorsque x appartient à l'intervalle $[1,2]$, expressions qui s'introduisent dans les exemples qui suivent.

Exemple I.

Soit $f : x \mapsto x^2$; A et B sont les points de la courbe représentative de f d'abscisses 1 et 2. On montrera que la droite AB a pour équation $y=3x-2$; avec les notations précédentes, y_P est la valeur approchée de x^2 ; l'erreur commise dans l'interpolation de f sur l'intervalle $[1,2]$ est

$$y_M - y_P = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

on en déduit $\sup\limits_{x \in [1,2]} | y_M - y_P |$ ou un majorant ; d'autre part la valeur approchée de x^2 est donnée par excès.

Exemple II

On reprend l'exemple I avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$, A et B sont les points d'abscisses 1 et 4 ; la droite AB a pour équation

$$y = \frac{1}{3} x + \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad y_M - y_P = \frac{1}{3} (\sqrt{x} - 1) (\sqrt{x} - 2)$$

On est conduit à majorer $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ lorsque x appartient à l'intervalle $[1,4]$.

Exemple II bis.

On prend $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$. On prend pour valeur approchée de $f(x)$ au voisinage de zéro la valeur 1 ; donner un majorant de l'erreur commise pour tout x de l'intervalle $]-1/2, +1/2[$.

Exemple III.

On choisit f : $x \mapsto \frac{1}{x}$; les points A et B sont ceux de l'exemple I. Montrer que l'erreur commise dans l'interpolation linéaire de f sur l'intervalle [1,2] est $\sup\limits_{x \in [1,2]} \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{2x} \right|$; en donner un majorant.

2) Valeurs approchées ; étude locale.

Dans cette partie, nous utilisons des développements limités pour avoir des valeurs approchées et non plus l'interpolation. Des activités sur les échelles au voisinage de zéro ont précédé ces questions.

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x}$; on remarque que pour $x = 0$, $f(0) = 1$; la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x} - 1$ est nulle en 0, il est normal de la situer dans l'échelle des fonctions donc de comparer cette différence à x. Un tableau de nombres permettra de voir que la différence est de l'ordre de $\frac{x}{2}$.

On constate alors que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$ est nulle en 0 ; pour la situer dans l'échelle, on la compare à $x \mapsto x^2$ etc.

Il reste à démontrer les résultats trouvés et perçus de façon numérique, et à établir : pour tout x de l'intervalle $[-1, +1]$

$$0 \leqslant 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1 + x} \leqslant \frac{x^2}{2} \quad *$$

Apprendre à utiliser des inégalités est une activité importante, c'est une approche quantitative de concepts difficiles (continuité, limite, dérivabilité) qui sont, eux, des concepts qualitatifs (notions qui seront développées dans les classes de première).

De l'inégalité $$0 \leqslant 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1 + x} \leqslant \frac{x^2}{2}$$

on peut déduire $$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{x} = 0$$

ce que l'on peut écrire

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + x\,\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

* Voir article 13.

Nous obtenons le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 1 (Notion qui sera abordée en première scientifique).

3. Résolution d'équations

Plusieurs niveaux sont à dégager.

Un *premier niveau* consiste à apprendre à résoudre graphiquement des équations du type :

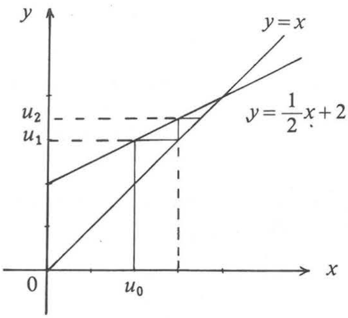
$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}, \quad \frac{1}{x} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad x^2 = a + \frac{1}{x+b}, \quad x^2 = a + \frac{1}{b-x}$$

$$x^2 = \frac{2}{x^2}, \text{ etc.}$$

On n'utilisera que les fonctions simples du programme :
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, et celles qui s'en déduisent par translation et par symétries. On apprendra à donner des valeurs approchées des solutions, à préciser si ces solutions sont par excès ou par défaut.

Un *deuxième niveau* consiste à introduire des suites $\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}) \\ u_0 \end{cases}$ résolvant par itération l'équation $f(x) = x$ *. Il sera important de bien choisir les exemples et de mettre en évidence l'aspect graphique : suites convergentes "en escalier" et suites convergentes en "colimaçon".

Par exemple la suite $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ conduit à la résolution de



l'équation $x = \frac{1}{2}x + 2$ admettant 4 pour solution.
On construit sur l'axe Ox les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 comme l'indique la figure ; par la pensée on continue à construire u_3, u_4, u_5 ... etc.

---

* Voir article 8.

On devine que la suite (u_n) est croissante et converge vers 4 ; l'étude de $f(u_n)-4=f(u_n)-f(4)=\frac{1}{2}(u_n-4)$ permet, par comparaison à la suite $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, de montrer que la suite $d_n = |u_n-4|$ est une suite qui converge vers 0.

Pour obtenir une convergence en colimaçon, on peut utiliser $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$; l'équation $x=-\frac{1}{2}x+3$ a pour solution 2.

On introduit donc la suite $\begin{cases} u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1}+3 \\ u_0=\frac{1}{2} \end{cases}$

On remarquera que

$$u_n-2=f(u_{n-1})-f(2)=-\frac{1}{2}(u_{n-1}-2)$$

On est conduit à comparer $d_n=|u_{n-2}|$ à la suite $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Autre exemple : $f(x)=1+(x-1)^2$; l'équation $f(x)=x$ a deux solutions 1 et 2.

La suite $\begin{cases} u_{n+1}=1+(u_{n-1})^2 \\ u_0 \end{cases}$

va converger vers 1 ou vers 2 suivant les valeurs de u_0 ou même diverger.

On prendra par exemple $u_0=0{,}9$; $u_0=2{,}1$; $u_0=4$.

Ces deux niveaux étant atteints, il reste un nouveau niveau d'approfondissement où des inégalités du type $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$ avec $0\leqslant k<1$ jouent des rôles fondamentaux :

Exemple IV.

La résolution graphique de $x=1+\dfrac{1}{1+x}$ permet de voir que l'équation a deux solutions, de donner une valeur approchée de la solution positive.

On peut alors démontrer que la solution positive est $\sqrt{2}$. La résolution de cette équation par itération conduit à la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \\ u_1 : \text{valeur} \\ \text{approchée de } \sqrt{2} \end{cases}$$

On pose $f(x)=1+\dfrac{1}{1+x}$

Nous voulons démontrer que si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, u_{n+1} en est aussi une, et qu'elle est meilleure. On étudie la différence $u_{n+1}-\sqrt{2}$:

$$u_{n+1}-\sqrt{2} = \mathrm{f}(u_n)-\mathrm{f}(\sqrt{2})$$
$$= \frac{2+u_n-\sqrt{2}(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-u_n)}{1+u_n}$$

Il est alors immédiat de prouver que

$$\text{si } u_1>1 \text{ alors } |u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,|u_n-\sqrt{2}|$$

$$\text{et donc } |u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{4}\,|u_n-\sqrt{2}|$$

Il reste à écrire cette inégalité pour les valeurs de $n=1,2,3,4,\ldots,n,\ldots$ pour en déduire $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1-\sqrt{2}|$.

Remarquons que nous avons utilisé l'inégalité :
pour tout x supérieur à 1 $\quad |\mathrm{f}(x)-\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{4}\,|x-\sqrt{2}|$

et que la stratégie employée pour démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\sqrt{2}$ consiste à démontrer que la suite

$$(d_{\mathrm{n}} = |u_{\mathrm{n}}-\sqrt{2}|)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge vers 0 en la comparant à la suite $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, ce qui nécessite l'établissement d'une échelle de suites convergeant vers zéro *.

A cette occasion, nous pouvons regretter l'absence d'échelles de suites convergeant vers zéro, dans le programme de seconde. Les suites n'apparaissent que dans le paragraphe sur l'approximation des nombres ; mais, pour traiter convenablement ce paragraphe, il est nécessaire d'étudier la convergence d'une suite vers 0 et d'établir une échelle de suites qui convergent vers 0.

* Voir brochure *Analyse 1* de l'IREM de Marseille et le bulletin Inter-IREM sur l'analyse.

25

DES ENONCES D'EXERCICES, DE PROBLEMES...

Ces énoncés ont été élaborés dans le cadre de la mise à l'essai du programme de seconde (partie analyse) : certains ont été effectivement proposés aux élèves (seconde C), d'autres non, faute de temps.

Ils abordent :

— des activités numériques : introduction, comportement, comparaison de suites,
— des études de fonctions : introduction, études locales, études globales, utilisation ou élaboration de graphiques.

Les échecs passés, dans le domaine de l'analyse, montrent que l'acquisition d'un contenu mathématique n'a pas nécessairement à reposer sur le préalable formel : bonnes définitions dont on tirerait les conséquences.

Un substrat est indispensable : il assure l'assise de l'acquisition.

Il paraît donc nécessaire de reconnaître la valeur de comportements jusque-là un peu négligés :

• démarches empiriques... pour se faire une idée : cela passe par l'utilisation d'expériences numériques, par l'utilisation du graphisme, par l'utilisation d'exemples qu'on ne peut pas totalement maîtriser avec les élèves ;

• comparaison d'exemples : au lieu de partir de grands ensembles de fonctions (ensemble des fonctions continues, ensemble des fonctions dérivables...) on préfère étudier des exemples sur lesquels des questions de comparaisons pourront permettre de dégager les aspects qualitatifs classiques (convergences, continuité, dérivabilité).

La forme de ces énoncés peut très certainement être modifiée : l'effort d'adaptation dans ce domaine doit être poursuivi en fonction des choix pédagogiques, et il serait excellent que les échanges puissent se développer à ce niveau.

En italique, quelques commentaires.

Enoncé 1 :

Série de questions liées à la notion de fonction qui visent à vérifier en partie l'acquisition du concept de fonction : 1), 2), 3), 5) ; l'aptitude à utiliser un graphique : 4), 7).

Les réactions des élèves sur 1), 2) sont notamment très intéressantes. On peut voir aussi les travaux de R. Barra (IREM de Poitiers).

1) Peut-on déterminer une fonction f de **R** dans **R** telle que :
f(1/2) = 1,65 ; f(2) = 7,39 ; f(3) = 20,09 ?

2) Peut-on déterminer une application g de **R** dans **R** telle que :
g(1/2) = 1,65 ; g(2) = 7,39 ; g(3) = 20,09 ?

3) Avec une calculatrice possédant la touche e^x, donner les valeurs de cette touche pour 1/2, 2, 3.

4) Peut-on définir une application u de **R** dans **R** telle que :
$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad -x^2 \leq u(x) \leq x^2 \quad ?$$

5) Une application v de **R** dans **R** est telle que v(1) = −1. Peut-on déterminer v(1,1) ?

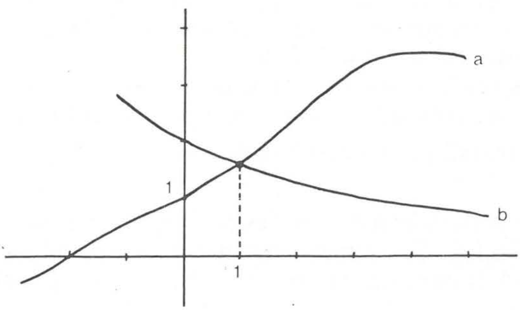
6) Une application w de **R** dans **R** est strictement croissante.
Soit l'application W de **R** dans **R** telle que $W(x) = [w(x)]^2$.
Est-il vrai que l'application W est strictement croissante ?

7) Le graphique ci-dessous représente deux applications a et b de **R** dans **R**.
A l'aide de ce graphique, résoudre :

$a(x) > b(x)$ x inconnu

$a(x > b(x) - 1$ x inconnu

$b(x) = 2$ x inconnu



Enoncé 2 :

Il est tiré d'un document élaboré pour une introduction des suites numériques dans le cadre de la mise à l'essai : modifié après analyse des réactions des élèves, il a été utilisé en classe.

Il s'agit d'explorer le comportement de suites simples, qui serviront de référence pour les convergences ultérieures : aucune formalisation de la convergence n'a été donnée.

Les aspects de comparaison de convergences apparaissent vite.

La suite h paraît indispensable pour motiver une mise en forme théorique : noter que pour a entier $\left(\frac{2^n}{n^a}\right)$ *décroît jusqu'à* $E\left(\frac{a}{Log\ 2}\right)$, *puis diverge en croissant vers* $+\infty$ *; on exagérerait le phénomène en augmentant a ; le cas a = 5 paraît suffisant...*

La deuxième partie du texte amorce l'utilisation de majorations pour accéder à d'autres suites ou déplacer la limite (non nulle).

Des introductions plus concrètes de la notion de suite méritent d'être envisagées avant ces considérations.

La deuxième partie du texte amorce l'utilisation de majorations pour accéder à d'autres suites ou déplacer la limite (non nulle).

Des introductions plus concrètes de la notion de suite méritent d'être envisagées avant ces considérations.

On considère les suites de nombres réels a,b,c,d,e,f,g,h définies par :

$$a_n = 10^{-n},\ b_n = n^{-1},\ c_n = n^{-2},\ d_n = \frac{1}{n},\ e_n = n^{-3},\ f_n = 2^n,$$
$$g_n = 10^{-4} + n^{-1},\ h_n = \frac{2^n}{n^5}$$

1) En choisissant les moyens de calcul les mieux appropriés, déterminer, éventuellement par valeur approchée, les termes de rang n des suites a,b,c,d,e,f,g,h pour $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$
On présentera les résultats dans un tableau.
Quelles observations peut-on faire sur les ordres de grandeur ?

2) Poursuivre le travail pour $n \in \{10,20,50\}$
Que constate-t-on ?

3) Procéder à la comparaison des termes de rang n et de rang $n+1$ pour les suites a,b,c,d,e,f,g. Ces suites peuvent-elles avoir un comportement analogue à la suite h pour des valeurs de n encore plus grandes ?

4) Déterminer un entier p tel que : pour $n > p$, on ait : $a_n < 10^{-2}$.
Reprendre cette étude pour b,c,d,e,f,g.
Comparer les résultats.

5) Reprendre la question 4) avec 10^{-5} à la place de 10^{-2} .

6) Dans quel cas peut-on affirmer que le terme général de la suite approche 0 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment ?
Par exemple, à partir de quel rang le terme de rang n est-il inférieur à 10^{-8} ?

7) Une suite u est supposée telle que

$$\forall n > 5 \qquad 0 < u_n < 10^{-n}$$

mais on ne connaît pas son terme général (u_n).
Que peut-on affirmer sur le comportement de u lorsque n croît infiniment ?

Qu'en serait-il si on supposait plutôt $\forall n > 21 \qquad 0 < u_n < \frac{1}{n^2}$

ou si on supposait $\forall n > 21 \qquad 0 < u_n < 10^{-10} + \frac{4}{n}$?

Donner des suites exemplaires.
Qu'en serait-il si on supposait $\forall n > 21 \qquad u_n < \frac{1}{n}$?

8) Une suite v dont le terme de rang n n'est pas connu vérifie cependant :

$$\forall n > 5 \qquad 0 < v_n - 2 < \frac{1}{n}$$

Que peut-on déduire de cela ?

9) Soit la suite i telle que $i_n = 3 + \frac{5}{n^2}$

Quel est le comportement de i lorsque n croît infiniment ?
Donner une suite approchant 3 d'autant qu'on veut, plus vite que i_n.
Dans les deux cas préciser une condition suffisante pour que le terme de rang n ne diffère de 3 que de 10^{-4} au plus.

Enoncé 3 :

Le cadre expérimental est dominant ici : il s'agit, outre quelques considérations de symétrie, d'étudier certains aspects locaux du sinus.

La question 3) est encore une utilisation de graphique : on peut constater les difficultés des élèves à cet égard.

On pose I = [− 1 ; 3, 2]

1) En utilisant la calculatrice, représenter graphiquement la restriction de la fonction sinus à I (unité : le radian) dans le plan ponctuel de repère orthonormé (unité 5 cm).

2) Estimer, avec la meilleure précision possible, les réels de I dont le sinus est nul.

Estimer, avec la meilleure précision possible, le réel de I où le sinus est maximum.

En se servant du graphique, décrire la variation du sinus sur I. Trouver une formule liant $\sin x$ et $\sin(\pi - x)$.

3) On pose $u_0 = 1$, puis $u_1 = \sin u_0$, puis $u_2 = \sin u_1$,... et ainsi de suite.

En utilisant le graphique de 1) expliquer ce que donne la répétition infinie du processus introduit dans cette question.

4) Au voisinage de 0, la fonction sinus est-elle approximable par une fonction affine ? Laquelle ?

D'après les résultats fournis par la calculatrice, sur quel intervalle a-t-on : $|\sin x - x| < 10^{-2}$?

En déduire un intervalle sur lequel $|\sin 5x - 5x| < 10^{-2}$.
Estimer de même la fonction sinus au voisinage de π.

5) Soit u l'application de **R** dans **R** telle que $u(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$.

Représenter, par choix de points, la restriction de u à I (faire le schéma sur celui de 1).

Evaluer le réel de I où u est maximum.

Quelle semble être la valeur de ce réel ? Peut-on le démontrer ? Est-ce un maximum local ou un maximum global ?

6) Que constate-t-on dans la comparaison de sinus et de u au voisinage de 0 ?

Sur quel intervalle a-t-on :

$|\sin x - u(x)| < 10^{-2}$? $\qquad$ $|\sin x - u(x| < 5.10^{-2}$?

Utiliser les résultats précédents pour majorer
$|v(x) - u(2x) + 2u(x)|$ sur $[-0{,}7 ; 0{,}7]$ avec $v(x) = \sin 2x - 2 \sin x$.

Représenter la restriction de v à $[-0{,}7 ; 0{,}7]$ par l'approximation qu'en fournit le résultat précédent.

Enoncé 4 :

Celui-ci a été proposé en devoir de synthèse à faire à la maison : retour sur les suites de référence, utilisation de comparaisons, étude globale d'une fonction, étude locale en 0 par majoration.

Soulignons que la résolution de $\dfrac{x}{1 + x^2} = y$ *(x inconnu) est certainement en dehors des objectifs du nouveau programme.*

I. Pour n entier naturel, on pose :

$$a_n = n^{-1} \ ; \ b_n = n^{-2} \ ; \ c_n = \frac{1}{n^2+1} \ ; \ d_n = \frac{n}{n^2+1} \ ; \ e_n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$f_n = \frac{n^3}{n^2+1} \ ; g_n = 10^{-3} + \frac{n}{n^2+1} \ .$$

1) En calculant des valeurs approchées des termes de ces suites pour $n \in \{1,2,3,4,5,10,1000,10\,000\}$ déterminer celles dont le terme général approche 0 d'autant qu'on veut quand n croît infiniment.

2) Comparer les réels x^{-2} et x^{-1} ; $\frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{1}{x^2}$; $\frac{x}{x^2+1}$ et $\frac{1}{x}$

3) a) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $0 < a_n < 10^{-5}$?

b) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < b_n < 10^{-5}$

c) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < c_n < 10^{-5}$

d) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < d_n < 10^{-5}$

e) Donner un entier N à partir duquel on a : $0 < d_n < 10^{-50}$

Pour répondre à b,c,d,e on utilisera a) et 2).

4) Que se passe-t-il pour e_n, f_n, g_n lorsque n croît infiniment ?

II. Soit f l'application de **R** dans **R** telle que $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1) Pour y paramètre réel, résoudre l'équation $y = f(x)$ (x inconnu).

Comment interpréter le résultat ?

2) a et b étant des réels, écrire $f(a) - f(b)$ sous une forme factorisée.

En déduire que la restriction de f à $[0;1]$ est croissante ; quelle est la variation de la restriction de f à $[1, +\infty[$?

Quelle est la variation de f sur $\mathbf{R}^-$? (penser à la parité).

3) A l'aide des calculs faits en I ébaucher une représentation graphique de f en plan de repère orthonormé.

III. 1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \qquad 0 < |f(x) - x| < |x^3|$.

2) En choisissant un repère orthonormé d'unité 10 cm, représenter graphiquement la restriction de f à $[-1; +1]$ et l'application identique de **R**.

Enoncé 5 :

Portant sur des utilisations de comportement locaux de fonctions pour créer des suites permettant d'approximer des solutions d'équations.

Le I est encore une exploration de fonctions simples destinées à servir de référence : la construction d'échelles de comparaison paraît fondamentale.

Les II, III et IV introduisent la méthode de Héron pour le calcul de racines carrées. Laplace n'avait-il pas raison de dire : "Lisez Euler, c'est notre maître à tous." ?

C'est en V et VI que la justification théorique du processus d'approximation est abordée : en fait, il s'agit de la méthode de Newton-Raphson, mais l'introduction d'Euler est un modèle de non-formalisme... à méditer !

Le choix de 23 est basé sur le fait que $4{,}8 - \sqrt{23} < \frac{5}{1000}$

ce qui permet, en deux itérations, de dépasser la capacité des calculatrices : le calcul numérique final vaut la peine et la rapidité de convergence joue un rôle essentiel.

Le VII reprend la technique sur un autre exemple : $x^3 = 2x + 1/2$; *on n'y cherche pas de justification théorique... à dessein... pour le moment.*

Le caractère irrationnel de $\sqrt{20}$ *est seulement abordé en fin de travail : en effet, son étude intiale n'est-elle pas artificielle ?*

Quelques remarques : la méthode de Héron... très à la mode.. peut être abordée par d'autres moyens, notamment par un procédé géométrique d'approximations d'un carré par des rectangles. On obtient ainsi deux suites adjacentes... ce qui est très profitable : tant pou justifier la convergence que pour approfondir le concept de réel (deux suites convergent vers le même). De toutes façons, mieux vaut éviter de parachuter l'algorithme.

On trouvera des développements dans les travaux du groupe analyse de l'IREM de Marseille.

I. Soient a,b,c,d,e,f, les fonctions de **R** dans **R** telles que :

$a(x) = x$, $b(x) = x^2$, $c(x) = x^3$, $d(x) = \sqrt{x}$, $e(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$, $f(x) = x^4$

1) Pour x de $\left\{ \frac{n}{10} \text{ , } n \in \mathbf{N} \text{ , } 0 \leqslant n \leqslant 10 \right\}$ déterminer les images de x par a,b,c,d,e,f, (éventuellement par approximation). Présenter les résultats dans un tableau.

2) A l'aide de ces résultats, donner une représentation graphique des restrictions de a,b,c,d,e,f à [0;1] dans le plan de repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 10 cm).

II. Voici un texte du grand mathématicien Léonard EULER à propos de calculs d'approximations : "...Or si p est une fraction entre zéro et l'unité, le quarré de p, son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de p seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, et d'après cela, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul".

1) Commentez ce texte à partir des résultats de **I**.

2) Feriez-vous comme EULER, et estimeriez-vous que $16+8p$ est une approximation de $(4+p)^2$ lorsque p est dans $[0,1]$?

Estimez-vous que $1+x+x^2$ est approximable par $1+x$? Dans quelles conditions ?

Estimez-vous que $1+x+\sqrt{x}$ est approximable par $1+x$?

Illustrer les réponses par des représentations graphiques.

III. Continuons la lecture du texte d'EULER : "... en cherchant par approximation la racine de l'équation $x^2=20$, on voit ici que x est plus grand que 4 et plus petit que 5 ; en conséquence on fera $x=4+p$ et on aura $x^2=16+8p+p^2=20$; mais comme p^2 est très petit, on négligera ce terme et restera l'équation $16+8p=20$; d'où $8p=4$; on déduit de là $p = \frac{1}{2}$, $x=4{,}5$ ce qui approche déjà beaucoup plus près de la vérité. Si on suppose à présent $x=4{,}5+p$, on est assuré que p signifie une fraction encore plus petite qu'auparavant, et on pourra négliger p^2 à bien plus forte raison. On aura donc $x^2=20{,}5+9p=20$, $9p=-\frac{1}{4}$ et par conséquent $p=-\frac{1}{36}$ donc $x=4+\frac{17}{36}$ ..."

Vérifier et poursuivre le calcul d'EULER pour encore une valeur approchée de $\sqrt{20}$.

IV. Construire, de même, un processus d'approximation de $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

V. 1) Supposons que u_0 soit un réel approximant $\sqrt{a}$; calculer par la technique d'EULER une nouvelle approximation u_1 de $\sqrt{a}$. On la calculera en fonction de u_0 et a.

Calculer $u_1{}^2-a$ en fonction de u_0 et a.

En déduire que $u_1 \geqslant \sqrt{a}$.

2) On pose $e_0 = u_0 - \sqrt{a}$ et $e_1 = u_1 - \sqrt{a}$.

Démontrer que $e_1 = \dfrac{(u_0 + \sqrt{a})^2}{4u_0^2} e_0^2$

VI. On s'intéresse maintenant au calcul approché de $\sqrt{23}$ par la même technique.

1) Montrer que 4,8 est une évaluation de $\sqrt{23}$. Majorer l'erreur commise.

2) Avec $u_0 = 4{,}8$, déterminer u_1 sous la forme d'un quotient d'entiers.

3) En remarquant que u_0 , u_1 , $\sqrt{23}$ sont dans [4;5], démontrer que $e_1 < 0{,}2e_0^2$. En déduire un majorant de l'erreur commise en évaluant $\sqrt{23}$ par u_1.

4) Si on réitère le processus, on obtient une valeur u_2 ; la calculer sous forme de quotient d'entiers.

Combien de décimales du développement de $\sqrt{23}$ peut-on ainsi connaître ?

5) Avec un peu de patience, et du soin, calculer ces décimales.

VII. On considère les applications c du **I** et h telle que $h(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$

1) En dressant une représentation graphique de c et h , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 = 2x + \dfrac{1}{2}$. Est-ce un résultat démontré ?

Estimer ces solutions à partir du schéma.

2) Proposer un processus d'estimation de la solution positive notée α (on essaiera d'obtenir α au 1/100)

3) En utilisant la technique de L.EULER, proposer une autre méthode

Comparer.

4) Comment préciser des évaluations des autres solutions ?

VIII. La notation p qu'EULER utilise désigne-t-elle une fraction ?

Enoncé 6 :

Il envisage des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $f(x) = x^2$ *et* $f(x) = \sqrt{x}$ *: influence du choix de* f *sur le comportement, comparaison, influence du choix de* u_0*. Là aussi des considérations graphiques seront utiles.*

On pose $u_0 = 0{,}5$ puis $u_1 = u_0^2$, $u_2 = u_1^2$ ... et ainsi de suite... $u_{n+1} = u_n^2$.

1) Calculer les dix premiers termes de la suite u .

2) Exprimer u_n en fonction de n et expliquer le comportement de u_n lorsque n croît infiniment.

On pose $v_0 = 0{,}5$ puis $v_1 = \sqrt{v_0}$, $v_2 = \sqrt{v_1}$ ... et ainsi de suite ... $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.

3) Calculer les dix premiers termes de la suite v .

Comment varie la suite v ?

4) Démontrer que $1 - v_{n+1} = \dfrac{1 - v_n}{1 + \sqrt{v_n}} \leqslant \dfrac{2}{3}(1 - v_n)$

En déduire une justification du comportement de v_n lorsque n croît infiniment.

5) Déterminer le premier rang à partir duquel : $u_n < 10^{-7}$
Déterminer le premier rang à partir duquel : $v_n > 1 - 10^{-7}$

6) Donner une suite approchant 0 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment plus vite que u .

Donner une suite approchant 1 d'autant qu'on veut lorsque n croît infiniment moins vite que v.

7) Etudier la situation lorsqu'on choisit $u_0 = 5$, $v_0 = 5$.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 13, rue du Jura, 75013 PARIS

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". Fondée en 1909, elle regroupe aujourd'hui près de 13 000 enseignants. L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de : Pluridisciplinarité [Orléans, 1975]. Problèmes de comportement [Rennes, 1976]. Formation Permanente [Limoges, 1977]. Problèmes, évaluation, erreur [Reims, 1978]. Enseignement, innovation, recherche [Grenoble, 1979]. En septembre 1980 (4 au 7 septembre), le thème sera : Quelle formation pour les enseignants de mathématiques ? [Bordeaux].

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents.
Parmi les dernières brochures parues :
Elem-Math 5 (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire.
Activités mathématiques en 4e-3e, tome 1 (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index.
Les manuels scolaires de mathématiques (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables.
Pour une mathématique vivante en Seconde (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !
Pavés et bulles (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout).
Calculatrices quatre opérations (1979) : Elémentaire et premier cycle.
Du quotidien à la mathématique (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle).

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants, d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de Mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Juin 1981

Brochure n° 24 :

CALCULATEURS PROGRAMMABLES ET ALGEBRE DE QUATRIEME

(Une recherche inter-Irem 1974-1977)

Plan d'expérience - Progressions - Fiches d'activités sur calculateur - Evaluation - L'expérience et les classes.

Brochure n° 31 :

CALCULATRICES "4 OPÉRATIONS"

En quelques années, la minicalculatrice s'est imposée à nous. Elle est peu sophistiquée, scientifique, programmable, chère, belle, bon marché, laide, très précise, petite, grosse, peu précise... Elle fonctionne sur piles, sur secteur ou sur batteries rechargeables. Elle sert au plombier, au percepteur des contributions, aux organisateurs du Tour de France, au gendarme verbalisateur. On la trouve à côté des ordinateurs, sous une vitre (à briser en cas d'urgence). Elle a réussi le tour de force de supplanter la règle à calcul de l'ingénieur.

J'ai même rencontré des professeurs de mathématiques qui en possèdent une et s'en servent.

"Mathématique et Pédagogie", numéro 11/12

• Sommaire de la brochure :

Les plumes métalliques procurent une grande économie de temps, aussi ont-elles fait invasion dans presque toutes les écoles. C'est là un mal dû à la paresse des instituteurs. La plume d'oie, par son élasticité, par la facilité avec laquelle on la taille pour tous les genres d'écriture, et par son prix modéré, a une supériorité incontestable. Néanmoins, on peut autoriser les plumes métalliques pour les dictées et les devoirs qui se font à la maison.

Extrait d'un cours de pédagogie professé sous Louis-Philippe à l'Ecole Normale de Rennes, (Promotion 1846-1848).

Les calculatrices considérées dans cette brochure sont des calculatrices 4 opérations (ce qu'elles sont toutes), munies d'une mémoire (elle augmente notablement les possibilités) et complétées éventuellement par quelques fonctions simples (+ / − ; $1/x$,...) ce qui est de plus en plus fréquent sur les machines de bas de gamme de tous les constructeurs. On les appelle souvent minicalculatrices - ou "calculettes". Indépendamment de leur faible côut, le fait qu'elles ne soient ni scientifiques ni programmables réduit le nombre de touches, donc les erreurs de frappe, et disperse moins l'attention de jeunes élèves.

Nous avons limité leur champ d'utilisation à l'enseignement obligatoire (primaire, 1er cycle, L.E.P.). Nous devrions admettre une fois pour toutes qu'à ce niveau la mathématique est aussi une science expérimentale et non une discipline purement intellectuelle qu'il suffit d'enseigner avec de bons axiomes, de bonnes paroles et un morceau de craie... Manipulons et faisons fonctionner les notions numériques fondamentales avant de les définir, et intégrons la calculette à l'apprentissage du calcul : là aussi, il faut commencer tôt... et progressivement.