A.P.M.E.P. (FRANCE)
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
(National Education Mathematics Teachers' Association)
(Asocíación de los Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública)
13, rue du Jura, 75013 - PARIS

LE RENOUVEAU DE L'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS DES MATHÉMATIQUES

REVIVAL IN THE TEACHING OF MATHEMATICS IN FRANCE

EL RENACIMIENTO DE LA ENSEÑANZA FRANCESA DE LAS MATEMÁTICAS

Brochure de "bonnes feuilles" extraites de quelques publications de l'A.P.M.E.P. (cf. pages 2...)

Brochure of extracts taken from a few A.P.M.E.P. publications (see pages 2...)

Folleto de "hojas interesantes" sacadas de algunas publicaciones de la "A.P.M.E.P." (Confiérase (C.F.) : página 2)

Mai-Août 1980

OBJECTIFS DE LA BROCHURE

Après une brève présentation de l'enseignement français "long" et de l'A.P.M.E.P., cette brochure renseigne sur les publications de l'Association et en cite des extraits.

Ceux-ci suggèrent, par quelques exemples, les éléments majeurs d'un renouveau de l'enseignement des mathématiques :

- enseignement à base d'activités, centré sur l'action de l'élève,
- prise en compte des nouveaux outils : informatique, analyse des données, ...
- large ouverture aux autres disciplines.

AIMS OF THE BROCHURE

Following a brief introduction to French long cycle education, it gives a description of the Association's publications and quotes some excerpts.

Those extracts suggest, with the help of a few examples, the main features of a revival in the teaching of mathematics :

- the teaching being based on activities, focused on the pupil's actions
- the introduction of new tools : data processing and analysis, ...
- more consideration of other subjects.

OBJETOS DEL FOLLETO

Después de una breve presentación de la segunda enseñanza francesa y de la "A.P.M.E.P." este folleto informa sobre las publicaciones de la Asociación y cita algunos trozos.

Estos sugieren, por medio de algunos ejemplos, los elementos importantes de un renacer de las matemáticas :

- enseñanza, a base de actividades, enfocada sobre la acción del alumno.
- hecho de tomar en cuenta los nuevos procedimientos : informática, análisis de los datos,...
- amplia abertura, anchura de miras hacia las otras asignaturas.

SOMMAIRE
CONTENTS
SUMARIO

L'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS "LONG"

French long cycle education
Primera y Secunda Enseñanzas Francesas

Degrés d'enseignement — Educational grades — Varias enseñanzas			Age des élèves (années) Pupils' age (years) Edad de los alumnos (años)	CLASSES CLASSES CURSOS	Etablissements Institutions Escuelas. Colegios Institutos
Pré-élémentaire Pre-elementary Escuela de párvulos			2 à 6	Classes " maternelles "	Ecoles
"Elémentaire" ou "Premier Degré" "Elementary" or "first grade" Primera enseñanza			6 7 8 9 10	CP (Cours Préparatoire) CE 1 (Cours élémentaire 1re année) CE 2 (Cours élémentaire 2e année) CM 1 (Cours moyen 1re année) CM 2 (Cours moyen 2e année)	Ecoles
Second Degré	Segunda enseñanza	Premier cycle First cycle Primeros años	11 12 13 14	6e, 5e: Cycle d'Observation 4e, 3e: Cycle d'Orientation	Collèges
		Deuxième cycle Second cycle Últimos años	15 16 17	2e 1re Terminales (→ Baccalauréat)	Lycées
Supérieur Higher Education Enseñanza superior			Classes préparatoires aux "Grandes Ecoles" (Ecoles Normales Supérieures, Ecoles d'Ingénieurs,...)	Universités : DEUG Licence Maîtrise.	I.U.T. (Instituts Universitaires à enseignement limité à 2 ans).

L'enseignement technique "long" est inclus dans le tableau ci-dessus. Mais il existe aussi un enseignement technique "court", dispensé dans les "Lycées d'enseignement professionnel" (L.E.P.), auquel l'A.P.M.E.P. attache le plus grand intérêt.

LES I.R.E.M.

(Instituts de Recherches sur l'enseignement des mathématiques)

- Nombre : 25 (Un par "Académie"). Créés de 1969 à 1974.
- Missions : Recherches — Formations continue et initiale (liées à la Recherche) — Documentation des enseignants.
- Fonctionnement :
  — Des "formateurs" ou "animateurs" issus des différents degrés d'enseignement (cf. page 4) intervenant en équipe sur pied d'égalité et conservant au moins un demi-service dans leur établissement d'origine (Collège, Lycée, Université).

  — Jusqu'en 1979 : des stagiaires, enseignants titulaires du Premier ou du Second Degrés (cf. Page 4).

  — Instituts, rattachés aux Universités, à fonctionnement largement autonome.

THE IREMs

(Research Institutes for the teaching of mathematics)

- Number : 25 (one for each "educational district")
  — Created between 1969 and 1974.
- Aim : research work, adult and education courses (in connection with research) — Documentation for teachers.
- Procedure :
  — "Instructors" or "managers" come from all levels of education (see page 4) and work on teams, on an equal footing but continue to hold at least a half-time appointment in the institutions from which they come (College, Lycée, University).
  — Up to 1979 : trainees, titular teachers in the primary or secondary level (see p. 4).
  — Institutes, connected with the universities but functioning in a largely autonomous way.

LOS I.R.E.M.

(Institutos de investigaciones sobre la enseñanza de las Matemáticas)

- Número : 25 (uno por "Distrito Universitario"), creados desde 1969 hasta 1974.
- Propósitos : investigaciones — Formación continua e inicial (en relación con la investigación) — Documentación de los maestros y profesores.
- Funcionamiento :
  — "Instructores" o "animadores" procedentes de las varias enseñanzas (C.F. página 4), interviniendo en grupos en un pie de igualdad y trabajando la mitad del tiempo de servicio en su establecimiento de origen (Colegio, Instituto, Universidad).

  — Hasta 1979, maestros y catedráticos de la primera o secunda enseñanza (C.F. página 4) : profesores que venían para completar su formación.

  — Institutos, dependientes de las Universidades, funcionando con amplia autonomía.

L'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Forte de 13 000, membres l'A.P.M.E.P. est l'Association représentative des enseignants français de mathématiques qu'elle regroupe "de la Maternelle jusqu'à l'Université" (incluses).

Elle lutte depuis des dizaines d'années pour une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. Elle le fait par ses équipes, ses publications (bulletin, brochures), ses textes d'orientation, ses dossiers,... et a obtenu en 1968 la création des I.R.E.M.

"Enseignement à base d'activités", "personnalisation des enseignements" ("Noyaux-thèmes", "niveaux d'approfondissement"...), formation des enseignants liée à la recherche, "Secteurs-Innovation",... sont aujourd'hui les axes fondamentaux de la réflexion et de l'action de l'A.P.M.E.P.

THE A.P.M.E.P.

(National Education Mathematics Teachers' Association)

With its 13 000 members, the A.P.M.E.P. is the representative Association of French mathematics teachers, coming from any level of education — nursery schools as well as universities.

For many years, it has been struggling to obtain deep-rooted amendments in the teaching of mathematics. This is done by means of its teams, publications (bulletin, brochures), Orientation Texts, documents and files,... and it suceeded in creating the IREMs in 1968.

"Teaching based on activities", "personalized teaching" ("Core-topics", "advanced courses",...) training of teachers in connection with research, "innovational branches" are nowadays the fundamentals of the A.P.M.E.P. considerations and actions.

LA A.P.M.E.P.

(Asociación de los Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública)

Con 13 000 individuos la A.P.M.E.P. es la Asociación representativa de los profesores franceses de Matemáticas y los agrupa "desde la escuela de párvulos hasta la Universidad" (inclusas).

Lucha desde numerosos años por una reforma en lo más hondo de la enseñanza de las Matemáticas. Lo realiza con sus grupos de profesores, sus publicaciones (boletín, folletos), sus textos para orientar, sus documentos e informes... y ha conseguido en 1968 la creación de los I.R.E.M.

"Enseñanza a base de actividades", "personalización de las enseñanzas" ("temas-núcleos", "varios niveles de estudio profundo",...), formación de los profesores con relación a la investigación, "Ramos-Innovación",... son, hoy día, las orientaciones fundamentales de la reflexión y de la acción de la A.P.M.E.P.

LE BULLETIN NATIONAL DE L'A.P.M.E.P.

• Conditions d'abonnement : Page 150.
• Bulletin d'abonnement : Page 151.

THE A.P.M.E.P. NATIONAL BULLETIN

• Information on subscriptions : page 150.
• Subscription form : page 151.

EL BOLETÍN NACIONAL DE LA A.P.M.E.P.

• Condiciones de suscripción en la página 150.
• Papeleta de suscripción en la página 151.

Le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public (A.P.M.E.P.), qui tire à environ 14 000 exemplaires, va publier son 325ᵉ numéro. Il paraît en février, avril, juin, septembre et décembre et comporte environ 1 000 pages par an. Le bulletin de décembre contient un index alphabétique pour l'année.

Notre bulletin, né avec l'Association en 1910, a une longue histoire liée à l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans notre pays, qui a beaucoup changé, surtout entre 1955 et 1975, tant par les effectifs des élèves et des enseignants que par le contenu des programmes et quelquefois les méthodes pédagogiques. Notre bulletin a lui aussi grossi puisqu'il est passé de 150 pages annuelles en 1949 à près de mille aujourd'hui. Ainsi, avec ses brochures, notre Association a-t-elle publié davantage depuis quinze ans que durant les quarante années précédentes.

Examinons quels sont les objectifs que poursuit notre bulletin. Organe d'une association, le bulletin doit d'abord refléter la vie de celle-ci et pour cela être vivant. Comme un quotidien ou un hebdomadaire, il doit faire une large place à l'actualité, aux soucis de l'heure, à nos préoccupations et à nos luttes, et, le cas échéant, servir à nous mobiliser. Mais il doit aussi nous aider à prendre du recul par rapport à l'événement, de la hauteur pour mieux agir à longue échéance et pour cela, publier des synthèses issues d'une de nos Commissions ou d'un de nos groupes de travail. Le cas échéant, il doit ouvrir un débat et présenter objectivement la variété des points de vue en présence. S'adressant à des enseignants de mathématiques, il doit faire une large place, tant à la vie de la mathématique contemporaine qu'à celle de la didactique, sans pour autant isoler les mathématiciens de la société dans laquelle ils vivent.

Organe d'une association qui souhaite regrouper ceux qui enseignent les mathématiques "de la Maternelle à l'Université", notre bulletin doit être lisible par chacun d'entre eux. Or, de l'enseignement élémentaire aux classes préparatoires, des lycées d'enseignement professionnel aux collèges secondaires, des formations initiales aux formations continues, bien diverses sont nos motivations, nos méthodes, nos connaissances. Les élèves dont nous avons la responsabilité diffèrent par leur âge, leur environnement, leurs perspectives d'avenir, leurs soucis professionnels et chaque classe nous amène à éclairer d'un jour particulier le petit morceau d'édifice mathématique que nous voulons leur faire construire.

En dehors de la classe, chacun de nous a un goût plus ou moins prononcé pour les mathématiques et une plus ou moins grande familiarité avec telle branche, tel théorème, tel langage. Et pourtant, une est la mathématique et unique chaque élève qui connaîtra bien des maîtres tout au long de sa scolarité ! C'est pour préserver ces unités que notre association a écarté à plusieurs reprises, après l'avoir longuement étudiée, la suggestion de faire éclater le bulletin en revues spécialisées.

Il importe donc que chacun y trouve aliment comestible à son goût, éveil à sa curiosité et aussi information sur autrui, motif de recherche ou occasion de formation. Le développement des brochures permet de répondre à des demandes plus spécifiques. Nous souhaitons que les auteurs d'articles aient toujours présente à l'esprit notre grande diversité, qu'ils restent simples, concis et piquants afin que leurs lecteurs les suivent jusqu'au bout.

Organe de liaison d'une association,notre bulletin doit être ouvert. Ouvert à tous les adhérents, c'est-à-dire d'abord à tous les groupes de réflexion ou commissions où s'élaborent, tant au niveau régional qu'au niveau national, les grands axes de notre action.

Ouvert aussi à tous les chercheurs qui, en particulier dans les I.R.E.M., font avancer l'analyse de notre enseignement et souhaitent, par la variété de leurs expérimentations et observations, le faire évoluer ; ouvert aussi aux mathématiciens, non pour présenter un résultat isolé, ce qu'ils peuvent faire dans une revue mathématique, mais au contraire une synthèse d'un problème mathématique contemporain ou pour éclairer une même question de points de vue variés. Ouvert enfin à ceux qui souhaitent exprimer un point de vue personnel, se faire connaître, ouvrir le dialogue avec d'autres adhérents, à condition bien sûr que leur intervention reste dans les limites compatibles avec le volume du bulletin.

Quels sont les moyens que nous nous donnons pour satisfaire ces objectifs ?

La politique d'ensemble des publications de l'A.P.M.E.P., l'équilibre entre bulletin, annales et brochures, l'opportunité de s'intéresser à tel ou tel domaine, sont définis par la "Commission des publications", qui réunit le Président, le responsable des brochures, celui du bulletin et celui de la fabrication, au rôle discret mais combien efficace, au moins trois fois par an.

Le bulletin résulte du travail de la "Commission du bulletin" qui se réunit cinq fois par an, une fois pour chaque numéro. Dès qu'un article est proposé au responsable du bulletin, celui-ci le soumet à deux lecteurs choisis, autant que faire se peut, pour représenter la variété des adhérents et à un rapporteur, membre de la Commission. La Commission examine tous les articles proposés et se prononce au vu des conclusions du rapporteur soit pour publier l'article tel quel, soit pour demander à l'auteur des modifications, soit pour refuser l'article, décision dont l'auteur est informé. La Commission compose ensuite les numéros à l'aide des articles retenus, en ménageant un équilibre aussi harmonieux que possible.

Passons maintenant en revue les diverses rubriques que l'on trouve plus ou moins régulièrement dans chaque numéro.

Le bulletin débute par un "éditorial", écrit en général par le Président sur un point d'actualité et sur l'état de nos négociations avec notre principal interlocuteur, le Ministère de l'Education, dont dépend en France tout enseignement dans ses moindres détails.

Les rubriques "Études", "Études didactiques", "Échanges" sont largement ouvertes aux chercheurs pour qu'ils présentent ce qui, dans leur recherche, est assez général et abordable pour intéresser une vaste partie de la communauté mathématique. "Études" comporte des articles assez longs permettant d'aller au fond d'une question et comportant une bibliographie suffisamment large pour qui veut explorer plus en détail le domaine abordé. "Études didactiques" est apparu plus récemment pour donner la parole aux chercheurs, assez nombreux et divers en France maintenant, qui travaillent sur la didactique des mathématiques, dans un I.R.E.M. ou un laboratoire universitaire : ils peuvent y exposer non seulement leurs résultats mais aussi la méthodologie employée, les difficultés rencontrées, les pistes qui restent à explorer. "Échanges" est consacré à des articles beaucoup plus courts et ponctuels autour de solutions nouvelles de problèmes anciens ou d'idées originales à semer dans une classe.

La rubrique "Dans nos classes" est prisée de beaucoup de collègues qui souhaitent y trouver l'écho de leurs difficultés quotidiennes d'enseignement ; elle permet à tous ceux qui privilégient l'activité de l'élève, le travail en équipes, la recherche spontanée, l'innovation, de s'exprimer dans le bulletin.

Vient ensuite une série de rubriques alimentées surtout par le travail de nos commissions : "Formation des maîtres" présente des réalisations tant en formation continue qu'en formation initiale, pour les instituteurs aussi bien que pour les maîtres du second degré dans un domaine où les initiatives sont bien souvent bridées par une administration qui, sous couvert d'unifier, ne parvient pas à définir une politique d'ensemble à suffisamment long terme.

"Interdisciplinarité" nous permet de donner la parole à des collègues d'autres disciplines : linguistiques, physiciens, géographes, économistes..., et surtout à rendre compte de travaux d'équipes vraiment pluridisciplinaires.

"Manuels scolaires", dans un cadre plus étroit que celui des brochures, cherche à susciter une réflexion sur les critères de choix et d'utilisation des manuels, qui exercent un poids énorme pour l'interprétation des programmes, et à suggérer leur remplacement progressif par des moyens de documentation beaucoup plus riches et variés.

"Évaluation" nous présente les derniers résultats de la docimologie et nous interroge sur la valeur de nos méthodes traditionnelles de contrôle et de sélection.

"Informatique" a de vastes ambitions : non seulement présenter aux enseignants des matériels très divers,de la modeste calculette "quatre opérations" aux puissants ordinateurs multi-consoles connectés à des périphériques graphiques variés, mais surtout s'interroger sur le rôle que doivent jouer ces moyens techniques en rapide évolution dans notre métier : s'agit-il d'aides complémentaires à un enseignement qui peut rester traditionnel ou bien assistons-nous à une véritable révolution aux conséquences au moins aussi profondes que celles de l'invention de l'imprimerie ?

"Audio-visuel" poursuit des objectifs analogues pour ces nouveaux "média" que sont le rétroprojecteur, la télévision en circuit fermé, le film court et bientôt le vidéodisque. Là aussi, il reste beaucoup à faire pour les introduire sans soubresauts dans la classe.

"Mathématiques et Société", "Enseignement des mathématiques à l'étranger" et "Un coin de ciel" nous interpellent sur notre rôle social et notre place dans le monde.

Les exigences de l'actualité nous conduisent parfois à donner une large place à deux rubriques de type plus administratif : "Programmes" et "Examens et concours".

Les programmes sont, on le sait, élaborés en France par l'"Inspection Générale" de Mathématiques et toujours dans des délais tels qu'aucune expérimentation sérieuse n'est possible. Du moins les collègues aiment-ils connaître rapidement les textes et notre bulletin les publie en les accompagnant de textes de réflexion.

Les "Concours" sont nationaux et les Examens régionaux ; les textes des épreuves de mathématiques sont souvent critiquables, soit parce qu'ils comportent des erreurs mathématiques, soit surtout parce que leur auteur, dans le souci de briller par originalité devant ses collègues, oublie que le texte est destiné à contrôler les aptitudes d'un élève en fin de cycle.

"Matériaux pour une documentation" est, comme son nom l'indique, destiné à compléter une abondante bibliographie et à aider les collègues dans leur lecture.

La "Rubrique des problèmes" suscite toujours un abondant courrier. Elle est depuis peu accompagnée d'une rubrique "Jeux et maths" consacrée à l'invention de nouveaux jeux, à l'étude de situations nouvelles dans des jeux fort anciens, à l'utilisation de jeux en classe ou en club.

Trois rubriques sont consacrées à la vie de l'association :

— Les "Journées Nationales" rendent compte de nos réunions annuelles, où, durant trois jours consécutifs, nous étudions en ateliers, tables rondes et conférences, un thème tel que "Recherche et innovation" ou "Formation des maîtres".

— "La vie de l'association" rend compte au jour le jour des réunions de notre comité et de nos relations avec le Ministère mais aussi du travail de nos commissions.

— "La vie des Régionales" permet à chacune de nos vingt-six "régionales" de présenter ses initiatives locales, son activité, ses expositions, ses publications.

Enfin, à côté de la "Tribune libre" traditionnellement consacrée aux interventions sur la politique de l'association, une rubrique "Courrier des lecteurs" souhaite publier toutes les observations, critiques et suggestions relatives au bulletin, à son contenu comme à sa forme.

Nous espérons que cette longue énumération n'aura pas été trop fastidieuse pour le lecteur de ces lignes et lui aura donné la curiosité de feuilleter notre bulletin pour le mieux connaître et, pourquoi pas, s'y abonner ?

The APMEP bulletin has a 14 000 printing (in Feb, Apr, Ju, Sept, Dec), totalling 1 000 pages per year, subject index in Dec. Its 325 th issue is just coming out.

Starting with the Association in 1910, its history is linked with the evolution of the teaching of maths in France which has much changed, especially between 1955 and 1975, in number of students and teachers as well as in curriculae and teaching methods. The bulletin evolved from, say 150 pages in 1949, to 1 000 pages to day. Together with its publications, pamphlets, the APMEP published more since 15 years than during the preceding 40 years.

What are the objectives of this bulletin ?

As a mouth piece of the association, it first shows out the life of the APMEP. Like a daily or weekly paper, it deals with the events of the day, the worries and the professionnal defenses... eventually it mobilizes teachers.

But it also helps them, through synthetic publications of one of its boards or working groups, to look at the events further and deeper in order to act better in the long run.

Eventually it sets up a panel discussion and presents objectively the different viewpoints. Made for mathematics teachers, it gives a full description of to-day's mathematics and of its didactics, not forgetting mathematicians in the surrounding social set up. As a mouth piece of an Association whishing to gather all math teachers "from nursery to University", it must be easily readable by all kind of teachers. Obviously from elementary to competitive post secondary classes, from technical to general schools, from initial to continued learning, motivations vary quite a lot, as well as methods and knowledge.

Responsability for the education of students with different ages, environment, future prospects, professionnal problems, responsability for different classes, tend to give teachers a personnal light on the piece of mathematic structure they would have their students build.

Outside class room, every teacher likes more or less mathematics and is more or less used to such branch, theorem, language in maths.

But math is all one and each student is unique while his teachers are many along his studies. To preserve this unity, the association, after much thinking, rejected many times the proposal of partitionning of the bulletin in specialized ones.

Therefore it must insure subjects to everybody's taste, waking up curiosity, information on other teachers, research themes, learning meetings, congresses...

Its development permits answers to more specific questions. It is wished that anyone writing a paper always thinks about this diversity and remains easy to follow, witty and concise, to have readers read them all over.

As a link between members, it must be opened to everybody ideas, to every working groups or boards which build up, locally or on a national scale, the main lines of the activity of the Association.

It is also open to researchers (for example in the IREM's) who make analysis of teaching go forward and hope, through their variety of experimentations and observations, to make it evolve. Also to mathematicians, not for particular results which they can better write in mathematical reviews, but rather for synthetic views on contemporary problems or enlightment of a given question by different viewpoints.

And last it is also open to those who to express personal views, make themselves known, get acquainted with others, provided their do not overrun limits set by the capacity of the bulletin.

Which means does the Association have to fulfil these objectives ? The overall politic on publications, balance between bulletin, annals, pamphlets, the opportunity of interest on such and such domains, are defined by the "publishing committee" which brings together three times a year, the President, the pamphlet's, the bulletin's, and printing officers (the last one rather in the shadow but quite efficient).

The "bulletin committee" meets five times a year, one for each issue. Any script coming in is read by two members chosen, as much as possible, as good representatives for a variety of members and a report is made by a member of the committee.

All papers are read and through the report, publication in the given form is decided or modifications are proposed to the author or the paper is refused and the author informed.

Then papers are gathered, according to a right equilibrium of subjects for the coming bulletin.

Now what are the different parts of most issues ?

First, an "editorial notes", generally written by the President, on some up-to-date event and on negociations with the principal interlocutor, the Minister of Education, who takes all decisions in Education in France to the smallest details.

Then "studies", "didactic studies", "swapping ideas", open to searchers for presentation of parts of their researchs, as general and understandable as needed for interesting most of the members.

"Studies" contain rather long papers that go quite to the bottom of a given question, with a bibliography large enough for anyone interested.

"Didactic studies" appeared recently for searchers who more and more nowadays, work on didactics in an I.R.E.M. or a Universit Lab : they present their results and the methodology they used, the drawbacks, the directions in which to search further.

"Swapping ideas" deals with short papers, on one given point about new solutions to old problems or witty ideas to sow in class room. "In the class room" is rather liked by many members who wish to find echos of their own teaching difficulties ; all those who set forward student activities, team work, spontaneous research, innovation, can join in here.

Then a series of other parts fed with the work of the Committees. "Teacher's education" presents results in continued and initial education of primary school teachers and secondary school teachers in a domain where initiative is often bridled by the state administration which, under a so called intention of unification, does not succeed in defining a general policy for a reasonably long run.

"Interdisciplinarity" gets the viewpoints of teachers of other disciplines : languages, physics, geography, economics,... and principally it gives accounts of teamwork of teachers of actually different disciplines.

"School books" intends to have teacher think about criterion for choices and use of books ; books do weight much for interpretations of curriculae matters.

It also suggests progressive replacement of books by documents and means of reproduction with more variety and richer contents.

"Evaluation" presents the latest results in docimology and questions on the value of traditionnal evaluation and selection methods.

"Informatics" is very ambitious ; it wishes to present different type of computing materials from 4 operations pocket calculator to multidesks systems with all kind of ports for video,... and here again principally to think about the role which these fast changing technical means should have in our teaching activity : will teaching remain traditionnal with complementary help of these means or do we face a revolution with consequences as deep as those of the invention of printing ?

"Audio-video" has the same objectives about new media such as retroprojectors, television in close circuit, short films, videodisk. There again how are we to introduce them in classroom activity without troubles.

"Mathematics and Society", "Mathematics teaching abroad", "Sky little area" make us think about our social part and place in society and the world.

According to the news on the subject, a wide development is sometimes given to a couple of administrative items : "curriculae" and "competitive and non competitive examinations".

In France, curriculae are set up by the Board of the General Inspectors in Mathematics, always in such a short time that testing them for reasonable fitting is quite impossible.

Teachers do wish to know the tests of these curriculae as fast as possible. Our Bulletin publishes them with thoughtful remarks and comments.

Competitive examinations are set on a nation wide scale while non competitive are regional ones : mathematic problem texts are often highly criticizable either because of mathematical errors or more often because the authors of these problems, in order to be considered as genuine and witty, forget they had better think about evaluation of student ability when ending a learning cycle.

"Materials for documentation" is meant for completing bibliography and helping teachers in their reading.

"Problems pages" get always a lot of letters from teachers ; recently "Mathematical games" were added to it with invention of new games, study of new situations in old games, use of games in classrooms or student clubs.

Three parts deal with the life of the Association :

"National meetings" give account of annual meetings. During these 3-days meetings, a given theme is studied in workshops,panel discussions, conferences, for example "Research and innovation", and "Teachers's training".

"The life of the Association" gives daily account of the meetings of our committee and of our relations with the Ministry of Education as well as of the work of our commissions.

"The life of Regional branches" deals with local initiatives, local activities, publications, exhibitions.

And last, besides "Free opinions", which is usually meant for opinions on the policy of the Association, "Reader's courier" is for observations, critics, suggestions about the Bulletin, its content, its form.

We do wish that this lengthy enumeration will not be too tedious and that readers will feel inclined to flip pages and look over our bulletin and, who knows, eventually take a subscription.

El Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (A.P.M.E.P.) que tiene una tirada de alrededor de 14 000 ejemplares, va a publicar su número 325. Aparece en Febrero, Abril, Junio, Septiembre y Diciembre y contiene alrededor de 1 000 páginas por año. El boletín de diciembre contiene un índice alfabético de cada año.

Nuestro boletín, nacido con la Asociación en 1910, tiene una larga historia ligada a la evolución de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país, que ha cambiado mucho, sobre todo entre 1955 y 1975, tanto por los efectivos de alumnos y de enseñantes como por el contenido de los programas y a veces por los métodos pedagógicos. Nuestro boletín ha aumentado también, pues ha pasado de 150 páginas anuales en 1949 a cerca de 1 000 actualmente. Así, con sus folletos, nuestra Asociación ha publicado más desde hace quince años que en los cuarenta años precedentes.

Examinemos cuáles son los objetivos que persigue nuestro boletín. Como órgano de una asociación, el boletín debe reflejar, en primer lugar, la vida de ésta y para ello seguir vivo. Como un periódico o un semanario, debe dejar un amplio espacio a la actualidad, a los intereses del momento, a nuestras preocupaciones y a nuestras luchas y, si llega el caso, servir para mobilizarnos. Pero también debe ayudarnos a retroceder con relación al acontecimiento, a elevarnos para actuar mejor a largo plazo y para ello, publicar síntesis salidas de alguna de nuestras Comisiones o de alguno de nuestros grupos de trabajo. En caso necesario, debe abrir un debate y presentar objetivamente la variedad de los puntos de vista en presencia. Dirigiéndose a enseñantes de matemáticas, debe dedicar un amplio espacio tanto a la vida matemática contemporánea como a la de la didáctica, sin aislar por ello a los matemáticos de la sociedad en la que viven.

Como órgano de una asociación que desea reagrupar a los que enseñan las matemáticas "desde la Escuela de Párvulos hasta la Universidad", nuestro boletín debe ser legible para cada uno de ellos. Ahora bien, nuestras motivaciones, nuestros métodos y nuestros conocimientos son muy diversos : desde la enseñanza elemental a las clases preparatorias, desde los institutos de enseñanza profesional a los colegios de enseñanza media, desde las formaciones iniciales a las formaciones continuas. Los alumnos de los que somos responsables difieren por su edad, su entorno, sus perspectivas de porvenir, sus preocupaciones profesionales y cada clase nos obliga a aclarar con una luz particular el trocito de edificio matemático que queremos hacerles construir.

Al margen de la clase, cada uno de nosotros tiene un gusto más o menos pronunciado por las matemáticas y una mayor o menor familiaridad con alguna rama, algún teorema, algún lenguaje. ¡ y sin embargo, la matemática es una y único cada alumno que conocerá a muchos profesores a lo largo de su escolaridad ! Precisamente para preservar estas unidades nuestra asociación ha descartado en varias ocasiones, después de haberla estudiado ampliamente, la sugestión de hacer estallar el boletín en revistas especializadas.

Es pues importante que cada uno encuentre en ella alimento comestible a su gusto, el despertar de su curiosidad y también información sobre los demás, motivo de investigación o posibilidad de formación. El desarrollo de los folletos permite responder a peticiones más específicas. Deseamos que los autores de artículos tengan siempre presente nuestra gran diversidad, que sean sencillos, concisos y agudos con el fin de que sus lectores les sigan hasta el final.

Como órgano de enlace de una asociación, nuestro boletín tiene que estar abierto. Abierto a todos sus afiliados, es decir, en primer lugar a todos los grupos de reflexión o comisiones en que se elaboran, tanto a nivel regional como a nivel nacional, los grandes ejes de nuestra acción. Abierto también a todos los investigadores que, especialmente en los I.R.E.M., hacen avanzar el análisis de nuestra enseñanza y desean, por la variedad de sus experimentos y observaciones, hacerlo evolucionar ; abierto también a los matemáticos, no para presentar un resultado aislado, lo que pueden hacer en una revista matemática, sino al contrario, una síntesis de un problema matemático contemporáneo o para esclarecer una misma cuestión desde puntos de vista diferentes. Abierto, por fin, a los que deseen expresar un punto de vista personal, darse a conocer, abrir el diálogo con otros afiliados, a condición, claro, de que su intervención se mantenga en los límites compatibles con el volumen del boletín. ¿ Cuáles son los medios que nos otorgamos para satisfacer estos objetivos ?

La política de conjunto de las publicaciones de la A.P.M.E.P., el equilibrio entre boletín, anales y folletos, la oportunidad de interesarse por tal o tal campo, son determinados por la "Comisión de publicaciones" que reúne, al menos tres veces por año, al Presidente, al responsable de folletos, al del boletín y al de la fabricación, en un papel discreto pero qué eficaz.

El boletín resulta del trabajo de la "Comisión del boletín" que se réune cinco veces al año, una vez para cada número. En cuanto un artículo es propuesto al responsable del boletín, éste lo somete a dos lectores seleccionados, en la medida de lo posible, para representar a la variedad de los afiliados y a un ponente, miembro de la Comisión. La comisión examina todos los artículos propuestos y se pronuncia, a la vista de las conclusiones del ponente, o bien por publicar el artículo tal cual, o bien por pedir modificaciones al autor, o bien por rechazar el artículo, decisión de la cual se informa al autor. La Comisión compone seguidamente los números, con ayuda de los artículos retenidos, estableciendo un equilibrio tan armonioso como sea posible.

Pasemos ahora revista a las diversas secciones que se encuentran más o menos regularmente en cada número.

El boletín comienza con una "Editorial" escrita generalmente por el Presidente sobre un aspecto de la actualidad y sobre el estado de nuestras negociaciones con nuestro principal interlocutor, el Ministerio de Educación del que depende en Francia toda enseñanza en sus mínimos detalles.

Las secciones "Estudios", "Estudios didácticos", "Intercambios" están ampliamente abiertas a los investigadores para que presenten lo que en su investigación es suficientemente general y abordable como para interesar a una amplia parte de la comunidad matemática. "Estudios" comprende artículos bastante largos que permiten ir hasta el fondo de una cuestión y que contienen una bibliografía suficientemente amplia para quien quiera explorar más detalladamente el terreno abordado.

"Estudios didácticos" ha aparecido más recientemente para dar la palabra a los investigadores, actualmente bastante numerosos y diversos en Francia, que trabajan sobre la didáctica de las matemáticas, en un I.R.E.M. o en un laboratorio universitario : allí pueden exponer no solamente sus resultados, sino también la metodología empleada, las dificultades encontradas, los caminos que quedan por explorar. "Intercambios" está consagrado a artículos mucho más cortos y puntuales sobre soluciones nuevas a problemas antiguos o ideas originales para sembrar en una clase.

La sección "En nuestras clases " es apreciada por muchos colegas que desean encontrar en ella el eco de sus dificultades diarias de enseñanza ; permite expresarse en el boletín a todos aquellos que privilegian la actividad del alumno, el trabajo en equipo, la investigación espontánea, la innovación.

Vienen después una serie de secciones alimentadas sobre todo por el trabajo de nuestras comisiones : "Formación de profesores" presenta realizaciones tanto en formación continua como en formación inicial tanto para los maestros de escuela como para los profesores de segundo grado en un terreno en que las iniciativas son muy a menudo frenadas por una administración que, con la intención de unificar, no llega a definir una política de conjunto a suficiente largo plazo.

"Interdisciplinaridad" nos permite dar la palabra a colegas de otras disciplinas : lingüistas, físicos, geógrafos, economistas,... y sobre todo dar cuenta de trabajos de equipos verdaderamente pluridisciplinarios.

"Manuales escolares", en un marco más limitado que el de los folletos, intenta suscitar una reflexión sobre los criterios de elección y de utilización de los manuales, que ejercen un peso enorme en la interpretación de los programas, y sugerir su sustitución progresiva por medios de documentación mucho más ricos y variados.

"Evaluación" nos presenta los últimos resultados de los estudios sobre las formas de control de los conocimientos y nos interroga sobre el valor de nuestros métodos tradicionales de control y de selección.

"Informática" tiene vastas ambiciones : no sólo presentar a los enseñantes materiales muy diversos, desde la modesta calculadora "cuatro operaciones" hasta los poderosos ordenadores multi-teclados conectados con periféricos gráficos variados, sino sobre todo interrogarse sobre el papel que deben desempeñar estos medios técnicos en rápida evolución en nuestra profesión : ¿ se trata de ayudas complementarias a una enseñanza que puede seguir siendo tradicional o bien asistimos a una verdadera revolución de consecuencias al menos tan profundas como las de la invención de la imprenta ?

"Audio-visual" persigue objetivos análogos para estos nuevos "media" como son el retroproyector, el circuito cerrado de televisión, el cortometraje y pronto el videodisco. En esto también, queda mucho por hacer para introducirlos sin sobresaltos en la clase.

"Matemáticas y Sociedad", "Enseñanza de las matemáticas en el extranjero" y "Un pedazo de cielo" nos interrogan sobre nuestro papel social y nuestro lugar en el mundo.

Las exigencias de la actualidad nos llevan a veces a dedicar un gran espacio a dos secciones de tipo más administrativo : "Programas" y "Exámenes y Oposiciones".

En Francia, ya se sabe, los programas son elaborados por la "Inspección general" de Matemáticas y siempre con tantos detalles que cualquier experimento serio es imposible. Al menos a los colegas les gusta conocer rápidamente los textos y nuestro boletín los publica acompañándolos de textos de reflexión.

Las "Oposiciones" son nacionales y los "Exámenes" regionales ; los textos de las pruebas de matemáticas son a menudo criticables, bien porque contienen errores matemáticos, o bien principalmente porque su autor, con la preocupación de brillar por su originalidad ante sus colegas, olvida que el texto está destinado a controlar las aptitudes de un alumno que termina el ciclo.

"Materiales para una documentación" está destinado, como su nombre indica, a completar una abundante bibliografía y a ayudar a los colegas en su lectura.

La sección de "Problemas" suscita siempre una abundante correspondencia. Va acompañada desde hace poco por una sección "Juegos y Matemáticas" consagrada a la invención de nuevos juegos, al estudio de situaciones en juegos muy antiguos, a la utilización de juegos en clase o en el club.

Tres secciones están consagradas a la vida de la asociación.

— Las "Jornadas Nacionales" dan cuenta de nuestras reuniones anuales, en que durante tres días consecutivos, estudiamos en "talleres", mesas redondas y conferencias, un tema como "Investigación e Innovación" o "Formación de profesores".

— "La vida de la asociación" da cuenta día por día de las reuniones de nuestro Comité y de nuestras relaciones con el Ministerio y también del trabajo de nuestras Comisiones.

— "La vida de las Regionales" permite presentar sus iniciativas locales, su actividad, sus exposiciones, sus publicaciones, a cada una de nuestras 26 "regionales".

Por fin, al lado de "Tribuna libre", tradicionalmente consagrada a las intervenciones sobre la política de la Asociación, una sección "Correo de los lectores" desea publicar todas las observaciones, críticas y sugestiones relativas al Boletín, tanto a su contenido como a su forma.

Esperamos que esta larga enumeración no haya sido demasiado aburrida para el lector de estas líneas y que le haya despertado la curiosidad de hojear nuestro boletín para conocerlo mejor y, ¿ por qué no ?, abonarse a él.

LES BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

• Liste complète et conditions d'achat des brochures : pages 147 - 149.
• Conditions d'abonnement aux publications : page 150.
Fiche d'abonnement : page 151..

THE A.P.M.E.P. BROCHURES

• Full list of brochures and purchasing conditions : page 147 to 149.
• Information on subscription to the publications : page 151.

LOS FOLLETOS DE LA A.P.M.E.P.

• Catálogo completo y condiciones para comprar los folletos : páginas 147-149.
• Papeleta de suscripción en la página 151.

★

Le Bulletin s'adresse à tous les enseignants que regroupe l'A.P.M.E.P. : de la Maternelle à l'Université (incluses).

En plus du Bulletin l'A.P.M.E.P. publie des brochures. On trouvera pages 148-149 la liste de celles qui sont actuellement disponibles et leur prix.

Elles permettent :

— de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'enseignants,

— de promouvoir tel ou tel aspect de la politique de l'A.P.M.E.P.

On peut les regrouper par grandes catégories :

1 **Les "Math-Annales" :**

Elles publient chaque année les sujets d'examens correspondants, avec, en plus des "sujets pour un renouvellement" d'une tout autre facture.

2 **Des brochures relatives aux "mots-clés" des mathématiques :**

— **Dictionnaire et ses fiches,** qui insistent sur les définitions et sont d'un niveau élevé.

— **Collection "Mots",** qui privilégie les modes d'intervention des concepts et est d'un niveau plus élémentaire.

— **"Savoir minimum en fin de 3e",** inventaire complet des savoirs, des savoir-faire, de leur fonctionnement, de leur intérêt.

3 **Des brochures relatives aux divers degrés d'enseignement :**

— **Collection "Élem-Math".**

— **Ouvrages pour le premier ou le second cycles.**

4 **Des études couvrant plusieurs degrés d'enseignement,** ainsi "Carrés Magiques", "Pavés et Bulles".

5 **Des brochures ouvrant, au-delà de l'école,** sur la formation continue des adultes.

6 **Des bilans de Recherches,** A.P.M.E.P. ou Inter-Irem.

7 **Des textes de réflexion générale :** Chartes de Chambéry, de Caen, Texte d'orientation 1978.

★

L'abonnement (cf. pages 150-151) donne droit à des conditions particulières d'achat des brochures.

★

★

The Bulletin is designed for all the teachers members of the A.P.M.E.P., from the nursery school to the university (inclusively).

Apart from this Bulletin, the A.P.M.E.P. edits brochures and booklets. For the list of those now available, with their prices, see pages 148-149.

These brochures offer an opportunity to :
— answer more specific demands from any category of teachers,
— promote any aspect of the A.P.M.E.P. policy.

They can be divided into major categories :

1 **The "Math-Annales" series :**

Edits every year the examination subjects, with additional "renewal" subjects of another kind.

2 **Brochures connected with the key-words of mathematics :**

— a high-level **dictionnary and index cards,** pointing out the definitions.

— **The "mots" series,** which gives preference to the ways of intervention of concepts and is made of a more elementary material.

— **"Savoir minimum en fin de 3ᵉ"** ("minimal knowledge at the end of the first cycle") which sums up all the knowledge, know-how, their way of functioning, their interest.

3 **Brochures connected with the different levels of education :**

— **The "Elem-Math" series.**

— **Books designed for the first or second cycle.**

4 **Researches concerning several levels of education,** such as "Carrés Magiques" (Magic squares), "Pavés et bulles" (Pavings and bubbles)...

5 **Brochures introducing adult courses for persons over school age.**

6 **Evaluation of A.P.M.E.P.** or Inter-Irem researches.

7 **Texts of general interest :** Charters of Chambery, of Caen, Orientation Text of 1978.

★

The suscription (cf. pages 150-151) entitles to particular conditions for the purchase of these brochures.

★

★

El boletín va dirigido a todos los maestros y profesores que agrupa la A.P.M.E.P. desde la escuela de párvulos hasta la Universidad (inclusas).

Además del boletín la A.P.M.E.P., publica folletos. Se encontrará en las páginas 148 y 149 el catálogo de los que actualmente se hallan disponibles y su precio.

Permiten los folletos :

— contestar a preguntas más específicas de tal o cual categoría de maestros y profesores,

— promover tal o cual aspecto de la política de la A.P.M.E.P.

Se puede reunirlos pour grandes categorías

1 **Los "Anales Matemáticos"** publican cada año los asuntos de los exámenes correspondientes, con,además, "asuntos para una renovación" de forma del todo diferente.

2 **Folletos con relación a las "palabras-llaves" de las matemáticas :**

— **Diccionario y sus fichas,** que insisten en las definiciones y están a nivel de los alumnos.

— **Colección "palabras"** que aventaja los modos de intervencion de los conceptos y que tiene un nivel mas elemental (mas bajo).

— **Conocimientos mínimos** al final del cuarto año de la segunda enseñanza francesa (3^{e}) - Inventario completo de los conocimientos y habilidades, de su funcionamiento e interés.

3 **Folletos con relación a las varias enseñanzas :**

— **Colección "Matemática Elemental".**

— **Libros para los primeros o últimos años de la segunda enseñanza.**

4 **Estudios dirigidos a varias enseñanzas,** por ejemplo "cuadrados mágicos", "piezas (de mosaico) y pompas".

5 **Folletos para,** más allá de la Escuela, **la Formación continua de los Adultos.**

6 **Balances de investigaciones :** A.P.M.E.P. o Inter-I.R.E.EM.

7 **Textos de reflexión general** : Carta de Chambery, Carta de Caen, Texto de orientación de 1978.

★

La suscripcion (cf. Pagínas 150-151) da derecho a condiciones especiales de compra de folletos.

★

QUELQUES EXTRAITS D'OUVRAGES DE L'A.P.M.E.P.

Rappel : Ces extraits sont en français. Chacun est d'abord brièvement situé et présenté en français, anglais et espagnol.

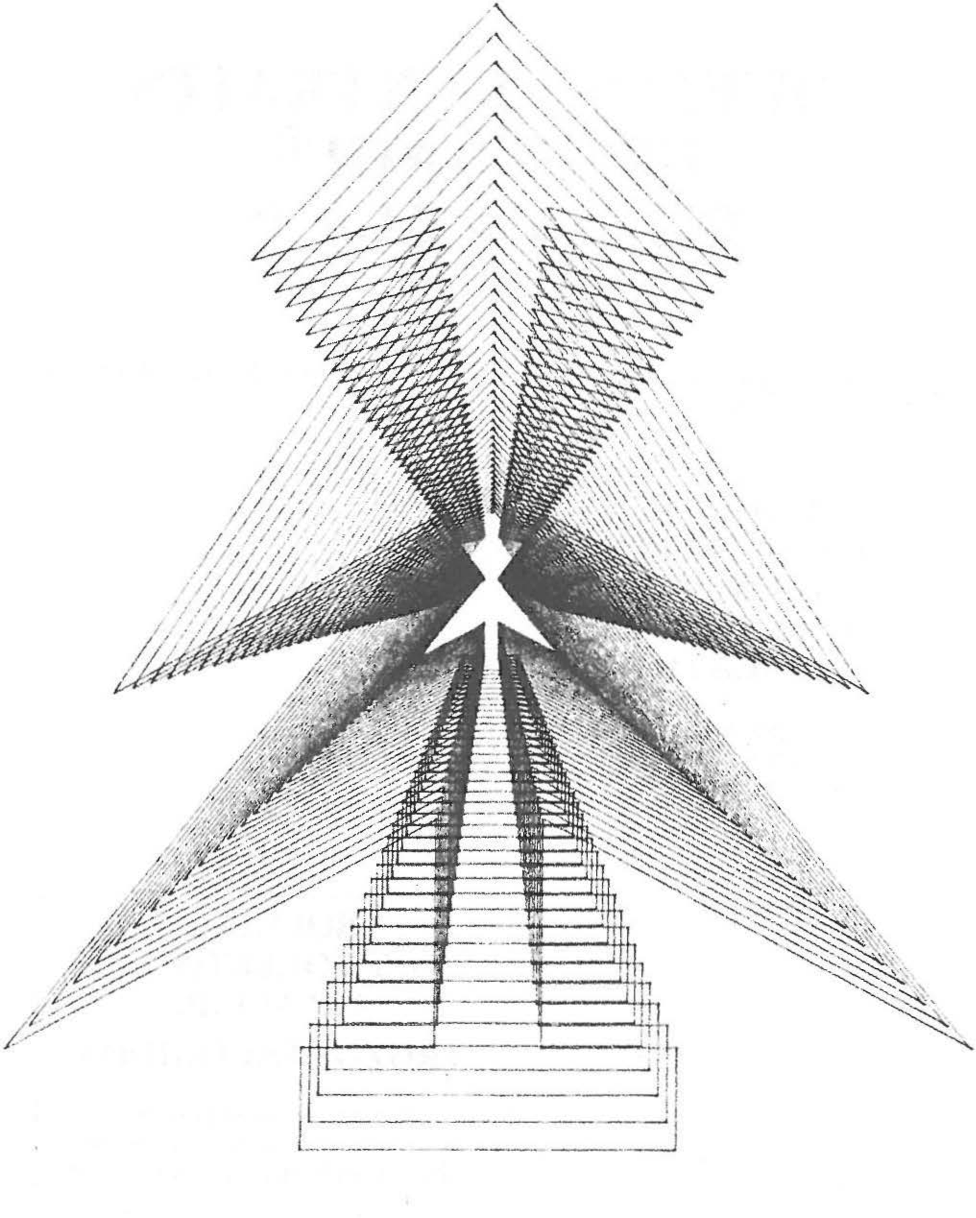
BROCHURE OF EXCERPTS TAKEN FROM A FEW A.P.M.E.P. PUBLICATIONS

The excerpts are written in French. Each one is briefly introduced in French, English and Spanish.

BOLETÍN Y FOLLETOS A.P.M.E.P.

TROZOS ESCOGIDOS

— Los trozos vienen en francès. Cada uno está brevemente presentado y situado, en francés, inglés y español.



SUR LE THEME DU RECTANGLE

- Cet article constitue la 4ème partie du Chapitre 1 : "Les problèmes" de la brochure "Aides pédagogiques pour le Cours élémentaire", ouvrage collectif d'équipes de recherche, sur l'enseignement élémentaire, de divers I.R.E.M. (Cf. page 5).
- Cette brochure fait partie d'une collection A.P.M.E.P. : "Elem-math".
- L'article est la chronique commentée de deux classes. Il s'agit chaque fois de partir de l'activité des élèves, de leur auto-évaluation et de faire fonctionner divers enrichissements de l'activité de base en suscitant chez les élèves les initiatives les plus larges possibles.

ABOUT THE TOPIC OF RECTANGLE

. This article makes up the fourth part of Chapter I : "Problems" of the brochure "Pedagogic Aids for Lower forms", a collective work by research teams from several IREM (Cf. page 5), about teaching in lower forms.

. This brochure is a part of a APMEP line : "Elem-Math" i-e Mathematics for Lower forms.

. The article is the commented report about two forms. Every time the matter is to start from the activi--ty and self-estimate of pupils and make various enrichments of basic activity working through giving rise with pupils to the widest possible initiatives.

Acerca del tema del Rectángulo

. Este artículo forma la cuarta parte del Capítulo 1ero : "Los Problemas" del folleto "Ayudas pedagógicas para el curso elemental" (segundo año de la primera enseñanza) obra colectiva hecha por grupos de investigaciones, sobre la enseñanza elemental, de varios IREM (Cf. página 5).

. Este folleto forma parte de una colección APMEP "Matemática elemental"

. El artículo es la crónica comentada de dos clases. Cada vez se trata de empezar partiendo de la actividad de los alumnos, de su misma valuación (auto-valuación) y de hacer funcionar varios enriquecimientos de la actividad base, provocando en los alumnos las iniciativas más amplias que se pueda.

D. SUR LE THEME DU RECTANGLE

Voici deux séries d'activités menées dans deux classes de C.E. différentes. Pour une classe comme pour l'autre, le thème central a été "*le rectangle*".

I. Chronique commentée de la classe A

Les élèves de ce C.E. veulent réaliser un plan de classe et décident que LA CLASSE SERA REPRESENTEE PAR UN RECTANGLE.

I.1. Vers une définition et une bonne connaissance du rectangle.

Tout au long de cette phase, la maîtresse va pousser les élèves à expliciter leurs intuitions, et à préciser ce qu'est un rectangle (comment il se différencie d'un quadrilatère quelconque, d'un parallélogramme en général, ...) par un ajustement progressif.

La maîtresse : Comment est un rectangle ?

Elèves — Un rectangle, ça a deux grands côtés et deux petits côtés.

Dessin de la maîtresse :

Elèves — Les deux grands côtés ont la même longueur, et les deux petits aussi.

Nouveau dessin de la maîtresse :

Elèves — Ca, c'est un rectangle déformé. Il faut que les côtés soient "comme ça" (geste à l'appui).

On construit alors un parallélogramme en meccano ; il peut se déformer. On repère le passage à la forme rectangle que l'on cherche à caractériser.

Un élève se souvient :

— C'est des angles droits.

L'année précédente, les élèves avaient fabriqué des équerres en papier, et abordé ainsi les notions d'angle droit et de droites perpendiculaires.

Les élèves sont alors amenés à formuler leurs découvertes et à valider cette formulation ; ils transmettent à la classe voisine (C.M.) le message suivant :

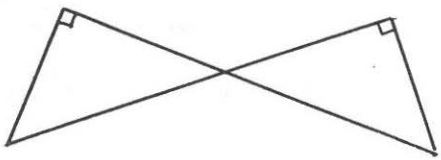
"Construire un quadrilatère qui a deux grands côtés de même longueur, deux petits côtés de même longueur, et quatre angles droits".

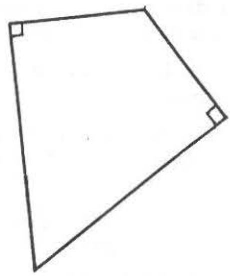
La classe voisine rapporte un dessin effectué à la règle graduée et à l'équerre, accompagné du message suivant :

"On a obtenu un rectangle.
On a tracé un segment de 10 cm ; à un bout, on a tracé un angle droit.
On a mesuré le petit côté (5 cm)".

Les délégués affirment de plus que le seul moyen de tracer des côtés de la même longueur était de tracer trois autres angles droits.

Cette remarque est utilisée par les élèves du C.E. pour construire un rectangle. Elle est efficace. Les figures suivantes comportent deux paires de côtés de même longueur et seulement deux angles droits et elles sont conformes au message :





Il n'est donc pas nécessaire de tracer trois autres angles droits pour tracer des côtés de la même longueur. Cependant, l'affirmation des élèves devient vraie si l'on se restreint aux parallélogrammes. Cette restriction est implicite pour les élèves des deux classes.

I.2. Exploitation de la règle graduée

C'est la première fois cette année que la règle graduée est utilisée comme instrument de mesure. A la suite des difficultés rencontrées par les enfants, une séance est consacrée à son maniement.

Comment tracer un segment mesurant 5 cm ?

— Pour les graduations, on compte entre zéro et cinq.
— Moi, j'ai compté entre dix et quinze.

D'autres idées viennent alors :

— Entre onze et seize.
— Entre huit et treize.

Les élèves justifient la conservation des écarts par translation en donnant les écritures additives correspondantes. La séance suivante est consacrée à la comparaison d'écritures additives et au calcul mental :

$6 + 5 = 11$	puis oralement	$36 + 5 = ?$
$16 + 5 = 21$		$76 + 5 = ?$
$26 + 5 = 31$		$\vdots$
		$106 + 5 = ?$

I.3. Approche de la notion d'échelle.

On retourne au plan de la classe :
Sur un grand carton, les élèves dessinent deux demi-droites perpendiculaires, de même origine.

I.3.1. Mais quelles longueurs choisir pour les côtés du rectangle ?

— Des rectangles peuvent avoir plusieurs formes, ils peuvent être larges ou étroits.

— On ne représente pas la classe en vraie grandeur.

Après bien des hésitations, les enfants découpent une bande de carton et décident que "1 mètre sera représenté par cette bande" (elle mesure 9 cm, mais ils ne le savent pas).

Le contour de la classe est alors réalisé grâce à l'utilisation de la bande de carton.

Pour faciliter la représentation, on arrondit les mesures : 6,43 mètres est arrondi à 6 mètres et 1 demi-mètre.
Il faut ensuite représenter le mobilier.

Oubliant que la bande de carton est là pour *représenter* les longueurs "à bonne échelle", les élèves l'utilisent pour *mesurer* le mobilier. Ils trouvent alors de très grands nombres.

La maîtresse laisse faire.

— Les meubles ne pourront pas tenir sur le plan !

Très vite, quelques enfants réalisent que la bande de carton *représente* un mètre sur le plan. On reprend les mesures du mobilier avec le mètre, mais il faut trouver un moyen de représenter des "morceaux de mètres".

I.3.2. Approche de quelques fractions.

Pour représenter un demi-mètre, on a décidé d'utiliser une moitié de bande. Mais cela ne résout pas tout :

— Comment représenter 75 cm ?

— 75 cm, c'est la moitié d'un mètre, plus la moitié de la moitié.

— Trois quarts !

— Qu'est-ce que ça veut dire ?

On reprend la bande de carton : pour représenter des moitiés de mètre et des quarts de mètre, il faut fabriquer une bande analogue que l'on coupe au milieu. On partage encore "en deux" un des morceaux ainsi obtenus.

Il est alors possible de représenter un demi-mètre, un quart de mètre, trois quarts de mètre.

I.4. Tableau de correspondance. Multiples de neuf.

Afin de faciliter les reports de longueurs, d'autres bandes ont été réalisées dans des cartons de couleurs différentes, en utilisant comme étalons les "morceaux de bandes" découpés précédemment. On obtient un tableau de correspondances.

un mètre . . . . une bande rouge, notée (r)
un demi-mètre . . . . une bande jaune, notée (j)
un quart de mètre . . . . une bande bleue, notée (b)

Puis la bande rouge est mesurée : on trouve 9 cm. Les élèves décident alors de dresser le tableau suivant :

Vraie longueur en mètres	1	un demi	2	3	...	1 et un demi	2 et un demi	...
Bandes	1 r	1 j	2 r	3 r	...	1 r et 1 j	2 r et 1 j	...
Longueur sur le plan, en cm	9	4 et un demi	18	27	...	13 et un demi	22 et un demi	...

Par l'observation de la dernière ligne, la classe constate que "pour passer d'une colonne à la suivante, on ajoute 9 à chaque fois".

Les élèves comptent alors de 9 en 9. On écrit au tableau :

9
18
27
.
.
.

puis on observe :

— pour les dizaines, c'est 0, 1, 2, ..., pour les unités, c'est 9, 8, 7, ...

On utilise alors cette remarque pour faire un peu de calcul mental. Un enfant explique :

— Ajouter 9, c'est ajouter 10 et retrancher 1.

I.5. Prolongements

Après la réalisation définitive du plan de la classe, d'autres tableaux de correspondance sont encore construits, ce qui amène à parler de nombres pairs et de nombres impairs, à travailler sur des ensembles de multiples d'un nombre, sur des opérateurs multiplicatifs ...

I.5.1. Représentation graphique :

En particulier, un travail fructueux a pour point de départ l'étude des bandes de couleur construites précédemment : il s'agit de représenter graphiquement la correspondance entre le nombre de bandes d'une couleur donnée et la longueur totale de ces bandes mises bout à bout. Ainsi, par exemple, l'abscisse d'un point est le nombre de bandes rouges, son ordonnée, le nombre correspondant de centimètres :

A(4 ; 36) ; B(5 ; 45) ; C(2 ; 18) . . .

A l'aide de la règle, on constate que tous ces points sont alignés. Cette propriété est alors matérialisée en traçant, au crayon, la droite passant par ces points.

I.5.2. Des exercices de lecture sont faits à l'aide des ces droites. Ce type de représentation graphique est utilisé pour résoudre quelques problèmes relevant du modèle multiplicatif par le tracé des "droites de multiplication", représentatives de fonctions telles que :

$$D_5 : x \longmapsto 5 \times x \text{ , } D_9 : x \longmapsto 9 \times x \text{ , ...}$$

II. Chronique commentée de la classe B

II.1 Construire un rectangle

Au moment où l'on propose cette activité, les enfants ont eu de nombreuses occasions de manipuler des rectangles. Ils ont déjà éprouvé le besoin de disposer d'une même unité de longueur pour transmettre des dimensions.

Consigne :

"Construire un rectangle sur une feuille blanche. Envoyer un message sans dessin à un camarade, pour qu'il reproduise le même rectangle en se servant d'un crayon et d'une règle graduée".

Les enfants utilisent et formulent très vite l'égalité des mesures des côtés opposés. Pour construire un angle droit, soit ils dessinent ses côtés parallèlement aux bords de la feuille, soit ils utilisent un coin droit de la règle.

Exemples de messages :

— Les dimensions de mon rectangle sont 5 et 8.
— La mesure verticale est 5 cm 2 mm,
  la mesure horizontale est 10 cm 5 mm.
— (3,8) et (2,11).

Ce dernier message n'est pas compris ; le récepteur demande : "Est-ce que je dessine deux rectangles ?" L'émetteur répond : "Tu pars de 3 sur la règle, tu vas jusqu'à 8 pour la mesure verticale" (de même pour l'autre couple).

Le souci de cet élève était de donner la place du rectangle dans la feuille mais d'autres messages du même type n'avaient pas cette justification. Ils donnent l'occasion de préciser la consigne : la position du rectangle dans la feuille n'a pas d'importance, seules comptent la forme et la taille.

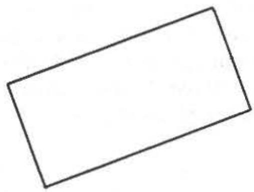
La règle graduée intervient dans les deux classes. Dans les deux classes, cela amène à formuler le fait que les écarts sont invariants par translation. Il semble donc qu'indépendamment du contexte de départ, et dès qu'il y a utilisation de la règle graduée, des questions relatives à la soustraction et aux écarts se posent. C'est à chaque enseignant d'exploiter la situation (Cf. Chapitre 2, C ; la soustraction).

Le travail reprend ; on peut constater que le contenu des messages est purement numérique. Les élèves interprètent de façon restrictive la consigne :

"Parmi les rectangles que je pourrais dessiner, lequel choisir ?". Cela se traduit dans leurs messages par la simple transmission des dimensions, sans la moindre description géométrique.

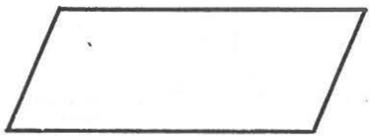
La discussion collective porte sur la pertinence, la clarté et la concision du message, et sur la possibilité pour ce message d'être compris par quelqu'un d'extérieur à la classe.

La maîtresse soulève la question de la nécessité (ou non) d'un côté vertical et d'un côté horizontal ; pour cela, elle dessine au tableau un rectangle "penché" :



Les élèves fournissent deux arguments dans leurs réponses : "Il est bon ; si tu te penches, c'est droit". "Les côtés opposés ont même longueur".

En réponse à ce dernier, la maîtresse dessine un parallélogramme :



Réponse : "Non, ce n'est pas un rectangle ; les côtés ne sont pas droits". Nouvel argument d'un enfant : "Dans le rectangle, il y a un miroir, le côté d'en haut se reflète sur celui d'en bas ; pas sur l'autre figure. Si tu plies, ça ne vient pas l'un sur l'autre". Un autre enfant renforce l'argument : "Il y a un autre miroir. Il passe par les milieux".

Ces enfants font référence à des activités antérieures ; d'autres enfants ayant compris cette référence expriment à leur tour les mêmes idées en utilisant les termes "symétrie" et "côtés symétriques".

II.2. Utilisation de la symétrie

L'orientation de cette séquence n'a été déterminée qu'après la réalisation de la première, pour tenir compte des arguments de symétrie avancés par certains enfants.

La maîtresse propose de construire un rectangle sur une feuille de papier blanc à bords déchirés, arrondis irrégulièrement.

"Vérifier qu'on a bien construit un rectangle, puis envoyer un message à un camarade pour qu'il reproduise le même rectangle".

II.2.1. Procédures de construction

Les enfants utilisent trois procédures différentes.

a) Utilisation de la symétrie

- Première méthode : tracé d'un trait ; glissement de la règle graduée maintenue parallèle au trait ; tracé d'un deuxième trait ; rectangle terminé "à l'oeil" ; pliage mettant en coïncidence les deux premiers traits dessinés ; ajustement.

La symétrie est utilisée ici comme moyen de vérification.

- Deuxième méthode : tracé d'un trait (fig. 1) ; pliage de manière à faire coïncider les deux extrémités du trait, ce qui permet de tracer un axe de symétrie (fig. 2) ; nouveau pliage de façon à faire coïncider deux parties de cet axe de symétrie, et pointage de deux nouveaux sommets par transparence (fig. 3) ; tracé des autres côtés (fig. 4).

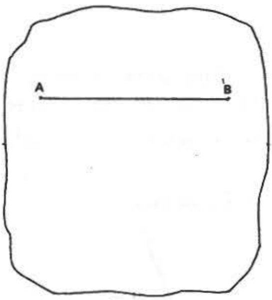


figure 1

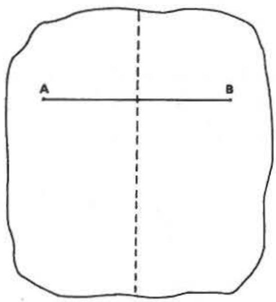


figure 2

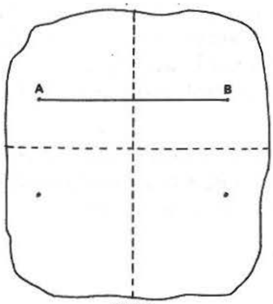


figure 3

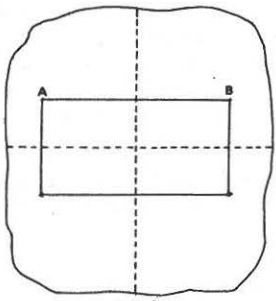


figure 4

b) Adaptation de la méthode habituelle.

Le morceau de papier est replacé dans un grand rectangle : la table ; le rectangle est construit — à vue d'oeil — par parallélisme aux bords de la table.

c) Utilisation de l'angle droit.

Un coin droit de la règle graduée permet de dessiner deux côtés ; le dessin est terminé par pliage.

II.2.2. Vérification. Peu d'enfants ont utilisé la référence à la symétrie. Dans tous les cas, ils ont vérifié l'égalité des mesures des côtés opposés, et ont éventuellement ajusté en réutilisant le moyen (coin droit ou axe de symétrie selon le cas) dont ils s'étaient servi à la construction.

II.2.3. Messages :

Comme dans la première séquence, les messages ont comporté essentiellement les dimensions des rectangles.

La maîtresse a alors introduit la contrainte suivante : écrire un message en supposant que le camarade ne sait pas ce qu'est un rectangle. "Vous devez dire tout ce que vous avez fait pour construire votre rectangle".

La rédaction des nouveaux messages a posé des problèmes à tous. Ceux qui font référence au pliage paraissent plus à l'aise (mais ce sont aussi ceux qui s'expriment avec le plus d'aisance d'une manière habituelle).

Plusieurs enfants redemandent du papier, et dessinent leur rectangle en utilisant les symétries par pliage. Les messages qu'ils écrivent alors sont en général soit mal formulés, soit mal décodés. Les demandes successives de précision de la part du récepteur leur permettent d'aboutir à une formulation orale de leur construction ; ils ne sont pas capables d'écrire cette formulation.

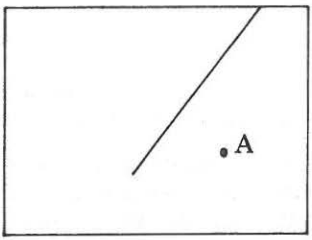
II.2.4. Bilan en séance collective :

Chaque enfant décrit brièvement sa construction. La référence à la symétrie est massive.

II.3. Importance de la symétrie

L'organisation de cette séquence n'a été prévue qu'après le déroulement de la séquence précédente, dans le but d'évaluer l'importance accordée par les élèves à la notion de symétrie dans la caractérisation des rectangles.

II.3.1. On distribue aux élèves une feuille polycopiée sur laquelle sont placés une droite et un point A.



Consigne :

Construire un rectangle admettant la droite comme axe de symétrie, et le point A comme sommet.

Envoyer un message à un camarade pour qu'il reproduise le même rectangle.

Les élèves placent rapidement par pliage le symétrique A_1 du point A par rapport à la droite, puis se posent le problème du choix d'un autre sommet.

II.3.2. Deux méthodes de construction sont utilisées :

● On place B tel que AB soit parallèle à la droite (cela par glissement de la règle (Cf. première séquence).

● On choisit un autre axe de symétrie (par un deuxième pliage qui laisse globalement invariant le premier axe).

II.3.3. Collectivement, l'analyse de la première méthode de construction fait prendre conscience de la position des axes par rapport aux côtés, et celle de la deuxième méthode, de l'existence des deux symétries axiales du rectangle.

La maîtresse pose une question : "Y a-t-il un ou plusieurs rectangles solutions ?". Les élèves peuvent y répondre grâce à leurs dessins, ce qu'ils font effectivement en superposant les rectangles. La superposition fait apparaître un seule dimension commune ; les enfants prennent alors conscience de l'arbitraire du deuxième pliage.

Cette dernière discussion ne s'est référée qu'à la deuxième méthode de construction. La classe ayant ainsi obtenu des résultats intéressants, la maîtresse, au vu du temps passé, a jugé bon de ne pas relancer la discussion sur la première méthode.

II.3.4. Pour décrire plus complètement la situation, des élèves proposent de mesurer cette dimension commune. Certains mesurent à la règle la distance AA_1 ; d'autres doublent la distance du point A à l'axe — distance qu'ils formulent en terme de "plus court chemin" —. La notion de perpendiculaire est alors explicitée.

II.3.5. Par la suite, les enfants construisent des angles droits par double pliage. En outre, ils superposent les quatre sommets d'un rectangle en pliant deux fois, ou, suivant une démarche inverse, construisent un rectangle en piquant avec une aiguille après double pliage, pour obtenir les quatre sommets.

III. Bilan

Le problème posé au départ et le contexte dans lequel il s'inscrit orientent la démarche et les notions abordées.

● Pour la classe A, la volonté de construire un rectangle "de même forme que la classe" amène les élèves, par l'utilisation d'une échelle, à un travail essentiellement numérique. Cependant, en début d'activité, la question de la maîtresse "Qu'est-ce qu'un rectangle ?" les a conduits à une analyse géométrique de cette figure.

● Pour la classe B, la modification des contraintes sur le message permet d'orienter l'activité vers le domaine géométrique alors que d'emblée les enfants s'étaient placés dans le domaine numérique.

APPROXIMATION

(Un article de la brochure MOTS, Tome IV, de 1978)

- "MOTS" est formé de rubriques, détachables, de 5 à 20 pages chacune, relatives à des mots-clés, et regroupées en "tomes".
  Ni manuel de mathématiques, ni lexique, MOTS permet de faire le point sur l'évolution d'un mot-clé, sur les concepts et idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.
- La rubrique "Approximation" cerne d'abord les imprécisions de vocabulaire habituelles et les divers problèmes ainsi recouverts. Elle procède ensuite à de nettes mises au point distinguant "évaluations", "encadrements", "approximations". Elle s'intéresse enfin à leur bon usage...

APPROACH

(An article in the brochure "MOTS" (WORDS), vol. IV of 1978.)

. "MOTS" is made up of removable headings with 5 to 20 pages each, relating to key words, grouped to form Volumes.
Neither a mathematics manual nor a lexicon, MOTS makes it possible to determine the evolution of a key-word, the concepts and ideas connected with it, and the notations used.

. The heading "APPROACH" first out-lines the usual vocabulary looseness-nesses and the various so covered problems. Then it makes clear restatements distinguishing between "estimates", "framings" and "approaches". It eventually takes an interest in the good use made of them.

Aproximación

(artículo del folleto PALABRAS, tomo IV, de 1978)

. "PALABRAS" está formado de secciones, que se pueden separar, de 5 o 20 páginas cada una, que tratan de las palabras-llaves y están agrupadas en "tomos".
Ni manual de matemáticas, ni léxico, Palabras permite analizar la evolución de una palabra-llave, los conceptos e ideas que se relacionan con ella y analizar las anotaciones empleadas.

. La sección (la rúbrica) "Aproximación" delimita, primero, las imprecisiones habituales de vocabulario y los varios problemas en relación con eso. Luego hace precisas aclaraciones, distinguiendo "valuaciones", "aproximaciones", *"acotaciones"*. Por fin, se interesa por su buen empleo.

APPROXIMATION

I. A la manière de ... nombreux manuels ou textes d'examens

Voici quelques phrases qui, sans reproduire littéralement des textes existants, respectent leur esprit. Qu'en pense le lecteur, et surtout qu'en penserait-il s'il était par exemple :

a) candidat au B.E.P.C. ?
b) correcteur au même examen ?

(1) Donner de $\dfrac{5 \times 3,3}{1,3}$ *une valeur approchée à 1/100 près.*

(2) Donner *la valeur approchée à 0,1 près par défaut* de $27 - 19\sqrt{2}$ (on rappelle que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$).

(3) Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner *une valeur approchée à un centième près* de $18 + 4\sqrt{3}$.

(4) Pourrait-on donner *une valeur décimale approchée à un centième près par défaut* du nombre précédent, à partir des mêmes données ?

(5) Toujours sur le même exemple, pourrait-on donner *une valeur décimale approchée par défaut, avec deux chiffres après la virgule* ?

(6) Sachant que $\sqrt{2}$ est compris entre les décimaux 1,414 et 1,415, donner *un encadrement* de $11 - 6\sqrt{2}$ *à 1/100 près.*

(7) On donne $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$; quelle est *l'approximation* avec laquelle cette donnée permet de trouver *une valeur approchée par défaut* de $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$?

(8) Dans une table, on trouve $\sqrt{5} = 2{,}2360...$; tirer de là *la valeur approchée par défaut à 0,001 près* de $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

(9) 314 est *une valeur approchée entière* de π : vrai ou faux ?

II. Ce que n'osent pas répondre les candidats

(1) Puisqu'on demande au candidat UNE valeur approchée à 1/100 près de $\dfrac{5 \times 3{,}3}{1{,}3}$, il a (pourrait-on croire) le choix des moyens, lesquels lui donneraient éventuellement plusieurs réponses :

a) reconnaître par la technique habituelle de la division que le quotient de 16,5 par 1,3 est compris entre 12,69 et 12,70 et donner pour réponse n'importe quel nombre du même intervalle, par exemple 12,697 08 ;

b) s'abstenir même de tout calcul de division, en remarquant que les rationnels $\dfrac{1\,651}{130}$ et $\dfrac{1\,649}{130}$, ne différant du nombre donné que de $\dfrac{1}{130}$, sont des réponses acceptables ;

c) encore plus paresseusement (et plus astucieusement), se borner à dire que $\dfrac{5 \times 3{,}3}{1{,}3} - \dfrac{1}{400}$ répond à la question posée.
Est-ce à dire que cette forme d'humour sera appréciée par le correcteur ? Ce n'est pas certain ; et pourtant tout cela est inattaquable.

(2) Instruit par cette fâcheuse expérience, et mis en éveil par le fait que cette fois on demande LA (et non plus UNE) valeur approchée, le candidat, ayant constaté que $0{,}115 < 27 - 19\sqrt{2} < 0{,}134$, écrit fièrement 0,1 tout en se disant : "Ca n'est ni meilleur, ni pire qu'autre chose, mais visiblement c'est ça qu'ILS attendent : un nombre avec un seul chiffre décimal".

(3) Même cheminement de la pensée du candidat, qui constate que $24{,}928 < 18 + 4\sqrt{3} < 24{,}932$ et donne pour réponse 24,93 (mais se demande pourquoi on est revenu de LA à UNE).

(4) Enfin un texte qui précise qu'il s'agit de valeur DECIMALE ! Sur sa lancée, le candidat cherche un nombre à deux décimales mais est incapable de choisir soit 24,92 soit 24,93, car l'information dont il dispose ne lui permet pas de décider si $18 + 4\sqrt{3}$ appartient à l'intervalle $[24{,}92\ ;\ 24{,}93[$ ou bien à l'intervalle $[24{,}93\ ;\ 24{,}94[$. Doit-il répondre *non* à la question posée ? Pourtant, une réponse comme 24,926 lui semble correcte, mais elle est du genre de celle qui l'a déjà laissé inquiet en (1).

(5) Il ne peut maintenant que répondre *non*, car il n'y a pas de raisons de répondre 24,92 plutôt que 24,93.

(6) Qu'est-ce qu'un "encadrement à 0,01 près" ? Pour les uns, il a pour largeur 0,01 ; pour d'autres 0,02 (voir ci-dessous IV.2). On a donc affaire à un jeu de hasard où le candidat a au mieux une chance sur deux de donner la "bonne" réponse.

(7) Ah ! un mot nouveau : *approximation* ; mais que signifie-t-il ?

Il y a des cas où le mot est synonyme de "valeur approchée" ; si bien qu'on a l'air de demander la valeur approchée de la valeur approchée ! On aurait dit *précision* que la phrase eût été au moins aussi claire. Cependant, pourvu que le candidat pense à cette nouvelle "traduction", il peut répondre avec assurance : du fait que

$$0{,}366 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0{,}3665$$

une valeur approchée par défaut est 0,366 ; c'est la meilleure qu'on puisse donner (avec l'information dont on dispose).

(8) Et revoici LA valeur approchée ! Mais non sans un nouveau mystère : les points de suspension, inemployés dans "les tables" ; il va encore falloir "interpréter". Si, pour son malheur, le candidat a été entraîné au maniement correct des tables numériques, il pensera (mais à tort) que l'indication

"2,2360..." signifie $2{,}235\,95 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}236\,05$ (voir V.4), ce qui le mènerait à une situation analogue à (4) ou (5). Ce sont les points de suspension qui changent tout : tenant la place de décimales omises, ils signifient vraisemblablement que $2{,}2360 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}2361$ (alors pourquoi ne pas le dire, plutôt que d'invoquer des tables fantômes ?). On tire de là que

$$1{,}381\,95 < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \leqslant 1{,}3820 :$$

"LA" valeur demandée est-elle 1,381 ? Cela est plausible.

(9) Lassé par ces énigmes, et flairant un piège devant l'énormité de la question, le candidat préfère ne pas répondre. Il a bien tort d'ailleurs ; car, des neuf phrases proposées, c'est assurément celle-là : "314 est une valeur approchée entière de π" qui est la moins contestable ! Nous disons bien "trois cent quatorze".

III. Approchez, approchez !

III.1. Un exemple historique

Sans prétendre retracer ici "l'histoire" du nombre π, marquons-en quelques jalons (du moins en Occident). Plusieurs siècles avant J.C., la Bible utilise l'évaluation assez grossière 3 ; antérieurement, les Egyptiens, parmi diverses évaluations, avaient indiqué pour aire du disque celle du carré dont le côté vaut $\frac{16}{9}$ du rayon, ce qui revient à prendre pour π le rationnel $\frac{256}{81}$; dans l'Antiquité grecque, Archimède détermine l'encadrement $\left[3+\frac{10}{71} ; 3+\frac{10}{70}\right]$ * ; plus près de nous, Adrien Metius (fin du XVIème siècle) propose l'évaluation $\frac{355}{113}$. En démontrant en 1737 que π est irrationnel, Lambert ruinait tout espoir de trouver un rationnel** — donc, en particulier, un décimal — qui fût la valeur

* On défigure assez sensiblement la vérité quand on laisse entendre qu'Archimède remplaçait π par $\frac{22}{7}$ $\left(3+\frac{10}{70}=\frac{22}{7}\right)$.

** On rappelle qu'un rationnel est un quotient d'entiers (Voir ENSEMBLES DE NOMBRES).

exacte de π ; mais nous avons à présent les moyens (au moins théoriques) de nous approcher de cette valeur exacte d'aussi près que nous le désirons.

III.2. Qu'entend-on par "valeur approchée" ?

Ce rappel succinct montre le processus d'approche sous l'aspect évolutif et dynamique qui est le sien. A moins de connaître la valeur exacte et d'avoir la possibilité de l'utiliser, on cherche des valeurs *de mieux en mieux approchées* ; aucune ne peut être qualifiée de "valeur approchée" de préférence aux autres. Autrement dit : *n'importe quel nombre A peut être considéré comme une valeur approchée de n'importe quel autre B.* Même le fait d'astreindre A à être entier ou décimal[4] ne le détermine pas ; c'est bien pourquoi la phrase proposée en (9) était à la fois vraie et passablement ridicule : car elle n'apportait aucune autre information que celle-ci : "314 est un entier".

Certes, parler de valeur approchée *par excès* ou *par défaut* donne un renseignement, mais laisse subsister une très large indétermination ; c'est seulement quand on dit explicitement *à combien près* (voir IV.2) ladite valeur est "approchée" que l'information fournie devient exploitable. En aucun cas, cependant, elle ne sera assez précise pour qu'on puisse parler de LA valeur en question ; cela condamne sans appel les phrases (2) et (8).

De surcroît, cet adjectif "approché" présente un autre risque : il incite à abréger des expressions comme "valeur approchée d'un quotient à 0,01 près" en "quotient approché à 0,01 près". Ainsi, à côté de notions bien définies comme le *quotient* de 32 par 7 (le rationnel $\frac{32}{7}$) et le *quotient euclidien* de 32 par 7 (le naturel 4), il y aurait place pour des "quotients approchés" en nombre illimité ! Et l'on se croira encore obligé de baptiser "quotient exact" le seul quotient qui en soit vraiment un, de peur de le confondre avec les autres quotients qui n'en sont pas ... sans parler du "quotient entier" qui, selon les circonstances, pourra être exact ou approché ! On ne saurait mieux engendrer (ou entretenir) la confusion (Voir DIVISION).

Bref, si l'on rayait du vocabulaire usuel la locution "valeur approchée", la clarté n'y perdrait rien. Le mot *évaluation*, que nous avons employé plus haut, est tout aussi commode, et ne présente pas les mêmes inconvénients ; c'est lui que nous utiliserons à partir de IV.2..

III.3. Qu'entend-on par "approximation" ?

Assurément pas ce que suggérait la phrase (7) ; mais faut-il faire du mot un simple synonyme d'*évaluation* ? Non seulement ce serait un double emploi, mais on masquerait ainsi le sens profond : *meilleure évaluation possible* (étymologiquement le superlatif *proximus* signifie "le plus proche").

Naturellement cela sous-entend : la meilleure évaluation *dans des conditions données*, conditions qui doivent être formulées de façon telle que cette évaluation optimale soit déterminée sans ambiguïté ; par exemple, parler de l'approximation décimale sans préciser le nombre des chiffres décimaux est illusoire. En variant les conditions imposées, on pourra définir plusieurs approximations pour un même nombre ; mais, une fois ces conditions fixées, on ne devrait jamais dire ou lire "UNE approximation", contrairement à ce qui avait lieu pour les évaluations.

IV. Définitions

La situation courante est celle-ci : un nombre réel x est soit inconnu (c'est le cas des mesures de grandeurs en physique), soit impossible à représenter par les procédés usuels de la numération (c'est le cas de $\sqrt{2}$, de π, de sin 24°, etc...) ; parfois aussi cette représentation, bien que connue, serait inutilement compliquée pour le problème qu'on veut traiter (c'est le cas de $\frac{32\,427}{15\,625}$).
Compte tenu de ces difficultés, lorsque x intervient dans un calcul, on le remplace par un nombre x' avec lequel le calcul se fera plus facilement.

Exemple : Si l'on achète 710 g d'un produit à 23,50 F le kg, on peut évaluer la dépense soit en multipliant 24 par 0,7 (soit 16,80 F),

soit en multipliant 24 par $\frac{2}{3}$ (on trouve 16 F),

soit en multipliant 24 par $\frac{3}{4}$ (on trouve 18 F) ;

ce faisant, on commet une erreur — on en a d'ailleurs conscience — par rapport à la dépense théorique qui est de 16,685 F ; en pratique on paiera 16,70 F (au moins !).

IV.1. Erreurs, corrections, incertitudes

La substitution de x' à x introduit une *erreur* qui, par définition, est la différence $x' - x$; la *correction* est la différence $x - x'$.

La valeur absolue $|x' - x|$ est en général inconnue ou inutilisable ; si l'on connaît un nombre positif ϵ tel qu'on puisse affirmer que $|x' - x| \leqslant \epsilon$, c'est ce nombre, appelé *incertitude*, qui est l'information utile pour la suite du calcul.

Parfois on connaît le signe de l'erreur, ce qui permet de distinguer les erreurs *par excès* ($x' - x \geqslant 0$) et les erreurs *par défaut* ($x' - x \leqslant 0$).

IV.2. Evaluations, encadrements

Une façon équivalente d'exprimer ce qui précède consiste à dire que x' est *une évaluation de* x *à* ϵ *près.* Lorsque le signe de l'erreur est connu, on peut donner une information plus complète :

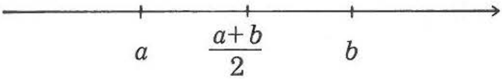
- si $x' - x \geqslant 0$, x' *est une évaluation par excès de* x *à* ϵ *près* ;
- si $x' - x \leqslant 0$, x' *est une évaluation par défaut de* x *à* ϵ *près*.

Connaître une évaluation x' de x à ϵ près fournit immédiatement un *encadrement* de x, à savoir :

- si x' est par excès, l'encadrement $[x' - \epsilon \,;\, x']$, de largeur ϵ ;
- si x' est par défaut, l'encadrement $[x' \,;\, x' + \epsilon]$, de largeur ϵ ;
- si l'on ignore le sens de l'évaluation, l'encadrement $[x' - \epsilon \,;\, x' + \epsilon]$, de largeur $2\,\epsilon$.

Inversement, si $[a\ ;\ b]$ est un encadrement de x (où $a < b$), on peut affirmer :

- a est une évaluation par défaut de x, à $b-a$ près ;
- b est une évaluation par excès de x, à $b-a$ près ;
- $\dfrac{a+b}{2}$ est une évaluation de x, à $\dfrac{b-a}{2}$ près, sans qu'on puisse savoir si elle est par excès ou par défaut.



Exemple 1 : Dans la phrase (7), 0,366 est une évaluation par défaut à 0,0005 près.

Exemple 2 : Reprenons les évaluations de π indiquées en III.1.

1. Dès l'époque d'Archimède, on pouvait, de l'encadrement qu'il avait obtenu, déduire l'évaluation

$$3 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{70} + \frac{10}{71}\right)\ ,\ \text{soit } 3 + \frac{141}{994}$$

avec l'incertitude

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{70} - \frac{10}{71}\right)\ ,\ \text{soit } \frac{1}{994}\ .$$

2. Aujourd'hui que la valeur de π est mieux connue, nous pouvons dire :

- l'évaluation biblique était à 0,15 près par défaut ;
- l'évaluation égyptienne était à 0,02 près par excès ;
- l'évaluation ci-dessus, tirée de l'encadrement d'Archimède, était à 0,0003 par excès ;
- l'évaluation d'Adrien Metius était à 3×10^{-7} (trois dix-millioniémes) près par excès.

IV.3. Approximations de diverses sortes

Dorénavant x', au lieu d'être un nombre quelconque, sera astreint à une condition restrictive. Dans la quasi-totalité des cas usuels, cette condition consiste à appartenir à l'un des ensembles D_n constitués par les décimaux d'ordre n (c'est-à-dire les décimaux qui peuvent s'écrire avec n chiffres à droite de la virgule).

On rappelle, à ce sujet, que les entiers peuvent être considérés comme des décimaux d'ordre zéro, autrement dit que $\mathbf{Z} = \mathbf{D}_0$. Toutefois, pour la commodité de l'exposé, nous traiterons d'abord à part le cas des entiers.

IV.3.1. Approximations entières

• *L'approximation entière par défaut* de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x ; on dit aussi : *partie entière* de x, notée habituellement $E(x)$.

Exemples :

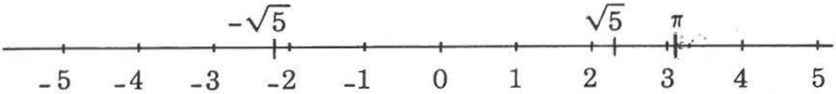
$$E(\pi) = 3$$
$$E(\sqrt{5}) = 2$$
$$E(5) = 5$$
$$E\left(\frac{34}{9}\right) = 3\,, \quad \text{car } 3 \text{ est le quotient euclidien de } 34 \text{ par } 9.$$

On prendra garde aux nombres négatifs :

$$E(-5) = -5$$

mais

$$E(-\sqrt{5}) = -3$$



• *L'approximation entière par excès* de x est le plus petit entier supérieur ou égal à x ; elle est égale à $E(x) + 1$ (sauf toutefois si x est entier, auquel cas elle est égale à x, donc à $E(x)$; à vrai dire, cette "exception" est purement formelle, car il va de soi que, si la valeur exacte de x est connue et simple, les questions d'approximation perdent tout intérêt).

Exemple : L'approximation entière par excès de $\sqrt{5}$ est 3, celle de $-\sqrt{5}$ est -2 ; celle de π est 4.

• On voit que, si, dans le développement décimal (limité ou illimité) d'un nombre a, on supprime tous les chiffres après la virgule, le nombre b qu'on obtient est tantôt l'approximation entière par défaut de a (si a est positif), tantôt l'approximation entière par excès de a (si a est négatif). Pour désigner b, la notation $[a]$ est assez généralement admise ; on écrira par conséquent :

$$[\sqrt{5}] = 2 ; \quad [-\sqrt{5}] = -2 ; \quad [\pi] = 3 ; \quad [-\pi] = -3.$$

En revanche, aucun mot ne s'est imposé pour cette notion ; le plus simple et le plus expressif semble être *abrégé entier*.

• Enfin, celle des deux approximations entières, par défaut ou par excès, dont l'écart à x est le plus petit est souvent appelée *meilleure approximation entière de* x (encore que le mot "meilleure" soit ici un pléonasme) : par exemple, pour $\sqrt{2}$ c'est 1, pour $-\sqrt{3}$ c'est -2 ; bien entendu, si x est entier, c'est x lui-même.

Cette meilleure approximation entière, bien définie pourvu que x ne soit pas situé à mi-chemin de deux entiers successifs, est égale à $[2x] - [x]$; pour les besoins du calcul automatique on convient aujourd'hui d'adopter cette valeur dans tous les cas, et on l'appelle *arrondi automatique entier*. Par exemple, l'arrondi automatique entier de 7,5 est 8, celui de $-4{,}5$ est -5 (au 19ème siècle, Gauss avait formulé une règle, assez arbitraire d'ailleurs, qui faisait intervenir la parité de $[x]$).

IV.3.2. Approximations (décimales) d'ordre donné n (n étant un naturel)

Sauf dans le cas où l'on emploierait plusieurs bases de numération au cours d'un calcul — ce qui obligerait à préciser: approximations "décimales", "binaires", etc... — on sous-entend d'ordinaire ces adjectifs ; nous dirons ici "approximations d'ordre n" en sous-entendant "décimales".

Une règle unique donne alors les divers types d'approximations d'ordre n pour un nombre x : on prend pour $x \times 10^n$ celle de ses approximations entières qui est du type souhaité (par défaut, par excès, abrégé, arrondi) et on la divise par 10^n.

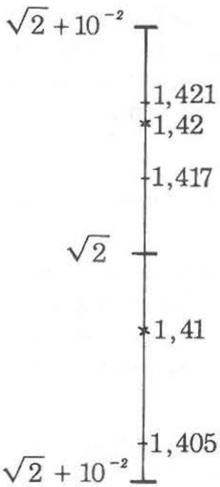
Exemples :

Approximation d'ordre 2, par défaut, de $\sqrt{2}$:	1,41
Approximation d'ordre 3, par excès, de $\sqrt{3}$:	1,733
Abrégé d'ordre 4 de $-\sqrt{5}$:	$-2{,}2360$
Arrondi automatique d'ordre 4 de $-\sqrt{5}$:	$-2{,}2361$

Les approximations par défaut, par excès, ainsi que l'abrégé d'ordre n de x sont des évaluations de x à 10^{-n} près ; l'arrondi d'ordre n est une évaluation à $0{,}5 \times 10^{-n}$ près. Les exemples ci-dessus traduisent respectivement les encadrements suivants :

$$\begin{array}{rcccl} 1{,}41 & \leqslant & \sqrt{2} & \leqslant & 1{,}42 \\ 1{,}732 & \leqslant & \sqrt{3} & \leqslant & 1{,}733 \\ -2{,}2361 & \leqslant & -\sqrt{5} & \leqslant & -2{,}2360 \\ -2{,}236\,15 & < & -\sqrt{5} & \leqslant & -2{,}236\,05 \end{array}$$

(la première inégalité de cette dernière ligne est stricte, car, si $-\sqrt{5}$ était égal à $-2{,}236\,15$, son arrondi d'ordre 4 serait $-2{,}2362$ et non $-2{,}2361$; en fait, toutes les inégalités ci-dessus peuvent être écrites sous forme stricte, vu que les racines carrées considérées sont irrationnelles, mais dans des cas moins simples on peut ne pas le savoir *a priori*).



Insistons à nouveau sur la distinction entre *évaluation à 10^{-2} près* et *approximation d'ordre 2* ; pour $\sqrt{2}$ par exemple, les approximations d'ordre 2 par défaut et par excès sont figurées respectivement sur le schéma par les *points* 1,41 et 1,42 (la meilleure étant 1,41) ; au contraire, les évaluations à 10^{-2} près remplissent tout le *segment* $\left[\sqrt{2} - \frac{1}{100} ; \sqrt{2} + \frac{1}{100}\right]$; par exemple, 1,405; 1,417; 1,421. C'est la confusion entre ces deux notions qui crée la plupart des ambiguïtés dans les phrases de I.

V. Du bon usage des évaluations et approximations

Nous pensons avoir montré la nécessité d'un langage précis reposant sur des définitions non équivoques. Mais les évaluations et approximations numériques n'ont d'intérêt que par leurs applications *pratiques* : de ce point de vue, la définition la plus parfaite ne saurait remplacer une vue concrète des choses.

V.1. Il est évident qu'une évaluation *trop grossière* est inutilisable : personne n'aurait l'idée de donner les dimensions de sa table de travail à 1 m près.

Reprenant les notations du IV.1., il est souhaitable, pratiquement, que ϵ soit "nettement" plus petit que $|x|$, en d'autres termes que le rapport $\frac{\epsilon}{|x|}$, appelé *taux d'incertitude**, soit "nettement" inférieur à 1 ; par exemple, il est de l'ordre de 0,01 à 0,001 dans beaucoup de professions ; il est beaucoup plus petit dans certaines branches de la recherche.

Sous cette condition, le taux d'incertitude — dont la valeur exacte est en général ignorée — est encadré par

$$\left[\frac{\epsilon}{|x'| + \epsilon} \;;\; \frac{\epsilon}{|x'| - \epsilon}\right] \;;$$

dans la grande majorité des cas, on se contente de l'évaluation

$$\frac{\epsilon}{|x'|}\,.$$

V.2. Toutefois, il n'est pas exagéré de dire que ce sont les évaluations *trop fines* qui donnent le plus de mal aux enseignants. Tout le monde a obtenu des "réponses" de problèmes où la distance de Paris à Lyon était exprimée en mètres, voire en centimètres ; et si, dans une somme, un terme est connu au centième près, croit-on qu'en évaluant les autres termes au millionième près on connaîtrait mieux la somme elle-même ? Faire comprendre aux enfants qu'un "ordre de grandeur" est de loin la chose la plus importante, qu'il ne sert à rien d'aligner des chiffres décimaux tant qu'on n'est pas assuré qu'ils signifient quelque chose, qu'il faut savoir "arrêter une division" (même si "plus loin" elle "tombe juste"), etc..., cela est une des tâches les plus nécessaires — et les plus délicates — de l'enseignement "élémentaire"... prolongé !

* De préférence à "incertitude relative", vu les (trop) nombreux emplois du mot "relatif" ; de même l'ancienne expression "incertitude absolue" (au lieu d'*incertitude*) risquait d'entraîner une confusion avec les valeurs absolues.

La suite des décimales de π a fourni un champ de recherches théoriques à certains mathématiciens ; mais il n'y a guère de problèmes d'ordre pratique pour lequel l'évaluation d'Archimède ne serait pas suffisante.

V.3. Sans entrer ici dans le détail du *calcul des incertitudes*, signalons quelques inadvertances fréquentes :

- ce n'est pas parce que tous les termes d'une somme sont connus à 10^{-3} près que la somme elle-même est connue avec la même précision ;
- on a des surprises encore plus désagréables avec les produits, quotients, puissances : connaître le côté d'un carré à 1 m près n'assure visiblement pas la précision du m^2 pour l'évaluation de son aire ;
- si x' et y' sont des évaluations par défaut de x et y, $x' - y'$ n'est pas nécessairement une évaluation par défaut de $x - y$: par exemple, 3 est une évaluation par défaut de π, 1 est une évaluation par défaut de $\sqrt{3}$; or, $3 - 1$ est une évaluation *par excès* de $\pi - \sqrt{3}$; une remarque analogue vaut pour les quotients (on peut reprendre le même exemple).

V.4. Par convention, une évaluation donnée sous forme décimale sans autre indication doit être interprétée comme un arrondi automatique, l'ordre de cet arrondi étant le nombre des décimales effectivement écrites, zéros compris. En particulier, les valeurs indiquées par une table numérique à n décimales sont les arrondis automatiques d'ordre n des valeurs exactes : donner par exemple pour $\sin 26°$ et $\sin 43°$ respectivement les valeurs 0,4384 et 0,6820 signifie précisément :

$$0{,}438\,35 \leqslant \sin 26° < 0{,}438\,45$$
$$\text{et} \quad 0{,}681\,95 \leqslant \sin 43° < 0{,}682\,05$$

V.5. Cela nous incite à souligner à nouveau la nécessité capitale de distinguer les objets mathématiques (ici les décimaux d'ordre donné) de leurs représentations (ici leurs écritures en numération de position à base DIX). Dire qu'un décimal est d'ordre 2 par exemple, c'est dire qu'il *peut* être représenté par une écriture comportant deux chiffres décimaux ; mais alors il peut l'être aussi par des écritures à trois, quatre, ... chiffres décimaux : il suffit d'écrire des zéros à sa droite (en d'autres termes, $\mathbf{D}_2$ est une partie de $\mathbf{D}_3$, de $\mathbf{D}_4$, etc...).

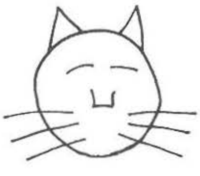
Aussi longtemps qu'on s'intéresse uniquement aux décimaux eux-mêmes, il est indifférent d'écrire 7,24 ou 7,240 ou 7,2400, ..., toutes ces écritures étant rigoureusement synonymes. Au contraire, dans la pratique du calcul numérique, où l'attention se porte sur la convention du paragraphe précédent, ces écritures apportent des informations différentes et *ne peuvent être employées l'une pour l'autre* : par exemple, si plus haut on avait remplacé 0,6820, donné par la table comme évaluation de sin 43°, par 0,682, on n'aurait rien assuré de plus que :

$$0{,}6815 \leqslant \sin 43^\circ < 0{,}6825$$

alors que l'information donnée par la table :

$$0{,}681\,95 \leqslant \sin 43^\circ < 0{,}682\,05$$

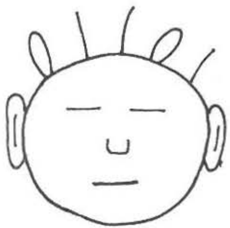
est plus précise.

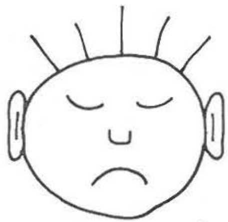

chat symétrique


chat non-symétrique


chat antisymétrique


type réflexif


type non-réflexif


type antiréflexif

à moins que ça vous défrise !

ITERATION ET CALCULETTES PROGRAMMATION STRUCTUREE

- Cet article est extrait de la brochure "Calculatrices 4 opérations", qui s'intéresse aux calculatrices les plus simples, pour leur apport mathématique et pédagogique, et couvre donc l'école élémentaire et le premier cycle du second degré (Cf. page 4).
- La notion d'itération est fondamentale en mathématiques et facile à mettre en oeuvre avec des calculettes. L'article reproduit ici donne plusieurs exemples, en insistant sur les mathématiques correspondantes.
- Enfin, par opposition aux "organigrammes" nous précisons l'usage de la notion, plus moderne, de "programmation structurée".

ITERATION AND SIMPLE POCKET CALCULATORS STRUCTURED PROGRAMMING

. This article is from brochure *"Calculatrices 4 opérations"* ("Four operation Calculators"), that takes an interest in the simplest calculators because of their mathematical and pedagogical contribution. Thus it covers the elementary school teaching and the lower cycle of secondary education (cf. p. 4).

. The iteration notion is basic in mathematics and easy to be put at work by means of simple pocket calculators. The here reproduced article gives several examples and lays stress upon corresponding mathematics.

. Lastly, contrary to "organigrams" we specify the use of the more modern notion of "structured programming".

Reiteraciones* y maquinillas de calcular** Programación estructurada

Este artículo procede del folleto "Maquinillas de calcular 4 operaciones" que se interesa por las maquinillas más sencillas en cuanto a su provecho matemático y pedagógico y abarca pues la primera enseñanza y los primeros años de la segunda enseñanza (Cf. p. 4)

. La noción de "iteración" es fundamental en las matemáticas y fácil de poner en práctica con maquinillas de calcular. El artículo referido aquí da varios ejemplos, insistiendo en las matemáticas correspondientes.

. Por fin, en oposición con los "organigramas" especificamos el uso de la noción, más moderna, de "programación estructurada".

(*) *Procesos iterativos*
(**) *Mini-calculadoras de bolsillo*

Ex 3 La notion d'itération est fondamentale en informatique. Dans l'enseignement des mathématiques on l'utilise très peu, les programmes n'étant pas à ce jour conçus en tenant compte de l'existence des calculatrices et de leurs possibilités.

Sans avoir en la matière l'efficacité du matériel programmable il est cependant possible, avec une simple calculette, de "programmer des boucles" et d'en démonter le mécanisme et la conception.

Que ce soit l'étude d'une suite récurrente u_0 donné $u_n = F(u_n - 1)$ ou l'itération d'une fonction $x \mapsto F(x)$ à partir de x_0 le principe en est simple :

1) mettre la valeur initiale (u_0 ou x_0) dans A
2) appliquer F au contenu de A, résultat dans A
3) écrire A
4) recommencer 2 et 3.

Si dès le départ nous voulons introduire de façon simple et correcte ces notions, pour que cela soit transmissible sur tout matériel informatique, nous pouvons traduire le problème posé par :

```
lire A              ....initialisation
faire n fois      ⎫
      A ← F(A)    ⎪
      écrire A    ⎬   boucle
fin de boucle     ⎪
      faire       ⎭
```

A partir de là pour écrire de façon détaillée l'algorithme et l'exécuter sur machine...cela dépend et de F et de la machine !

Mais le principe sera toujours le même et on aura à résoudre les deux problèmes :

. comment initialiser le (ou les) registre(s) ?
. comment organiser la boucle elle-même ?

Sur une calculette, contrairement au matériel programmable où la boucle sera programmée, donc automatiquement exécutée, il faudra un comptage mécanique qui pourra par exemple se faire en notant à la main le nombre de boucles exécutées.

● Si F est définie par $x \mapsto \frac{x}{2} + 3$ le programme de calcul

devient :

```
Lire  A
faire n fois
      A ← A/2 + 3
      Ecrire A
fin de boucle faire
```

d'où un programme machine (x_0 = 10 puis x_0 = 1)

qui donne à l'exécution sur T I 1050

A
10
8
7
6.5
6.25
6.125
6.0625
6.03125
6.015625

A
1
3.5
4.75
5.375
5.6875
5.84375
5.921875
5.9609375
5.9804687

résultat approché

En poursuivant il s'avère que les deux suites "se stabilisent", la première à 6, la seconde à...5,9999999, ce qui s'explique très bien par le fait que pour une calculatrice à 8 chiffres comme la T I 10 50

$\frac{5.9999999}{2} = 2.9999999$ et $6 + \varepsilon = 6$ pour $\varepsilon < 10^{-7}$

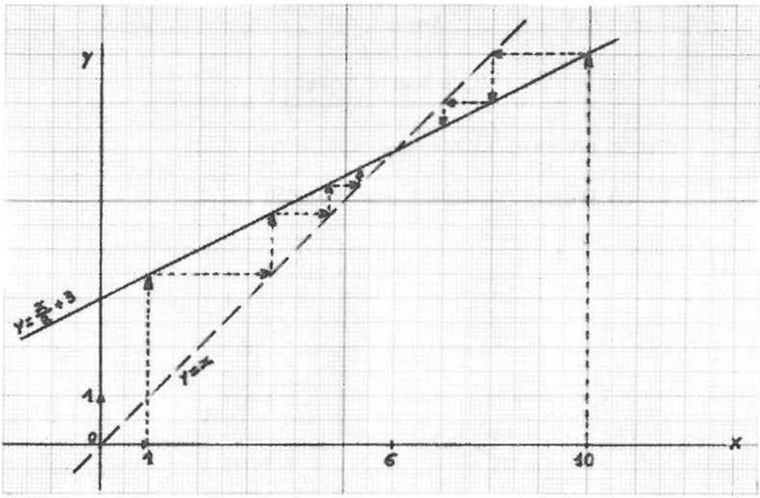
En tenant compte de cette nouvelle possibilité d'arrêt de boucle, on pourra écrire d'autres programmes :

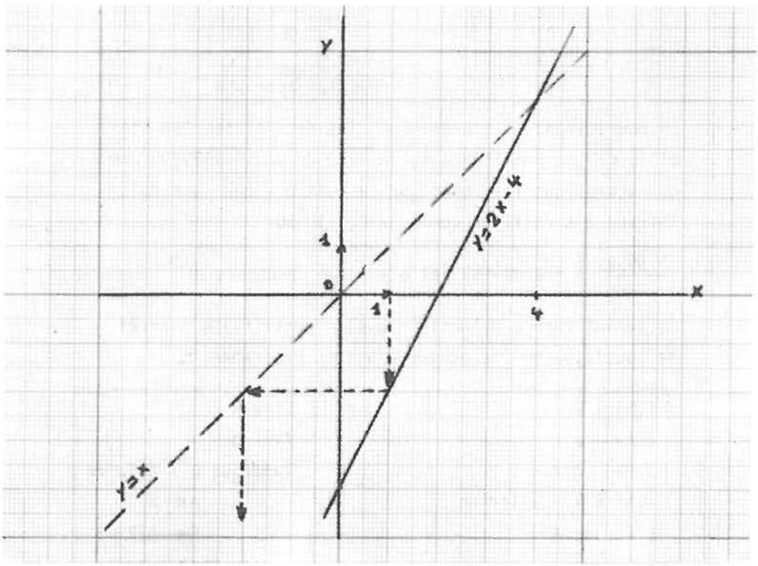
```
1.Lire B
2.A ← B
3.B ← A/2 + 3
4.Si B ≠ A aller en 2
5.Ecrire A
```

ou

```
Lire B
A ← 0
Tant que B ≠ A faire
      A ← B
      B ← A/2 + 3
   fin tant que
Ecrire B
```

Remarque : la suite des itérés de $x \longmapsto ax + b$ ne converge (vers $\frac{b}{1-a}$) que si $|a| < 1$. Ceci se démontre facilement et s'interprète géométriquement.





● Si F est définie par $x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$ $\quad x_0 \neq 0, \quad x_0 \neq -1$

```
Lire A
Faire n fois
      A ← 1 + 1/A
      Ecrire A
fin de boucle faire
```

Comment le programmer ?

- Si la calculatrice possède la touche $\boxed{\frac{1}{x}}$:

$\boxed{x_0}\ \boxed{\frac{1}{x}}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

- Si la calculatrice ne possède pas cette touche $\boxed{\frac{1}{x}}$:

$\boxed{x_0}\ \boxed{\div}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

La séquence $\boxed{\div}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ permettant en général d'obtenir l'inverse du nombre affiché, ce qui s'explique très bien à l'aide de la réserve et de la mémoire des signes (cf. page 49).

- Si on ne veut pas utiliser cet "artifice" et si on dispose d'une mémoire M on doit organiser la boucle pour, partant de x_0, obtenir $1 + \frac{1}{x_0}$ et pouvoir recommencer dans les mêmes conditions. Prenons le cas le plus courant (mémoire dynamique M).

Partant de

A	M
x_0	

comment obtenir

A	M
$1 + \frac{1}{x_0}$	

?

Il faut stocker x_0, donc annuler M avant, puis calculer $1 + \frac{1}{x_0}$ ou $\left(\frac{x_0 + 1}{x_0}\right)$

	A	M
	x_0	
CM	$\boxed{x_0}$	0
M +	x_0	x_0
1	1	x_0
÷		
MR		
+		
1		
=	$1 + \frac{1}{x_0}$	x_0

ou

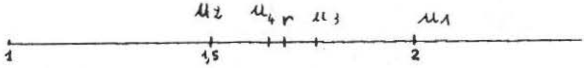
CM
M +
1
+
MR
÷
MR
=

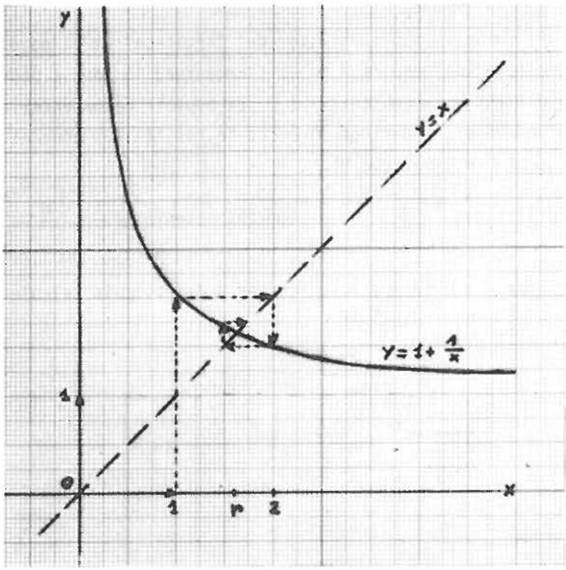
ou ...

Pour x_0 = 1 on obtient

u_1	2
u_2	1.5
u_3	$1.\overline{6}$
u_4	1.6
u_5	1.625
u_6	1.6153846
u_7	1.6190476
u_8	1.617647
u_9	1.6181818
u_{10}	1.6179775
u_{11}	1.6180555

deux suites adjacentes convergeant vers le nombre d'or
$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, r = 1, 6180339... irrationnel





Ex 4 D'autres Itérations

● Voici un algorithme très simple

```
Lire A ; Lire M
Faire n fois
      A ← A x M
      Ecrire A
fin de boucle faire
```

. Si les contenus initiaux de A et de M sont respectivement 2 et 5

A	M
2	5

les écritures de A seront 10, 50, 250...

. Comment initialiser A et M
- pour obtenir la suite 10, 20, 40, 80,... ?
- pour obtenir $5, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$?
- pour obtenir $5^3, 5^5, 5^7, 5^9, \ldots$?
- pour que la 3ème écriture de A soit 15625 et la 4ème écriture de A 390625 ?

. Et si on initialise par

A	M
0,2	5

?

et par

A	M
5	0,2

?

Toutes ces activités que l'on exécute sur calculatrice une fois le programme machine écrit montrent bien l'importance de l'initialisation d'une boucle et permettent aux élèves une approche nouvelle, une réflexion originale et riche, que l'on ne trouve malheureusement pas à l'heure actuelle dans l'enseignement des mathématiques.

. Il est d'ailleurs possible de ne pas utiliser M et de traiter ces problèmes sur calculatrice avec le "programme"

[1ère donnée] [X] [2ème donnée] [=] [=] [=] .....

. Dans le même ordre d'idée il est possible de remplacer A ← A x M par
A ← A + M ou A ← A - M ou A ← A ÷ M ou $\begin{cases} A \leftarrow A \times M \ldots \\ A \leftarrow A + M \end{cases}$

● La suite de Fibonacci. Définie mathématiquement

par $\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$

Comment obtenir les termes successifs de cette suite sans avoir à réintroduire les nombres au clavier ?

Une écriture possible de cet algorithme est :

```
1. A ← 1  ;  B ← 1
2. Ecrire A ;  Ecrire B
3. C ← A + B
4. Si C<10⁷ alors Ecrire C
                  A ← B
                  B ← C
                  Aller en 3
5. Sinon fin
```

Les écritures successives seront :
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 etc

Les états successifs de A, B et C

A	B	C
1	1	
1	1	2
1	2	2
2	3	3
2	3	3

Comment programmer ceci sur calculatrice ?

. S'il y a une touche "échange" A et M $\boxed{A \leftrightarrow M}$ c'est facile !

	A	M	
	u_n	u_{n-1}	Etat n
M +	u_n	u_{n+1}	on change n en n+1
A ↔ M	u_{n+1}	u_n	Etat n+1

Il reste à initialiser par

A	M
u_1	u_0

. Sinon ? c'est beaucoup moins simple ... sur une simple calculatrice avec mémoire M comment passer sans touche $\boxed{A \leftrightarrow M}$ de

A	M
x	y

à

A	M
y	x

?

C'est possible, c'est même un exercice intéressant en soi, mais cela ne présente pas d'intérêt pour obtenir les termes de la suite de Fibonacci !

. Cet algorithme de la suite de Fibonacci peut se traduire, en"collant" au langage de la machine ci-dessus par :

```
M ← 1     ;  A ← 1
Ecrire M  ;  Ecrire A
Tant que  A < 10^7 faire
                M ← A + M
                A ↔ M
                Ecrire A
Fin tant que
```

. Cet algorithme peut se traduire avec des schémas plus éloignés du langage machine, mais plus généraux. Pour obtenir les termes de la suite de Fibonacci il faut itérer la <u>double</u> affectation

$$(u_n \ , \ u_{n+1}) \longleftarrow (u_{n+1} \ , \ u_n + u_{n+1}) \qquad (1)$$

Le problème principal est de réaliser <u>simultanément</u> les deux affectations

$$u_n \longleftarrow u_{n+1}$$
$$u_{n+1} \longleftarrow u_n + u_{n+1}$$

Cette double affectation pose bien sûr un problème car dans la 2ème ligne u_n a une nouvelle valeur.

on écrira alors

$$\begin{aligned} a &\longleftarrow u_{n+1} \\ u_{n+1} &\longleftarrow u_n + a \qquad (2) \\ u_n &\longleftarrow a \end{aligned}$$

Bien entendu la notion de couple et de la double affectation (1) masque qu'il faut 3 mémoires pour la réaliser ce que l'on voit bien sous la forme (2)

La forme (1) s'écrit :

<u>Itérer</u>

| $(u_n , u_{n+1}) \longleftarrow (u_{n+1} , u_n + u_{n+1})$
| choix C

<u>fin itérer</u>

C est la condition de sortie de l'itération (on pourra prendre $u_n < K$ ou $n > 20$ etc...).

Sur certaines machines 4 opérations on peut réaliser les affectations suivantes :

<u>Echange</u> $(a, b) \xleftarrow{\boxed{EX}} (b, a)$

<u>Egale après +</u> $(a, b) \xleftarrow{\boxed{=}} (a + b, b)$

On combinera ces "primitives" pour réaliser l'affectation souhaitée.

● Quelles sont les écritures successives de C dans le programme suivant ?

```
1. A ← 1  ;  B ← 1
2. C ← B / A
3. Ecrire C
4. C ← A + B
5. Si C < 10^7  Alors  A ← B
                       B ← C
                       Aller en 2
6. Sinon fin
```

. On a repris le problème précédent (calcul des termes de la suite de Fibonacci) en faisant écrire les rapports $\frac{u_n}{u_{n-1}}$

. On obtient, semble-t-il, la même suite que celle de la page 146.

. Sur une simple calculatrice il est impossible de traiter tel quel cet algorithme.

. Une petite analyse préalable montre que :

si $V_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$

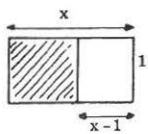
$$V_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_{n-1}} = 1 + \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{V_{n-1}}$$

avec $V_1 = \dfrac{u_1}{u_0} = 1$ et on est ramené à l'itération de $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ à partir de $x_0 = 1$ (cf. page 146)
... de l'intérêt d'une bonne analyse du problème, et on retrouve une démarche rencontrée fréquemment en informatique.

Le nombre d'or, c'est:

★ la limite quand n tend vers l'infini, de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, u_n désignant le nième terme de la suite de Fibonacci ..... donc la limite de la suite v_n définie par $v_0 = 1$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

★ la longueur d'un rectangle de largeur 1, de telle sorte qu'après avoir ôté de ce rectangle le carré hachuré, on obtienne un rectangle de mêmes proportions.



$$\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} : \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

★ le réel positif x tel que $x^2 = x + 1$, ce qui entraîne que

$$x^n = u_{n-1}\,x + u_{n-2}$$

(u_n étant le nième terme de la suite de Fibonacci).

★ la valeur du rapport $\dfrac{AC}{CB}$, C étant le point du segment AB de longueur 1 tel que "le rapport du plus grand (AC) au plus petit (CB) soit égal au rapport du tout (AB) au plus grand (AC) ".

★ le nombre $r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (et $\dfrac{r^n}{\sqrt{5}}$ est une bonne approximation du nième terme u_n de la suite de Fibonacci ....).

★ ....

3 – STRUCTUREE ? VOUS AVEZ DIT STRUCTUREE ?

- La plupart des approches de la programmation ou de l'algorithmique se font par l'intermédiaire des organigrammes.

  On explique les tests, boucles et autres subtilités à l'aide de petits dessins fléchés. Cette pratique est pleine de dangers:

  1. Elle est dangereuse car elle nécessite de définir et de manipuler une *syntaxe:* un losange a telle signification, un rectangle symbolise telle chose ...

     or cette définition est rarement explicitée !

  2. Elle est dangereuse car elle nécessite de définir et manipuler une grammaire (dans ce cas précis, certains disent une D-Chart): on sort d'un losange comme ceci, on ne doit pas faire croiser des retours, etc...

     or cette grammaire est souvent "oubliée" !

  3. Elle est dangereuse car la description du parcours d'un algorithme à l'aide d'un organigramme demande de consacrer de l'attention, du soin et de l'énergie pour construire, dessiner l'organigramme.

  4. Elle est dangereuse car, malgré les apparences, elle ne fait pas avancer l'analyse du problème par le programmeur.

  5. Elle est dangereuse car un organigramme se prête mal à une transcription à l'aide d'outils informatiques: tous les détails de programmation sont mis à la même échelle que les étapes importantes du programme, ce qui ne donne pas le recul nécessaire au traitement d'un problème complexe.

Que faire alors en face de l' "organigrammite" ou des organigrammes-spaghettis qui nous / vous cernent ?

- Il faut trouver une notation précise, possédant un certain nombre de règles faciles à expliciter, facilitant l'analyse des problèmes et leurs transcriptions en un langage quelconque: la *programmation structurée* répond à ces critères. Il faut, bien sûr, l'adapter pour la transmettre aux élèves et enseignants du secondaire.

Voici l'exemple d'un problème avec l'organigramme de sa solution et l'écriture de l'algorithme en programmation structurée.

Enoncé:

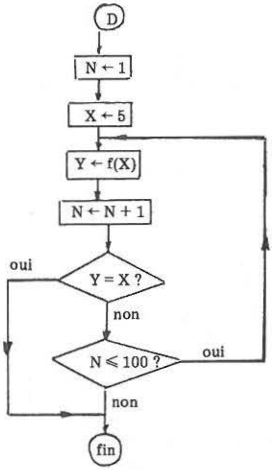
Une fonction f admet un point fixe Z tel que:

$$Z = \lim_{n \to +\infty} f^n (X)$$

pour certaines valeurs de X. On cherche ce point et l'on ne veut pas faire plus de 100 itérations.

(D'après C. Robert: Stage de formateurs.
Grenoble - juillet 1979)

organigramme



Traduction
en programmation structurée:

initialisation X ← 5 ; N ← 1

itération

| Y ← f(X)
| *arrêt* X = Y ou N = 100
| X ← Y ; N ← N + 1

fin itération

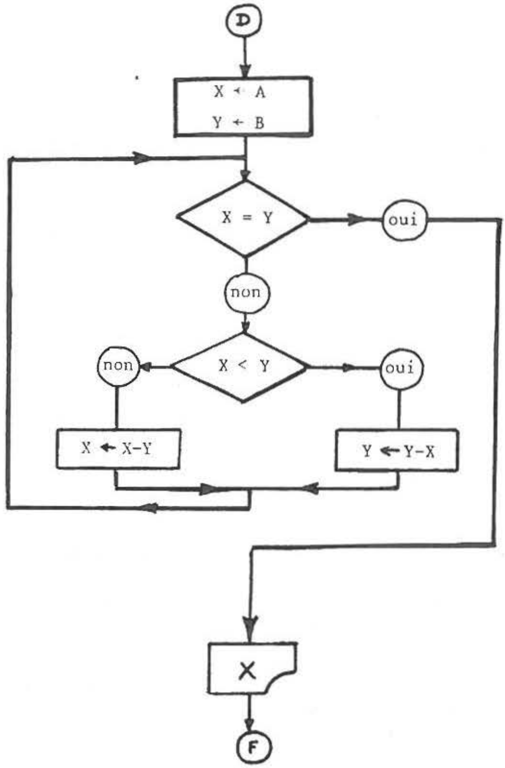
c ϕ {le point fixe est X}

- Quelques remarques à propos du schéma en programmation structurée:
  Le mot *itération* marque le début du bloc qui finit à *fin itération*. La sortie de ce bloc est effectuée lorsque la condition *arrêt* est vérifiée. Les points virgules séparant X ← 5 et N ← 1 , ainsi que X ← Y et N ← N + 1 , montrent qu'il n'y a aucune relation d'ordre entre ces actions.

  Si cet exemple très simple ne vous a pas forcément convaincu, essayez alors avec des problèmes plus complexes ....

  ou observez l'exemple ci-dessous:
- Calcul du P.G.C.D. de deux naturels.

```
            { PGCD de deux nombres A et B        A et B > 0 }
X ← A
Y ← B
tant que  X ≠ Y  faire
            choix
                    X > Y :  X ← X - Y
                    X < Y :  Y ← Y - X
            fin choix
fin tant que
            { le PGCD de A et B est dans X }
```



- *Remarque:*

Les notations employées en programmation structurée sont fortement inspirées de la pratique des informaticiens. Il n'est pas question de vouloir les imposer, mais il est peut-être souhaitable que chaque enseignant s'en inspire au mieux.

Dans le même ordre d'idées, il faut bien distinguer les notations algorithmiques (qui peuvent être choisies arbitrairement, pourvu qu'elles soient rigoureuses) et les langages de programmation (qui eux sont imposés de l'extérieur). Ainsi, le calcul du P.G.C.D. peut s'écrire dans un langage particulier:

```
entier procédure F (entier A,B) ; commentaire A,B > 0 ;
début entier X ;
        X : = si A = B  alors A
                        sinon si A > B alors F(A-B,B) sinon F(B-A,A) ;
        X
fin F ;
```

LES MANUELS SCOLAIRES DE MATHEMATIQUES

- Le rôle des manuels est important. L'A.P.M.E.P. a créé et utilisé, à partir de 1974, une "Grille d'analyse des manuels scolaires de mathématiques". Son application aux ouvrages les plus récents, en 1977 et 1978, a donné lieu à une brochure.
- Nous extrayons de celle-ci la 4ème partie d'un article sur les fonctions et l'utilisation du manuel scolaire de mathématiques ainsi que "Quelques suggestions de dénombrements" qui complètent des "comptages" fouillés d'exercices favorisant initiative, invention, esprit critique ou des classifications exhaustives d'exercices ou problèmes.

SCHOOL MANUALS FOR MATHEMATICS

- The role of manuals is important. A.P.M.E.P. created ans has been using since 1974, an "Analysis grid for mathematics manuals". Its application to the most recent ones, in 1977 and 1978 resulted in a brochure.
- We copy out from it the fourth part of an article about functions and the use of mathematics school manuals as also "Some suggestions of countings" that finish off elaborate "countings" of exercises favouring initiative, inventi-veness, critical mind or exhaustive classifying of exercises or problems.

Los manuales escolares de Matemáticas

- El papel de los manuales es importante. La A.P.M.E.P. ha creado y utilizado, desde 1974, una "Red de análisis de los manuales escolares de matemáticas". Su aplicación a las obras más recientes, en 1977 y 1978, ha dado lugar a un folleto.
- Sacamos de éste la cuarta parte de un artículo acerca de las funciones y del uso del manual escolar de matemáticas así como "algunas sugestiones de enumeraciones" que completan "inventarios" profundizados de ejercicios que favorecen la iniciativa, la invención, el juicio o clasificaciones exhaustivas de ejercicios y problemas.

II.4 CHANSONS POUR UN ESPOIR

> "VOICI LE TEMPS D'APPAREILLER
> ... POUR LE COTE CLAIR DE SOI-MEME"
> (Louis ROCHER)

Parler des manuels scolaires de mathématiques oblige à se poser des questions décisives :

1. *Quel est le caractère fondamental d'un enseignement des mathématiques ?*

• — "Exposer" des mathématiques ? Avec des "trous" suffisamment petits pour que les bons élèves les remplissent séance tenante, des papiers carbone permettant de reproduire l'exposé en travail à la maison ...., et l'exhortation : "Cela servira plus tard !", ...

— ou entraîner les élèves à "faire" des mathématiques, à avoir des activités mathématiques, fussent-elles d'abord mal coordonnées ?

• — formuler et faire apprendre des définitions d'êtres mathématiques ? ...

— ou faire appréhender les concepts par leur fonctionnement ?

La réflexion scientifique contemporaine nous déclare passés "de l'univers de la substance à celui de la relation". Comment cela se pratique-t-il au niveau de l'enseignement des mathématiques ?

2. *Qu'attendre d'une activité mathématique ?* ... sinon :

— apprendre à se poser des questions et des problèmes (des "vrais", où la réponse n'est ni évidente, ni en filigrane)
— conjecturer, infirmer ou démontrer, pour les résoudre (parfois en "bricolant", parfois en inventant, souvent en mettant en jeu le bénéfice d'un long apprentissage)
— évaluer la validité, au regard des questions posées, des actions réalisées et des réponses apportées.

3. *L'impact de l'enseignement des mathématiques ne dépend-il pas essentiellement des modes d'appropriation des concepts ?*

Reproduire ou répéter ne nous fait guère progresser. Il en va autrement dès qu'il s'agit de chercher, d'imaginer, ...

4. *Mais ces modes d'appropriation sont en relation de va-et-vient avec les structures mentales de l'élève.* L'enseignement mathématique en tient-il compte ? Et sait-il que le développement de ces structures mentales ne se fait pas d'une façon unique pour tous les élèves ?

5. *Imagination, recherche, créativité n'exigent-ils pas une rupture avec un exposé "linéaire" des mathématiques ?*

   Ne serait-il pas préférable de penser leur enseignement sous forme de "noyau" et de "thèmes" (Cf. *Charte de Caen* 1972 et *Texte A.P.M.E.P. d'orientation* 1978) ? ... et de rompre avec la linéarité selon la formule préconisée — avec exemples à l'appui — par la brochure A.P.M.E.P. 1979 *Activités mathématiques en 4ème-3ème, tome 1* ?

6. *Comment traduire dans l'enseignement des mathématiques le souci d'encourager la créativité ?*

   "L'esprit créatif est particulièrement souple, flexible. De plus il est "tolérant au désordre", accepte la perte d'un repère qui advient lorsqu'un schéma est détruit et n'a pas encore été remplacé [...]. L'ambiguïté ne le dérange pas, car, pour lui, rien n'est vraiment noir ou blanc, mais tout est noir et blanc. Enfin, on le décrit comme autonome, capable [... d'aller contre ...] les forces du conformisme établi et de prendre des risques intellectuels" [Florence Vidal].

7. *Tout enseignement se veut culturel. Mais qu'est, pour nous, la "culture" ?*

   Pour René Pascal, c'est un "certain regard", une certaine écoute... Cela, rejoignant Nizan : "L'homme attend l'homme au coin de la rue" [mais pas de n'importe quelle attente !], devrait faire prévaloir la part d'initiative du lecteur d'un manuel... et lui permettre d'utiliser au mieux n'importe quel ouvrage !

8. *Est-il possible de "dissocier la connaissance d'un instrument* [l'automobile par exemple] *de sa finalité ?"* (Josy Eisenberg)

   Et pour notre enseignement ??

9. Rien de sérieux ne l'est réellement sans un brin d'humour et de *distance vis-à-vis de soi* et des instruments utilisés, ne serait-ce que pour éviter de se poser en témoins d'un absolu !

Où les manuels en portent-ils la trace ?

10. *J'en étais là de ces réflexions quand Louis Duvert m'a donné les siennes, que je vous propose :*

10.1 : Peut-on faire classe sans manuel(s) ?

10.2 : Peut-on faire classe sans instruments pédagogiques ? Sinon, quels instruments pédagogiques préconiser :
— Papier, tableau, craie, ...
— Documents écrits (imprimés, ronéotés par le maître, apportés par les élèves)
— Films (de quels types ?)
Emissions de télévision, ...
— Rétroprojecteur et transparents, ...
— Machines à calculer, tables numériques,
— .....

en les préconisant
— dans quelle optique ?
— selon quelles modalités ?
— pour quels objectifs ?

10.3 : Comment obtenir des pouvoirs publics qu'il soit possible d'utiliser les crédits prévus pour la "gratuité des manuels" autrement qu'en prêt de livres ?

10.4 : Comment persuader de plus en plus de professeurs qu'ils peuvent, peu à peu, sans efforts disproportionnés, se libérer de manuels tyranniques ? (et sans trop se faire mal voir de l'inspection, des parents, des collègues, ...)

Bien sûr, des IREM aux moyens retrouvés et bien outillés sont souhaitables, utiles, indispensables... Mais encore ?

11. *Par ailleurs, l'école peut-elle se régler sur ce qui se pratique au-dehors ?* — par exemple sur le plan de la langue — :

La télé, les bandes dessinées peuvent tuer le goût de lire Mallarmé et Apollinaire : faut-il donc ne pas rééditer les poètes ?

Faut-il, demande aussi Louis Duvert, parler en classe comme à la télé ? comme au Club Méditerranée ?

Ne s'agit-il pas plutôt d'apprendre aux élèves, sans démagogie, à lire et à pratiquer une langue simple, mais de plus en plus riche, nuancée, structurée ?

12. *Et vous, lecteur, quelle question décisive (à votre jugement) posez-vous ? ou poseriez-vous ?*

"TES YEUX SONT SI PROFONDS
QU'EN M'Y PENCHANT POUR BOIRE
J'AI VU TOUS LES SOLEILS
Y VENIR SE MIRER ..."
(Louis ARAGON)

Aucun enseignement n'est donné, ni reçu, ni vécu, isolément. Il dépend essentiellement de la façon générale d'agir, d'être, de devenir, tant du maître que de l'élève et des traits fondamentaux de l'institution.

Il met donc en jeu, notamment :
— une réflexion sur les objectifs prioritaires de l'enseignement,
— le type de relations à l'intérieur de la classe et à l'intérieur de l'établissement, entre élèves, entre maîtres (de toutes disciplines), entre maîtres et élèves, ...
— les activités périscolaires et l'ambiance familiale (aussi bien que les possibilités matérielles offertes ou non par le niveau social des parents).

Cela est-il du ressort du manuel ? Apparamment non ; mais la pédagogie qu'il suppose ou qu'il induit va, dans la trame ci-dessus esquissée, prendre une place qui influera sur les autres facteurs, de même qu'elle aussi sera influencée, et parfois rejetée.

Il serait donc opportun de ne jamais négliger ce contexte général. C'est en son sein que pourra, ou non, se préciser une dialectique, entre les contenus de l'enseignement et leurs modes d'appropriation, capable de privilégier :

— l'écoute des élèves et l'ouverture de l'enseignement,
— le développement des diverses capacités des élèves :

— à agir,
— à imaginer et à créer,
— à expérimenter et conjecturer,
— à contrôler et critiquer,
— à organiser, rechercher, utiliser des informations,
— .....

(cf. *Texte d'Orientation A.P.M.E.P.* — 1978 —)

Telles pourraient être les références majeures pour juger des fonctions, de l'utilisation, de l'intérêt d'un manuel, références qui requièrent d'abord une grande souplesse.

> "ET SA MUSIQUE EST L'AVENIR
> LES MOTS EN CHANGENT LA CHANSON..."
> (Louis ARAGON)

Enseignement personnalisé, pédagogie différenciée, travail autonome, ... seraient facilités si le manuel "unique" en usage dans la classe était remplacé par une bibliothèque de classe aussi variée que possible, formée de manuels diversifiés selon des objectifs explicites allant au-delà des simples connaissances.

Pour susciter la recherche ou la laisser se déployer tout en ne laissant personne s'y épuiser désespérément, ne peut-on, dans ce cadre, imaginer des manuels-gigognes où, à partir de simples recueils de situations, apparaîtraient progressivement des suggestions et des aides plus précises ?

Rêvons alors au rôle nouveau des enseignants ...

Rêve que va rapprocher l'émergence de moyens (films, ...) avec lesquels il faudra se décider à compter.

> "QU'ELLE NOUS SOIT FAVEUR NOUVELLE
> ET COMME BRISE D'ESTUAIRE
> EN VUE DES LAMPES DE LA TERRE"
> (Saint-John PERSE)

La révolution informatique qui s'annonce devrait modifier profondément les méthodes d'apprentissage, le stockage et la mise à disposition des informations et des connaissances, ...

Elle devrait aussi bouleverser la façon dont se présentent les problèmes ou la manière de les traiter, la rapidité et la puissance des calculs, des explorations, des balayages offrant de nouvelles possibilités et déployant le champ de nouvelles méthodes : de plus en plus les meilleurs utilisateurs d'ordinateurs sauront y voir bien autre chose que la conjugaison d'une riche bibliothèque et d'une éblouissante règle à calcul !

Changeant le type de relation au savoir, elle devrait ouvrir tout grand à l'enseignement un domaine préférentiel, celui des démarches de la pensée et de l'action (imaginer, organiser, ...)

En ce monde-là, quelle place pourraient encore occuper nos manuels ? ... Faire peau neuve sera indispensable. Ce qui exige d'abord expérimentations et essais.

> "JE T'ATTENDAIS AINSI QU'ON ATTEND LES NAVIRES
> DANS LES ANNEES DE SECHERESSE
> QUAND LE BLE N'EST PAS PLUS HAUT
> QU'UNE OREILLE DANS L'HERBE
> QUI ECOUTE, APEUREE, LA GRANDE VOIX DU VENT..."
> (René-Guy CADOU)

La création et l'exploitation de bons outils d'enseignement (manuels, ...) susceptibles d'évoluer exigent une formation des maîtres (initiale et permanente) liée à la recherche et capable de promouvoir chez les enseignants les qualités souhaitées chez les élèves : initiative, imagination, esprit critique, goût et aptitude au travail en équipe, ...

Sans une telle formation, l'enseignant est esclave des manuels les plus conformistes. La pratique enseignante qui en résulte conforte à son tour de tels manuels. Etc. ... la boucle est sans fin, et l'enseignement condamné à être de plus en plus déphasé.

Il est des apparences de formation (toutes les fois qu'elle est confiée à un supérieur hiérarchique, ou trop courte, ou coupée de la classe, ou trop intermittente, ...) qui peuvent aggraver les choses.

Au contraire, les IREM ont ouvert la voie d'une réelle et substantielle formation continue des maîtres dans la mesure où ils ont rejoint les préoccupations fondamentales énoncées plus haut.

Dans le cadre d'une telle formation, la critique des manuels scolaires s'éclaire d'un jour nouveau : chaque manuel peut alors être utilisé au mieux, le maître compensant lucidement les manques, rectifiant les orientations, exploitant les qualités.

Les auteurs de manuels, sachant qu'ils peuvent faire fond sur les maîtres, sont alors plus ouverts, moins dogmatiques, plus diversifiés. Les critères de choix des manuels, plus pertinents, encouragent à leur tour l'évolution...

Peut-être n'est-il au fond qu'un problème : celui de la formation permanente des enseignants... : qu'on ne saccage pas les IREM ! Qu'on leur redonne des moyens décents !

> "CHEZ MOI, DIT LE PETIT GARCON,
> ON ELEVE UNE TORTUE.
> ELLE CHANTE DES CHANSONS
> EN LATIN ET EN LAITUE"
>
> (René de OBALDIA)

Le temps est toujours mesuré.

Les enseignants, fussent-ils en équipe, ont des possibilités limitées.

Aussi, l'un des critères d'appréciation des manuels restera-t-il leur capacité à être d'efficaces auxiliaires allégeant autant que possible le travail des enseignants en les aidant à faire face à la diversité des goûts et des aptitudes des élèves.

Cette capacité devrait appuyer "le droit à la différence", celle des maîtres et celle des élèves.

Il n'est, disait Prévert, de "Beauté que plurielle". C'est vrai d'abord de toute activité d'éducation, la classe de mathématiques non exceptée. Permettre l'exercice réel de ce droit à la différence est une fonction fondamentale à requérir de tout manuel comme de tout acte d'enseignement.

> "CE SONT LES ETOILES
> QUI AURONT RAISON
> EN DERNIER LIEU"
>
> (Paul VALET)

Des IREM accordés au style souhaité nous sont indispensables pour progresser dans cette voie à un rythme qui nous permette peu à peu d'y combler notre retard. Notre réflexion personnelle l'est tout autant. Cette brochure souhaite y contribuer.

Henri BAREIL
(28/12/1978 et 1/3/1979)

QUELQUES SUGGESTIONS DE DENOMBREMENTS

par Magdeleine MOTTE

1. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES DANS L'INTRODUCTION D'UNE NOTION

Pour la notion de proportionnalité, l'examen de cinq manuels de sixième a donné :

		Galion	IREM Strasbourg	Monge	Polle-Clopeau	Rouquairol
Cours ou exercices d'introduction	Exemples	7	1	0	0	5
	Contre exemp.	4	5	0	1	0
Exercices	Exemples	9	5	2	5	4
	Contre exemp.	4	0	0	1	0
Total	Exemples	16	6	2	5	9
	Contre exempl.	8	5	0	2	0

2. ON POURRAIT QUANTIFIER D'AUTRES CARACTERISTIQUES

① Compter les exercices faisant le lien entre plusieurs notions du programme (d'où économie de temps et meilleure compréhension). Par exemple on retiendrait un exercice observant les périmètres et les aires d'une suite de carrés de côtés 1, 2, 3, ... et préparant (ou consolidant) ainsi la compréhension de la proportionnalité.

② Compter les activités qui, tout en s'insérant dans le programme de la classe, favoriseront la compréhension ultérieure d'autres notions (ex. : sur quadrillage, applications isométriques et non isométriques ; de la division euclidienne vers la preuve par 9 et les congruences ; etc...)

③ Compter des signes indiquant que les auteurs sont conscients que la formation à la logique en acte ne peut être laissée au hasard :

— chercher si les mots *ou*, *tout*, *quel que soit*, *au plus*, *au moins*, *si ..... alors*,

— sont utilisés isolément ou systématiquement,
— sont éclairés lors de la première occurrence,
— font l'objet d'exercices ;

— compter les exercices faisant manipuler la négation et préparant la compréhension des lois de Morgan.

Exemple : les exercices de Galion avec une trieuse font apparaître "si x n'est pas à la fois multiple de 3 et multiple de 5 alors il n'est pas multiple de 3 ou il n'est pas multiple de 5".

— compter les exercices qui, en faisant manipuler des phrases vraies ou fausses, des "moules", ... préparent la compréhension des équations et de l'implication et appellent des preuves du type "exhiber un élément". (Exemples : VRAI ou FAUX ? "Il existe au moins un entier égal à son double" ; "Pour tout naturel a, $a^2 > a$") ;

— compter les exercices de déduction exigeant une invention (numéros d'ordre, organigramme) pour communiquer la démarche suivie (Ex. Fiches Vertes (O.C.D.L.) n° 18 ; Fiches Violettes n° 18).

Evidemment, on rencontrerait quelques difficultés. Par exemple, va-t-on "donner une prime" à tel manuel qui, parce qu'il a multiplié les énoncés, va en donner seize contenant "quel(s) que soi(en)t", ou à tel autre qui croit pouvoir initier à la déduction en sixième en exhibant quelques déductions à partir des axiomes du plan qui ne peuvent avoir à cet âge aucune signification ?

On conçoit cependant la possibilité d'une analyse fine et, pour les auteurs de manuels, celle d'améliorer leurs ouvrages sans surcharge ni dépense excessive de matière grise.

DEUX ACTIVITES POUR 4eme-3eme

(Extraites de "Activités mathématiques en 4ème-3ème" - Tome 1)

- Cette brochure cherche à promouvoir, à partir de réflexions générales illustrées de nombreux exemples, puis de 29 activités, un renouvellement en profondeur de l'enseignement. Elle devrait - dit la revue belge "Mathématique et Pédagogie" - faire partie de la bibliothèque de tout enseignant.
- Pour chaque activité, il s'agit de partir de situations qui posent des problèmes et suscitent l'initiative et l'esprit de création aussi bien qu'elles développent l'esprit critique et l'ouverture d'esprit.

  Attention : Ces textes sont écrits pour les enseignants. A eux de les utiliser au mieux !

TWO ACTIVITIES FOR FOURTH AND THIRD FORMS

(Copied out from "Mathematical Activities in Fourth and Third forms. Vol. I).

- This brochure attempts to promote, from gêneral thoughts illustrated with many examples, then with 29 activities, a renewal in profoundness of teaching. It should, as says the Belgian review "Mathématique et Pédagogie", become a part of the library of every teacher.
- For each activity the matter is to start from situations that set problems and give rise to initiative and creative mind as well as they develop critical mind and readiness of mind.

  Be careful : these texts have been written for teachers, it rests with them to use such texts at the best!

Dos actividades para el tercer año y el cuarto año de la Segunda Enseñanza

(Sacadas de "Actividades matemáticas en el tercer año y cuarto año de la segunda enseñanza" Tomo 1ero)

- Este folleto intenta promover desde reflexiones generales con numerosos ejemplos, luego, con 29 actividades, una renovación en lo más profundo de la enseñanza. Tendría - dice una revista belga "Matemáticas y Pedagogía" - que encontrarse en la biblioteca de cualquier profesor.
- Para cada actividad, se trata de partir de situaciones que plantean problemas y suscitan la iniciativa y el espíritu creador, lo mismo que desarrollan el juicio y la anchura de miras.

  ¡Cuidado ! Estos textos están escritos para los profesores : ¡ a ellos, les toca utilizarlos lo mejor que puedan !

III. 2

Louis DUVERT

UNE ANALOGIE DE RAISONNEMENT EN ALGEBRE ET EN GEOMETRIE

Il me paraît bon de ne pas laisser croire aux élèves qu'on ne raisonne pas de la même façon en géométrie et en algèbre. Il n'est peut-être pas superflu non plus d'en parler entre collègues, certains d'entre nous restant persuadés que c'est la géométrie seule qui apprend à bien raisonner, l'algèbre n'étant qu'une accumulation de mécanismes.

Voici des « parallèles » possibles, parmi d'autres :

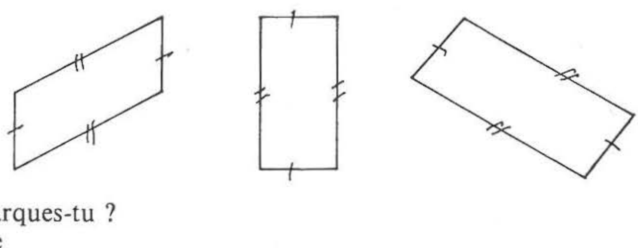
EXEMPLE 1

• $\boxed{A}$ Complète :

a	b	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a\| - \|b\|$	$a + b$	$\|a + b\|$
8	− 3					
16	− 5					
− 123	46					
250	19					

Que remarques-tu ?
La phrase
« Quels que soient les entiers(1) a, b, $|a| - |b| = |a + b|$ »
est-elle vraie ?

• $\boxed{B}$ Voici quelques quadrilatères ; chacun a deux de ses quatre côtés isométriques et les 2 autres aussi :



Que remarques-tu ?
La phrase
« Tout quadrilatère ayant ses quatre côtés 2 à 2 isométriques est un parallélogramme »
est-elle vraie ?

(1) ou "les décimaux", ou "les réels".

• $\boxed{\text{C}}$ **Comparaison**

Les deux réponses sont négatives. Un contre-exemple suffit à le ***démontrer :*** *a = 8 et b = 3, par exemple. Et, en géométrie, un « cerf-volant » (cf. page 68), sans même aller chercher des quadrilatères non convexes ; d'éminents collègues (et néanmoins amis, même depuis lors...) s'y sont laissés prendre, songeant uniquement à des côtés* ***opposés*** *2 à 2 isométriques ...*

EXEMPLE 2

• $\boxed{\text{A}}$ Complète :

t	t + 2	t + 3	(t + 2) (t + 3)	t^2	5 t	$t^2 + 5t + 6$
2 – 5 – 12 8 0						

Que remarques-tu ?
La phrase
« Quel que soit l'entier(1) t, $(t + 2)(t + 3) = t^2 + 5t + 6$ »
est-elle vraie ?

• $\boxed{\text{B}}$ Voici 5 points A, B, C, D, E.
Construis les symétriques B', C', D', E' de B, C, D, E autour de A (ou autre formulation si on n'a pas encore parlé de symétrie centrale).
Mesure [BC] et [B'C']
[CE] et [C'E']
[EB] et [E'B']
[DC] et [D'C']
Que remarques-tu ?
La phrase
« Quels que soient les points A, M, P, les points M' et P' symétriques de M et P autour de A sont tels que M'P' = MP »
est-elle vraie ?

• $\boxed{\text{C}}$ *A partir de quoi le maître peut laisser discuter les élèves, introduire la notion de « contre-exemple », commencer à insinuer que le dessin n'apporte pas toujours la conviction intime, et ne démontre pas. Rien ne l'empêchera, plus tard, de démontrer ou de faire démontrer la dernière phrase de géométrie ; celle d'algèbre sera peut-être déjà à la portée des élèves.*

(1) ou "les décimaux", ou "les réels".

V.4

Henri BAREIL

VARIATIONS SUR LES DISTANCES

SITUATION-SOURCE, supposée déjà traitée :
Etude des points du plan équidistants de deux points A et B donnés.

Il s'agit ci-après d'imaginer de nouvelles études en variant la nature des éléments en jeu.

Les problèmes retenus sont à répartir entre les élèves ou groupes d'élèves. Une synthèse collective met ensuite en évidence les résultats les plus intéressants.

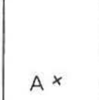
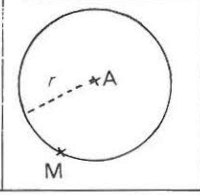
La présente étude signale quelques-uns *des problèmes possibles et des questions ou remarques qu'ils peuvent suggérer.*

Tous ces problèmes portent sur des ensembles de points répondant à une condition donnée :

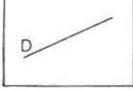
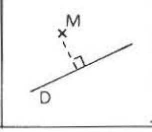
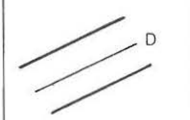
Il y a généralement lieu de dessiner d'abord des points *répondant à une telle condition. Dès que ces points sont* assez nombreux *pour le permettre,* on hasarde une conjecture, *qu'il s'agit ensuite de* démontrer, *ou de* justifier *par divers recours (cf. pages 115-123), ou d'*admettre *(Attention : il est important que la classe de quatrième ait assez souvent permis de prendre en défaut des conjectures pourtant fort plausibles).*

N.B. — *Les dessins sont en "modèle réduit" pour prendre moins de place. Il va de soi que, moins l'étude se révèle simple, plus il faut une figure soignée et, donc, de bonne dimensions.*

Etude de base (1) :

Phase 1 Données	*Phase 2* Concept utilisé	*Phase 3* Recherche de l'ensemble des points M du plan situés, avec r donné, à une distance d de A telle que :		
Point A donné	Distance d d'un point M au point A	$d = r$	$d < r$	$d > r$
			. . .	. . .

Etude (2) obtenue, à partir de (1), en remplaçant le point A par la droite D :

Droite D donnée	**Distance de M à D**	**Ensemble des points M situés, avec r donné, à une distance d de D telle que :**		
		$d = r$	$d < r$	$d > r$
			•••	•••

Ici les résultats font partie des énoncés évidents, à admettre.

Etude (3) obtenue, à partir de (1), en remplaçant le point M par la droite D :

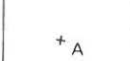
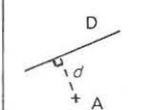
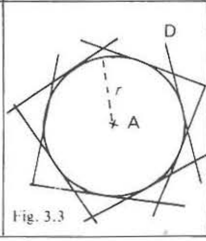
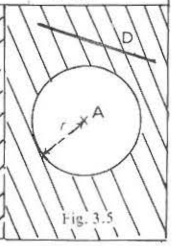
Point A donné	**Droite D à la distance d de A**	**Droites D telles que $d = r$ (r donné)**	**Avec r donné, ensemble des points des droites D telles que :**	
			$d < r$	$d > r$
		 Fig. 3.3	 Fig. 3.4	 Fig. 3.5

Fig. 3.3 : Il s'agit ici d'un problème simple d'enveloppe* qu'on peut reprendre en remplaçant D par un cercle.

---

* Cf. pages 201-203.

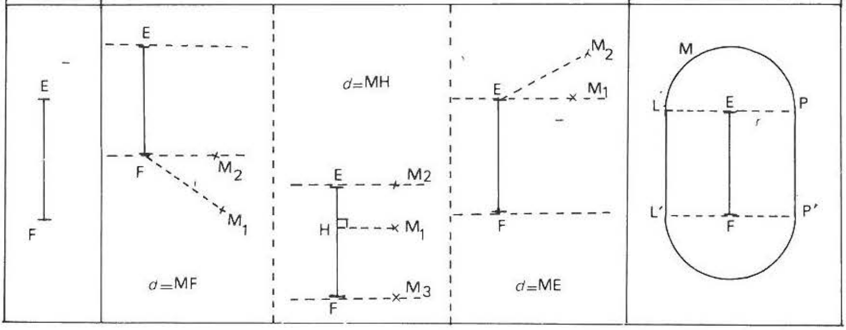
Fig. 3.4 et 3.5 :

• Très intéressant contre-exemple de ceci : du fait que $d < r$ et $d > r$ s'excluent, on croit trop facilement que les ensembles de points M associés sont disjoints.

• Pour la fig. 3.4, le résultat, relatif aux points de D, n'est pas une condition suffisante : on peut choisir D dans la zone hachurée sans avoir $d < r$.

Etude (4) obtenue, à partir de (1), en remplaçant A par un segment [EF] :

Segment [EF] donné	*Phase 2.* Cf. ci-dessous : Définition de la distance de M à [EF]	Ensemble des points M situés à la distance r de [EF]

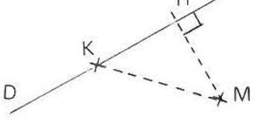


N.B. — Il s'agit ici de la distance au sens que lui donne un pilote d'hélicoptère s'approchant d'une piste d'atterrissage rectiligne.

Exemple de problème classique : comment généraliser une définition ?, et généralisation pour la distance à un ensemble :

• *Commentaire pour la phase 2 ci-dessus :*

Il convient d'analyser ce qu'est la distance d'un point à une droite pour mettre en évidence un critère généralisable.



Critère n° 1 : $(MH) \perp D$.
Critère n° 2 : H est la position de K sur D telle que MK soit minimum.
C'est ce critère n° 2 qui se révèle praticable pour la distance à un segment.

[Remarque : ce critère est effectivement l'un de ceux qui *se généralisent pour définir une distance d'un point M à un ensemble E quelconque*].

Etude (5) obtenue, à partir de (1), en remplaçant A par { E,F }, paire de points :

Paire { E,F }	Définition de la distance d de M à { E,F }	Avec r donné, ensemble des points M situés à la distance r de { E,F }

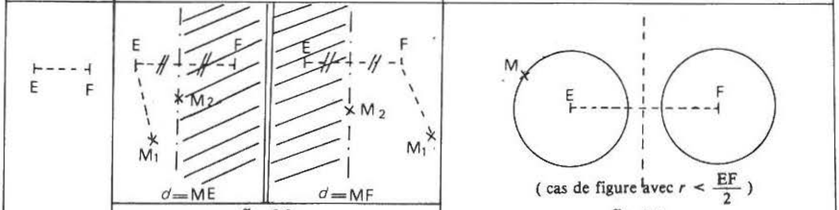


fig. 5.2 fig. 5.3

Etendue à 2 paires, cette étude revêt un intérêt certain (Cf. étude 16).

Mais déjà la figure 5.3 met en évidence, dans ce cas de figure, et sur un exemple plus simple que celui de l'hyperbole, la possibilité pour un ensemble de points M, déterminé par une condition unique, d'être formé de deux parties séparées.

Etude (6) obtenue, à partir de (1), en remplaçant M par [EF] :

Phase 1	Phase 2	Phase 3
A donné	Distance de [EF] à A : Voir Etude (4)	Ensemble des points des segments [EF] tels que ces segments soient à la distance r de A :

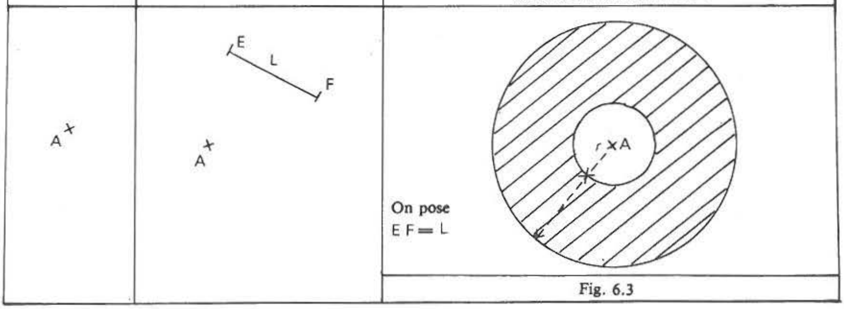


Fig. 6.3

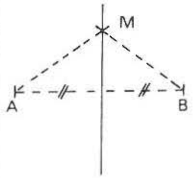
La phase 3 relève ici de problèmes d'enveloppe, de maximum et de minimum. Conjecturer le résultat sera sans doute suffisant en Quatrième.

Il y a ici un autre intérêt : La condition, nécessaire, d'appartenance des points de [EF] à la couronne hachurée n'est pas une condition suffisante pour que [EF] soit à la distance r de A.

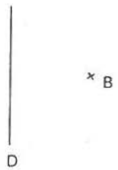
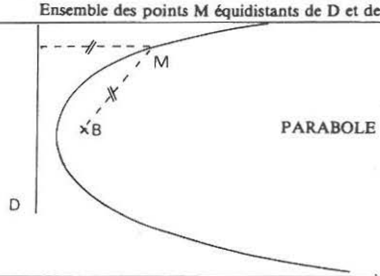
Etudes (7), (8), ... :

On peut imaginer d'autres études, à partir de (1), en remplaçant, par exemple, A ou M par une demi-droite, ou par un cercle, ...

Etude de base (10) :

Deux points donnés A et B	Ensemble des points M (du plan) tels que :		
	MA = MB	MA > MB	MA < MB
		•••	•••

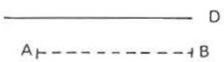
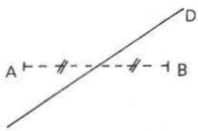
Etude (11), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par une droite D :

Données	Ensemble des points M équidistants de D et de B	
		•••

• En dessinant trop peu de points M, le tracé devient fantaisiste. C'est alors un bon exemple de prise en défaut d'une conjecture.

• L'énoncé du résultat (parabole) relève d'un appel à des "intervenants extérieurs" (professeurs, livres, ... : Cf. page 14 ou 30).

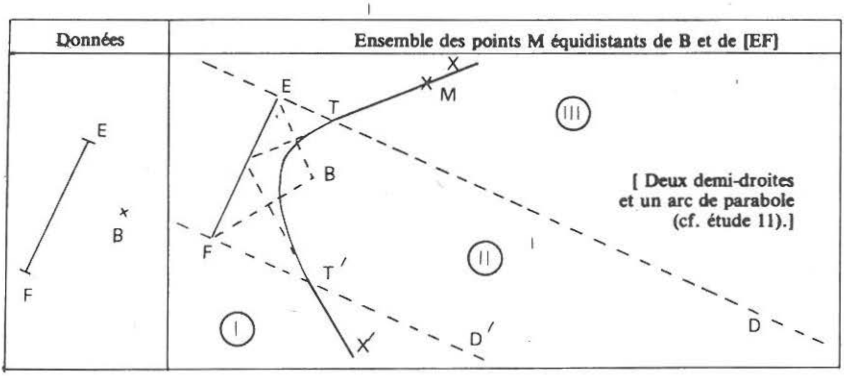
Etude (12), obtenue à partir de (10) en remplaçant M par une droite $\triangle$:

Données	Droites D équidistantes de A et de B		
	 1ère famille de droites D	 2ème famille	•••

• Les deux familles forment deux ensembles bien distincts, alors que l'ensemble des points de toutes les droites d'une famille est chaque fois le plan.

• Ici, le critère relatif à chacune des familles fournit une condition, suffisante, mais non nécessaire, d'équidistance à A et B.

Etude (13), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par [EF] :



1er intérêt : *Etude à faire par régionnements* (I , II , III) :

Il faut organiser sérieusement la recherche des points M pour qu'elle permette une bonne conjecture.

2e intérêt : *Problème de la continuité et des frontières :*

Il y a, pour chaque région I, II, III, une étude propre.

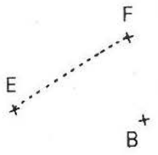
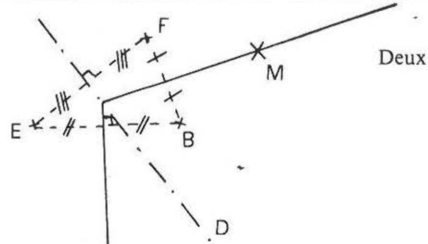
Mais y a-t-il continuité (au sens intuitif) d'une région à l'autre ?

Par exemple on a, à la fois : D $\subset$ II et D $\subset$ III. Donc il doit y avoir continuité. Cela se traduit par le point unique T, sur la frontière, à la fois point de la demi-droite de III et de l'arc de parabole de II.

De plus, [Tx) n'est-elle pas tangente en T à l'arc de parabole ? (Faire un grand dessin soigné. D'où une conjecture. — Des documents, d'un niveau assez élevé, préciseraient que [Tx) est bien tangente —.)

N.B. Les mêmes remarques peuvent être faites à propos de l'étude (4), sauf que, pour (4), il n'y a aucune difficulté à établir que les droites (LL') et (PP') sont tangentes aux demi-cercles.

Etude (14), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par { E,F } :

Données	Ensemble des points M équidistants de { E,F } et de B	
		Deux demi-droites.

Encore un régionnement et, cette fois, pour le franchissement de D, une continuité relative aux points mais non aux tangentes ...

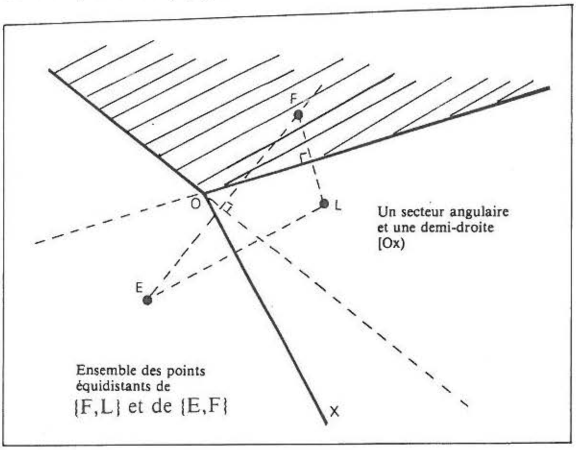
• *On peut, ici, comparer à l'étude (5), dans le cas de figure* $r > \dfrac{EF}{2}$.

Etude (15), obtenue en remplaçant A par {E,F}, B par {L,N}.

Le cas de figure général est moins intéressant que le cas particulier (16) traité ci-dessous (mais le résultat, constitué de segments ou de demi-droites portés par des médiatrices, est assez simple à établir et il utilise, pour les "raccords" d'une région à l'autre, le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Etude (16) (cas particulier de (15) avec N = F) :

(Cf., d'abord, étude (5)).



L'étude 16 s'inscrit en faux contre la tendance à imaginer que, dès qu'un point M est soumis à une condition d'égalité, l'ensemble des points M possibles est une *ligne,* au sens commun.

Autre remarque : le cas général de l'étude (15) ne présente rien d'analogue. Voilà avec (16) un exemple d'un cas particulier qui s'éloigne davantage du sens commun ...

Etude (17), avec [EF] et [LN] au lieu des points A et B (à faire).
Attention : toute démonstration renvoie, en partie, au (18).

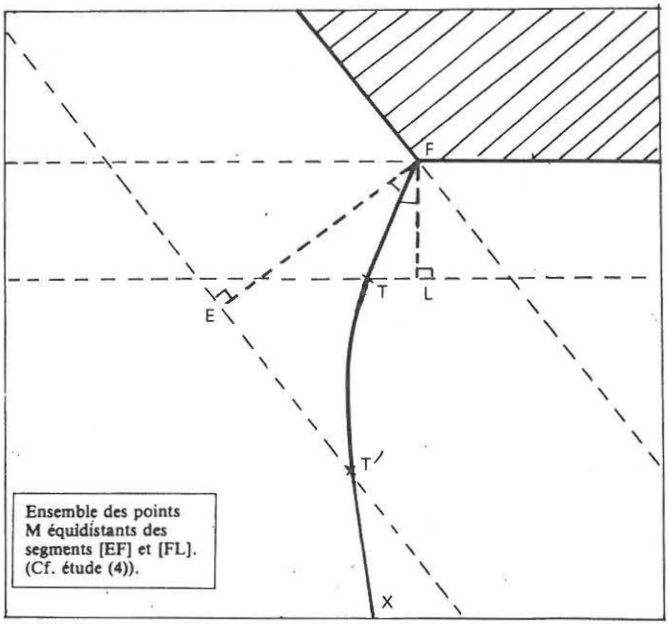
Comme pour le (15), le cas particulier N = F est plus intéressant que le cas général. (Pour celui-ci on trouve un peu de paraboles, un peu de bissectrice, un peu de médiatrices ...).

CAS PARTICULIER où N = F (étude 17').

Il y a neuf régions à étudier. Le résultat est remarquable : il est constitué par :

— tout un secteur angulaire (hachuré)
— un segment de bissectrice : [FT]
— un arc de parabole $\widehat{TT'}$
— une demi-droite [T'x), portée par la médiatrice de [EL].

Pour la continuité, mêmes remarques que pour l'étude (13).

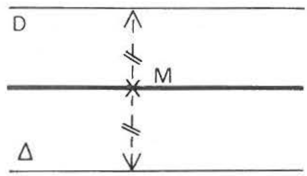


Etude (18), obtenue à partir de (1) en remplaçant A et B par deux droites D et △ :

(18₁) *D et △ parallèles.*

Ensemble des points M équidistants de D et △ :

Ici on rencontre un résultat évident, à admettre.



(18₂) *D et △ sécantes.*

Cf. étude sur les symétries, pages 43,44.

• La phase de construction des (quatre) points situés à une distance *a* de D et de △, et l'étude, par ses symétries, de la figure obtenue, sont intéressantes.

• Le cas particulier : D ⊥ △ est plus facile.

• En conjuguant l'étude 18_2 et l'étude 5, on obtient d'amusantes généralisations de la "taxi-distance", dues à Irneh Lierab et popularisables sous le nom de "métro-distance" (Nous y viendrons dans le tome 2, s'il veut bien de nous). — Le partage de la mer d'Iroise entre la France et l'Angleterre a d'ailleurs relevé de principes analogues —. Nous en reparlerons ...

TROIS ACTIVITES POUR DES ELEVES DE SECONDE

- Ce sont des extraits de trois des 21 groupes d'activités proposés par la brochure "Pour une mathématique vivante en Seconde".
- Ces activités sont proposables à tous les élèves de seconde, "littéraires" aussi bien que "scientifiques". Elles visent à développer leur esprit critique et leur compréhension de la vie contemporaine. Elles se proposent de les mettre en mesure de résister au matraquage de la publicité, des sondages, des idées toutes faites ..., et de leur (re)donner, s'il y a lieu, le goût des mathématiques.

THREE ACTIVITIES FOR PUPILS OF THE SECOND FORM

They are excerpts from three of the 21 groups of activities proposed by the brochure "For Living Mathematics in the Second Form".

These activities may be proposed to all pupils in the second form, either belonging to the literature or to the science section. Such activities aim at developping the pupils' critical mind and their understanting of contemporary life. They mean to make pupils able to hold out against pounding by publicity, opinion polls, ready-made ideas ... and to give, or give again, these pupils, if necessary, a turn for mathematics.

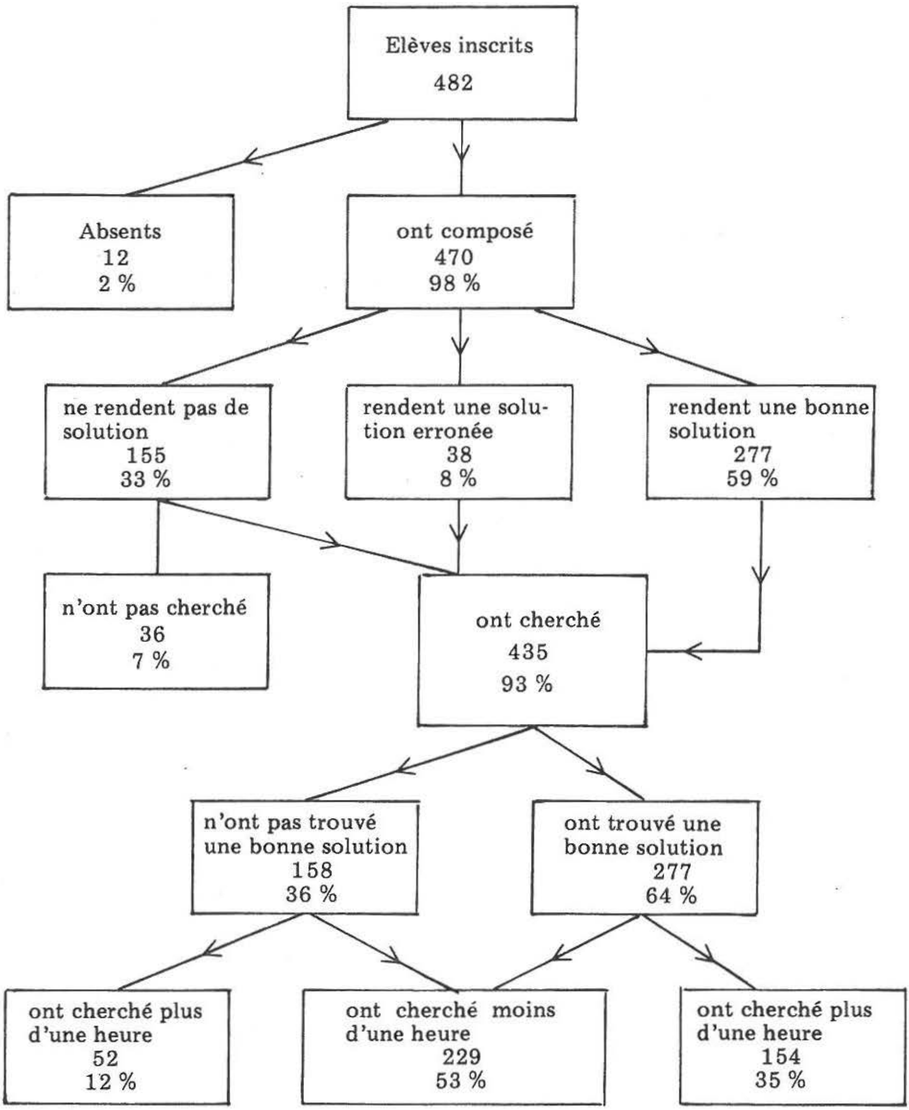
Tres actividades para alumnos del quinto año de la Segunda Ensenañza

Se trata de trozos de tres de los 21 grupos de actividades propuestos por el folleto "Para una matemática viva en el quinto año de la segunda enseñanza".

Estas actividades se pueden proponer a todos los alumnos del quinto año, que sean "literarios" o "científicos" Pretenden desarrollar su juicio y su comprensión de la vida contemporánea Se proponen de ponerlos en condiciones para resistir a los porrazos de la publicidad, de los sondeos, de las ideas sencillísimas y, si es necesario, darles de nuevo la afición a las matemáticas.

QUI CHERCHE TROUVE

Un même problème de mathématique a été proposé à l'ensemble des élèves de seconde d'un établissement durant 2 heures. Le tableau ci-dessous donne les résultats de l'enquête qui a suivi.



1) Vérifier les calculs. Comment a-t-on arrondi ?
2) Représenter les ensembles concernés sur un diagramme.
3) Reconstituer le questionnaire qui a permis de remplir le tableau.
4) Présenter dans un tableau semblable les résultats d'un autre établissement sachant que :

522 élèves sont inscrits en seconde
97 % d'entre eux ont composé
10 % de ceux qui ont composé ont rendu une solution erronée
167 n'ont pas rendu de solution, parmi eux 42 n'ont pas cherché
252 élèves ont cherché au moins une heure
40 % de ceux qui ont rendu une bonne solution ont cherché plus d'une heure

DES "ON DIT ..."

I) Il paraît que :

1) Les Glaner gagnent 2 100 F de plus que les Ferren.
2) Monsieur Glaner gagne 20 % de plus que Monsieur Ferren.
3) Madame Glaner gagne 30 % de plus que Madame Ferren.
4) Les Ferren gagnent 9 000 F.
5) Monsieur Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.

a) Que pensez-vous de ces cinq informations ?
b) En supposant que seule l'information 1) est fausse, pouvez-vous calculer ce que gagne chaque personne ?
c) Même question en supposant que 2) est fausse.
d) Même question en supposant que 3) est fausse.
e) Même question en supposant que 4) est fausse.
f) Même question en supposant que 5) est fausse.

II) On raconte que :

— Madame Lalivin gagne 76 % de plus que Madame de Tonicet.
— Monsieur de Tonicet gagne x % de plus que son épouse.
— Monsieur Lalivin gagne x % de plus que Monsieur de Tonicet.
— La différence entre ce que gagnent les Lalivin et ce que gagnent les de Tonicet est égale à ce que gagne Madame de Tonicet.
— Les Lalivin et les de Tonicet gagnent ensemble 21 600 F.

Comment est-ce possible ??

SONDAGE

1/ Un sondage montre que le "Républicain Alsacien" compte parmi ses lecteurs 30 % d'hommes ; que le "Strasbourgeois libéré" en compte 40 % . Pourtant, sur l'ensemble des lecteurs d'au moins l'un des deux journaux, il y a 27 % d'hommes seulement. Ces résultats vous paraissent-ils compatibles à première vue ?

2/ Voici le détail de l'enquête :

	Hommes	Femmes
Lecteurs du "Républicain Alsacien"	107	253
Lecteurs du "Strasbourgeois Libéré"	111	168
Lecteurs de l'un au moins des deux journaux	122	330

Vérifiez les pourcentages.

3/ Pour comprendre le phénomène, complétez le tableau suivant.

	Hommes	Femmes	Total
Lecteurs exclusifs du "Républicain Alsacien"			
Lecteurs exclusifs du "Strasbourgeois Libéré"			
Lecteurs des deux journaux à la fois			

Comment pouvez-vous expliquer maintenant les écarts de pourcentage dans l'enquête ?

LES VACANCES DE MONSIEUR HULOT

Monsieur Hulot a passé ses vacances dans une région où il ne pleut jamais toute la journée : s'il pleut le matin, il fait beau l'après-midi.

(1) Durant son séjour, 11 journées furent "gâchées" par quelques averses. Il a cependant connu 8 matinées et 11 après-midi sans une goutte de pluie.

Remplir le tableau suivant en demi-journées en indiquant l'ordre de remplissage des cases.

	Matinées	Après-midi	
Avec pluie			
Sans pluie			

En déduire le nombre de jours de vacances de Monsieur Hulot, et le nombre de jours sans pluie.

(2) Monsieur Hulot aurait-il pu connaître 12 jours de pluie (durant ces journées il pleut soit le matin, soit l'après-midi), 5 matinées et 5 après-midi sans pluie ?

(3) Monsieur Hulot aurait-il pu connaître 5 jours de pluie, 4 matinées et 11 après-midi sans pluie ?

(4) Soient Z, X, Y respectivement le nombre de jours de pluie, le nombre de matinées sans pluie, le nombre d'après-midi sans pluie, que connut Monsieur Hulot. Montrer que, pour que ces données soient compatibles, elles doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} X + Y \geqslant Z \\ X + Z \geqslant Y \\ Y + Z \geqslant X \end{cases}$$

Le nombre de demi-journées de vacances de Monsieur Hulot est donné par une expression simple en fonction de X, Y, Z : laquelle ?

(5) Interprétons ce problème graphiquement en supposant que nous sachions que Monsieur Hulot a connu 11 journées de pluie. X et Y vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} X + Y \geqslant 11 \\ X + 11 \geqslant Y \\ Y + 11 \geqslant X \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y - 11 \geqslant 0 \\ X - Y + 11 \geqslant 0 \\ -X + Y + 11 \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Tracer dans un repère orthonormé les droites d'équations

$$X + Y - 11 = 0 \; ; \quad X - Y + 11 = 0 \; ; \quad -X + Y + 11 = 0 .$$

et représenter graphiquement les points de coordonnées (X,Y) qui pourraient être solutions du problème.

b) Mais tout a une fin... X et Y ne peuvent pas être aussi grands que Monsieur Hulot le souhaiterait, car il dispose d'un maximum de 15 jours de vacances cet été. Représenter graphiquement les points de coordonnées (X,Y) susceptibles d'être solutions du problème, sachant que Monsieur Hulot est parti un nombre entier de jours en vacances. Remarquer que :

$$X \leqslant 15 \qquad Y \leqslant 15 \qquad X + Y + 11 \leqslant 30$$

c) Monsieur Hulot, grand sportif, ne reste pas oisif durant ses vacances. Voici son emploi du temps :

Le matin	Par beau temps, il fait du tennis à 50 F la demi-journée. Par mauvais temps, il se rend à la piscine dont l'entrée revient à 15 F.
L'après-midi	Par beau temps, il fait de l'équitation à 70 F la demi-journée. Par mauvais temps, il réserve une table de ping-pong pour 40 F.

Soit P le prix des activités sportives de Monsieur Hulot durant ses vacances. Montrer que :

$$P(X,Y) = \frac{125}{2} X + \frac{115}{2} Y + \frac{605}{2}$$

* Calculer P(1, 12) et P(2, 13).
* Trouver tous les couples (X,Y) du domaine Δ déterminé dans la question b) vérifiant $P(X,Y) = 1055$. On pourra remarquer que, si un tel couple (X,Y) existe, il vérifie

$$125\,X + 115\,Y - 1505 = 0$$

et tracer la droite D d'équation $Y = -\frac{125}{115} X + \frac{1505}{115}$. On trouve les solutions de la question en cherchant les points de coordonnées (X,Y) qui appartiennent à $D \cap \Delta$.

* Trouver tous les couples (X,Y) du domaine Δ qui vérifient :

α) $P(X,Y) = 1175$

β) $1055 \leqslant P(X,Y) \leqslant 1175$

γ) $1055 \leqslant P(X,Y) < 1175$

* Déterminer tous les couples (X,Y) du domaine Δ qui correspondent à 12 jours de vacances ; à 13 jours de vacances ; les représenter graphiquement.

En déduire que si Monsieur Hulot connaît 11 jours de pluie durant ses vacances, quelle que soit la répartition des demi-journées de pluie, il dépensera davantage en 13 jours de vacances qu'en 12 jours.

* Reprendre les questions précédentes, dans le cas où Monsieur Hulot modifie légèrement ses activités, à savoir :

En déduire que si Monsieur Hulot connait 11 jours de pluie durant ses vacances, quelle que soit la répartition des demi-journées il dépensera davantage en 13 jours de vacances qu'en 12 jours.

* Reprendre les questions précédentes, dans le cas où Monsieur Hulot modifie légèrement ses activités, à savoir :

Le matin	Par beau temps, il fait de l'équitation à 70 F la demi-journée. Par mauvais temps, il se rend à la piscine dont l'entrée vaut 15 F.
L'après-midi	Par mauvais temps, il fait du tennis à 50 F la demi-journée. Par mauvais temps, il réserve une table de ping pong pour 40 F.

DEMOCRATIE ?

En Papirémie orientale le parlement est composé de 470 membres. Il vient de procéder à l'élection des deux gouverneurs qui, pendant 4 ans, vont exercer le pouvoir. Selon le réglement de l'élection, chaque parlementaire a voté pour quatre candidats de son choix. L'ordinateur qui enregistre les votes indique pour trois candidats A, B, C les résultats suivants :

A a obtenu 282 voix

117 parlementaires ont voté chacun à la fois pour A et pour B
105 ont voté à la fois pour A et pour C
79 ont voté à la fois pour A, pour B et pour C
117 ont voté à la fois pour B et pour C mais pas pour A
27 ont voté pour C mais pas pour A ni pour B
133 ont voté pour B sans voter pour A.

1) Combien B a-t-il obtenu de voix ?
2) Combien C a-t-il obtenu de voix ?
3) En supposant qu'il n'y ait eu aucune abstention ni aucun vote nul, combien de parlementaires n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?
4) Peut-on déterminer le nombre de candidats autres que A, B, C qui ont pu obtenir la majorité absolue des voix ?

L'ordinateur a précisé que trois candidats seulement avait recueilli la majorité absolue des voix. D'après le règlement de l'élection, ce ne sont pas nécessairement les candidats qui arrivent en tête pour le nombre de voix qui sont élus.

On appelle "distance entre deux candidats X et Y le nombre suivant :

$$d(X,Y) = \frac{\begin{pmatrix}\text{nombre de parlementaires ayant voté}\\ \text{pour X sans voter pour Y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{nombre de parlementaires ayant}\\ \text{voté pour Y sans voter pour X}\end{pmatrix}}{\left(\text{nombre de parlementaires ayant voté pour X, pour Y ou pour les deux}\right)}$$

5) Que peut-on dire si $d(X,Y) = 0$?
6) Que peut-on dire si $d(X,Y) = 1$? Montrer que dans ce cas l'un au moins des candidats X ou Y n'a pas la majorité absolue.
7) Parmi les candidats ayant obtenu la majorité absolue, sont élus ceux pour lesquels la distance est minimale (pour assurer une certaine cohésion à l'équipe gouvernementale). Quels sont les deux élus ?

POUR QUE CA MONTE... DES ECHELLES !

A) Le tableau ci-dessous donne, pour 5 années, la part du budget de l'Education nationale par rapport à la production intérieure brute (Source : Le Courrier de l'Education).

Année	%
74	2,59
75	2,66
76	2,76
77	2,92
78	2,97

Représenter graphiquement cette évolution en choisissant successivement les échelles suivantes :

Graphique 1 : en abscisse les années (2 cm pour 1 an)
en ordonnée de 0 à 3 % (2 cm pour 1 %)

Graphique 2 : en abscisse 2 cm pour 1 an
en ordonnée de 0 à 3 % , 5 cm pour 1 %

Graphique 3 : en abscisse 1,5 cm pour 1 an
en ordonnée de 2,5 à 3% , 20 cm pour 1 %

Graphique 4 : en abscisse 1 cm pour 1 an
en ordonnée de 2,5 à 3 % , 40 cm pour 1 %

Lequel de ces quatre graphiques choisiriez-vous pour illustrer les observations suivantes :

"Le budget 1978 représente environ 15,8 % du budget de l'Etat. Il représente aussi 2,97 % du produit intérieur brut (PIB). Ce pourcentage, qui permet de mesurer l'effort financier de l'Etat par rapport à la ressource économique de la nation, est en augmentation régulière sur les cinq budgets de cette législature. En cinq ans, la progression de ce rapport est de 15 % alors que l'augmentation globale du nombre d'élèves n'a été que de 3 %".

(Source : Le Courrier de l'Education.)

B) Le tableau ci-dessous donne l'évolution du cours du DM pour une période de 6 mois.

Janvier	2,08
Février	2,10
Mars	2,14
Avril	2,18
Mai	2,19
Juin	2,25

Préparer à partir de ces résultats :

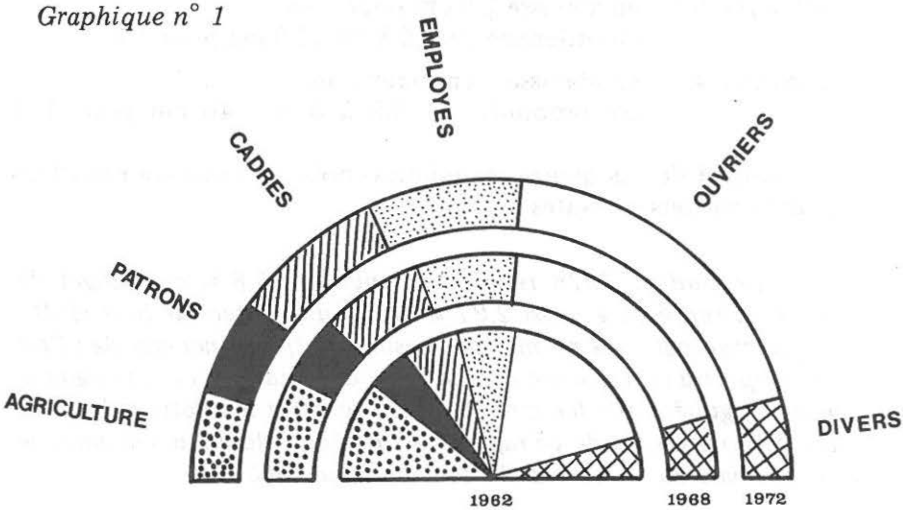
— un graphique destiné à illustrer un article de presse intitulé "Monnaie : Le Franc se maintient"

— un graphique destiné à illustrer un article intitulé : "Franc : la dégringolade".

N.B. : aucune ressemblance avec des articles réellement publiés ne serait fortuite !

QUELQUES GRAPHIQUES AU HASARD DES LECTURES

Graphique n° 1



Répartition de la population active en France.

PERLES ET FAUSSES PERLES

Au cours d'une première approche de la notion d'application linéaire, des contre-exemples sont certainement encore plus instructifs qu'une liste d'exemples plus ou moins triviaux.

Qu'il est tentant de considérer toutes les applications élémentaires comme linéaires ! Que de fois rencontre-t-on chez le débutant des égalités comme :

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2 \quad !$$

Cette fiche permet de convaincre d'abord le débutant que la belle simplicité de la linéarité n'est pas universelle.

L'exemple de la fiche montre aussi qu'une application f non additive peut vérifier $f(a + b) = f(a) + f(b)$ pour certains éléments a et b particuliers (mais non pour tous !). C'est l'occasion de préciser l'importance des quantificateurs, de la notion de général, de particulier, d'exemple, de contre-exemple.

La présentation amusante de la question sous forme de petit scénario donne à l'élève l'occasion de s'identifier au professeur et d'aiguiser son esprit critique.

*

*   *

Version historique (13 juillet 1901)

Le professeur écrit au tableau l'égalité suivante :

$$1 + 5 + 8 + 12 = 2 + 3 + 10 + 11 \qquad \text{(I)}$$

Il interroge Toto, le cancre de la classe, assis au fond, près du radiateur : "l'égalité est-elle exacte, Toto ?".

Après de très pénibles opérations mentales, Toto finit par répondre oui.

Puis le professeur lui demande si :

$$1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 11^2 \qquad \text{(II)}$$

Sans la moindre hésitation, Toto acquiesce.

Le professeur s'emporte, réprimande Toto et lui donne une punition.

Mais Toto obtient pour une fois l'aide du premier rang, où Geogeo, prix d'excellence de la classe, constate en effectuant les carrés que l'égalité (II) est vraie.

Après un instant de stupéfaction, le bon vieux professeur se ressaisit et décide de maintenir tout de même la punition de Toto en se justifiant.
Pouvez-vous reconstituer les justifications du professeur ?
Aurait-on eu le même scénario en remplaçant les carrés par les cubes dans (II) ?
Et en remplaçant les carrés par les puissances quatrièmes ?
Et en remplaçant 5 et 8 par 4 et 9 dans les deux égalités ?

Version mathématique : (en dehors du temps)

$a_1, \dots, a_n$ et $a'_1, \dots, a'_n$ sont des nombres réels

1) Montrer que si

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

alors pour tout nombre réel x, on a aussi :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (a'_1 + x) + (a'_2 + x) + \cdots + (a'_n + x)$$

$$= a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n + (a_1 + x) + (a_2 + x) + \cdots + (a_n + x)$$

et

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + (a'_1 + x)^2 + (a'_2 + x)^2 + \cdots + (a'_n + x)^2$$

$$= a'^2_1 + a'^2_2 + \cdots + a'^2_n + (a_1 + x)^2 + (a_2 + x)^2 + \cdots + (a_n + x)^2$$

2) Montrer que si

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

et

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a'^2_1 + a'^2_2 + \cdots + a'^2_n$$

alors pour tout nombre réel x, on a aussi

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 + (a'_1 + x)^3 + (a'_2 + x)^3 + \cdots + (a'_n + x)^3$$

$$= a'^3_1 + a'^3_2 + \cdots + a'^3_n + (a_1 + x)^3 + (a_2 + x)^3 + \cdots + (a_n + x)^3$$

3) Retrouver les résultats du scénario en utilisant la question 1) à partir de $1 + 9 = 4 + 6$ et $x = 1$ puis en utilisant la question 2) à partir de $1 + 9 + 5 + 7 = 4 + 6 + 2 + 10$ et $x = 2$.

PAVAGES DE L'ESPACE ET PROBLEME DE MINIMUM

Ceci constitue le début du Chapitre IX de la brochure "PAVES ET BULLES" (Cf. bulles ou lames de savon !) ...

Ce Chapitre IX montre que, contrairement à ce que l'on a cru pendant longtemps la cellule en cire du rayon de miel n'a pas la forme géométrique idéale pour le stockage du miel avec la moindre dépense de cire et de travail !

Toute la brochure est une étude mathématique très solide, à partir de la géométrie traditionnelle et de l'algèbre linéaire, des pavages de l'espace et des problèmes de minimum associés ... C'est dire qu'on y vit l'unité d'une mathématique en prise sur le monde qui nous entoure.

THE PAVEMENTS OF SPACE AND THE PROBLEM OF MINIMUM

This forms the beginning of the Chapter IX of the brochure "PAVÉS ET BULLES" (PAVEMENT-STONES AND BUBBLES) (Cf. Soap bubbles or laminae !)...

This Chapter IX shows that contrary to what had been believed for a long time, a wax honeycomb cell does not have the ideal geometric shape for storing honey with the least expenditure of wax or work !

The whole brochure is a very reliable mathematical research, carried out from traditional geometry and linear algebra, of the pavements of space and the problems of minimum joined..

That is to say that there has been seen the unity of mathematics engaged with the world surrounding us.

Mosaicos del espacio y problema de mínimo

Esto constituye el principio del capítulo IX del folleto "PIEZAS Y POMPAS" (Cf. ¡ Pompas o esferas de jabón !)...

Este capítulo IX muestra que, al contrario de lo que se creyó durante largo tiempo, ¡la celdilla de cera del panal de las abejas no tiene la forma geométrica ideal para el almacenamiento de la miel con menor gasto de cera y de trabajo !

Todo el folleto es un estudio matemático muy serio, partiendo de la geometría tradicional y del algebra moderna, de los enlosados del espacio junto con los problemas de mínimo.

Es decir que se experimenta en él la unidad de una matemática enfocada hacia el mundo que nos rodea.

CHAPITRE IX

PAVAGES DE L'ESPACE AVEC MINIMUM D'AIRE DE CLOISONNEMENT

Trouver dans la nature la solution illustrée d'un problème mathématique provoque étonnement et émotion ; la conjonction de la précision du concept et de la sensibilité de la matière confère à l'objet qui les réunit la beauté d'une harmonieuse synthèse. Ainsi le rayon construit en cire par les abeilles pour y mettre leur miel est une tranche de pavage de l'espace ordinaire satisfaisant aux deux conditions :

1/ pavé à faces planes

2/ tous les dièdres égaux à 120°

c'est même, "certainement", l'unique pavage satisfaisant à ces deux conditions d'après Sir William Thomson ([5] page 504).

Le problème mathématique étudié dans ce chapitre est un problème d'optimisation sur les pavages ; une solution partielle est apportée, merveilleusement imagée par les voiles tendus pendant quelques secondes sur un cadre en fil de fer, après qu'on l'a retiré de l'eau savonneuse où on l'a plongé (cf.[5], et [1] p.88 et 95 de l'édition française).

1 - Position du problème et exemples simples

Dans l'espace ordinaire, soit un pavage $\mathcal{P}$ de pavé P, avec un intérieur et un bord, étoilé (cf.§1 définitions, et §6, chapitre VIII), pour lequel enfin nous supposons réalisées toutes les conditions permettant de calculer le volume V(P) de l'intérieur et l'aire S(P) du bord par intégrales de volume et de surface (cf.annexe 2). Dans ce chapitre, on s'intéresse au pavé P comme à un contenant ; c'est pourquoi on utilise souvent l'expresssion cellule, au lieu de pavé, d'un pavage. A chaque pavage $\mathcal{P}$ de cellule P, on associe un nombre $\varphi(\mathcal{P})$ (ou $\varphi(P)$), qui mesure l'aire de cloisonnement relativement au volume cloisonné, ceci dans le but de déterminer les pavages les plus "économiques", c'est-à-dire ceux qui permettent d'enfermer le maximum de volume par cellule pour une aire donnée du bord, ou ce qui revient au même, d'enfermer un volume donné par cellule avec aire minimum de la surface de cloisonnement. Comme le nombre $\varphi(\mathcal{P})$ doit être le même pour des pavages semblables, nous prenons

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{[S(P)]^3}{[V(P)]^2}$$

en effet, dans une similitude de rapport λ , l'aire est multipliée par λ^2, le volume par λ^3, et $\varphi(\mathcal{P})$ est invariant.

On veut minimiser φ , c'est-à-dire trouver le ou les pavages donnant à φ la plus petite de ses valeurs, si du moins il existe une valeur de φ plus petite que toutes les autres. Le pavage $\mathcal{P}_o$ minimise φ si, pour tout pavage $\mathcal{P}$ de l'espace ordinaire, $\varphi(\mathcal{P}_o) \leq \varphi(\mathcal{P})$.

Remarquons d'abord qu'il existe un nombre strictement positif inférieur à $\varphi(\mathcal{P})$ quel que soit le pavage $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que φ est bornée inférieurement ; en effet, si on oublie un instant qu'il s'agit de cellules pavantes et qu'on calcule le nombre $[S(P)]^3 / [V(P)]^2$ pour un volume limité par une surface fermée quelconque, on sait que c'est pour la sphère que ce nombre est le plus petit

$$\forall\ P, \qquad \frac{[S(P)]^3}{[V(P)]^2} \geq \frac{(4\pi)^3}{(\frac{4}{3}\pi)^2} = 36\ \pi$$

à fortiori pour toute cellule P d'un pavage $\mathcal{P}$, la même inégalité est vraie

$$\forall\ \mathcal{P}, \qquad \varphi(\mathcal{P}) \geq 36\ \pi$$

Il est difficile de minimiser φ parmi tous les pavages, parcequ'il est difficile de définir commodément l'ensemble des paramètres dont dépend un pavage : réseau, groupe d'isométries du pavé, forme du pavé ; on peut alors essayer de restreindre le problème à des familles simples de pavages ; on verra ci-dessous des exemples de familles de pavages pour lesquelles la fonction φ est une fonction continue et indéfiniment dérivable d'un certain nombre de paramètres, qui admet un minimum unique appelé ici <u>minimum relatif à cette famille</u>. Le minimum absolu $\varphi(\mathcal{P}_o)$, s'il existe, est minimum relatif à toute famille qui contient $\mathcal{P}_o$, et il est inférieur à tout minimum relatif ; on aura donc des indications sur le minimum absolu en cherchant des minimum relatifs.

Si par exemple on considère une famille de pavages associés à un réseau fixé $\mathcal{R}_0$ de l'un des quatorze types de réseaux de Bravais, quel que soit le pavé P définissant un pavage de la famille, V(P) est le même : c'est le volume de la maille simple de $\mathcal{R}_0$ (cf. chapitre VIII §7) il ne dépend que des paramètres du réseau $\mathcal{R}_0$ et pas du pavage associé à $\mathcal{R}_0$ considéré; alors minimiser φ pour les pavages de cette famille revient à minimiser la surface S(P) du pavé ; le problème est résolu au §2 pour la famille des pavages holoèdres du système cubique dans le réseau volume centré (pavage holoèdre : le groupe d'isométries du pavé est le groupe d'isométries du réseau).

Exemples de minimum pour quelques familles de pavages

a) pavages par parallélépipèdes rectangles

Soit P le parallélépipède rectangle dont les longueurs d'arêtes sont a,b,c

$$V = V(P) = a\,b\,c$$

$$S = S(P) = 2(ab + bc + ca)$$

$$\varphi(P) = \frac{S^3}{V^2} = 8\ \frac{(ab + bc + ca)^3}{a^2\,b^2\,c^2} \tag{1}$$

Or, h,k,ℓ étant trois nombres réels, on pourra obtenir par différentes méthodes l'identité (dont la démonstration est laissée au lecteur)

$$(h+k+\ell)^3 - 27\,hk\ell = \frac{h+k+\ell}{2}\left[(h-k)^2 + (k-\ell)^2 + (\ell-h)^2\right] + 3\left[(h-k)^2\ell + (k-\ell)^2 h + (\ell-h)^2 k\right]$$

qui prouve que

> quels que soient h,k,ℓ positifs, $(h+k+\ell)^3 \geqslant 27\,hk\ell$, l'égalité n'étant réalisée que si $h = k = \ell$

utilisons cette inégalité pour minorer l'expression (1) de $\varphi(P)$ avec $h = bc$, $k = ca$, $\ell = ab$; il vient

$$\varphi(P) \geqslant 8 \times 27 = 6^3$$

l'égalité n'étant réalisée que si $a = b = c$, c'est-à-dire si le parallélépipède P est un cube

$$\varphi(\text{parallélépipède rectangle}) \geqslant \varphi(\text{cube}) = 6^3$$

De tous les pavages par parallélépipèdes rectangles, le pavage par cubes est celui pour lequel l'aire de cloisonnement est la plus petite par rapport au volume de la cellule

Il est tentant de traiter le problème pour la famille plus large des pavages par parallélépipèdes, mais les calculs sont moins simples ; contentons-nous de constater que le pavage par cubes minimise φ aussi dans la famille des rhomboèdres ; soit R le parallélépipède construit sur le trièdre trigonal a,b,c

$$a = b = c \quad , \qquad \alpha = \beta = \gamma \quad < \quad \frac{2\pi}{3}$$

$$S(R) = 6\, a^2 \sin\alpha$$

$$V^2(R) = a^6(1-3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha) \quad \text{(cf.chapitre I, §12)}$$

$$\varphi(R) = 6^3 \, \frac{\sin^3\alpha}{1-3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$$

posant $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, on trouve après calculs

$$\varphi(R) = 6^3 \qquad \frac{2}{t(3-t^2)}$$

dans les conditions où t varie ($0 < t < \sqrt{3}$), on vérifie que

$$\frac{2}{t(3-t^2)} \geqslant 1 \qquad \text{avec égalité pour } t = 1$$

le minimum de φ quand α varie est 6^3 et il est atteint pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire quand le rhomboèdre est un cube.

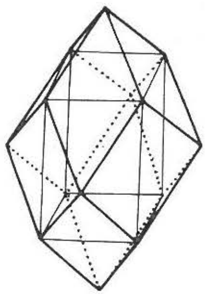
De tous les pavages par rhomboèdres, le pavage par cubes est celui pour lequel l'aire de cloisonnement est la plus petite par rapport au volume de la cellule.

b) pavages par dodécaèdres rhomboïdaux

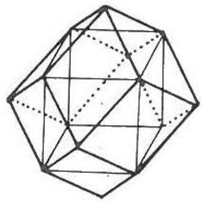
Le dodécaèdre rhomboïdal, polyèdre défini par les éléments de l'orbite d'un plan (1 1 0) par le groupe du cube (cf.chapitre IV §3), cellule de Wigner-Seitz du système cubique faces centrées, peut encore s'obtenir par le second procédé de pavage expliqué au chapitre VIII, §1 : à partir d'un pavage par cubes, un cube sur deux, dans toutes les rangées définies par les directions des axes d'ordre 4, est partitionné en six pyramides, de sommet le centre du cube, de base chacune des faces du cube ;

chacune de ces pyramides complète le cube voisin non partitionné : un cube non partitionné devient, par adjonction d'une pyramide à base carrée sur chacune de ses six faces, un dodécaèdre rhomboïdal (fig.1, 3°)

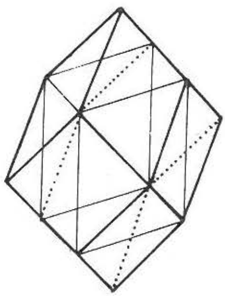
fig.1 - Dodécaèdres rhomboïdaux



1° Système orthorhombique
$a < b < c$



3° Système cubique
$a = b = c$
(nid d'abeilles)



2° Système quadratique
$a = b$

On peut obtenir, par cette méthode, des dodécaèdres pavants à partir de n'importe quel pavage par parallélépipèdes, mais ils n'ont droit au qualificatif de rhomboïdaux que dans les systèmes

- orthorhombique : 12 faces losange, 4 par 4 égales (fig.1, 1°)

- quadratique : 4 faces losange égales d'une part, 8 d'autre part. Dans le cas particulier où

$$a = b, \qquad c = \sqrt{2}$$

les 4 premiers sont des carrés, les 8 autres sont des losanges d'angles 60° et 120° (fig.1, 2°)

- cubique : 12 faces losange égales ; c'est le dodécaèdre rhomboïdal du nid d'abeilles, qu'on peut appeler isotrope pour le distinguer des autres.

Si a,b,c sont les longueurs d'arête du pavage primitif par parallélépipèdes rectangles et $\mathcal{P}$ le pavage par dodécaèdres rhomboïdaux

$$S = 2(a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{c^2+a^2} + c\sqrt{a^2+b^2})$$

$$V = 2\,abc$$

$$\varphi(\mathcal{P}) = 2\ \frac{(a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{c^2+a^2} + c\sqrt{a^2+b^2})^3}{a^2\ b^2\ c^2}$$

On connaît les inégalités

(2) $b^2+c^2 \geqslant 2bc, \qquad c^2+a^2 \geqslant 2ca, \qquad a^2+b^2 \geqslant 2ab$

qui sont des égalités si et seulement si $a = b = c$. On en déduit

$$\varphi(\mathcal{P}) \geqslant 4\sqrt{2}\ \frac{(abc)^{\frac{3}{2}}\ (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^3}{a^2\ b^2\ c^2} \geqslant 4\sqrt{2} \times 27 = 6^3\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

par application de l'inégalité utilisée au a)

Le minimum $6^3\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ est atteint pourle pavage par dodécaèdre rhomboïdal isotrope et pour lui seul ; ce minimum est inférieur à celui de la famille étudiée en a). Pour voir l'économie de surface réalisée par unité de volume par rapport au pavage par cubes, il faut prendre la variation relative de $\sqrt[3]{\varphi(\mathcal{P})}$, soit

$$\frac{2^{\frac{1}{6}} - 1}{2^{\frac{1}{6}}} = 0{,}1091 \text{ à } 10^{-4} \text{ près, soit environ } 11\ \%$$

On verra par exemple dans [1](p.93 et 94 de l'édition en français) combien ce résultat a suscité d'intérêt en son temps pour le pavage "nid d'abeilles". Hermann Weyl cite Darwin : "la sélection naturelle ne pourrait conduire à un plus haut degré de perfection en architecture, car le rayon de miel de l'abeille, autant que nous puissions en juger, est absolument parfait pour la double économie de travail et de cire".

Il n'est pas absolument parfait comme nous verrons plus loin.

c) pavages par prismes droits à base hexagonale

On démontre facilement que ce sont les seuls pavages holoèdres du système hexagonal ; en notant x le rapport de la hauteur du prisme au côté de l'hexagone de base, on trouve pour ce pavage $\mathcal{H}$

$$\varphi(\mathcal{H}) = \varphi(x) = 4\ \frac{(2x + \sqrt{3})^3}{x^2}$$

pour $x > 0$, φ a un minimum pour $x = \sqrt{3}$, c'est-à-dire pour le pavé dont la hauteur est égale à la distance entre deux faces opposées ; la valeur du minimum, $6^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$, se situe entre les minimums des familles a) et b).

Récapitulons les résultats dans un tableau

pavages par	minimum de S^3/V^2	minimum atteint pour	économie d'aire par unité de volume par rapport au cube
parallélépipèdes rectangles et rhomboèdres	6^3	cube	
prismes droits à base hexagonale	$6^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$	hauteur du prisme égale à la distance entre deux faces latérales parallèles	4,7 %
dodécaèdres rhomboïdaux	$6^3 \frac{\sqrt{2}}{2}$	nid d'abeilles	10,9 %
pavés à symétrie cubique réseau volume centré	?	tétrakaidécaèdre à faces courbes de Lord Kelvin	> 11,4 %
	$6^3 \frac{\pi}{6}$	sphère	19,4 %

Dans ce tableau sont indiqués par anticipation à la quatrième ligne les résultats du prochain paragraphe.

2 - Le tétrakaidécaèdre de Lord Kelvin

Soit $\mathscr{C}$ la famille des pavages à symétrie cubique dans le réseau volume centré (maille cubique double de côté 2a). On a vu au paragraphe 8 chapitre VIII que le pavé d'un pavage de la famille $\mathscr{C}$ est défini par le choix de l'arc AB dans le plan de cote $z = a$ (par rapport au noeud origine et aux directions principales du réseau), et par le choix de la surface s'appuyant sur le contour ΩAB, tous deux admettant comme miroir le plan $x = y$ (cf. fig.12, §6, chapitre VIII).

On a reproduit (fig.2) une partie de la figure 12 du chapitre VIII en rapportant les cotes à celle de Ω

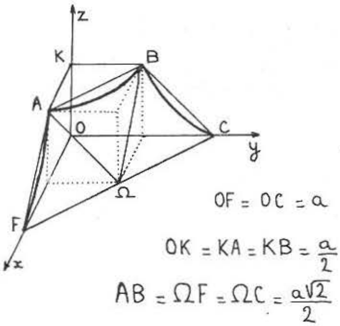


fig.2

Le choix segment AB, plan ΩAB correspond au tétrakaidécaèdre à faces planes (trait fin) ; un choix arbitraire définissant une cellule P est également représenté (gros trait) ; les arcs AF et BC, isométriques à l'arc AB, sont respectivement dans les plans $y = 0$, $x = 0$. La surface totale de la cellule P comprend huit voiles hexagonaux non plans (la moitié d'un est représenté sur la figure 2) et six carrés plans à côtés curvilignes (le quart d'un est représenté sur la figure 2) ;

$\frac{1}{24}$ième de cette surface comprend un tiers d'hexagone et un quart de carré, soit

$$S(P) = 24 \; (2 \text{ aire } \Omega AB + \text{aire } KAB)$$

$$V(P) = 4a^3 \text{ (comme pour tous les pavages de la famille)}$$

par exemple pour le tétrakaidécaèdre à faces planes, soit T

$$S(T) = 24 \left(\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{8} \right) = 3a^2(1 + 2\sqrt{3})$$

$$\varphi(T) = \frac{3^3 \; (1+2\sqrt{3})^3}{16} = 6^3 \left[\frac{1+2\sqrt{3}}{4^3\sqrt{2}} \right]^3$$

$$= 6^3 \; \frac{37 + 30\sqrt{3}}{128}$$

la fraction vaut 0,6950 à 10^{-4} près, donc moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (cf.tableau, fin du §1) ; l'économie de surface par unité de volume par rapport au cube est un peu plus grande que celle réalisée par le pavage nid d'abeilles : elle est de

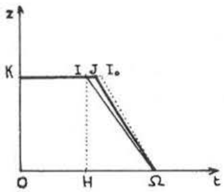
$$1 - \frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}} = \quad 0{,}1142 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Cependant $\varphi(T)$ n'est pas le minimum pour les pavages de la famille $\mathcal{C}$; il est démontré à l'annexe 2 que, pour que le minimum de

$$\varphi(\text{arc AB, surface } \Omega AB) = \lambda\,(2 \text{ aire } \Omega AB + \text{aire KAB})^3 \quad , \quad \lambda = \frac{24^3}{16\,a^6}$$

soit obtenu, il faut que <u>la surface ΩAB soit une surface minima</u> (cf.[4] II p.402 et 500) <u>et coupe le plan KAB sous un angle de 120° le long de l'arc AB</u> ; le tétrakaidécaèdre à faces planes ne satisfait pas à la deuxième partie de la condition.

La figure 3 représente une coupe de la figure 2 dans le plan bissecteur toz des plans xOz et yOz ; I est la trace du segment AB sur le plan de figure



—— trace du tétrakaidécaèdre à faces planes
—— trace du tétrakaidécaèdre de Lord Kelvin
.... angle $(I_0K, I_0\Omega) = 120°$

fig.3

$(O\Omega = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\text{ KI} \ , \ OK = \frac{a}{2}) \Longrightarrow (\text{tg }(IK, I\Omega) = -\sqrt{2}$

l'angle sous lequel le plan ΩAB coupe le plan KAB le long de l'arête AB du tétrakaidécaèdre à faces planes est 125° 16' (arc tg $-\sqrt{2}$).

Pour comprendre comment on peut diminuer la surface du tétrakaidécaèdre à faces planes en agissant sur l'arc AB, raisonnons de la manière suivante ; soit KJΩ (fig.3) la trace sur le plan x = y d'une solution minimale définie par l'arc AB et la surface ΩAB.

Soit H la projection de I sur Ot ; posons $t = \overline{H\Omega}$ et examinons comment varie la somme $2\Omega I + KI$ quand I varie en restant à la cote de K, c'est-à-dire quand t varie ; nous allons voir que cette somme passe par un minimum et que la position de I qui donne le minimum est indépendante des longueurs

$$OK = k \quad , \qquad O\Omega = h$$

(ici $h = \frac{a}{2}$; $k = \frac{a\sqrt{2}}{2}$) ; $s = 2\Omega I + KI$, fonction de t

$$s(t) = 2\sqrt{t^2+k^2} + h-t$$

est minimum pour $t_o = \frac{k}{\sqrt{3}}$ qui correspond au point I_o défini par

$$(\operatorname{tg}(I_oK, I_o\Omega) = -\sqrt{3}) \iff \text{angle}(I_oK, I_o\Omega) = 120°$$

Quels que soient l'arc AB et la surface ΩAB, le calcul de

$$2 \text{ aire } \Omega AB + \text{aire } KAB$$

peut se faire par découpage en tranches par une famille de plans équidistants parallèles à $x = y$ (donc perpendiculaires au segment AB) ; soit K' I' Ω' la trace sur un de ces plans du tétrakaidécaèdre à faces planes ; la partie de l'aire à calculer correspondant à la surface comprise entre ce plan et son voisin est, pour le tétrakaidécaèdre à faces planes

(1) $\quad \Delta S = d(2\Omega'I' + K'I')$, (d est la distance entre deux plans de la famille)

comme l'angle $(I'K', I'\Omega')$ vaut 125° 16' , ΔS peut être diminué en augmentant légèrement la longueur $K'I'$, d'après le calcul précédent, et ceci pour toutes les tranches.

Cette remarque prouve que l'arc AB de la solution minimale est placé comme l'arc AB de la figure 2 par rapport au segment AB ; il est défini en coordonnées polaires (origine K, axe polaire parallèle à Ot) par une équation du type

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4 \cos\theta} + \varepsilon(\theta) \ , \qquad -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

où ε est une fonction positive, paire, nulle pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, et petite par rapport à a.

Nous admettons avec Lord Kelvin qu'il n'y a qu'une solution au problème de trouver une surface

- passant par les segments ΩA et ΩB
- minima
- coupant le plan KAB à 120°

Cette solution peut être obtenue par une méthode d'approximations successives. Lord Kelvin montre ([5] p.511) qu'on a une bonne solution approchée en prenant pour AB un arc de cercle de 20° ; en effet, avec un tel arc, la flèche IJ est

$$IJ = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \frac{1-\cos 10°}{\sin 10°} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} 5° = 0{,}0271\ a$$

par ailleurs Lord Kelvin, par une approximation au premier ordre des équations du problème, trouve pour cette flèche 0,0300 a

Justifions enfin le dessin de la trace $J\Omega$ de la solution minimale sur le plan de symétrie (fig.3)

- position de J

Calculons la distance $I\,I_o$

$$I\,I_o = KI - \frac{OK}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a}{2\sqrt{3}} = 0{,}0649\ a$$

on a vu que IJ est voisin de 0,03a:on place donc J entre I et I_o, à peu près au milieu

- angle de KJ et de la tangente à l'arc $J\Omega$ = 120°

- tangente au point Ω à l'arc $J\Omega$:

toutes les surfaces s'appuyant sur les segments ΩA et ΩB (et qui ont un plan tangent en Ω) ont pour plan tangent en Ω le plan ΩAB ; l'arc $J\Omega$ a donc pour tangente en Ω la trace de ce plan sur le plan de figure, soit la droite ΩI.

INFORMATIQUE : SIMULATIONS

Cet article est extrait de la partie III ("Modéliser et simuler" de J. Pierre VILLAIN) du Chapitre II de la brochure "Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques" (5 chapitres, et 36 parties au total).

Le début de l'article (non cité) explique "modéliser" et "simuler" puis traite deux exemples (La planche de Galton et une chasse aux canards). Nous citons à partir du troisième exemple.
Dans la brochure, cet article est prolongé par une étude, de J. BADRIKIAN et A. DELEDICQ, de simulation aléatoire.

COMPUTERIZATION : SIMULATION

This article is an excerpt from the third part ("Modelizing and simulating" by J. Pierre VILLAIN) of chapter II of the brochure : "Some contribution of computerization to mathematics teaching" (5 chapters and 36 parts on the whole).

The beginning of the article,(not quoted), explains "modelizing" and "simulating" then deals with two examples (Galton's board and a duck shooting). We quote from the third exemple on. In the brochure this article is extended with a research about aleatory simulation by J. BADRIKIAN and A. DELEDICQ).

Informática : Simulaciones

Este artículo está sacado de la parte IIIera ("crear modelos y simular") de J.Pierre VILLAIN) del capítulo II° del folleto "Algunas contribuciones de la Informática a la enseñanza de las matemáticas (total, 5 capítulos y 36 partes).

El principio del artículo,(no citado), explica "crear modelos" y "simular", después trata de dos ejemplos (la tabla de Galtón y una caza de ánsares). Referimos, aquí, desde el tercer ejemplo. En el folleto,continua este artículo un estudio de J. BADRIAKAN y A. DELEDICQ acerca de simulación aleatoria.

C) *Equilibre entre deux espèces*

1. Description

Il y a beaucoup d'exemples dans ce domaine, plus ou moins compliqués; en voici un qui a été élaboré par l'I.R.E.M. de STRASBOURG et qui a l'avantage de tenir compte des positions relatives des individus.

Dans une région se trouvent en présence des renards et des coqs de bruyère. Les coqs sont atteints d'une maladie qui n'est pas mortelle mais qui les rend vulnérables aux renards. Plus précisément, si un renard rencontre un coq de bruyère malade, il le mange; si le coq est sain, le renard n'arrive pas à l'attraper. On suppose en outre que si un coq malade rencontre un coq sain, il le contamine. Les coqs ne manquent pas de nourriture dans la région mais s'ils sont peu nombreux les renards peuvent manquer de nourriture et un certain nombre d'entre eux disparaîtra. Chaque population, isolément, a un taux de reproduction constant.

2. Simulation

La région est simulée par 80 cases correspondant à 8 hectares.
Les renards et les coqs se déplacent au hasard sur cette grille, c'est-à-dire qu'à chaque instant on tire au hasard le numéro de la case de chaque animal (un nombre aléatoire entre 1 et 80). Deux animaux se rencontrent s'ils sont dans la même case. A chaque instant, une certaine proportion des renards n'ayant rien mangé disparaît.

L'intérêt de cette simulation est de permettre aux élèves, en faisant varier les paramètres (nombre d'individus, proportion de malades, taux de reproduction, proportion de renards qui disparaît lorsque la nourriture manque) de constater des phénomènes très différents allant de l'extinction de la population des renards à un équilibre relatif des renards et des coqs.

On peut également, en modifiant la surface de la région, augmenter ou diminuer la probabilité de rencontre.

3. Résultats

Voici deux exploitations d'un programme réalisé sur MITRA 15 (Figures 1 et 2).

```
DONNER L'OPTION 1:NOMBRES  2:COURBES  2
DONNER LE NOMBRE DE RENARDS  10
DONNER LE NOMBRE DE COQS 10
DONNER LA PROPORTION DE MALADES 0.4
DONNER LE TAUX DE CROISSANCE DES RENARDS ET DES COQS 0.2 0.2
DONNER LA PROPORTION DES MORTS DE FAIM 0.2
DONNER TMAX,PERIODE 1000 1
DONNER LA SURFACE  EN ARES  8
40.00 %
34.00 %
34.00 %
34.00 %
36.00 %
36.00 %
41.00 %
46.00 %
56.00 %
67.00 %
70.00 %
76.00 %
89.00 %
91.00 %
97.00 %
97.00 %
98.00 %
98.00 %
98.00 %
97.00 %
98.00 %
97.00 %
96.00 %
97.00 %
96.00 %
94.00 %
91.00 %
81.00 %
74.00 %
64.00 %
58.00 %
38.00 %
23.00 %
23.00 %
40.00 %
31.00 %
20.00 %
8.00 %
8.00 %
8.00 %
8.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
3.00 %
1.00 %
```

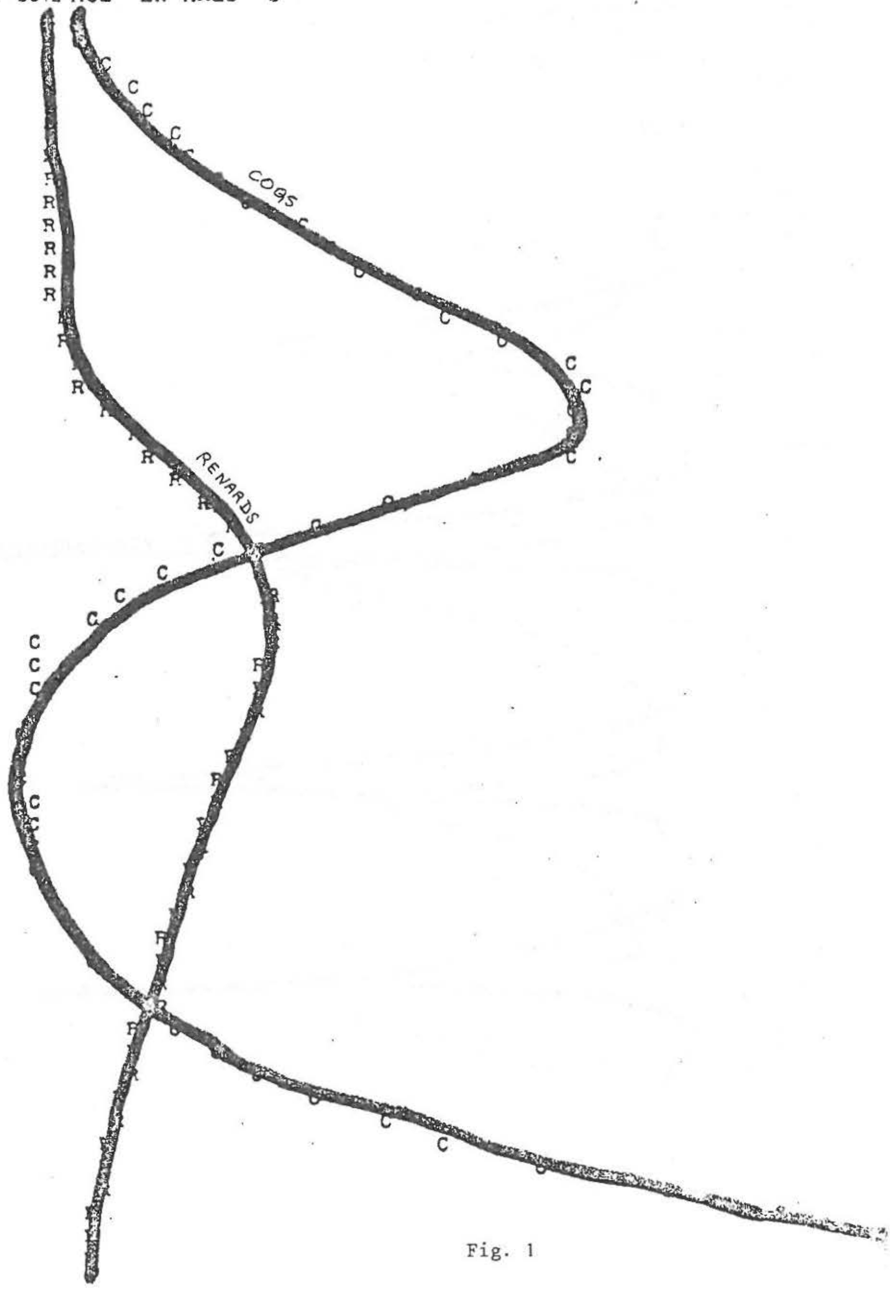


Fig. 1

```
DONNER L'OPTION 1:NOMBRES  2:COURBES  2
DONNER LE NOMBRE DE RENARDS  40
DONNER LE NOMBRE DE COQS 4
DONNER LA PROPORTION DE MALADES 1
DONNER LE TAUX DE CROISSANCE DES RENARDS ET DES COQS 0.2 0.2
DONNER LA PROPORTION DES MORTS DE FAIM 0.2
DONNER TMAX   PER   1000 1
DONNER LA SURFACE  EN ARES  10
100.00 %  C                R
100.0
LIGNE 54 PRET
PER=10
CONTINUER
0 %  C
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
```

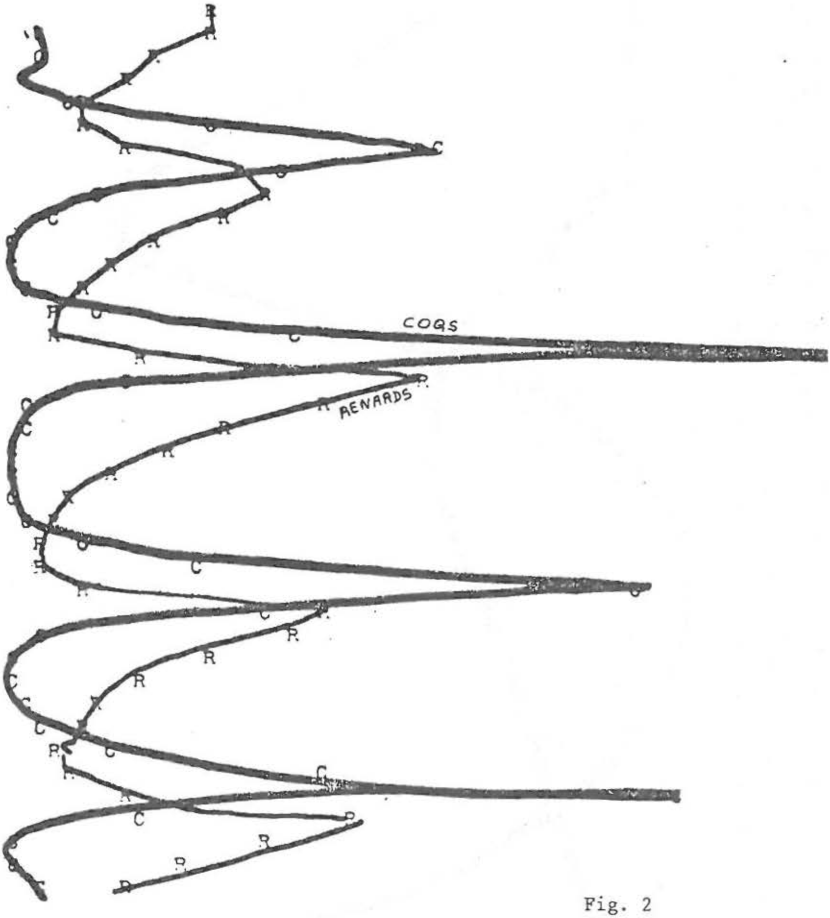
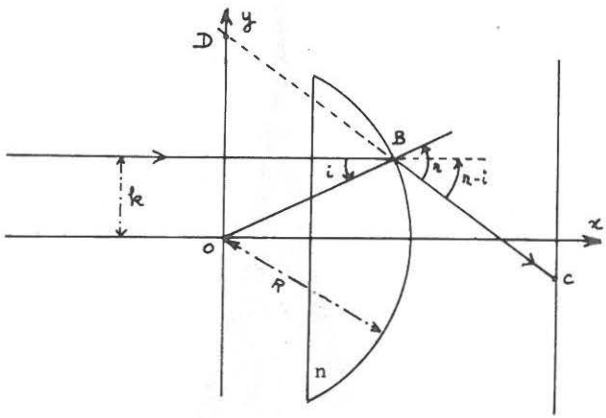


Fig. 2

D) *Simulations utilisant une table traçante*

Les résultats, souvent spectaculaires, suscitent l'intérêt des élèves. Des travaux ont été effectués sur HP 10 par les I.R.E.M. de LYON et de GRENOBLE aussi bien en optique qu'en électricité.

1. Lentille plan convexe recevant la lumière par la face plane



L'équation de la droite BC est

$$y = k + \text{tg}\ (r - i)\ \left[\sqrt{R^2 - k^2} - x\right]$$

Or $\sin i = \frac{k}{R}$; $\sin r = n \sin i = \frac{nk}{R}$ d'où

$$y = k + \text{tg}\left(\text{Arc}\sin\frac{nk}{R} - \text{Arc}\sin\frac{k}{R}\right)\times\left[\sqrt{R^2 - k^2} - x\right]$$

En prenant par exemple, pour abscisse de C, $x = 4R$ et en faisant varier k de façon régulière, on obtient la figure 3.

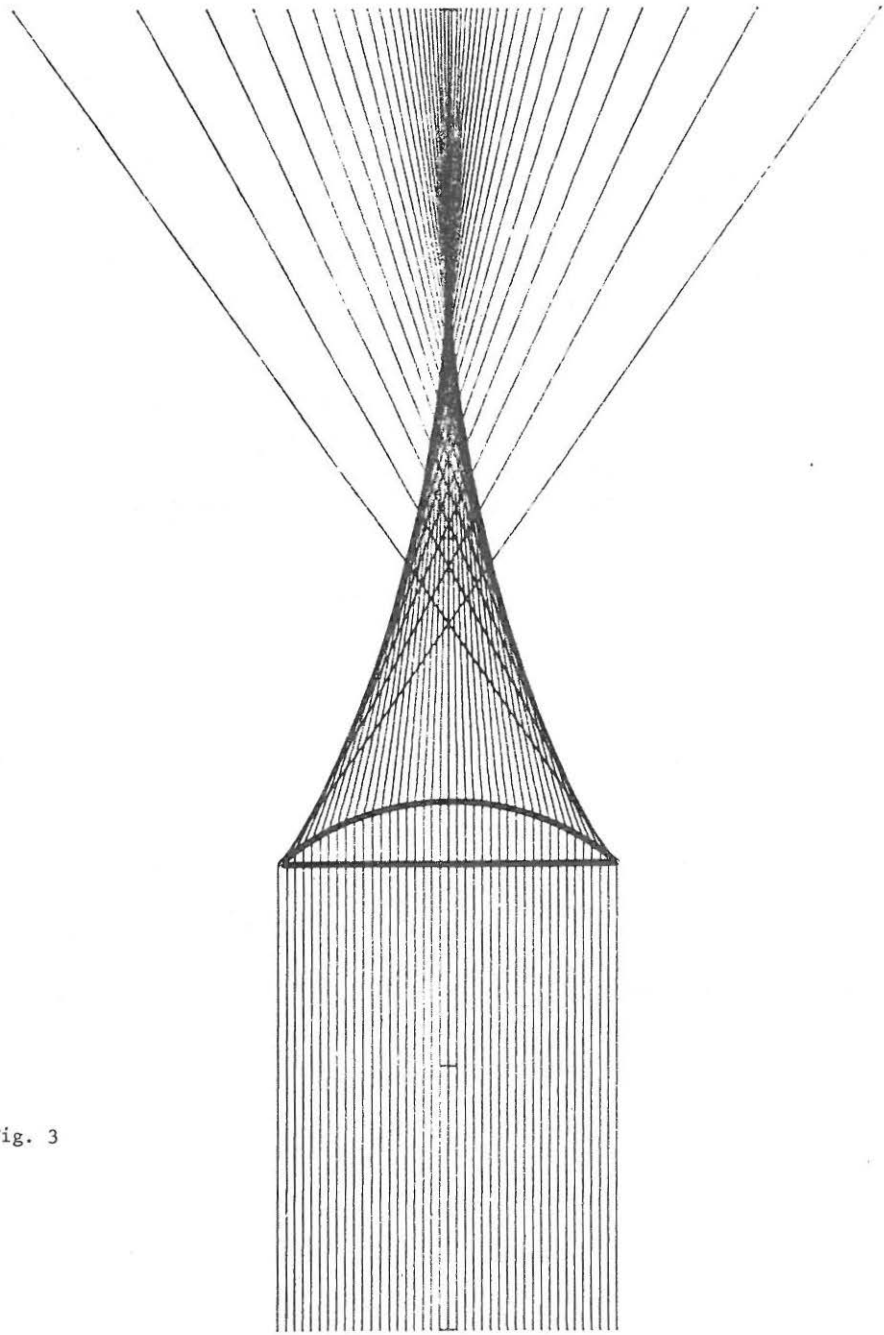
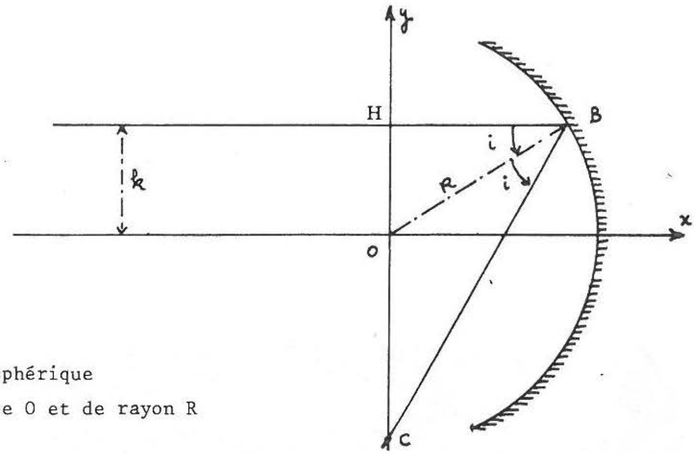


Fig. 3

2. Miroir sphérique recevant un faisceau de lumière parallèle



Miroir sphérique
de centre O et de rayon R

Soit y l'ordonnée de C . $\qquad \operatorname{tg} i = \dfrac{|k|}{HB}$

$$\operatorname{tg} 2i = \frac{|y| + |k|}{HB} = \frac{2 \operatorname{tg} i}{1 - \operatorname{tg}^2 i}$$

d'où, si $\quad y < 0 \quad$ et $\quad 0 < k < \dfrac{R}{\sqrt{2}} \quad$:

$$y = \frac{-\,k\,R^2}{R^2 - 2\,k^2}$$

A chaque valeur de k correspond un rayon lumineux. En faisant varier k de $-\dfrac{R}{1,7} = -\,30$ à $\dfrac{R}{1,7} = 30$, on obtient les 60 rayons lumineux de la figure 4.

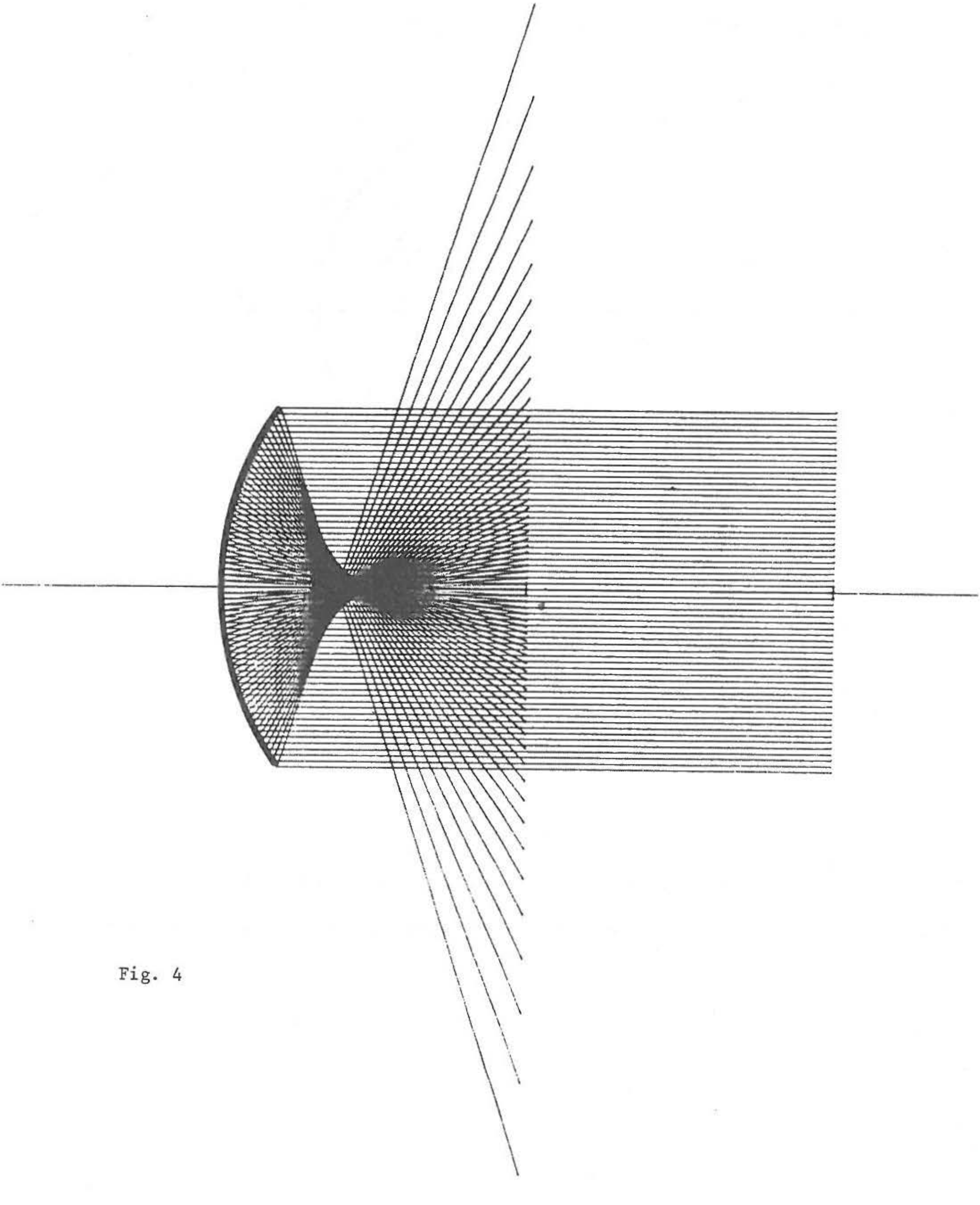


Fig. 4

3. Electricité

Le champ électrique créé par une charge q située en A a pour valeur en un point M :

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{q}{d^3}\overrightarrow{AM} \qquad \text{où} \qquad d = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$$

Si on place plusieurs charges q_1, q_2, ..., q_n en des points A_1, A_2, ..., A_n, le champ créé en M est alors

$$\overrightarrow{E_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{d_i^3}\ \overrightarrow{A_iM}$$

Les lignes de champ sont des courbes tangentes au vecteur champ en chacun de leurs points. Avec une table traçante on tracera des lignes polygonales voisines des lignes de champ de la façon suivante:

On détermine le champ en M puis on trace MM' tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{E_M}$, la distance MM' étant "petite", puis on recommence avec M'.

Dans le cas de 3 charges, on obtient la figure 5.

BIBLIOGRAPHIE

- "Utilisation d'un ordinateur et d'une table traçante en optique"
I.R.E.M. de LYON (mai 1976)

- "Planche de Galton et chasse aux canards"
Gilles MOUNIER

- Champ électrique J.C. MONNET - I.R.E.M. de GRENOBLE

- Renards et coqs - "Informatique, quand tu nous tiens" -
I.R.E.M. de STRASBOURG

Les organigrammes et programmes dont il est question sont disponibles sur demande expresse.

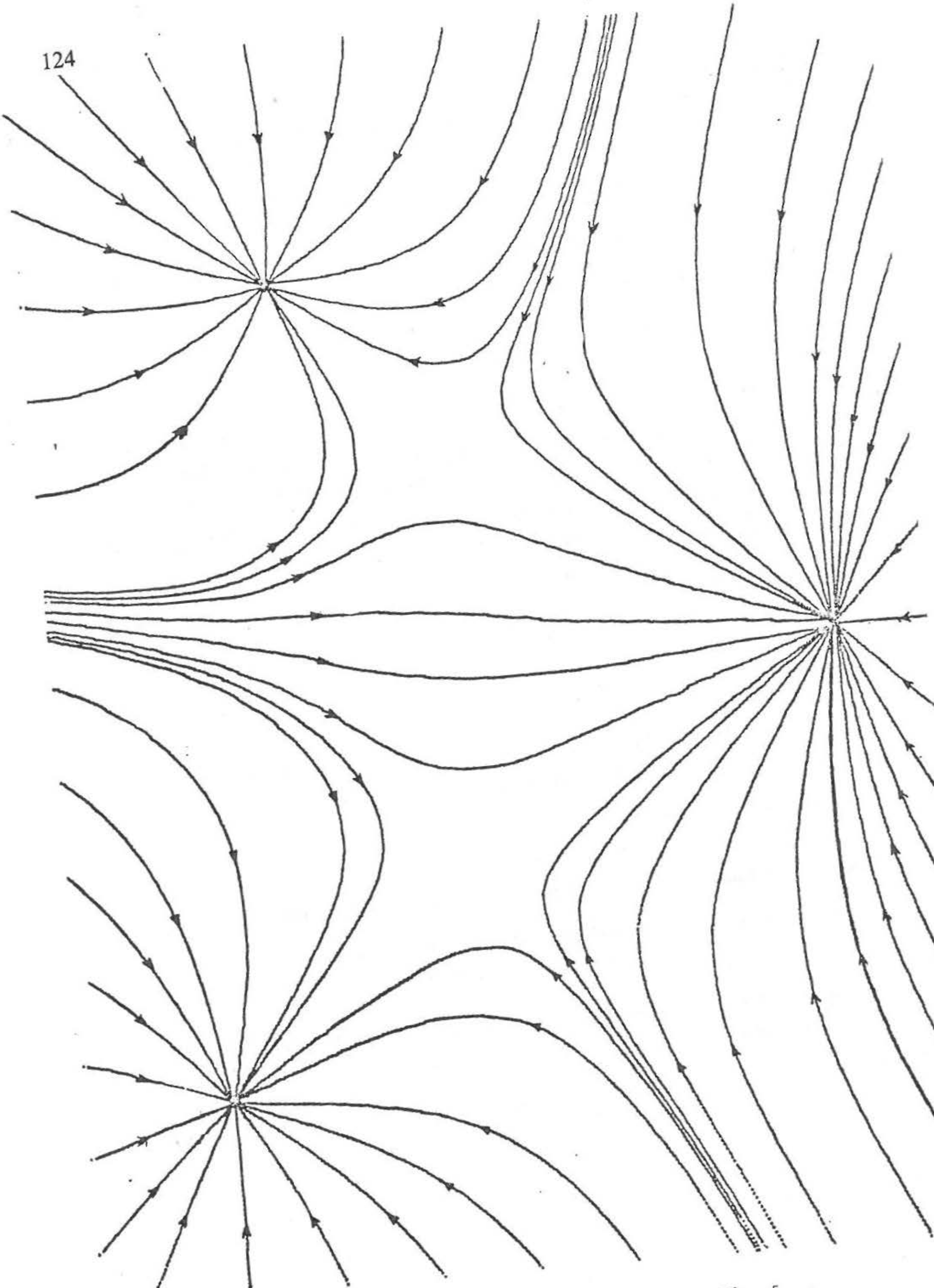


Fig. 5

ANALYSE DES DONNÉES EN GÉOGRAPHIE AU LYCÉE

Cet article, écrit par un professeur de géographie, est exemplaire d'un travail interdisciplinaire. Il est extrait de la brochure "ANALYSE DES DONNEES, tome 1".

En entreprenant la rédaction d'une brochure consacrée à l'analyse des données, l'A.P.M.E.P. s'est proposé un triple but :

- Informer ses adhérents de techniques de traitement utilisées quotidiennement à notre époque pour synthétiser des ensembles importants de données.
- Montrer comment la méthodologie de l'analyse des données (délimitation du champ d'étude, recueil, questions auxquelles les données doivent permettre de répondre, codage, calculs, représentations graphiques, puis nouvelles questions, impressions et hypothèses nécessitant de nouvelles données pour vérification) peut se pratiquer avec des élèves des collèges ou des lycées sur des données empruntées à leur environnement.
- Décrire en détail l'utilisation de telle ou telle technique d'analyse sur des exemples empruntés à la recherche en didactique des mathématiques.

Cette brochure comporte deux tomes, le premier accessible avec les connaissances d'un bachelier scientifique, le second avec celles d'un cours d'algèbre linéaire de première ou seconde année d'université.

GEOGRAPHY DATA ANALYSIS IN HIGH SCHOOLS

This extract from the booklet worked out by the A.P.M.E.P. on data analysis was written by a geography teacher ; it is a sample of a team work done by teachers of different disciplines.

When the A.P.M.E.P. set down to writting this booklet on data analysis, three aims were pursued :

- To give informations to all subscribers on the present processing techniques commonly used for synthesis of large sets of data.
- To show out how high school students, working on data taken from their environment, can practice the methodology of data analysis (limitation of range of the field under study, collecting, listing questions answerable by use of data, coding, computation, graph representations ; then new questions, insights, hypotheses, new sets of data for checking...).
- To give a detailed description on the use of any one of the analysing techniques applied to examples taken from didactic research in mathematics.

This booklet has two volumes : one at high school student level (science major, last year), the other at first or second year university linear algebra course.

ANALISIS DE DATOS EN GEOGRAFIA EN EL INSTITUTO

Este artículo, escrito por un profesor de geografía es ejemplar de un trabajo interdisciplinario. Ha sido extraído del folleto "ANALISIS DE DATOS".

Al emprender la redacción de un folleto consagrado al análisis de datos, la A.P.M.E.P. se ha propuesto un triple objetivo :

- Informar a sus afiliados de técnicas de tratamiento utilizadas cotidianamente en nuestra época para sintetizar conjuntos importantes de datos.
- Mostrar cómo la metodología del análisis de datos (delimitación del campo de estudio, recopilación, preguntas a las que los datos deben permitir responder, codificación, cálculos, representaciones gráficas, después, nuevas preguntas, impresiones e hipótesis que necesitan nuevos datos para verificación) puede ser practicada con alumnos de las escuelas o de los institutos con datos tomados de su entorno.
- Describir detalladamente la utilización de una u otra técnica de análisis con ejemplos tomados de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Este folleto comprende dos tomos, el primero accesible con los conocimientos de un bachiller científico y el segundo, con los de un curso de álgebra lineal de primer o segundo año de universidad.

Th. HATT
IREM de Strasbourg

3. INTRODUCTION DES METHODES D'ANALYSE DES DONNEES EN GEOGRAPHIE AU LYCEE

Nous présentons ici un travail d'introduction des méthodes de l'analyse des données dans des classes de secondes et premières de lycée classique. Ce travail, commencé en 1973 avec le soutien de l'IREM de Strasbourg (moyens de calculs en particulier) a été continué sur le matériel dont le lycée a été équipé en 1974 dans le cadre d'une expérience de sensibilisation des élèves à l'informatique à travers les disciplines traditionnelles. L'Institut de Recherche Pédagogique a organisé la formation de 500 enseignants, 58 établissements ont été équipés de matériel informatique. Cette expérience d'introduction de l'informatique ne concerne pas seulement les classes scientifiques.

Le but de l'expérience n'est pas de créer une discipline technique nouvelle mais de promouvoir des "applications" de l'informatique dans les disciplines traditionnelles. Cette optique est originale et ne se rencontre dans aucun autre pays lancé dans ce type d'expérience. Le statut expérimental et les excellentes conditions de travail dont nous disposons au lycée limitent les conclusions que l'on peut tirer d'un tel travail, néanmoins nous essaierons de montrer que l'analyse des données insuffle un **esprit nouveau** dans notre discipline et n'induit pas seulement l'utilisation de moyens informatiques plus ou moins puissants.

Nous nous attacherons à trois aspects essentiels de l'introduction de méthodes statistiques :

1) Pourquoi utiliser avec les élèves de telles méthodes ?
2) Quel est le contexte pédagogique d'introduction de ces méthodes ?
3) Quels sont les exemples effectivement traités avec les élèves (et non pas "qui pourraient l'être") ?

I. Pourquoi utiliser au lycée les méthodes de l'analyse des données ?

Les professeurs d'histoire et géographie ont toujours utilisé peu ou prou les statistiques élémentaires : graphiques pluviométriques et thermiques, pyramides des âges, valeurs relatives ... Ce que nous essayons de pratiquer en classe est plus ambitieux : traiter un problème géographique ou historique le plus complètement possible avec une **DEMARCHE** statistique scientifique. Pourquoi adopter une telle démarche ?

A. UNE EXIGENCE CRITIQUE EN FACE DE LA GEOGRAPHIE TRADITIONNELLE

J. Beaujeu-Garnier, une autorité en matière de géographie écrit dans [2] p. 292 : les géographes se seraient caractérisés dans le passé par "... une description souvent plus subjective et intuitive que chiffrée et logique, une complaisance pour l'attitude littéraire plus que scientifique ...", qui donnait à ceux qui les lisaient, "... l'impression parfois de talent, souvent de minutie, rarement d'efficacité ...".

B. UNE POSITION THEORIQUE QUI MET L'ACCENT SUR L'INTERDEPENDANCE DES FAITS GEOGRAPHIQUES

a) Cette position repose d'abord sur une définition de la géographie en tant que discipline de recherche où l'accent est mis sur les interdépendances simultanées entre les faits géographiques à la surface de la Terre. La "région", échelon spatial subordonné, est décrite comme un "ensemble organisé à variables multiples", donc un vecteur. Dans chacun des cas, sans exclure l'histoire, nous insistons sur une explication cybernétique de la géographie où la référence à la théorie des systèmes et à la notion de modèle est fondamentale. Chaque variable du système géographique est à la fois effet et facteur dans un ensemble maintenu cohérent par les interdépendances entre variables. On est donc amené à considérer le maximum de variables possibles, ce qui conduit naturellement à l'analyse des données.

b) Deux exigences scientifiques nous paraissent importantes :

— un souci d'"objectivité" de la démarche scientifique. Cette "objectivité" ne doit pas être entendue au sens d'A. Comte comme l'exacte reproduction du réel, que nous pensons inaccessible, mais comme "l'application correcte d'un instrument dans le cadre de conventions explicitées ..." (A. VOLLE, *Economie et Statistique,* n° 96, janvier 1978) ;

— un souci de "reproductibilité" du raisonnement. L'un des objectifs que nous nous donnons est d'aboutir à une typologie des objets étudiés. Comment, quel que soit le chercheur, sur des données identiques, aboutir à des résultats identiques ? Comment comparer des régions ou des stations climatiques sans fluctuation des critères de comparaison ? Sans démarche "reproductible", voire automatisable, pas de comparaison possible, pas de généralisation possible. Les mathématiques, l'informatique et la graphique sont des moyens de formaliser la démarche du traitement scientifique. Il nous paraît très didactique de combiner les trois outils pour une approche de l'analyse des données.

C. METTRE LES ELEVES EN POSITION DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE

a) Il y a place dans l'enseignement secondaire pour une telle démarche. Les élèves n'apprennent bien que ce qu'ils trouvent par eux-mêmes, mais d'autre part l'apprentissage par l'expérience est long, comment raccourcir le temps nécessaire ? Il paraît exclu de tout enseigner, l'évolution des connaissances est trop rapide. Il est donc légitime de faire des choix dans le programme et, sur des questions traitées de manière approfondie, mettre les élèves en situation de recherche personnelle active avec des moyens modernes de traitement.

b) Le mode interrogatif nous paraît plus didactique que le mode affirmatif : la géographie n'apporte pas un corpus figé de savoir immuable, c'est une discipline vivante qui change de méthodes, qui pose des questions. Le contenu des manuels n'est pas un dogme tombé du ciel mais un instrument de travail comme un autre pour les élèves, parfois plus critiquable qu'un autre dans la mesure où il n'expose jamais ses présupposés théoriques, ses sources qui permettraient de refaire la démarche avec d'autres méthodes ... Il semble beaucoup plus intéressant pour les élèves de ne pas supposer le problème des types régionaux résolu au départ mais d'élaborer des solutions avec eux. Comme le montre le tableau 1, la démarche statistique est faite de "choix multiples". Formaliser les problèmes oblige à expliciter toutes les étapes, surtout lorsqu'on souhaite programmer la machine, il est beaucoup moins facile que dans le discours littéraire d'escamoter les questions.

c) Les choix multiples de la démarche statistique :

TABLEAU 1

LES CHOIX MULTIPLES DE LA DEMARCHE STATISTIQUE

I QUEL PROBLEME GEOGRAPHIQUE ?
TYPOLOGIE RAISONNEE ET REPRODUCTIBLE D'OBJETS GEOGRAPHIQUES

POURQUOI ?	Un but de connaissance et d'explication scientifique de l'organisation spatiale actuelle.
	Un but de diagnostic prévisionnel et de décision.
	Un but pédagogique d'apprentissage des méthodes qui permettent de tirer parti d'une information chiffrée volumineuse.

II QUELS CHOIX INITIAUX ?

1. Quelle échelle spatiale ?
Parcelles, communes (traitements par sondages), cantons, régions de programme, unités climatiques ou de végétation ... (traitements exhaustifs) ?

2. Quelle définition des unités spatiales ?
Une combinaison originale de variables interdépendantes sur une portion d'espace.

3. Pourquoi des mesures de ces variables ?
La mesure est nécessaire aux **comparaisons** entre objets géographiques.

4. Quelles variables ?
Quelle définition statistique ? Quelles erreurs de mesure ? Quelles variables absentes ? (Non mesurables ou non mesurées). Quel sens implicite à ces absences ?

III QUEL CODAGE DE CES VARIABLES ?

5. Données brutes (effectifs ...) ?, prétraitées (%, rangs, centrées réduites ...) ?, ventilées en classes (selon quel principe ?), codées en disjonctif ou non ? ...

IV QUELLE MATRICE DES DONNEES ?

6. Faut-il introduire le temps (collection de tableaux) ?

7. Le tableau est-il homogène ? pertinent ? exhaustif ? vaste ? amorphe ?

ETAPE SEMANTIQUE

COMMENT TIRER LE MAXIMUM D'INFORMATION DE CE TABLEAU POUR UNE TYPOLOGIE RAISONNEE ?
Une matrice d'observations est un "super nombre" manipulable par les mathématiques.

V QUEL MODELE MATHEMATIQUE ?

8. Une fois le modèle choisi,quels sont les choix du modèle ?

9. Quelle métrique ?

10. Quelle forme du nuage ? (déterminé par le choix de la métrique). Nuage des points régions dans l'espace des variables et des points variables dans l'espace des régions.

11. Quelles méthodes de radiographie de l'espace multidimensionnel ?

12. Quelles méthodes de filtrage, de classement ?

ETAPE SYNTAXIQUE

VI QUELLES VALIDITE DES RESULTATS ?

13. Critique des variables et des objets. Quel est le rôle des exceptions ?

14. Quelles erreurs de saisie des données ? Quelles variables redondantes ou non significatives ? Quelles combinaisons et interactions de variables importantes ?

15. Quelle critique du classement peut-on faire ?

VII RETOUR CRITIQUE AU TABLEAU

Ne pas oublier que l'on n'a pas étudié des régions géographiques mais la structure d'une matrice de données. Le découpage obtenu n'a de sens que dans le cadre de ce tableau.

ETAPE SEMANTIQUE

Le tableau 1 montre l'importance des phases "amont" et "aval" qualifiées ici de "sémantiques" par rapport à la phase "syntaxique" de l'analyse des données. Quels sont les problèmes scientifiques à résoudre ? Quelle échelle régionale et quelles mesures statistiques choisit-on ? Quels sont les codages des données brutes qui conviennent ? Les méthodes de l'analyse des données s'appliquent à des "données" ; les résultats d'une procédure typologique, l'interprétation que l'on peut en faire dépendent avant tout de la qualité des données de départ ; aussi convient-il d'accorder un soin extrême à cette phase méthodologique initiale. L'utilisation du modèle mathématique suppose close une liste impressionnante de questions préalables, les choix dans cette étape sont pratiquement infinis. Les résultats du traitement seront aussi divers, l'important est d'expliciter et de justifier les choix à chaque étape. Le grand intérêt de cette démarche est d'être anti-dogmatique, elle permet de montrer aux élèves comment on arrive à certains résultats au lieu de les leur faire accepter comme parole divine.

d) Un moyen de tirer parti d'une information chiffrée massive. Grâce aux efforts de l'Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques, les données numériques de l'économie tombent de plus en plus dans le domaine public. Il existe des méthodes très puissantes de traitement de cette information chiffrée, certaines sont déjà dans le grand public (Enquêtes du Nouvel Observateur utilisant l'analyse des correspondances). On peut penser qu'il est utile que les élèves soient initiés à l'utilisation de ce genre de méthodes.

Cet ensemble d'arguments prouve que l'adaptation à la géographie des méthodes de l'analyse des données correspond à un grand nombre d'objectifs. Il est évident que, pour espérer une généralisation de ces méthodes, il faudrait que la revendication de formation des enseignants soit prise en compte.

II. Contexte pédagogique d'introduction de l'analyse des données

A. MATERIEL ET LOGICIEL AU SERVICE DE L'EXPERIENCE(*)

a) un matériel adapté à l'enseignement

La configuration informatique étudiée pour l'Education Nationale est particulièrement bien adaptée aux applications pédagogiques. La seule lacune du point de vue du géographe est l'absence d'une imprimante rapide.

(*) Pour plus de détails on pourra consulter [9].

Le cœur est un mini-ordinateur à mémoire centrale de 8K(**) octets (4,2K octets pour le système d'exploitation en temps partagé et 3,8K octets utilisateur). Cette capacité est faible : sans aucun programme il est possible de stocker un millier de valeurs numériques. Cette faiblesse oblige, pour traiter les gros problèmes de fichiers géographiques, à une programmation particulière dite en "mémoire externe". Les données découpées logiquement sont cherchées par programme à la demande sur le disque magnétique à têtes fixes de 400K octets. Ceci augmente le temps de calcul mais le temps machine n'est pas facturé et, l'ordinateur pouvant tourner 24 h sur 24, la difficulté n'est pas grave. La capacité du disque à têtes fixes permet, par exemple, le stockage du système de traitement statistique SESAM, dont nous parlerons plus loin, 70000 octets de programmes, 205000 octets de fichiers, le reste étant occupé par le système d'exploitation. Le disque fixe peut être transféré à grande vitesse sur un disque souple ou "disquette" bon marché. Chaque discipline possède ainsi ses propres disquettes. Le télétype,à lecteur perforateur de ruban, est le point faible de l'installation, lent et difficile à régler.

La salle de travail des élèves est équipée de huit téléviseurs à clavier, ce qui permet de travailler avec des demi-classes de 16 élèves. Ecrans et claviers sont totalement silencieux, le matériel bruyant est dans la salle voisine, ceci procure un grand confort de travail. Ce matériel est peu sujet aux pannes, l'Education Nationale paie une maintenance-assurance qui garantit des dépannages rapides.

b) un logiciel interactif puissant

L'intérêt de ce matériel est renforcé par un logiciel interactif mis au point par l'équipe de J. Hebenstreit à l'Ecole Supérieure d'Electricité. Ce Langage Symbolique d'Enseignement (LSE) est commun à toutes les machines de l'expérience, ce qui permet les échanges de programmes. C'est un langage dont les caractéristiques sont très intéressantes pour le géographe-programmeur :

— facilité de programmation des calculs matriciels
— facilité de gestion des fichiers de données
— puissance des traitements des chaînes de caractères, ce qui se prête aussi bien aux tests des réponses d'élèves qu'aux applications graphiques
— dimensionnement dynamique des tableaux, variables logiques, procédures externes ...

Ce langage permet le dialogue de l'élève et du programme à la console, chaque élève pouvant progresser à son propre rythme.

(**) $K = 2^{10} = 1024$ ainsi $2K = 2048$ et $8K = 8192$ (K : abréviation de kilo).
1 octet = 2^8 unités binaires.

B. LE TRAVAIL D'EQUIPE ENTRE MATHEMATICIENS ET GEOGRAPHES

Le travail d'équipe est absolument indispensable. Le géographe n'a pas les compétences suffisantes pour utiliser sans appui extérieur les méthodes d'analyse des données. Le travail d'équipe au lycée est également indispensable pour d'autres raisons.

a) le travail d'équipe à l'IREM

L'IREM nous a toujours donné le meilleur accueil en nous recevant comme stagiaire puis comme animateur d'un groupe informatique. Les spécialistes d'analyse des données présents à Strasbourg nous ont permis de surmonter bien des obstacles techniques. Si cette collaboration pluridisciplinaire est possible, c'est en partie grâce aux structures ouvertes et non hiérarchiques de l'IREM.

b) au lycée

La situation est moins bonne. Depuis longtemps nous recherchons des collègues qui acceptent de traiter dans certaines classes communes des aspects statistiques. Le plus souvent les demandes que nous avons faites se sont soldées par un échec. Deux raisons sont invoquées :

— le programme chargé qui ne laisse aucune place pour ce qui n'y figure pas ou en a été enlevé comme ... les statistiques !

— le manque de formation initiale qui oblige à trop de travail pour élaborer un cours. L'exemple du premier collègue qui ait accepté n'est guère probant : particulièrement motivé, il est engagé dans l'expérience informatique.

Il est très regrettable qu'une collaboration même symbolique soit si difficile à obtenir. Les élèves sont très sensibles au fait de retrouver dans des matières différentes des notions identiques traitées de la même manière quoiqu'avec des points de vue différents. Cette possibilité de faire référence à des notions traitées ailleurs nous paraît très importante. Il ne s'agit pas de trouver chez le mathématicien une caution à une attitude nouvelle du géographe mais de montrer aux élèves la nécessité d'ouvrir, parfois pendant la même heure de cours, deux tiroirs différents de l'emploi du temps.

C. LA PRATIQUE PEDAGOGIQUE AVEC LES ELEVES

a) des méthodes actives

Les élèves prennent en charge l'élaboration complète d'un "dossier" tiré du programme. Le professeur choisit dans les sujets du programme des questions assez larges, il prépare le plan de travail, la liste des exposés et des documents. Les dossiers : "Oppositions régionales de l'agriculture ou de la démographie ou de l'industrie française", "la révolution industrielle de 1800 à 1914'', ''les séismes, les volcans et la dérive des plaques lithosphériques'', ''les climats et les types de temps'', etc., sont traités par périodes bloquées d'une vingtaine à une trentaine d'heures. Les cours magistraux (introductions, méthode de travail ...) sont réduits au minimum. Les travaux pratiques sur ordinateur et les travaux indépendants par équipes sont très nombreux. Les équipes, responsables de comptes rendus devant la classe, ont en main une grande variété de documents : articles du journal ''Le Monde'', de la ''Recherche'', ''Science et Avenir'', ''Economie et Statistique'', des ouvrages universitaires, des dictionnaires économiques, des manuels, etc. Les articles sont regroupés autour de thèmes. Le dossier ''Oppositions démographiques des régions françaises'' en comprend 5 :

1. Les moyens de connaissance de la population. Quelles sont les sources chiffrées ? Quelle est leur précision ? Quelles sont les définitions exactes des termes démographiques ? (6 articles).

2. Fécondité et population (6 articles).

3. Mortalité et population (8 articles).

4. La croissance démographique, simulation sur ordinateur (programme de simulation simple à deux paramètres), T.P. par équipe.

5. Les oppositions régionales démographiques : évolutions et structures ; analyse quantitative des structures démographiques des régions de programme et des cantons alsaciens.

Les paragraphes **1** à **4** constituent la préparation du traitement quantitatif du paragraphe **5**. Les élèves ont en main en abordant ce cinquième paragraphe les exposés des articles et un glossaire de définitions. La même méthode est suivie pour les dossiers de géographie générale et d'histoire. Les résultats des comptes rendus des équipes sont polycopiés et distribués à tous. A la fin du dossier les élèves ont en main un gros document de 40 à 100 pages selon le sujet traité.

b) les problèmes avec les élèves

Les élèves sont séduits par la nouveauté de la manipulation technique, par le calme de la demi-classe, l'accent mis sur la responsabilité et le travail d'équipe. Un certain nombre de problèmes se posent néanmoins : les élèves ont de la peine à s'insérer dans un dossier qui a été conçu en dehors d'eux, et pourtant seule une préparation soignée permet de mettre à leur disposition des documents originaux et adaptés. Beaucoup jugent difficile, abstraite, ingrate la démarche statistique, jamais ils n'ont abordé de cette manière les questions de géographie et le tiroir ''mathématique'' est refermé quand s'ouvre l'heure de géographie. Pourtant la satisfaction des élèves est grande lorsque, à l'issue du cours commun, ils rencontrent en géographie des notions abordées en mathématiques. Voici l'exemple de quelques notions utilisées en classe de première dans le dossier de géographie quantitative :

— vecteur, matrice, projection plane
— graphe orthonormé, échelle millimétrée, logarithmique, log-log, coordonnée, rapport
— histogramme, classe, amplitude, profil
— moyenne, variance, écart-type, variable centrée-réduite, corrélation
— distance euclidienne (comme cas particulier de distance de Minkovski *), similitude, arbre hiérarchique, partition, algorithme de classification
— termes techniques de l'analyse des données, ACP**, AFC***, nuées, etc.

Certaines notions paraissent difficiles à certains élèves : la distance euclidienne dans le cas général avec une écriture indicée, pour les élèves de seconde tout ce qui se rapporte au dessin d'un graphique cartésien cadré avec calcul de l'échelle, tout ce qui touche la notion de rapport et d'échelle. Il faut un entraînement intensif pour que les élèves arrivent à placer 15 points sur un graphique en une demi-heure. La notion d'arbre, qui paraît facile à expliquer avec l'arbre généalogique, leur semble difficile et ils placeront le fils au niveau du père ...

Nous avons l'impression qu'une certaine facilité de la géographie traditionnelle où "il suffit d'apprendre", où "il n'y a rien à comprendre", rend l'approche statistique plus difficile qu'elle n'est en réalité.

* Une distance de Minkovski entre deux objets i et j pour lesquels on dispose d'une mesure X sur chacune des n variables ($k = 1, \ldots, n$) se définit comme suit :

$$d_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} |X_{ik} - X_{jk}|^p \right)^{1/p} \quad \text{où} \quad p \geqslant 1 .$$

** ACP : Analyse en composantes principales.

*** AFC : Analyse factorielle des correspondances. Ces deux méthodes d'analyse factorielle seront décrites en détail dans le Tome II.

QUELLE PHILOSOPHIE ET QUELLE VISION DES MATHEMATIQUES TRANSMET-ON AUX FUTURS ENSEIGNANTS ?

- Texte de réflexion préparatoire à un Colloque de 1978 sur la "Formation mathématique des professeurs de lycée"-

Après avoir souligné les traits dominants de l'évolution de l'enseignement des mathématiques, cet article analyse l'activité mathématique (Articulation théories-problèmes, fonctionnement des concepts, champs d'intervention et rôle des structures, ...) et son enjeu pour l'enseignement. Il dégage ainsi des critères pour les choix relatifs aux objectifs et aux méthodes d'enseignement.

WHICH PHILOSOPHY AND VISION OF MATHEMATICS ARE TRANSMITTED TO TEACHERS TO COME?

- A text of initiatory thinking to a Colloquium held in 1978 about : "The mathematical forming of secondary school teachers"-

After having emphasized the outstanding features in the evolution of mathematics teaching, this article analyses mathematical activity (connection between theories and problems, working of concepts, intervention fields and part played by structures,..) and the stake it represents to teaching. Thus it draws criteria for the choices relating to the aims and methods of teaching.

¿Qué filosofía y qué visíon de las Matemáticas se transmiten a los futuros maestros y profesores ?

- Texto de reflexión preparatoria para un coloquio de 1978 acerca de la "Formación matemática de los profesores de Colegios e Institutos"-

Después de subrayar los rasgos dominantes de la evolución de la enseñanza de las matemáticas este artículo analiza la actividad matemática (articulación teorías-problemas, funcionamiento de los conceptos, terrenos de intervención y papel de las estructuras...) y su importancia peculiar para la enseñanza. Así pone de realce criterios para poder escoger objetivos y métodos de enseñanza.

Réflexions ...

par Jean-Louis OVAERT

INTRODUCTION

Les remarques qui suivent sont personnelles.

Une première partie a pour objectif de dégager, à partir de quelques traits dominants de l'enseignement des mathématiques, quelques questions sur les formes de fonctionnement de cet enseignement et sur les idéologies qui les sous-tendent.

Une deuxième partie reprend les mêmes problèmes sous un angle plus théorique ; elle s'appuie à la fois sur une analyse historique et épistémologique de la construction, du développement et des reprises des concepts mathématiques, et sur une analyse des pratiques enseignantes et de leurs effets. Pour mieux cerner l'enjeu des problèmes posés, quelques exemples précis ont été développés.

I — QUELQUES TRAITS DOMINANTS DE L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES.

A — L'enseignement supérieur.

$\boxed{1}$ Vers les années 1950, l'enseignement des mathématiques au niveau du supérieur est en crise. En effet, de nombreux secteurs de recherche ne sont pas pris en compte (analyse fonctionnelle, topologie algébrique, groupes de Lie, géométrie algébrique, probabilités, analyse numérique, logique mathématique, etc...).

En outre, les concepts de base mis en œuvre dans les recherches récentes (topologie générale, algèbre linéaire, algèbre commutative, variétés, mesures et distributions,...) sont absents des enseignements, sauf cas d'exception. Enfin, sur tous ces sujets, les ouvrages de synthèse font défaut, mis à part les premiers fascicules des éléments de Nicolas Bourbaki, relatifs à l'étude des structures mères. Quelles sont les causes de cet état de fait ? Manque de scientifiques à l'issue de la guerre de 1914 (thèse des membres fondateurs de Bourbaki) ? Problème de prise du pouvoir par la nouvelle école ? Mutation accélérée du cadre général des recherches ?

$\boxed{2}$ En moins de dix ans, un bouleversement considérable des contenus s'effectue selon des rythmes propres à chaque faculté (le secteur écoles d'ingénieurs, classes préparatoires, avec quelque retard). De façon dominante, ce ne sont pas les nouveaux secteurs de recherche qui sont pris en compte, mais plutôt les concepts de base, qu'il convient de "dérouler" avant toute entreprise sérieuse. Les contenus des certificats M_1, M_2, M_3 sont à cet égard révélateurs, ainsi que ceux des ouvrages (livres ou polycopies) parus à cette époque. L'essentiel des cours est axé sur l'exposé de définitions et théorèmes, et la mode est aux axiomatiques.

Il est rarement fait référence aux grands problèmes qui leur ont donné naissance ou qui les mettent en jeu. Les exercices proposés sont le plus souvent des applications "ad hoc", voire des "variations" sur les définitions, théorèmes et axiomatiques du cours. La topologie et la théorie de la mesure restent sans prise sur l'analyse, de même que la topologie et les variétés sur la géométrie, l'algèbre sur la théorie des équations et sur la géométrie. Le plan type d'un cours de topologie en M_1 est : espaces topologiques, espaces métriques, espaces normés, espaces hilbertiens ; dans ces conditions, quand l'étudiant peut-il prendre contact avec les objets et les problèmes de la géométrie (groupes classiques, espaces homogènes associés, sous-variétés de $\mathbf{R}^n$, etc...) ? Quand peut-il attaquer les problèmes de l'analyse (différents types de convergence, espaces fonctionnels classiques, résolution des équations) ?

Plusieurs questions fondamentales se posent : ce type d'enseignement est-il spontané ou s'appuie-t-il sur des analyses explicites ? L'étude de problèmes variés, qui prend du temps, est-elle nécessaire pour former un enseignant, un chercheur ? Ne peut-elle être remise à plus tard ? Où et quand ? A l'inverse, les phases de mise en place de synthèses générales sont-elles indispensables ? Ces synthèses apportent-elles une économie de pensée ? Sous quelles conditions ? Comment articuler ces synthèses avec les problèmes qui les mettent en jeu ? L'exposé bien structuré de synthèses ne contribue-t-il pas à jeter de la clarté sur le secteur étudié ? Suffit-il pour atteindre cet objectif ? La démarche suivie est-elle compatible avec le développement de l'esprit de recherche ?

$\boxed{3}$ Néanmoins, avec quelque retard, un autre courant se fait jour, constatant qu'au niveau de la recherche, les théories se développent de façon indissociable des problèmes, et que la dimension historique des problématiques d'un secteur donné est d'une importance capitale pour le développement des recherches. Ces idées ont eu des retombées partielles sur l'enseignement : mise en place d'enseignements de troisième cycle directement branchés sur des recherches, rédaction de monographies dans le même esprit, influence grandissante des livres étrangers au niveau des deuxième et troisième cycles. Prise en compte dans les ouvrages de synthèse des grands problèmes mettant en jeu les concepts étudiés (cf. par exemple cours d'algèbre de R. Godement, calcul infinitésimal de J. Dieudonné).

Cette évolution est-elle généralisée ? Comment se traduit-elle dans la pratique enseignante (type de cours, de T.D., d'examens, de rapports au sein de l'institution) ? Il semble qu'elle concerne plus le troisième cycle et la seconde année de second cycle que les années précédentes. Pour quelles raisons ?

Certains enseignants ont volontairement renoncé à une structuration synthétique de leur enseignement. Ce type d'enseignement est-il spontané ou s'appuie-t-il sur des analyses explicites ? Lesquelles ?

Plus récemment, une prise en charge de la dimension historique des mathématiques a été tentée : introduction d'unités d'histoire des mathématiques dans les maîtrises et les DEUG, parution d'ouvrages sur ce sujet, organisation de groupes de travail et de colloques (Nantes, Caen, Poitiers...). Ici encore plusieurs questions importantes se posent : histoire des résultats ? des recherches ? des mathématiciens ? des problématiques ? A qui sont destinés les cours et les ouvrages ? à tous les étudiants ? aux futurs enseignants ? aux futurs chercheurs ? sur quels critères ? Histoires sectorielles ou secteurs de l'histoire générale ? Intégration de cette composante historique dans chaque enseignement, ou unités spécialisées ?

$\boxed{4}$ Les réformes récentes (Fouchet, DEUG,...) ont-elles fondamentalement modifié le mode de fonctionnement esquissé précédemment ? N'y a-t-il pas eu aggravation du morcellement des secteurs (multiplicité des maîtrises, des options du DEUG, isolement croissant des disciplines) ? L'organisation des C_i par études de structures prend-elle en compte l'étude de problèmes intersectoriels (souvent les plus importants) ? Les thèmes d'applications retenus pour les programmes des C_i ont-ils effectivement été enseignés ? Sur quels critères s'est effectuée la coupure entre la formation des professeurs certifiés (licence) et celle des professeurs agrégés et des chercheurs (maîtrises) ? Pourquoi des maîtrises d'enseignement (un autre groupe du colloque en débat) ? Il serait intéressant de déceler des lignes directrices (si elles existent !) à travers cette volée de réformes... Voici quelques points cruciaux : des stratégies d'approfondissement des grands problèmes et de l'élargissement conjoint de l'horizon théorique ont-elles été mises en œuvre, ou l'exposé bien structuré des concepts de base tient-il lieu d'une telle stratégie ? Quelle place est faite à l'activité de l'étudiant (résolution de problèmes, documentation, expression écrite et orale, analyse de l'enseignement reçu,...) ?

B — L'enseignement secondaire.

Nous nous bornerons ici aux aspects susceptibles d'interagir avec l'enseignement supérieur.

$\boxed{1}$ Vers les années 1960, l'enseignement des mathématiques entre en crise au niveau du second degré : des causes générales (modification de la population scolaire, mise en place des C.E.S.) se joignent à des facteurs spécifiques aux mathématiques (coupure manifeste entre le second degré et le supérieur, rôle de plus en plus dominant des mathématiques comme instrument de sélection). Un certain nombre de collègues du supérieur et du secondaire souhaitent une réforme au niveau du second degré (cf position de l'A.P.M.E.P., colloques de Caen et surtout d'Amiens, colloques internationaux sur l'enseignement des mathématiques).

$\boxed{2}$ La mise en œuvre de ces réformes conduit à de graves difficultés. A tous les niveaux et dans la plupart des manuels on retrouve les caractères dominants de l'enseignement supérieur décrits ci-dessus (pourquoi s'en étonner !) : déconnexion entre théories et problèmes, caractère factice des exercices proposés, accent mis sur les structures, les axiomatiques, l'aspect purement logique du raisonnement ; absence de problématique générale.

Une critique assez vive se fait bientôt jour, y compris de la part de nombreux enseignants du supérieur (le plus souvent à propos de l'expérience scolaire de leurs enfants !). Qui est responsable de ces disfonctionnements ? Les initiateurs de réformes : Commission Lichnérowicz ? A.P.M.E.P. ? le manque de formation des maîtres en service (dramatique pour certaines catégories : PEGC, PEG-CET, instituteurs sur postes PEGC) ? L'enseignement supérieur, qui a lui-même distillé, directement ou non, les idéologies responsables des errements visés ? Quelles sont ces idéologies ? L'inspection qui a repris à son compte et amplifié ces idéologies ? Le système "grandes écoles" autour duquel gravite la différenciation des sections et qui commande fortement les programmes des sections scientifiques ?

Ce débat est redoublé par les problèmes socio-culturels : ne vaut-il pas mieux, à cet égard, présenter des mathématiques propres et rigoureuses ? A l'inverse, cette asepsie ne tue-t-elle pas l'activité scientifique ?

$\boxed{3}$ Face à cette crise, un autre courant se développe au sein du corps enseignant ; les idées évoquées en A 3 sont reprises. D'autres thèmes sont développés : les réformes (du second degré et du supérieur) n'ont consisté qu'en des changements de programmes (et même essentiellement des changements de discours du maître) ; elles sont muettes sur les thèmes d'activité pour l'élève ; elles ne prennent pas en compte son passé ; aucune stratégie d'approfondissement n'est dégagée ; il y a absence de réflexion sur les relations interpersonnelles au sein du système éducatif. Ici encore, plusieurs questions se posent : ce type de réflexion est-il nécessaire pour un bon enseignement des mathématiques ? Une connaissance solide des sujets à enseigner et une présentation claire ne suffisent-elles pas ? Que peuvent apporter les sciences de l'éducation et la didactique des mathématiques ? Leurs apports éventuels ont-ils un caractère scientifique ? Qui doit prendre en charge les recherches correspondantes ?

C — Perspectives.

1 Les enseignants du supérieur peuvent-ils rester sourds à tous ces problèmes et se borner à une critique extérieure du secondaire ? Cependant, les étudiants sont largement conditionnés par leurs études antérieures. En outre, les concours de recrutement des enseignants (CAPES et agrégation) ont, via leurs programmes et leur style, un effet rétroactif sur les étudiants futurs candidats, voire sur l'organisation des cursus universitaires.

Enfin, en mathématiques, la formation continue des enseignants du second degré a été prise en charge par les universités, grâce à la création des IREM. Leur fonctionnement pose de nombreux problèmes qu'il n'est pas dans notre propos d'analyser ici. Bornons-nous à ceci : les IREM auraient pu être un lieu d'échanges et de rencontres entre enseignants de tous degrés ; or, seul un petit nombre d'enseignants du supérieur ont participé à leurs activités, et les relations organiques des IREM avec les départements de mathématiques sont souvent de type administratif. Pourquoi en est-il ainsi ? Les IREM ont-ils tendance à une certaine autarcie au sein des universités ? Y a-t-il méfiance réciproque entre enseignants des divers degrés et quelle est son origine ? Y a t-il mésintérêt de la majorité des enseignants du supérieur pour les problèmes de l'enseignement secondaire ? Pour quelles raisons ?

2 A travers ces questions si diverses en apparence, surgissent des points plus cachés. Les mathématiques ne sont-elles pas perçues comme un langage, rigoureux et bien structuré ? Pour apprendre ce langage, ne suffit-il pas que l'enseignant produise un discours bien réglé devant l'étudiant, placé d'abord en situation de spectateur, exhorté à reproduire ensuite le discours visé ?

Sinon, quels sont les traits dominants de l'activité mathématique ? Plus précisément, il convient d'analyser les questions suivantes :
— Articulation entre théories et problèmes.
— Fonctionnement des concepts et statut de ces concepts.
— Articulation des grandes structures et de leurs champs d'intervention.
— Rôle de la rigueur.

Enfin, comment la pratique enseignante peut-elle prendre en compte ces analyses ?

II — UNE ANALYSE DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE ; SON ENJEU POUR L'ENSEIGNEMENT.

A — Articulation entre théories et problèmes.

L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en œuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus au regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue dans la résolution de problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine. Inversement, une attitude anti-théorique est un obstacle à l'approfondissement des problèmes. Approfondissement des problèmes et élargissement du champ théorique sont en rapport dialectique.

Au niveau de l'enseignement, une insistance trop exclusive sur les théories (les résolutions de problèmes étant absentes, ou n'apparaissant que comme sous-produits) correspond le plus souvent à un discours du maître, ou, dans le meilleur des cas. à une maïeutique. Elle révèle une tendance dogmatique, ou idéaliste. A l'opposé, une étude peu structurée portant sur des problèmes épars, même chargés d'une certaine valeur esthétique, ou ludique, n'exercent la sagacité de l'étudiant que de façon purement formelle. Il s'agit ici d'une tendance empiriste.

L'on n'échappe pas à ce dilemne en oscillant d'une tendance à l'autre (mouvements oscillatoires souvent divergents !) ou même en pondérant convenablement les deux bras de la balance.

Il conviendrait plutôt d'analyser, pour chaque secteur, le type de fonctionnement entre problèmes et théories, et de préciser, pour chaque niveau d'enseignement, les grands problèmes que l'on va étudier, les théories qui leur sont liées et une problématique didactique engageant les étudiants de manière directe et constituant le support efficace d'un rapport dialectique entre le maître et les élèves.

Prenons un exemple, issu de l'enseignement du calcul infinitésimal (niveau premier cycle) : le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor (pour plus de détails, voir les travaux de groupes "analyse" dans différents IREM). Tous les cours traitent de ces questions. Ici, les problèmes liés sont très nombreux (sens de variation des fonctions, majorations, contact, étude des maxima et minima, valeurs approchées d'une fonction, approximation des solutions d'une équation numérique, interpolation,...). Le plus souvent ces problèmes sont présentés comme de simples *applications*, ou sont même rejetés ailleurs (cours de géométrie, cours mythique de calcul numérique, unité d'informatique,...). Comparons avec des ouvrages didactiques plus anciens (Lagrange, Cauchy, Jordan...) ou des livres étrangers (Lang : analysis 1) ou encore des textes prenant en compte l'histoire des mathématiques (Dieudonné : calcul infinitésimal) : la place faite à ces problèmes est beaucoup plus importante, et l'interaction entre problèmes et théorèmes y est mieux marquée. L'approfondissement des problèmes permet en retour de mieux saisir la dualité entre l'aspect local et l'aspect global des concepts en jeu, l'aspect qualitatif et l'aspect quantitatif.

La comparaison des rapidités de convergence des différents procédés d'approximation des solutions de $f(x) = 0$ peut fournir un terrain faisant intervenir de façon dialectique les majorations de fonctions (inégalités lipschitziennes et tayloriennes, notamment), les courbes représentatives, et le calcul expérimental sur exemples (à la main ou sur machine). Ici la théorie ne sert pas seulement à contrôler la rapidité de convergence, mais permet d'agir sur cette rapidité ; inversement, les remarques d'ordre géométrique ou les disfonctionnements expérimentation-théorie permettent de suggérer quels sont les facteurs qui jouent (pente des sécantes,...) et invitent à approfondir la théorie.

B — Les concepts mathématiques : leur fonctionnement, leur statut.

Les analyses historiques et épistémologiques montrent que le propre des activités scientifiques est de faire fonctionner de manière cohérente et efficace les différents concepts en vue de résoudre des problèmes, issus des mathématiques, d'autres sciences, de la technologie ou de la vie pratique. Le statut de ces concepts, c'est-à-dire la manière dont ces concepts s'intègrent, par voie axiomatique ou non, à d'autres secteurs mathématiques déjà constitués est un type de questions que l'on se pose le plus souvent ultérieurement, et sa résolution, parfois difficile, n'est nullement indispensable pour conférer un caractère scientifique aux théories considérées. Peut-on prétendre sérieusement qu'Euler et Lagrange n'aient pas fait d'analyse sous prétexte que la notion de limite n'était pas précisée, que Cauchy et Riemann n'aient pas fait non plus d'analyse parce qu'à leur époque $\mathbf{R}$ n'était ni construit arithmétiquement ni présenté par voie axiomatique ? Peut-on prétendre que la statistique mathématique et l'automatique sont, aujourd'hui encore, à l'état d'idéologies ? Or le fonctionnement de ces théories a fait et fait l'objet d'enseignements.

A propos de ces concepts, il convient de préciser deux points :

— un concept scientifique, aussi simple soit-il en apparence, n'est jamais enfermé dans une définition, fût-elle axiomatique, mais rassemble de manière organique toutes ses formes de fonctionnement, scientifiques et idéologiques. Ainsi le concept de cercle s'approfondit progressivement par la pratique de ses interventions en géométrie euclidienne, algébrique, conforme, différentielle, en cinématique, en technologie, en physique, etc. Il est donc différent pour un élève de Quatrième ou pour un étudiant de Troisième cycle des Universités, ou pour un mathématicien professionnel, ou pour un disciple de Ptolémée adepte de la doctrine des épicycles !

— Le fonctionnement des concepts mathématiques ne se limite pas au seul secteur mathématique. Il est donc nécessaire de détecter leurs interventions dans les autres sciences aux différents niveaux considérés, en vue de favoriser chez les étudiants le développement d'une culture scientifique plus globale. A cet effet, il convient de prévoir qu'une fraction notable du temps destiné à l'enseignement des mathématiques soit consacrée à des activités de synthèse permettant aux étudiants d'utiliser leurs acquis en mathématiques pour maîtriser des problèmes plus globaux ; en retour, cette maîtrise leur apportera un approfondissement des concepts mathématiques mis en jeu.

Ces questions de fonctionnement et de statut ont une grande importance pour l'enseignement :

— Une tendance très nette en France est un certain refus de "se salir les mains" : les concepts dont le statut est délicat sont le plus souvent évacués des cours, sinon des programmes (cas typiques au premier cycle : problèmes sur les fonctions de plusieurs variables : coordonnées curvilignes, extrema liés, intégrales multiples ; géométrie différentielle ; calcul des probabilités). Dans le cas contraire, on s'évertue à bricoler un cadre théorique rigoureux, qui coûte souvent très cher, bien que restant inadapté (exemples : théorie de Riemann des intégrales multiples, Stokomanie, courbes et surfaces vues comme classes d'équivalences dans des ensembles d'applications...).

— Une autre tendance consiste à jeter des interdits sur toute activité mettant en jeu, à propos d'un problème, un concept si l'exposé général de ses propriétés et de son statut n'est pas du niveau considéré (cas typique : les développements en séries entières des fonctions élémentaires ; leur emploi est rejeté en deuxième année du supérieur, car c'est à ce niveau que se place l'exposé des propriétés *générales* des séries entières. La diagonalisation des matrices, la convergence de suites de fonctions,...) L'argument de défloration ne porte pas car il ne vise que des exposés trop superficiels de résultats généraux. Sur toutes les questions précitées, le contraste est très grand avec des ouvrages didactiques plus anciens.

— Enfin, la dimension culturelle des concepts étudiés n'apparaît que fort peu, surtout au niveau des écrits, parce que non formulable dans le cadre théorique choisi. Pourrait-on s'efforcer de faire saisir ce dont il va être question dans un chapitre, avant de rentrer dans la technique, selon la tradition des "leçons inaugurales" ? C'est parfois difficile, mais toujours payant : quelle idée se fait un étudiant d'un cours d'"analyse harmonique" ou de "théorie spectrale" bien propre, mais où il n'est pas question d'analyse spectrale des signaux ?

C — Articulation des structures et de leurs champs d'intervention.

$\boxed{1}$ L'analyse historique et épistémologique montre que l'activité mathématique ne procède ni du particulier au général, ni du "concret" à l'"abstrait", ni en sens inverse. Il existe en fait un rapport dialectique entre théories générales (axiomatiques ou non) et les champs d'intervention. C'est en effet grâce à la maîtrise préalable du fonctionnement d'un concept sur des exemples ou modèles, dont on a déjà une bonne "expérience" que l'on accède au fonctionnement de ce concept dans un cadre général. Ensuite, fort du fonctionnement général, on peut maîtriser des exemples où ce fonctionnement est plus caché [cf., par exemple, le théorème de la dimension en algèbre linéaire, ou l'inégalité de Schwarz]. Ainsi l'étude des structures n'est pas une fin en soi : elle est au service d'une maîtrise efficace de problèmes compliqués ; inversement, l'étude sérieuse préalable de modèles est indispensable pour maîtriser l'emploi d'une structure. De vagues "introductions" ne sauraient en aucun cas remplir cet objectif.

Une objection sérieuse peut se présenter : l'étude de ces modèles peut demander un temps assez long, et les "programmes" sont chargés... Il convient donc de choisir quelques terrains jouant un rôle central et qu'il est de toute manière nécessaire d'étudier sérieusement. Prenons un exemple : il peut paraître séduisant, en deuxième année, d'aborder les notions de topologie avant l'étude des fonctions d'une variable réelle, qui apparaîtra alors comme un secteur d'application de ces notions. Le gain de temps (en discours de l'enseignant !) est certain, mais le champ d'intervention possible des concepts introduits est alors très pauvre, surtout si le cours d'algèbre linéaire n'est pas assez avancé (groupes classiques, formes quadratiques, géométrie des espaces euclidiens,...). Il en résulte un manque d'intérêt des étudiants et une inefficacité telle qu'on "reprend" tout l'année suivante. D'autres stratégies sont possibles (qu'il faut adapter au niveau des classes et des amphis). Par exemple une étude sérieuse de la topologie de $\mathbf{R}$ et des suites de nombres réels, complétée par une généralisation rapide à $\mathbf{R}^n$, permet déjà la résolution de problèmes substantiels (au contraire de celle des espaces topologiques non nécessairement métrisables). Cette mise en place suffit pour aborder l'analyse des fonctions d'une variable réelle. On peut alors étudier sérieusement sur cet exemple les différents types de convergence usuels en analyse (via les suites et des *exemples* de normes). On peut d'autre part étudier des problèmes de convergence en algèbre linéaire (normes d'endomorphismes) et en géométrie différentielle (espaces projectifs, grassmanniennes). Un cours de topologie peut ensuite prendre appui sur ces exemples substantiels tirés à la fois de l'analyse et de la géométrie, et contribuer en retour à la résolution de problèmes plus compliqués issus de ces domaines.

$\boxed{2}$ La dialectique esquissée précédemment est très souvent intersectorielle. L'histoire des mathématiques et la pratique scientifique montrent que ce travail d'un secteur sur un autre joue un rôle capital, tant pour l'approfondissement des concepts que pour la résolution des problèmes et la découverte de nouveaux problèmes.

Il peut se présenter ici un conflit entre la recherche d'une certaine autonomie de chaque secteur (intéressante pour bien des questions) et ce travail intersectoriel. Deux idéologies se fixent sur ce conflit : le purisme systématique (raisonnements purement algébriques, démonstrations purement arithmétiques, preuves constructives,...) et le pâteux systématique (on mélange tout). Elles influencent fortement l'enseignement (exemples laissés à la sagacité du lecteur).

Dans les deux cas, il s'agit d'un approfondissement insuffisant du fonctionnement des concepts.

$\boxed{3}$ Il arrive souvent que la dialectique entre deux concepts soit masquée, par simple occultation de l'un d'entre eux au profit de l'autre (avec des oscillations suivant la mode du jour). Quelques exemples : suites et fonctions, intégrales et primitives, Borel-Lebesgue et Bolzano-Weierstrass, diviseurs élémentaires d'un endomorphisme, groupes et objets en géométrie,...). Il peut même arriver qu'elle disparaisse par occultation des deux concepts au profit d'un autre, censé les "couvrir" tous deux (la topologie en analyse et la topologie en géométrie sont ainsi couvertes par la topologie générale ; la théorie de Galois pour les corps de nombres et pour les corps de fonctions sont couvertes par la théorie de Galois type Jacobson-Bourbaki).

Ces occultations apportent-elles une économie de temps et de pensée ? Il n'en est rien lorsque les problèmes sous-jacents sont de type différent ; au contraire, la maîtrise des problèmes du secteur occulté est gravement compromise.

D — Rôle de la rigueur, des structures.

On se bornera à de brèves indications.

$\boxed{1}$ Presque tous les mathématiciens proclament la nécessité de la rigueur. Mais ce souci recouvre des préoccupations et des problématiques fort différentes, selon les époques, les philosophies dominantes, les moyens théoriques disponibles, et le statut des productions mathématiques visées.

En particulier, il ne faut pas perdre de vue que l'importance des moyens théoriques existants est capitale, car elle conditionne la mise en œuvre des intentions exprimées. Par exemple, les points de vue formels d'Euler et de Lagrange en théorie des fonctions *visaient* à la rigueur. La mise en œuvre a d'abord connu un succès certain, puis a rencontré des grands obstacles, d'où un rejet par Cauchy. Cependant, le thème des séries entières comme fondement de la théorie des fonctions a été repris, notamment par Weierstrass, mais dans un autre cadre théorique (séries convergentes, séries de polynomes). A son tour, cette théorie peut s'appuyer sur celle des séries formelles,...

$\boxed{2}$ Dans les recherches et les publications qui en sont issues, les mathématiciens portent leur effort sur l'efficacité des résultats, sur la justesse des démonstrations. Ils sont rarement préoccupés de donner plus de rigueur aux théories déjà bâties. C'est plutôt à propos d'ouvrages de synthèse, ou d'exposés didactiques, que ce souci de rigueur des "fondements" se manifeste. Les effets produits sont spécifiques de chaque cas et dépendent de plusieurs facteurs, par exemple :

— influence de la construction théorique visée sur le fonctionnement des concepts du secteur ;

— influence de cette construction sur d'autres secteurs ;

— efficacité et valeur heuristique des nouveaux concepts ainsi introduits.

A cet égard, on pourrait étudier la construction des rationnels, des réels, de l'intégrale, des fonctions élémentaires, des polynomes, des extensions des corps (clôtures algébriques, corps de décomposition d'un polynome), des "objets" géométriques (espaces affines, projectifs, variétés différentiables, variétés algébriques, etc...).

$\boxed{3}$ La rigueur est liée à la cohérence du fonctionnement des concepts ; elle n'est pas conditionnée par une théorie axiomatique des "fondements".

D'ailleurs les axiomatiques servent avant tout à *délimiter des cadres théoriques avant un fonctionnement efficace*, et non pas à fournir un "fondement" à un secteur mathématique donné.

Il conviendrait d'ailleurs d'analyser de façon plus précise cette notion de "fondement", qui recouvre souvent une attitude idéologique, *formaliste*, puisque, du point de vue scientifique qui est celui de la logique mathématique, le problème ne reçoit pas de réponse absolue.

$\boxed{4}$ Certes, l'axiomatique peut être utile pour mieux situer un secteur mathématique par rapport à d'autres, mais elle ne saurait y suffire à elle seule. Le travail intersectoriel des concepts est à cet égard un facteur beaucoup plus important. Par exemple, l'énoncé : "L'espace vectoriel des fonctions continues sur [a,b] muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\, g(t)dt$ est un espace vectoriel euclidien" n'a pas grand intérêt en soi ; il en prend un si l'on fait fonctionner sur cet exemple les concepts déjà mis en œuvre sur d'autres (orthogonalité, meilleure approximation,...) ; le rôle de la théorie des espaces vectoriels euclidiens est plus de faciliter ce travail intersectoriel que de valider une fois pour toutes les raisonnements effectués dans les différents modèles. Une telle validation, selon le mot de Laurent Schwarz, ne fait souvent que "remplacer la difficulté par l'ennui", ce qui n'est certainement pas un des objectifs à fixer pour l'enseignement des mathématiques.

A chaque fois qu'un travail sur des modèles permet un fonctionnement efficace pour la résolution de problèmes et qu'un travail intersectoriel *approfondi* n'est pas indispensable, il n'y a donc aucun bénéfice à introduire une structure nouvelle. C'est selon ces critères et non à partir d'une idéologie de la "rigueur" ou des "fondements" qu'il conviendrait de préciser les différentes structures ou concepts généraux à inclure dans les programmes d'enseignement.

BROCHURES DISPONIBLES

(août 1980) - Cf. pages 148-149

— Conditions de commande, et prix, en francs français (F), au 15/8/1980 — L'abonnement donne droit à une réduction (cf. pages 150-151).

Les deux derniers nombres représentent : le nombre de pages, puis le prix avec port en dehors de la France.

- Les brochures sont à commander à :

A.P.M.E.P., 13, rue du Jura - 75013 - PARIS

et à régler, par mandat-poste international ou chèque bancaire (à l'ordre de l'A.P.M.E.P.) joint à la commande.

- Si vous ne vous abonnez pas à l'A.P.M.E.P. (cf. pages 150-151), utilisez le bas de la page 149, découpé suivant les pointillés, pour toute commande de brochures, et joignez-le à votre titre de paiement. Si vous vous abonnez, voyez page 151.

BROCHURES AVAILABLE

(in august 1980)
- see pages 148-149 -

— Conditions for ordering, price in French francs (F) on the 15/8/80. The subscription gives right to a discount (see pages 150 and 151).

- The two figures following each title stand for the number of pages and the price, postpaid outside France.
- The brochures are to be ordered from the :

A.P.M.E.P.
13, rue du Jura
75013 PARIS

and to be paid by foreign money order or bank cheque (for the A.P.M.E.P. account) enclosed with the order.

- If you do not subscribe to the A.P.M.E.P. (see pages 150 and 151), please use the lower part of the page 149, for any order of brochures, cut along the dotted line and send it with your payment. If you subscribe, see page 151.

FOLLETOS DISPONIBLES

(Agosto de 1980)
- C.F. páginas 148-149 -

— Condiciones de pedido, y precio, en francos franceses (F), a 15 de Agosto de 1980 - La suscripción da derecho a una rebaja (C.F. páginas 150-151).

- Los dos últimos números representan : el número de páginas, después el precio con envío fuera de Francia.
- Los folletos se han de encargar a

A.P.M.E.P.
13, rue du Jura - 75013 PARIS

y a pagar por giro postal internacional o por cheque bancario (a la orden de la A.P.M.E.P.) junto con el pedido.

— Si no suscribe a la A.P.M.E.P. (C.F. páginas 150-151), emplee la parte baja de la página 149, recortada siguiendo la línea punteada, para cualquier pedido de folletos, y póngala con su forma de pago.

Si suscribe, véase página 151.

suite de la page 147

Numéros "Berkeley" des brochures

1	**Mots 1** (1974) ; 100 pages, 14 F	Réflexions sur les mots-clés utilisés à l'Ecole élémentaire — et dans le premier cycle — Le point sur leur évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, sur les notations utilisées. Rubriques détachables. Textes préalablement soumis à expérimentation.
2	**Mots 2** (1975) ; 108 pages, 14 F	
3	**Mots 3** (1976) ; 136 pages, 16 F	
4	**Mots 4** (1978) ; 152 pages, 16 F	

5	**Dictionnaire** : édition de base 67 : 27 F	Effort continu depuis 1962.
6	**Dictionnaire** : millésimes 68 ; 69 ; 70 ; 71 ; 72/73 ; 74/75 ; 76/77 ; 78/79 : 40 F	Fiches cartonnées.

7	**Elem-Math 1** (1975) : Articles divers concernant l'école élémentaire ...	56 pages, 6 F
8	**Elem-Math 2** (1976) : La multiplication des naturels à l'école élémentaire	56 pages, 8 F
9	**Elem-Math 3** (1977) : La division à l'école élémentaire	100 pages, 14 F
10	**Elem-Math 4** (1978) : Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire Edition des travaux de la Commission Inter-IREM	64 pages, 13 F
11	**Elem-Math 5** (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire Edition des travaux de la Commission Inter-IREM	192 pages, 24 F
12	**Elem-Math 6 : Le triangle à l'Ecole Elémentaire** (1980). Essai de recensement des actions que l'on peut exercer sur des objets triangulaires et des conséquences qui s'ensuivent	64 pages, 11 F
13	**Carrés Magiques** (1975) : "Thème" vertical : de l'école élémentaire à l'université !	48 pages, 6 F
14	**"Savoir minimum" en fin de troisième** : Savoirs, savoir-faire, méthodes, attitudes. (39 rubriques, 826 termes)	220 pages, 21 F
15	**Géométrie au 1^er^ cycle, tome 1** (1977) — Ouvrages de documentation (réflexions générales, directions de recherches, méthodes, matériels, comportements, thèmes de travail)	208 pages, 31 F
16	**Géométrie au 1^er^ cycle, tome 2** (1978)	328 pages, 36 F
17	**Géométrie 4^e^-3^e^** : Recherche inter-IREM "O.P.C." : Réflexion critique. Evaluation (1979)	160 pages, 34 F
18	**Activités mathématiques en 4^e^-3^e^, tome 1** (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index	248 pages, 31 F
19	**Les manuels scolaires de mathématiques** (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables	280 pages, 36 F
20	**Pour une mathématique vivante en Seconde** (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !	128 pages, 19 F
21	**Pavés et bulles** (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout)	288 pages, 31 F
22	**Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques** (1977)	280 pages, 31 F
23	**Calculateurs programmables et algèbre de 4^e^** (1978) : Evaluation d'une expérimentation	120 pages, 24 F
24	**Calculatrices quatre opérations** (1979) : Elémentaire et premier cycle. Tout à fait d'actualité !	176 pages, 19 F
25	**Pour apprendre à conjecturer : Initiation au calcul des probabilités** (1968) (brochée)	232 pages, 32 F

26	**Hasardons-nous** (1976) : Nombreux thèmes illustrant le "noyau" qu'est la brochure précédente	220 pages, 31 F
27	**Mathématiques pour formation d'adultes** (1976). Noyaux-thèmes utilisés en formation d'adultes, pouvant servir en formation initiale, principalement en 1er cycle	189 pages, 21 F
28	**Du quotidien à la mathématique** (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle)	104 pages, 24 F
29	**Charte de Caen** (1972), étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques	42 pages, 3 F
30	**Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978**, dans le prolongement des Chartes précédentes (de 1968 et 1972)	42 pages, 3 F
31	**Analyse des données, tome 1** : Résumer et classifier. Exemples du premier et du second cycles .... environ	220 pages, 36 F

BROCHURES PRÉVUES POUR NOVEMBRE 1980 :

Mots 5 (90 pages environ). Vocabulaire de la géométrie plane ou spatiale. Exposant et puissance.

Activités mathématiques en 4e-3e, tome 2. Conçu sur le modèle du tome 1 (180 pages environ).

Dictionnaire : Fiches de 1980.

Math-Annales, BEPC et EN, 1980.
Math-Annales Bac ABDD', 1980.
Math-Annales Bac CE, 1980.
Math-Annales Bac FGH, 1980.
Math-Annales Deug (Sélection sujets), 1980.
Analyse des données, tome 2.

BON DE COMMANDE DE BROCHURES
SI VOUS NE VOUS ABONNEZ PAS

Sous chaque "numéro Berkeley" de brochure commandée, écrivez le nombre d'exemplaires désiré :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Commande à livrer à : NOM : ....

RUE, N° ....

VILLE ....

CODE POSTAL ....

PAYS ....

ECRIVEZ EN CAPITALES D'IMPRIMERIE

CONDITIONS D'ABONNEMENT AUX PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

L'abonnement proposé page 151 donne droit :

- au numéro de décembre 1980 du bulletin de l'A.P.M.E.P.
- aux cinq numéros du bulletin à paraître en 1981.
- à une commande des brochures actuellement disponibles (cf. liste pages 148-149) avec un rabais de 10 % sur le prix indiqué.

INFORMATION ON SUBSCRIPTION TO THE A.P.M.E.P. PUBLICATIONS

The subscription on page 151 gives right to :

- The issue of december 1980 of the A.P.M.E.P. bulletin.
- The five issues to be published in 1981.
- An order of the brochures now available (see list pages 148 and 149) with a 10 % discount on the marked price.

CONDICIONES DE SUSCRIPCIÓN A LAS PUBLICACIONES DE LA A.P.M.E.P.

La suscripción propuesta página 151 da derecho :

- al ejemplar de diciembre de 1980 del Boletín de la A.P.M.E.P.
- a los cinco ejemplares del Boletín que se publicarán en 1981,
- a un pedido de los folletos actualmente disponibles (C.F. lista en las páginas 148-149) con una rebaja de un 10 % en el precio señalado.

FICHE D'ABONNEMENT A.P.M.E.P.

A.P.M.E.P. Subscription form — Papeleta de suscripción A.P.M.E.P.
"Spécial BERKELEY", pour la période du 1/10/1980 au 31/12/1981

PRIX DE L'ABONNEMENT (cf. page 150) : $\boxed{170\ F}$ (francs français)

- *Si, en vous abonnant, vous commandez des brochures A.P.M.E.P. (cf. liste pages 148-149)*

— Indiquez, sous chaque numéro de brochure commandée, le nombre d'exemplaires désiré :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

— Calculez leur prix, port compris, avec un rabais de 10 %.

ECRIVEZ EN CAPITALES D'IMPRIMERIE
PLEASE PRINT — ESCRIBIR EN MAYÚSCULAS

- Personne ou établissement pour lequel est souscrit l'abonnement :

- Adresse à laquelle doivent être envoyés le Bulletin et, s'il y a lieu, les brochures:

N° et RUE : ....
....
CODE POSTAL : ....
VILLE : ....
PAYS : ....

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Si vous désirez l'envoi du Bulletin par avion, ajoutez un supplément de $\boxed{50\ F}$ à la somme due, et cochez ici ☐

CHEQUE JOINT de $\boxed{......\ F}$
(ou mandat-poste international)

DATE et SIGNATURE :

soit : abonnement $\boxed{170\ F}$
+
brochures $\boxed{\quad F}$
+
envoi avion du Bulletin $\boxed{50\ F}$

LE 10/5/1980

Christiane ZEHREN, Présidente de l'A.P.M.E.P., et son équipe des Publications A.P.M.E.P. (Henri BAREIL, Louis DUVERT, Paul-Louis HENNEQUIN), remercient :

- d'une part le Ministère des Affaires Etrangères, sous-direction de l'enseignement en coopération, affaires pédagogiques scientifiques, qui a bien voulu subventionner la présente publication,
- d'autre part, Mmes Catherine NOUGUEZ, Rosa FOIX, MM. Jean LE JUNTER, Albert PÉLISSIER, Georges SULTRA et José TORRÈS DEL MORAL, qui ont assuré la traduction des textes français en anglais ou en espagnol.

Ils remercient également les lecteurs de cette brochure qui, par l'intérêt qu'ils y porteront et par tout abonnement souscrit, aideront l'A.P.M.E.P. à travailler "pour un renouveau de l'Enseignement des mathématiques".

L'A.P.M.E.P. serait heureuse de recevoir toute contribution écrite à ce "renouveau", soit comme proposition d'article pour le bulletin, soit comme proposition de brochure ou de participation à une brochure. D'avance elle en remercie les auteurs éventuels.