BIBLIOTHEQUE D'INFORMATION
sur L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Publication de l'A.P.M.E.P. n° 37
(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs

TOME V
Brochure 1980

Segment - Longueur
Secteur - Angle
Vocabulaire de la géométrie
Solides

Parallèle
Vertical - Horizontal
Exposant - Puissance

Imp. VAUDREY - LYON

SOMMAIRE

Rappel :

MOTS I contient : EGALITE ; EXEMPLE et CONTRE-EXEMPLE ; COUPLE ; RELATION BINAIRE ; NOMBRE NATUREL ; ENTIERS ET RATIONNELS ; NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE ; FRACTION ; ENSEMBLES DE NOMBRES.

MOTS II contient : REPRESENTATIONS GRAPHIQUES ; APPLICATION, FONCTION, BIJECTION ; PARTITION, EQUIVALENCE ; PARTAGES ; DIVISIBILITE ; DIVISION EUCLIDIENNE ; DIVISION.

MOTS III contient : NUMERATION ; OPERATION, LOI DE COMPOSITION ; COMMUTATIVITE ; ASSOCIATIVITE ; DISTRIBUTIVITE ; ELEMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION ; PROPRIETES DES OPERATIONS ; CONGRUENCES ; ORDRE ; PROPRIETES DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE ; PREORDRE ; COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE DANS N, DANS D^+.

MOTS IV contient : APPLICATIONS LINEAIRES ; PROPORTIONNALITE ; OPERATEURS MULTIPLICATIFS ; POURCENTAGES, ECHELLES ... ; EQUATION, INEQUATION ; ENSEMBLE ; CARDINAL ; APPROXIMATION.

Les brochures de l'A.P.M.E.P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public veut être une grande équipe.

La vie d'une équipe, c'est la libre circulation de l'information entre ses membres, le droit qui appartient à chacun, le devoir qui incombe à tous, de rechercher et de poser des questions, d'en proposer des solutions, de remettre en cause...

Il était inéluctable que l'équipe ressentît le besoin d'éditer des brochures, et leur succès grandissant impose la nécessité de poursuivre l'œuvre entreprise, en appelant constamment l'attention des collègues sur la nécessité d'une collaboration permanente de tous.

Nous avons besoin de redéfinir périodiquement nos orientations fondamentales, et c'est dans les chartes ou les textes d'orientation que nous publions les mises à jour. Ces sortes de brochures seraient des bibles, sans le fait essentiel qu'elles ne prétendent pas détenir la vérité. Elles n'en doivent pas moins nourrir notre action.

Il faut aussi assurer à nos collègues une information de base sur la mathématique elle-même (Mots, dictionnaire...), sur les révolutions de notre époque (calculatrices, microprocesseurs,...), sur les sciences de l'éducation (didactique des disciplines, évaluation...), sur les matériaux pour la classe (manuels scolaires...) et, naturellement, développer les thèmes qui s'en dégagent en tenant compte de la demande, soit pour la satisfaire, soit pour la compléter, soit pour la contester, arguments à l'appui.

Nos brochures pénètrent aussi dans les classes (ainsi les Aides Pédagogiques) : elles doivent y subir les feux de l'expérimentation la plus large pour provoquer des débats ou des recherches complémentaires.

L'équipe doit aussi à ses membres la permanence de l'échange culturel. Nous avons beaucoup à travailler pour faciliter l'accès de tous les enseignants de mathématiques à une culture approfondie de la science qu'ils ont à faire aimer. Nous l'avons dit dans la Charte de Caen : "Le maître doit acquérir des connaissances qui dépassent largement celles du niveau de son enseignement".

La diversité des formations initiales ne simplifie pas le problème, et nous rejetons loin de nous l'idée de rédiger des exposés magistraux venant s'ajouter au nombre de ceux qui provoquèrent certaines nausées à l'âge du lycée, ou même de l'Université.

Nous devons trouver ensemble le langage et la présentation qui susciteront de la part de tous une curiosité active pour l'Histoire des Mathématiques, pour la beauté d'un très grand nombre de résultats ou de démarches, pour les jeux ou les paradoxes. Le maître "doit avoir eu l'occasion de poser et de résoudre des problèmes." (Charte de Caen).

Quelques brochures ont déjà partiellement répondu à ces attentes (carrés magiques, nombres complexes, musique,...). D'autres doivent suivre, puisque la demande en est parvenue, et nous attendons des idées et des collaborateurs.

La brochure A.P.M.E.P., enfin, n'est pas l'ouvrage qu'on se contente de lire, chacun pour son propre compte. Elle ne trouve sa raison d'être que dans l'exploitation commune. Le lieu idéal pour cette tâche est le "chantier", réunion de plusieurs enseignants en groupes hétérogènes, où on cherche des problèmes tirés, soit de la pratique habituelle de la classe, soit de situations pêchées dans les brochures ou ailleurs.

De ces assemblées, qui veulent surtout ne pas être doctes, surgissent les idées pour les brochures nouvelles.

Maurice CARMAGNOLE

Pour se procurer les brochures A.P.M.E.P., on peut, soit s'adresser à la Régionale A.P.M.E.P., soit écrire à :

A. BLONDEL, 154 avenue Marcel Cachin,
92320 Châtillon-sous-Bagneux

PREFACE

L'A.P.M.E.P. a pensé aider les instituteurs et d'autres enseignants dans leur enseignement de la mathématique en rédigeant les brochures MOTS.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches **La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent***.

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire : l'A.P.M.E.P. ne le peut pas et ne le veut pas. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique éventuelle. Les formateurs (I.D.E.N., professeurs d'E.N., animateurs des I.R.E.M....) trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les instituteurs isolés.

*
* *

Ces rubriques ont été proposées à quelques instituteurs groupés ou isolés ; leurs critiques, leurs suggestions ont été soigneusement prises en considération dans la mise au point. Nous demandons un peu de patience à ceux qui s'étonneraient des renvois à des rubriques... qui ne sont pas encore rédigées.

Le choix des rubriques déjà rédigées n'est pas totalement arbitraire et reflète un certain souci de priorité ; mais il a été contre-balancé par des contraintes diverses, en particulier par le volume de ces cinq brochures. Il n'y a donc pas lieu de tirer une conclusion définitive, quant à une certaine "philosophie de l'enseignement", de la présence ou de l'absence de tel ou tel mot.

---

* Pour se le procurer, s'adresser à

M. BLONDEL
154, avenue Marcel Cachin
93320 CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

Un index terminologique donne la liste des mots mathématiques qui figurent dans **les cinq** brochures.

A l'occasion des notions abordées, nous avons essayé d'indiquer les principaux termes rencontrés le plus souvent dans les ouvrages de mathématique et les manuels.

Certains termes relevant de la technique mathématique ne se trouvent pas dans les dictionnaires de la langue française ; ils n'en sont pas moins commodes **(contre-exemole,** entre autres).

*
* *

Nous insistons beaucoup sur le fait que cet ouvrage s'adresse **aux maîtres,** et nullement aux élèves.

Quant à l'utilisation de ces mots en classe, nous pensons que la question "Faut-il utiliser tel mot ?" pose mal le problème, et n'a pas de réponse générale. L'essentiel est de mettre les enfants en situation de construire les notions ; la nécessité de les nommer ne viendra que du besoin de communiquer et surtout dans les cas où ces notions se révéleront d'usage fréquent. Les mots ou les signes choisis pour les désigner ont en fait une importance secondaire, et les choix peuvent évoluer dans le temps.

Une preuve de cette importance relative du vocabulaire et de l'impossibilité d'une normalisation en ce domaine est fournie par les variations qui peuvent exister d'une rubrique à l'autre des présentes brochures (exemple : nombre octal, octaire, huital, huitaire,...).

Nous sommes persuadés qu'on peut faire, dans les classes élémentaires, un excellent travail mathématique avec un nombre très limité (pratiquement nul au début de la scolarité) de termes purement mathématiques. Et nous regretterions amèrement notre entreprise si ces quelques mots-clés ouvraient la porte encore davantage au déferlement, néfaste à notre avis, du vocabulaire technique infligé aux jeunes enfants.

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à :

Jacques LECOQ
16, rue du Plateau Fleuri, 14000 CAEN

Juin 1980
La Commission "MOTS"

SEGMENT — LONGUEUR (80)

I. INTRODUCTION

Les notions évoquées ici offrent, en sus de leur intérêt propre, d'utiles éléments de comparaison avec les notions plus délicates présentées dans la rubrique SECTEUR. Afin de faire ressortir les analogies, mais aussi de profondes différences, nous avons adopté un découpage en paragraphes, voire des modes d'expression, aussi voisins que possible dans les deux rubriques.

II. SEGMENT (DE DROITE). DEMI-DROITE

II.1. Régionnement de la droite. Sur une droite D marquons deux points X et Y ; ces points déterminent sur D (Fig. 1) trois régions d'un seul tenant, l'une hachurée, les deux autres non hachurées. Le dessin ne permet pas de décider si X ou Y eux-mêmes appartiennent à ces régions ou non. Si l'on désire préciser, on distinguera :

- le *segment ouvert* s (région hachurée, à l'exclusion des points X et Y) et le *segment fermé* $\{X\} \cup s \cup \{Y\}$;
- les deux *demi-droites ouvertes* d_1 et d_2 (chacune des deux régions non hachurées, à l'exclusion de X pour d_1 et de Y pour d_2), et les deux *demi-droites fermées* $\{X\} \cup d_1$ et $\{Y\} \cup d_2$.

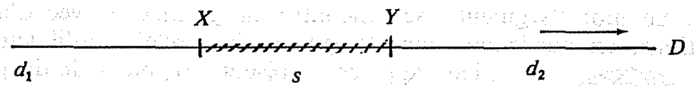


Fig. 1

La droite D est appelée le *support* de ces divers ensembles. Les points X et Y sont les *extrémités* des deux segments (ouvert ou fermé). Le point X est appelé l'*origine* des demi-droites d_1 ou $\{X\} \cup d_1$; on dit aussi que ces demi-droites sont *issues de X* (vocabulaire analogue pour Y et d_2).

Ainsi les extrémités d'un segment ouvert n'appartiennent pas à ce segment ; l'origine d'une demi-droite ouverte n'appartient pas à cette demi-droite.

Bien entendu, on pourrait aussi définir des segments "semi-ouverts" en prenant $\{X\} \cup s$ ou $\{Y\} \cup s$. Cela ne présente guère d'intérêt au niveau élémentaire, où l'on peut même souvent se passer de la distinction entre "ouvert" et "fermé".

II.2. Emploi d'une relation d'ordre. On peut caractériser autrement les ensembles précédents les uns par rapport aux autres. Pour illustrer l'expression "régions d'un seul tenant" employée ci-dessus, on peut imaginer que ces régions sont parcourues par un point mobile qui décrit la droite D dans un sens constant. Cela introduit naturellement l'une des deux relations d'ordre total (réciproques l'une de l'autre) dont on munit habituellement la droite : en effet, se donner un sens de parcours revient à se donner l'une d'elles. Ainsi, avec le sens de parcours indiqué par la flèche de la Fig. 1, le point X est antérieur au point Y ; si l'on change le sens de parcours, le point X devient postérieur au point Y, mais dans les deux cas on sait répondre à la question : Tel point de D (autre que X ou Y) est-il situé entre X et Y ?

Dès lors, on peut fonder sur cette relation d'ordre les définitions des segments et demi-droites :

- l'ensemble des points de D qui sont situés entre X et Y est l'un des deux segments d'extrémités X et Y, ouvert ou fermé selon que $\{X\}$ et $\{Y\}$ sont exclus ou inclus ;

- l'ensemble des points de D qui sont postérieurs à Y (pour l'ordre correspondant à la flèche) est la demi-droite ouverte d_2 ou la demi-droite fermée $\{Y\} \cup d_2$ selon que $\{Y\}$ est exclu ou inclus (de même d_1 ou $\{X\} \cup d_1$ est l'ensemble des points antérieurs à X).

II.3. Segments particuliers. La seule particularité qui puisse affecter les définitions qui précèdent est le cas où $X = Y$. Alors le segment fermé n'est autre que le singleton $\{X\}$, qu'on peut appeler *segment nul* ; quant au segment ouvert, il se réduit à l'ensemble vide.

II.4. Vocabulaire et notations.

II.4.1. Le mot "segment" se rencontre en géométrie avec d'autres acceptions, en particulier dans "segment de cercle", qu'il vaudrait mieux appeler à présent "segment de disque" : c'est l'une ou l'autre des parties d'un disque limitées par une corde (Fig. 2). On emploie aussi en géométrie dans l'espace l'expression "segment sphérique" (partie d'une boule limitée par un plan qui coupe la boule).

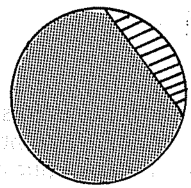


Fig. 2

Toutefois, le sens indiqué en II.1. est de loin le plus fréquent, aussi peut-on presque toujours se dispenser de le préciser ; si besoin est, il est facile de dire "segment de droite" ou "segment rectiligne".

La notation communément utilisée pour le segment fermé d'extrémités X et Y est $[XY]$ et, pour le segment ouvert, $]XY[$.

II.4.2. Bien que le mot "demi-droite" soit assez fâcheux (car une demi-droite n'est pas la "moitié" d'une droite !), il n'est pas question de revenir sur cet usage, désormais bien établi.

L'indécision est plus grande au niveau des notations. Une demi-droite étant souvent déterminée par la donnée de son origine, A par exemple, et d'un de ses points, autre que A, par exemple B (Fig. 3), les notations $[AB)$ pour la demi-droite fermée et $]AB)$ pour la demi-droite ouverte sont assez commodes, plus satisfaisantes en tout cas que l'ancienne notation Ax, où la lettre x n'avait aucune signification précise.

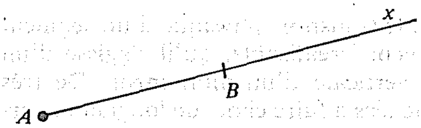


Fig. 3

Dans beaucoup de cas on peut se contenter de désigner la demi-droite par une lettre unique : c'est ce que nous faisons ici. Cela est aussi justifié que de désigner une droite par D, un cercle par C, etc., mais ne fait pas apparaître le nom de l'origine.

II.5. Segments adjacents ; demi-droites opposées. Deux quelconques des ensembles étudiés ici (segments et demi-droites) peuvent être dits *adjacents* s'ils ont la même droite pour support, une extrémité (ou origine) commune et s'ils n'ont aucun point commun en dehors d'elle ; toutefois, quand il s'agit de deux demi-droites, on dit plutôt qu'elles sont *opposées.*

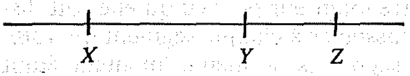


Fig. 4

On peut décrire la Fig. 4 en disant que le segment $[XY]$ est adjacent au segment $[YZ]$, ou que $[XY]$ est adjacent à $]YZ[$, ou que $]XY[$ est adjacent à $[YZ]$, ou que $]XY[$ est adjacent à $]YZ[$. De même, chacun des segments $[XY]$ ou $]XY[$ est adjacent à chacune des demi-droites $[YZ)$ ou $]YZ)$. Enfin chacune des demi-droites $[YX)$ ou $]YX)$ est opposée à chacune des demi-droites $[YZ)$ ou $]YZ)$.

III. LONGUEUR. MESURES.

III.1. Classes de segments. Diverses positions d'une tige rectiligne évoquent (Fig. 5) des segments qu'on peut dire superposables (par déplacement physique) ou isométriques (par transformation géométrique ; on rappelle que, dans le plan, les isométries sont : les translations, les rotations, les symétries et leurs


Fig. 5

composées). Introduisons une relation d'équivalence dans l'ensemble des segments en mettant dans une même classe le segment ouvert et le segment fermé ayant mêmes extrémités, et tous ceux qui sont isométriques à l'un ou à l'autre.

Chacune des classes ainsi constituées est une *longueur*. Si $[XY]$ est un représentant de la classe, cette longueur est souvent notée XY. La classe d'un singleton $\{X\}$ est la *longueur nulle*.

L'attention est attirée sur le fait que le mot "longueur" et la notation ci-dessus ne désignent *ni un ensemble de points, ni un nombre.*

III.2. Unités. Dans la vie pratique, le transport physique d'un segment à des fins de comparaison est souvent irréalisable, qu'il s'agisse d'un côté d'un champ ou d'une arête verticale d'un monument. De très bonne heure, les sociétés ont été amenées à faire choix de longueurs particulières — représentées par des étalons aisément transportables, et utilisables pour les comparaisons directes — destinées à servir d'unités pour la mesure de tous les segments. D'abord liées au corps humain (pouce, empan, coudée, pied, pas, etc.), elles ont été définies de façon de plus en plus précise. Aujourd'hui l'unité qui est légale dans la plupart des pays et qui est adoptée pour les besoins scientifiques est le *mètre*. Il était jadis rattaché au méridien terrestre et représenté par un étalon en platine iridié ; il est défini actuellement à partir de la longueur d'onde d'une certaine raie spectrale du krypton ; mais on envisage déjà de le rattacher à la vitesse de la lumière.

III.3. Mesures d'un segment. Le choix d'une longueur unité (que ce soit le mètre, un de ses multiples ou sous-multiples, le côté d'un carreau d'une feuille quadrillée, ou toute autre longueur pourvu qu'elle soit distincte de la longueur nulle) permet d'associer à chaque segment un *nombre* positif qui le mesure. Tous les segments de même longueur étant mesurés par le même nombre (pour l'unité choisie), un glissement de sens assez habituel conduit à dire que ce nombre, pour cette unité, mesure la longueur de ces segments.

Mais, bien entendu, pour un segment donné, ce nombre *dépend* de l'unité adoptée (seuls les segments nuls ont leur mesure nulle quelle que soit l'unité). Toutefois, les mesures d'un même segment S faites au moyen de deux unités u et u' se ramènent simplement l'une à l'autre en vertu de la règle très générale

$$\text{mes}_{u'}S = (\text{mes}_{u'}u) \times (\text{mes}_u S)$$

qui donne la clé de tous les changements d'unités.

Par exemple, si u est le mètre et u' le centimètre,

$$\text{mes}_{\text{cm}}S = 100 \times \text{mes}_{\text{m}}S$$

puisque la mesure du mètre en centimètres est 100.

III.4. Utilisation des mesures. L'intérêt des mesures n'est pas uniquement d'ordre pratique : car, dès qu'on dispose d'une longueur particulière (autre que nulle) qu'on adopte pour unité, elles fournissent un moyen commode d'obtenir toutes les autres longueurs. En effet, quelle que soit l'unité choisie, la relation d'équivalence définie par "avoir même mesure que" n'est autre que la relation d'équivalence définie par "avoir même longueur que".

III.5. Utilisation des longueurs. Mais cela n'entraîne pas que les mesures soient aussi les plus commodes pour l'écriture, car elles ont l'inconvénient de dépendre du choix de l'unité. En les privilégiant de façon systématique, comme on a eu tendance à le faire au cours de la décennie écoulée, on fait apparaître, au niveau des notations, des complications que l'emploi des longueurs suffit à écarter :

III.5.1. Égalité. On peut, de façon rigoureusement équivalente,

énoncer :	*écrire :*
la mesure en centimètres du segment $[XY]$ est 3	$\text{mes}_{\text{cm}}[XY] = 3$ *ou* $\text{cm} - \text{mes}[XY] = 3$
le segment $[XY]$ est de longueur 3 cm	$[XY] \in 3\text{ cm}$
la longueur XY est 3 cm	$XY = 3\text{ cm}$

Chacune de ces formulations peut avoir son intérêt selon qu'on désire mettre l'accent sur tel ou tel aspect du problème. En particulier, la seconde écriture "$[XY] \in 3\text{ cm}$" insiste sur l'aspect ensembliste qui a été utilisé ici ; mais ce n'est pas le seul point de vue possible. De toute façon, la troisième est la plus souple à l'usage, notamment lors des changements d'unité ; car elle autorise des écritures telles que

$$XY = 3\text{ cm} = 0.03\text{ m}$$

ou, avec une certaine approximation : $XY = 1{,}18$ inch (pouce anglais) ou encore $XY = 3{,}17 \times 10^{-18}$ a.l. (année de lumière). Ces écritures, et celles qui vont suivre, ne font que traduire ce qu'on sait faire sur les longueurs, à savoir les comparer, les additionner ou les soustraire, les multiplier par des nombres positifs.

III.5.2. Ordre. Si les mesures, avec l'unité u, de deux segments $[XY]$ et $[ZT]$ vérifient l'inégalité

$$\text{mes}_u[XY] \leqslant \text{mes}_u[ZT] \quad ,$$

avec toute autre unité u' on aura l'inégalité

$$\text{mes}_{u'}[XY] \leqslant \text{mes}_{u'}[ZT]$$

mais il est beaucoup plus simple de dire que la longueur XY est inférieure ou égale à la longueur ZT et d'écrire

$$XY \leqslant ZT$$

On définit ainsi une relation d'ordre total sur l'ensemble des longueurs ; cet ensemble admet un plus petit élément (la longueur nulle), mais n'admet pas de plus grand élément.

Remarquons que l'ordre sur les longueurs est lié à l'inclusion sur les segments ; ainsi (Fig. 4), de l'inclusion $[XY] \subset [XZ]$ on tire $XY \leqslant XZ$. Inversement, il est possible de choisir des segments représentant deux longueurs inégales de telle sorte que l'un soit inclus dans l'autre.

III.5.3. Addition. Si l'on tient à rester dans le domaine numérique, pour exprimer une propriété de deux segments adjacents (voir Fig. 4) on est obligé d'écrire :

$$\text{Pour toute unité } u, \quad \text{mes}_u[XY] + \text{mes}_u[YZ] = \text{mes}_u[XZ]$$

En revanche, l'égalité entre longueurs

$$XY + YZ = XZ$$

est incomparablement plus maniable et plus parlante. La seule objection théorique qui lui soit opposable est que, dans une égalité comme

$$3\text{ cm} + 2\text{ cm} = (3+2)\text{ cm}$$

les signes + n'ont pas la même signification dans les deux membres, vu qu'ils traduisent, le premier une somme de longueurs, le second une somme de nombres (une objection analogue vaut pour les signes $\leqslant$ du paragraphe précédent). Répondons à cela : 1°) même dans le domaine purement numérique, on n'échappe pas à cette polysémie, car le même signe + (ou −, ou ×, ou :) traduit des opérations *distinctes* dans **N**, dans **D**, dans **Z**, etc. [OPÉRATION] ; 2°) cette polysémie se retrouve en bien d'autres domaines : addition des vecteurs, des polynomes, des fonctions, ... et l'addition des grandeurs physiques en est une manifestation particulière ; 3°) c'est précisément pour répondre aux besoins de ce genre qu'on a essayé d'élargir aux ensembles non numériques la définition des "opérations" et cela dès l'enseignement élémentaire ; cet effort paraît vain si l'on enferme ensuite les enfants dans les seules opérations numériques et si, sous prétexte de préserver leur innocence mathématique, on jette le tabou sur "l'addition des kilomètres" qu'ils ont pratiquée sans le moindre complexe du jour où ils ont enfourché un vélo.

IV. LONGUEUR ET DISTANCES.

IV.1. Etant donné un couple (X, Y) de points de l'espace, comment un point mobile, coïncidant initialement avec X, peut-il venir coïncider avec Y ? Si l'on recherche l'économie de moyens (de temps, d'énergie, etc.), il convient d'emprunter le trajet rectiligne $[XY]$. De plus, si le couple (X, Y) a pour image par une certaine isométrie le couple (X', Y'), le nouveau trajet $[X'Y']$ est l'image de $[XY]$ par la même isométrie ; en particulier, comme il existe des isométries (entre autres, la symétrie par rapport au milieu de $[XY]$) telles que (X, Y) ait pour image (Y, X), le trajet $[XY]$ convient aussi bien dans le sens de X vers Y que dans le sens de Y vers X.

En conséquence, à la classe des parties de l'espace isométriques à une partie $\{X, Y\}$ donnée (paire de points, éventuellement singleton si $X = Y$) on peut associer la longueur XY, et l'on définit ainsi une bijection de l'ensemble de ces classes vers l'ensemble des longueurs. Cela explique que la langue courante ne fait pratiquement pas de distinction entre la distance de deux points et la longueur du segment rectiligne qui les joint.

IV.2. Il n'en va pas de même dans la langue mathématique. Choisissant une longueur unité u, on appelle *distance* (pour u) l'application d_u de l'ensemble des couples de points de l'espace vers $\mathbf{R}^+$ définie par

$$\mathrm{d}_u(X, Y) = \mathrm{mes}_u[XY]$$

Cet usage est bien établi, et l'on n'en discute pas le bien-fondé ; il est d'ailleurs conforme à la définition générale du mot "distance"(*). Il convient seulement de se rappeler que la distance de deux points donnés est un *nombre* positif qui dépend de l'unité adoptée.

V. MILIEU D'UN SEGMENT.

Un segment d'extrémités X et Y étant donné, il existe sur ce segment un point Z et un seulement tel que $XZ = ZY$: ce point est appelé *milieu* du segment. La longueur des segments $[XZ]$ et $[YZ]$ est la *moitié* de la longueur du segment $[XY]$.

(*)On appelle *distance* dans un ensemble U toute application d de $U \times U$ vers $\mathbf{R}^+$ qui, quels que soient les éléments X, Y, Z de U, satisfait aux axiomes suivants :

1) $d(X,Y) = d(Y,X)$
2) $d(X,Y) + d(Y,Z) \geqslant d(X,Z)$ ("inégalité triangulaire")
3) si $X = Y$, alors $d(X,Y) = 0$
4) si $d(X,Y) = 0$, alors $X = Y$.

UNE COLLECTION DE L'A.P.M.E.P.
POUR L'ECOLE ELEMENTAIRE

ELEM-MATH

ELEM-MATH I (56 pages)

regroupe quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Elémentaire parus dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Voici le sommaire :

ROUQUAIROL (IREM de Paris) : Recherche dans l'enseignement élémntaire : code de navigation dans les chenaux.

LECOQ (E.N. de Caen) : Induction et récurrence.

P. LEGOUPIL (Instituteur, Valconville) : Recherche à partir d'un jeu télévisé dans une classe rurale à trois cours (CE2, CM1, CM2).

B. COLLIN (C.E.S. Saint-Laurent de la Salanque) : Fonction sélective des exercices.

Travaux du Séminaire APMEP, Lyon, Septembre 1974 : Noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire.

A. FOULIARD (Instituteur, Ecole Decroly, Saint-Mandé) : Pliages et modèles mathématiques (article reproduit de la revue **Activités Recherches Pédagogiques**).

M. CARMAGNOLE (CM2, Pierrefeu du Var) : Le précédent et le suivant.

Prix : 4 F (port compris : 6 F).

SECTEUR — ANGLE (80)

I. INTRODUCTION.

Le mot "angle" admettait, dans le langage de la géométrie traditionnelle, plusieurs acceptions bien différentes, dérivant plus ou moins de la langue courante, et qui n'ont pas toutes disparu. Les programmes de 1968 et 1971 pour le premier cycle, et les instructions qui les accompagnaient, avaient tenté de remédier à cette situation et, sur certains points, y sont parvenus ; malheureusement, en incitant à une complication du vocabulaire et des notations, ils ont aussi créé de nouvelles incertitudes, si bien que les enseignants en sont venus à considérer "les angles" avec une extrême circonspection...

Voici quelques phrases tirées soit de manuels antérieurs à 1968 (phrases 1 à 6), soit de manuels de la décennie qui a suivi cette date (phrases 7 à 12). Qu'en pense le lecteur ?

1 On appelle angle une portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine.

2 La bissectrice d'un angle le partage en deux angles égaux.

3 Si un triangle est équilatéral, ses trois angles sont égaux.

4 Construire un triangle ABC, sachant que $BC = 4$ cm, $\hat{B} = 43°$, $\hat{C} = 56°$.

5 La somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat.

6 La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant d'angles plats qu'il y a de côtés moins deux.

7 On appelle angle géometrique une classe d'équivalence de cette relation(*). Si ($[A,X)$,$[A,Y)$) est un couple de demi-droites, l'angle géométrique contenant ce couple est noté $\widehat{XAY}$.

8 L'écart angulaire en radians de chacun des angles géométriques d'un triangle équilatéral est $\frac{\pi}{3}$.

(*) La relation en question est une isométrie entre couples de demi-droites de même origine.

(9) ... Cette mesure est appelée écart de l'angle géométrique $\widehat{XAY}$ et notée $E(\widehat{XAY})$. On l'appelle aussi écart angulaire du couple $([A,X),[A,Y))$.

(10) La somme des écarts des angles géométriques d'un triangle est égale à l'écart angulaire k d'un angle plat.

— Selon les manuels, on trouve par exemple :

(11 a) Le cosinus d'un écart angulaire, noté $\cos E_k(\widehat{xOy})$, ...

(11 b) Le cosinus d'un écart angulaire, noté $\cos_k E(\widehat{AOM})$, ...

(12) On utilise parfois des notations telles que $\cos 27°$ au lieu de $\cos_{180} 27$.

Nous essaierons de faire un bilan critique de ces phrases dans la présente rubrique. Mais leur simple lecture fait ressortir la nature complexe du problème : il s'agit de dégager, à l'usage de l'enseignement élémentaire et des collèges, des notions et un langage (vocables et notations) accessibles aux élèves, mathématiquement cohérents, mais laissant la voie ouverte à quelques abus tolérables, souvent consacrés par l'usage dans d'autres sciences, en particulier en physique.

Dans le dessein de fournir au lecteur des éléments de comparaison simples, nous avons adopté un découpage en paragraphes, voire des modes d'expression, aussi voisins que possible dans cette rubrique et dans la rubrique SEGMENT-LONGUEUR, à laquelle nous renvoyons une fois pour toutes.

Précisons enfin que, jusqu'au paragraphe IV.1.1. compris, on se placera dans le cas de la *géométrie plane*.

II. SECTEURS (DE PLAN)

II.1. Régionnement du plan. Dans le plan, considéré comme ensemble de points, soient x et y deux demi-droites fermées de même origine A. On constate (fig. 1) que leur réunion constitue la frontière de deux régions, chacune d'un seul tenant, l'une hachurée, l'autre sablée.

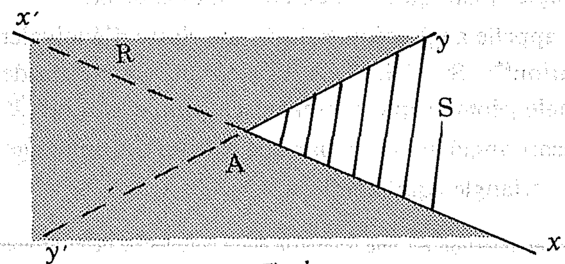


Fig. 1

Le dessin ne permet pas de décider si la frontière fait partie de l'une ou de l'autre de ces régions. Si l'on désire préciser, on parlera des deux *secteurs ouverts* S (région hachurée sans sa frontière) ou R (région sablée sans sa frontière) et des deux *secteurs fermés* $x \cup S \cup y$ ou $x \cup R \cup y$. Pour les quatre secteurs ainsi déterminés, A est appelé *sommet*, x et y sont appelés *côtés*.

Bien entendu, on pourrait prendre séparément x ou y, ou encore mettre à part le singleton $\{ A \}$; on accroîtrait ainsi le nombre des combinaisons propres à fournir des "secteurs". Toutefois ces distinctions ne présentent guère d'intérêt au niveau élémentaire, où l'on peut même se passer souvent de la distinction entre "ouvert" et "fermé".

La géométrie traditionnelle entretenait une confusion constante en appelant "angles" d'une part de tels ensembles de points comme dans la phrase ① , d'autre part des objets de natures différentes, qu'elle définissait d'ailleurs mal, susceptibles d'être "égalés" ou "additionnés" comme dans les phrases ② , ③ , ⑤ , ⑥ . En introduisant et réservant le mot "secteur" pour désigner les ensembles de points définis plus haut, les programmes de 1968 ont réalisé un progrès certain (qui aurait été encore plus net s'ils s'étaient abstenus de qualifier ces secteurs d'"angulaires")

En conséquence, une phrase telle que ① n'est plus acceptable aujourd'hui ; de même, des locutions comme "sommet d'un angle", "côtés d'un angle", etc., sont à rejeter au bénéfice de "sommet d'un secteur", "côtés d'un secteur", etc.

II.2. Secteurs saillants, secteurs rentrants. Pourvu que x et y ne soient pas des demi-droites opposées, il est aisé de caractériser chacune des deux régions hachurée et sablée, et les secteurs qui leur sont associés. En effet, ni le secteur ouvert S, ni le secteur fermé $x \cup S \cup y$ n'incluent les demi-droites x' et y' opposées à leurs côtés x et y, tandis que les demi-droites x' et y' sont incluses dans le secteur ouvert R et dans le secteur fermé $x \cup R \cup y$. Les deux premiers sont appelés *saillants*, les deux derniers sont appelés *rentrants*.

On peut se demander pourquoi nous n'avons pas essayé de fonder ces définitions sur une relation d'ordre, en procédant comme dans la rubrique SEGMENT. A première vue, en effet, du fait qu'on peut illustrer l'expression "régions d'un seul tenant" en imaginant qu'elles sont "balayées" par une demi-droite mobile tournant autour de son origine fixe A, il existe une analogie certaine entre un secteur et un segment, les côtés du secteur correspondant aux extrémités du segment.

En réalité les deux situations offrent de sérieuses dissemblances ; d'ailleurs nous n'avons pas trouvé le même nombre de régions dans les deux cas. La raison profonde de cette différence — qui est en fait la source de la plupart des difficultés rencontrées avec les "angles" — est que *la donnée d'un sens de rotation autour* *de A ne suffit pas à définir sans ambiguïté un ordre sur l'ensemble des demi-droites issues de A.* En particulier, il ne faut pas céder à la tentation de dire que S est situé "entre" x et y, dans l'espoir de l'opposer ainsi à R, en évoquant par le mot "entre" une relation d'ordre.

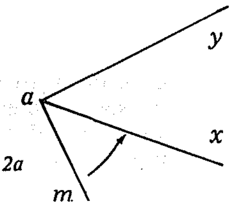


Fig. 2a

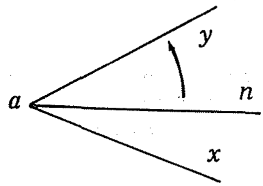


Fig. 2b

En effet, se donner le sens de rotation indiqué par les flèches des Fig. 2a et 2b ne permet pas de décider si la demi-droite x est antérieure à la demi-droite y, ou le contraire. Pour pouvoir décider, il faut choisir *arbitrairement* une demi-droite issue de A, qu'on s'interdit de franchir. Si l'on choisit pour "coupure" la demi-droite m de la fig. 2a, x est antérieure à y ; mais, si l'on prend n comme coupure, c'est y qui est antérieure à x (Fig. 2b). Changer le sens de rotation reviendrait à remplacer "antérieure" par "postérieure", mais laisserait subsister la difficulté.

Sous une forme un peu différente, mais au fond équivalente, sur la droite on est assuré que, si un point mobile se déplace dans un sens constant, il ne repassera jamais par une position précédemment atteinte ; au contraire, une demi-droite qui balaie le plan dans un sens constant repasse, et même un nombre illimité de fois, par une position donnée. C'est seulement si l'on a pratiqué une coupure qu'on retrouve une situation analogue à celle de la droite et, du même coup, un régionnement en trois régions.

II.3. Secteurs particuliers. Des cas particuliers se présentent lorsque les demi-droites x et y sont portées par la même droite.

II.3.1. Ou bien $x = y$; alors :

- le saillant fermé se réduit à la demi-droite x, qu'on peut appeler *secteur nul*, et le rentrant ouvert, complémentaire (*) de celui-ci dans le plan, est le plan privé de cette demi-droite ;
- le rentrant fermé est le plan, qu'on peut appeler *secteur plein*, et le saillant ouvert complémentaire est l'ensemble vide.

II.3.2. Ou bien x et y sont opposées : alors le critère utilisé en II.2 ne permet plus de distinguer l'une de l'autre les régions S et R, qui sont toutes deux des demi-plans ouverts ; une information supplémentaire devient nécessaire : par exemple un point tel que B non situé sur la droite frontière (Fig. 3) peut servir à caractériser la région hachurée. (Toutefois le critère II.2 permet encore d'opposer le demi-plan ouvert S au demi-plan fermé $x \cup R \cup y$: de ce point de vue ils apparaissent, le pre-

(*) Le mot "complémentaire" est pris ici dans son sens ensembliste (Voir MOTS IV, Ensembles IV, 4). Ne pas confondre cet emploi avec la notion d'angles complémentaires, héritée de la géométrie traditionnelle.

mier comme un cas limite des saillants ouverts, le second comme un cas limite des rentrants fermés).

Il est usuel d'appeler ces demi-plans des *secteurs plats.*

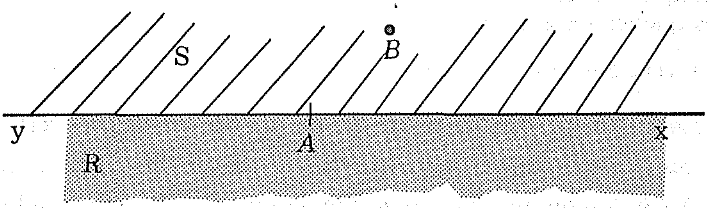


Fig. 3

Ces cas particuliers appellent l'attention sur certaines lacunes que présentent les définitions les plus courantes des secteurs :

- A vouloir identifier les secteurs convexes (*) aux secteurs saillants ou plats, on serait amené à ranger parmi ceux-ci le secteur plein, ce qui n'est pas admissible.

- La définition par intersection ou réunion de demi-plans n'est valable que si les droites frontières se coupent ; sinon, on risque d'introduire soit une bande de plan, soit une droite, et on laisse échapper le secteur nul parmi les saillants fermés, et le plan privé d'une demi-droite parmi les rentrants ouverts.

II.4. Vocabulaire et notations. Le mot "secteur" se rencontre en géométrie avec d'autres acceptions, en particulier dans "secteur circulaire" qu'il vaudrait mieux à présent remplacer par "secteur de disque" : c'est l'une ou l'autre des parties d'un disque limitées par deux rayons (Fig. 4). Voir aussi les remarques de vocabulaire dans DIÈDRE (ci-dessous VII) et POLYÈDRE (rubrique GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE).

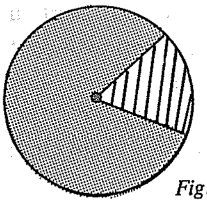


Fig. 4

Toutefois le sens défini ci-dessus en II.2 est de loin le plus fréquent, aussi peut-on presque toujours se dispenser de le préciser : si besoin est, l'appellation la plus logique serait "secteur de plan" (la plus usuelle étant "secteur angulaire").

D'ailleurs on pourrait presque faire l'économie du mot : la plupart du temps il suffit d'employer les *substantifs* "saillant" et "rentrant" comme nous le faisons ici.

On rencontre, pour les secteurs de sommet A, de côtés x et y, des notations telles que (Ax, Ay) que nous ne saurions recommander : elles évo-

(*) Dire qu'un ensemble E de points est *convexe* signifie que, quels que soient les points A et B de E, le segment $[AB]$ est inclus dans E.

quent un tout autre objet, à savoir un *couple* de demi-droites, et laisse penser que (Ax,Ay) et (Ay,Ax) sont des secteurs distincts.

La notation qui semble apporter le maximum d'informations est celle qu'indique le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., à savoir, pour les secteurs autres que les secteurs plats :

$\widehat{[xAy]}$ pour le saillant fermé, $\widehat{]xAy[}$ pour le saillant ouvert,

$\widecheck{[xAy]}$ pour le rentrant fermé, $\widecheck{]xAy[}$ pour le rentrant ouvert.

Dans ces quatre notations les lettres x et y peuvent être interverties.

Rem. 1 - Si l'on désire éviter les accumulations de symboles et si l'on ne s'intéresse pas à la distinction ouvert-fermé, on peut écrire simplement "saillant xAy" ou "rentrant xAy"

Rem. 2 - Il arrive souvent que la demi-droite x soit définie par son origine A et un autre, B, de ses points ; de même y. Des notations comme $\widehat{[BAy]}$ ou $\widehat{[BAC]}$ sont en général tout-à-fait claires.

II.5. Secteurs adjacents. On dit que deux secteurs sont *adjacents* s'ils sont situés dans un même plan, s'ils ont un (éventuellement deux) côté(s) commun(s) et s'ils n'ont aucun point commun en dehors de ce(s) côté(s).

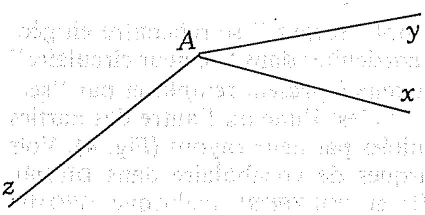


Fig. 5

Ainsi on peut décrire la Fig. 5 en disant que le saillant $\widehat{[xAy]}$ est adjacent au rentrant $\widecheck{[yAz]}$, ou que $\widehat{]xAy[}$ est adjacent à $\widecheck{[yAz]}$ ou que $\widehat{[xAy]}$ est adjacent à $\widecheck{]yAz[}$, ou que $\widehat{]xAy[}$ est adjacent à $\widecheck{]yAz[}$; de même chacun des saillants $\widehat{[xAy]}$ ou $\widehat{]xAy[}$ est adjacent à chacun des rentrants $\widecheck{[yAx]}$ ou $\widecheck{]yAx[}$.

II.6. Secteurs opposés par le sommet. Lorsque deux saillants sont tels que chacun d'eux ait pour côtés les demi-droites opposées aux côtés de l'autre, on dit qu'ils sont *opposés par le sommet*. Ainsi, sur la Fig. 1, les saillants (ouvert ou fermé) de côtés x' et y' sont opposés par le sommet aux saillants (ouvert ou fermé) de côtés x et y.

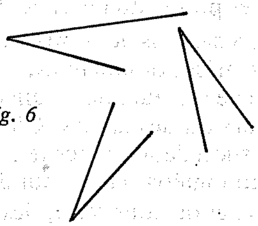
Rien n'empêcherait d'étendre cette définition aux rentrants, mais en pratique cela n'est guère utile.

Il va de soi que les expressions introduites en II.5 et II.6 remplacent avantageusement les expressions analogues formées avec le mot "angle", expressions dont il convient de se débarrasser.

III. ANGLE DE SECTEURS. MESURES.

III.1. Classes de secteurs. Diverses positions d'un éventail, bloqué avec une ouverture donnée, évoquent des secteurs qu'on peut dire superposables par déplacement physique (Fig. 6) ou isométriques (par transformation géométrique ; on rappelle que dans le plan les isométries sont : les translations, les rotations, les symétries et leurs composées). Introduisons une relation d'équivalence dans l'ensemble des secteurs du plan en mettant dans une même classe le saillant ouvert et le saillant fermé ayant les mêmes côtés, et tous les saillants qui sont isométriques à l'un ou à l'autre ; on définirait de même des classes de rentrants et la classe des secteurs plats.

Fig. 6



Chacune des classes ainsi constituées s'appelle un *angle de secteurs*. Si $[\widehat{xAy}]$ est un représentant d'une classe de saillants, celle-ci pourra être notée $\widehat{xAy}$, et appelée angle de secteurs saillants ou, par abréviation, *angle saillant* ; de même, si $[\overset{\smile}{xAy}]$ est un représentant d'une classe de rentrants, celle-ci pourra être notée $\overset{\smile}{xAy}$, et appelée par abréviation *angle rentrant* ; enfin les classes des secteurs nuls, plats, ou pleins peuvent être appelées respectivement *angle nul, angle plat, angle plein.*

Jouant un rôle tout-à-fait analogue à celui de la longueur (pour les segments), la présente notion appelle une remarque identique : les expressions et notations ci-dessus ne désignent *ni des ensembles de points ni des nombres.*

Rem. 1 - De même qu'en II.4, des notations du type $\widehat{BAy}$ ou $\widehat{BAC}$ peuvent être employées ; on peut même les abréger en $\widehat{A}$ lorsqu'il n'existe aucun doute sur le secteur qui sert à définir l'angle (comme le cas est fréquent dans le triangle).

Rem. 2 - Même lorsque x et y, de même origine A, sont opposées, la notation $\widehat{xAy}$ (éventuellement $\overset{\smile}{xAy}$) peut *sans ambiguïté* désigner l'angle plat.

Revenons à la phrase (3) de l'introduction. A l'époque où elle a été écrite, la prétendue "égalité" masquait en fait l'équivalence que nous avons employée plus haut ; aujourd'hui — pourvu qu'on interprète les "angles" qui figurent dans la phrase comme des "angles de secteurs" — elle est beaucoup moins critiquable. Le seul reproche concernerait les "trois" angles égaux du triangle équilatéral, car celui-ci *n'a qu'un angle* ; mais c'est une facilité de langage assez courante dans l'emploi de l'égalité. D'ailleurs, les énoncés "modernes" (8) et (10) ne sont pas moins fautifs, en insistant sur "*chacun* des angles géométriques du triangle équilatéral" et en parlant de "l'écart angulaire *d'un* angle plat'', comme s'il existait plusieurs angles plats ! On ne déracine pas les vieilles habitudes en un jour.

III.2. Unités. En astronomie, en topographie, si A désigne l'œil de l'observateur, B, C, D, E des corps célestes ou des points du paysage, le transport physique des secteurs $[\widehat{BAC}]$ ou $[\widehat{DAE}]$ à des fins de comparaison ne peut être envisagé. Dès les civilisations mésopotamiennes, les besoins pratiques ont imposé le choix d'un angle de secteurs particulier, destiné à servir d'unité pour la mesure des secteurs ou des angles. C'est là l'origine du *degré* (°) ; le *grade* (gr) en est un succédané moderne ; le *radian* (rad) est plus adapté aux besoins de la trigonométrie et surtout de l'analyse. On utilise aussi parfois *l'angle droit* (v. ci-dessous V.2), désigné par D.

Les Mésopotamiens avaient déjà divisé le degré en 60 *minutes* (') ; plus tard la *seconde* (") fut introduite sur le même modèle, et ces témoins lointains de la numération sexagésimale ont survécu jusqu'à nos jours ; mais la tendance actuelle, encore accentuée par l'emploi des calculatrices, est d'utiliser uniquement la subdivision décimale tant pour le degré que pour le grade ou le radian. Il est de plus en plus courant d'écrire 2,75° au lieu de 2°45'.

III.3. Mesures d'un secteur. Le choix d'un angle de secteurs unité (autre que l'angle nul) permet d'associer à chaque secteur un *nombre* qui le mesure. Tous les secteurs de même angle étant mesurés par le même nombre (pour l'unité choisie), un glissement de sens assez habituel conduit à dire que ce nombre, pour cette unité, mesure l'angle de ces secteurs.

Mais, bien entendu, pour un secteur donné, ce nombre *dépend* de l'unité choisie (seuls les secteurs d'angle nul ont leur mesure nulle, quelle que soit l'unité). Par définition du degré, du grade, du radian, de l'angle droit, les mesures d'un secteur plat (ou de l'angle plat) sont les nombres :

180 si l'unité est le degré,
200 si l'unité est le grade,
π (soit à peu près 3,142) si l'unité est le radian,
2 si l'unité est l'angle droit.

Toutefois les mesures d'un même secteur s faites au moyen des unités u et u' se ramènent simplement l'une à l'autre en vertu de la règle très générale

$$\text{mes}_{u'} s = (\text{mes}_{u'} u) \times (\text{mes}_u s)$$

On reconnaît là les formules classiques de ''conversion'' : si la mesure en grades d'un secteur (ou d'un angle de secteurs) est 82, sa mesure en degrés est $0{,}9 \times 82$ soit 73,8 et sa mesure en radians est $\frac{\pi}{200} \times 82$ soit 1,288 à un millième près [APPROXIMATION].

III.4. Utilisation des mesures. L'intérêt des mesures n'est pas uniquement d'ordre pratique : car, dès qu'on dispose d'un angle de secteurs particulier (non nul), qu'on adopte pour unité, elles fournissent un moyen commode d'obtenir tous les autres angles de secteurs. En effet, quelle que soit l'unité choisie, la relation d'équivalence définie par "avoir même mesure que" n'est autre que la relation d'équivalence définie par "être de même angle que".

III.5. Utilisation des angles de secteurs. Mais cela n'entraîne pas que les mesures soient aussi les plus commodes pour l'écriture, car elles ont l'inconvénient de dépendre du choix de l'unité. En les privilégiant de façon systématique, comme on a eu tendance à le faire au cours de la décennie écoulée, on fait apparaître, au niveau des notations, des complications que l'emploi des angles suffit à écarter :

III.5.1. Egalité. Reprenant l'exemple ci-dessus, on est amené à trois formulations équivalentes, à savoir :

énoncer :	*écrire :*
la mesure en grades du saillant $[\widehat{xAy}]$ est 82	$\text{mes}_{gr}\ [\widehat{xAy}] = 82$
le saillant $[\widehat{xAy}]$ est d'angle 82 gr	$[\widehat{xAy}] \in 82$ gr
l'angle de secteurs $\widehat{xAy}$ est 82 gr	$\widehat{xAy} = 82$ gr

C'est visiblement la troisième écriture qui est la plus simple pour l'usage courant ; en particulier, sa souplesse lors des changements d'unité autorise des écritures telles que :

$$\widehat{xAy} = 82 \text{ gr} = 73{,}8° = \frac{\pi}{200} \times 82 \text{ rad}$$

De telles égalités entre angles de secteurs sont légitimes, *à condition toutefois qu'on n'omette pas de mentionner les noms des unités, en particulier le mot "radian" ou le symbole* rad. Une convention au moins tacite — qui gagnerait d'ailleurs à être explicitée — permet, à un niveau ultérieur, de sous-entendre l'unité radian, et de désigner par exemple l'angle droit par $\frac{\pi}{2}$; on serait sage de s'en abstenir rigoureusement dans le Premier Cycle.

Ces écritures, et celles qui vont suivre, ne font que traduire ce qu'on sait faire sur les angles de secteurs, à savoir les comparer, et, *sous certaines réserves*, les additionner ou les soustraire, et les multiplier par des nombres positifs.

III.5.2. Ordre. Si les mesures, avec l'unité u, des deux secteurs $[\widehat{xAy}]$ et $[\widehat{zAt}]$ vérifient l'inégalité

$$\text{mes}_u[\widehat{xAy}] \leqslant \text{mes}_u[\widehat{zAt}]\ ,$$

avec toute autre unité u' on aura l'inégalité

$$\text{mes}_{u'}[\widehat{xAy}] \leqslant \text{mes}_{u'}[\widehat{zAt}]$$

Il est plus simple d'écrire une inégalité entre classes :

$$\widehat{xAy} \leqslant \widehat{zAt},$$

définissant ainsi une relation d'ordre total sur l'ensemble des angles de secteurs. L'angle nul est la classe la plus petite ; tout angle saillant est inférieur ou égal à l'angle plat, lequel est inférieur ou égal à tout angle rentrant ; enfin *il existe un plus grand élément,* qui est l'angle plein.

Remarquons que l'ordre sur les classes est lié à l'inclusion sur les secteurs ; ainsi (fig. 5), de l'inclusion

$$[\widehat{xAy}] \subset [\widecheck{xAz}]$$

on tire

$$\widehat{xAy} \leqslant \widecheck{xAz}$$

Inversement, il est possible de choisir des secteurs représentant deux angles inégaux de telle sorte que l'un des secteurs soit inclus dans l'autre.

III.5.3. Addition. Si l'on tient à rester dans le domaine numérique, pour exprimer une propriété de deux secteurs adjacents (voir Fig. 5), on est obligé d'écrire :

Pour toute unité u, $\text{mes}_u\,[\widehat{xAy}] + \text{mes}_u\,[\widecheck{yAz}] = \text{mes}_u\,[\widecheck{xAz}]$

En revanche, l'égalité entre angles de secteurs

$$\widehat{xAy} + \widecheck{yAz} = \widecheck{xAz}$$

est incomparablement plus maniable et plus parlante.

L'objection relative à la signification de ce signe + a déja été discutée dans la rubrique SEGMENT. Nous préférons insister ici sur le fait que "l'addition des degrés" requiert plus de précautions que "l'addition des kilomètres", à cause de l'existence d'un angle de secteurs plus grand que tous les angles. Ainsi :

- les égalités 42° + 71° = 113° et 30° + 210° = 240° sont licites dans l'ensemble des angles de secteurs ;
- une écriture comme 240° + 150° *ne peut pas être interprétée* dans cet ensemble.

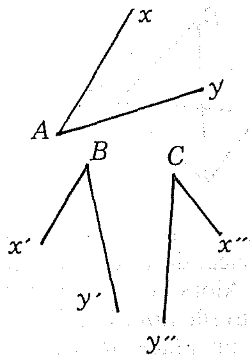
En conséquence, dans la phrase (5), si l'on interprète le mot "angle" comme "angle de secteurs", il suffirait de remplacer "*un* angle plat" par "*l'*angle plat" pour la rendre tout-à-fait acceptable. En revanche, la phrase (6) est devenue franchement condamnable, du moins si l'on s'en tient aux angles de secteurs ; pour la "traduire" , le recours aux mesures semble ici indispensable : "la somme des mesures en radians des saillants d'un polygone convexe de n côtés est $(n - 2)\pi$".

IV. ANGLE DE PAIRES DE DEMI-DROITES. ECARTS ANGULAIRES

IV.1. Angle de paires de demi-droites.

IV.1.1. Cas de demi-droites de même origine. Etant donné un couple (x,y) de demi-droites d'origine A, comment une demi-droite mobile de même origine, coïncidant initialement avec x, peut-elle venir coïncider avec y ? Plusieurs balayages sont possibles : on peut aller de x vers y dans un sens ou dans l'autre, voire faire ainsi plusieurs tours autour du point A (*). Toutefois, si l'on recherche l'économie de moyens (de temps, d'énergie, etc.), on constate que le balayage minimal est celui du secteur *saillant* $[\widehat{xAy}]$, ou éventuellement celui de l'un ou de l'autre des secteurs plats lorsque x et y sont opposées. De plus, si le couple (x,y) a pour image par une certaine isométrie le couple (x',y'), le nouveau saillant $[\widehat{x'Ay'}]$ est l'image de $[\widehat{xAy}]$ par la même isométrie : en particulier, comme il en existe une (la symétrie par rapport à la droite bissectrice, voir V.3) telle que (x,y) ait pour image (y,x), le secteur $[\widehat{xAy}]$ convient aussi bien pour le balayage de x vers y que pour le balayage de y vers x.

Dans tous les cas, dans l'ensemble des demi-droites de même origine, à la classe des parties isométriques à une partie $\{x,y\}$ donnée (paire, éventuellement singleton si $x = y$) on peut associer l'angle des secteurs saillants, éventuellement plats, de côtés x et y ; et l'on définit ainsi une bijection de l'ensemble des classes de telles parties vers l'ensemble des angles saillants ou plat.



La classe des parties $\{x',y'\}$, $\{x'',y''\}$,... isométriques à une partie $\{x,y\}$ donnée s'appelle *angle de paires de demi-droites*. Si A désigne

(*) On voit apparaître là d'autres sortes possibles d'"angles" ; elles ont ce trait commun que les couples (x,y) et (y,x) ne jouent pas des rôles équivalents, tandis que la paire $\{x,y\}$ intervient seule dans les angles tels que nous les considérons dans le présent paragraphe. Certaines de ces sortes d'angles (et en particulier les angles de couples de demi-droites) sont tout aussi naturelles et importantes que celles que nous étudions ici ; pourquoi ne sont-elles pas introduites dans l'enseignement avant le second cycle ?

l'origine commune de x et de y, il est acceptable — vu la bijection précédente — de garder pour l'angle de paires la même notation $\widehat{xAy}$ que pour l'angle de secteurs, ou $\widehat{A}$ si aucune confusion n'est à craindre.

A cet égard, ni la phrase "classique" (4) ni la phrase "moderne" (7) n'appellent de critique de fond. Seule la dénomination "angle géométrique" ne s'imposait pas ; elle a d'ailleurs heureusement disparu de la rédaction des programmes de 1978, qui se borne à dire "angle de deux demi-droites de même origine".

IV.1.2. Ainsi qu'on l'a signalé expressément, tout ce qui précède était relatif à la géométrie plane. Mais passer au cas de l'espace n'apporte pas de grands changements, tant qu'on se borne à considérer, dans l'ensemble des demi-droites, des parties $\{x,y\}$ telles que x et y aient la même origine : de telles demi-droites déterminent un plan (unique sauf si elles ont même support), et dans ce(s) plan(s) les définitions et notations des secteurs restent valables. Certes les classes d'équivalence d'un secteur donné (ou d'une partie $\{x,y\}$ donnée) se trouvent enrichies puisqu'elles comprennent désormais tous les secteurs équivalents (ou les parties équivalentes) qui sont situés dans d'autres plans ; mais ces classes continuent à jouer le même rôle que ci-dessus ; de plus, le balayage minimal entre x et y reste celui du saillant ou des secteurs plats de côtés x et y. Il n'y a donc pas lieu de renoncer à des modes d'expression usuels et commodes : par exemple, dans un tétraèdre régulier $ABCD$, parler de l'angle $\widehat{ABC}$ d'une paire d'arêtes issues du sommet B, et écrire $\widehat{ABC}=60°$ (Fig. 7).

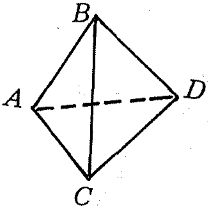


Fig. 7

IV.1.3. Il en va autrement si l'on se place dans l'ensemble L des demi-droites du plan ou de l'espace, dont les origines peuvent désormais être distinctes ou confondues. Alors la définition des classes d'équivalence doit être élargie, et une nouvelle notation devient nécessaire. Une partie $\{x,y\}$ de L étant donnée, on place désormais dans une même classe

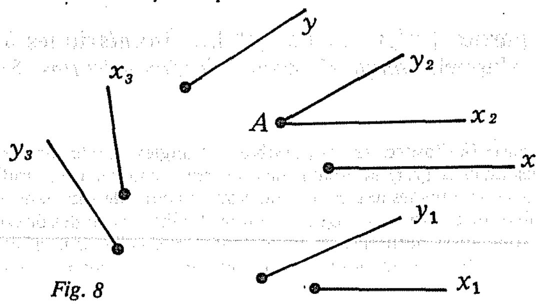


Fig. 8

d'équivalence toutes les parties $\{x_1,y_1\}$, $\{x_2,y_2\}$, ... telles que x_1, x_2, ..., et y_1, y_2, ... aient respectivement même direction et même sens que x et y et toutes les parties de L, telles que $\{x_3,y_3\}$, qui sont isométriques à l'une des précédentes (Fig. 8). C'est cette classe d'équivalence qu'on appelle désormais *angle de paires* de $\{x,y\}$: le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. indique pour cette classe la notation $\widehat{\{x,y\}}$. Dans cette définition et cette notation, chacune des demi-droites x et y peut être remplacée par un vecteur, une droite orientée ou un axe de même direction et de même sens qu'elle.

La classe d'équivalence qui vient d'être définie englobe en particulier la partie $\{ x_2,y_2 \}$ constituée de demi-droites de même origine A et toutes les parties qui lui sont isométriques : par conséquent l'angle de paires tel qu'il est défini ici apparaît comme une généralisation de celui qui a été défini en IV.1.1. De là découlent naturellement :

- les dénominations "angle nul" pour la classe des paires de demi-droites parallèles et de même sens, et "angle plat" pour la classe des paires de demi-droites parallèles et de sens opposés, et, plus généralement, des égalités du type $\widehat{\{x,y\}} = 30°$;
- l'existence d'une relation d'ordre total dans l'ensemble des angles de paires de demi-droites, avec l'angle nul pour plus petit élément et l'angle plat pour plus grand élément.

Exemple : Dans un escalier en colimaçon (Fig. 9) on peut parler de l'angle $\widehat{\{ x,z \}}$ des arêtes de deux marches (arêtes orientées par exemple de l'axe de l'escalier vers l'extérieur) ; ainsi, pour deux marches consécutives, l'angle $\widehat{\{ x,y \}}$ pourra être d'une vingtaine de degrés. On notera, pour illustrer la remarque qui a précédé, que le bas de la contremarche (demi-droite y') fournit pour cet angle un représentant $\{ x,y' \}$ dont les côtés ont même origine.

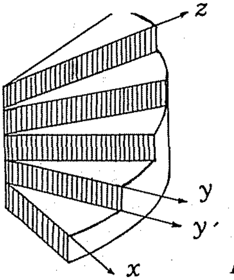


Fig. 9

IV.2. Ecarts angulaires. Gardant les notations de IV.1.3, et choisissant un angle de secteurs u pour unité, on appelle *écart angulaire* (pour u) l'application E_u de l'ensemble $L \times L$ des couples de demi-droites vers $\mathbf{R}^+$ définie par

$$E_u\,(x,y) = \text{mes}_u\,[\,\widehat{x_2Ay_2}\,]$$

Cette définition dépend évidemment de l'unité u choisie, mais elle est indépendante du point A puisque le choix d'un autre point mènerait à un saillant de la même classe.

Analogue à une distance, l'écart angulaire s'en distingue sur un point important : pour que $E_u(x,y) = 0$, il suffit que x et y soient parallèles et de même sens, sans qu'on ait nécessairement $x = y$. Cela est conforme ...

à la définition générale du mot "écart" (*) ; donc, du point de vue strict de la terminologie, l'introduction de cette notion en 1971 n'avait rien de critiquable.

En revanche son opportunité peut être fortement contestée :

• D'abord elle a alourdi les énoncés et les notations sans réelle nécessité. La phrase (8) n'apporte rien de plus que celle-ci, qui est même plus correcte : "l'angle du triangle équilatéral est $\frac{\pi}{3}$ rad", de même qu'on dit : "l'angle du pentagone régulier est 108°".

• Ensuite cette mode a provoqué de nouveaux abus de langage, qui ne le cèdent en rien aux anciens. Les phrases (8), (9), (10) (et les exemples du même genre abondent dans tous les manuels) parlent de "l'écart angulaire d'un angle", ce qui est aussi dénué de sens que pourrait l'être "la distance d'une longueur". C'est seulement au détour de la phrase (9) qu'on découvre que cet écart est *aussi* l'écart angulaire d'un couple de demi-droites — alors que la seule définition correcte est précisément celle-là.

• Enfin l'écart angulaire ne fait que rendre plus ardu l'accès à la trigonométrie par la prolifération des indices. Des deux phrases (11a) et (11b), laquelle est la bonne ? Aucune : car, si l'on joue le jeu, il faudrait écrire deux fois l'indice k ; la composée des deux fonctions E_k et $\cos_k$ a pour valeur en (x,y) le nombre $\cos_k [E_k (x,y)]$, seule écriture correcte, mais pas recommandable pour autant. Heureusement la phrase (12) nous rassure : "on utilise *parfois* (!) des notations telles que cos 27°... au lieu de $\cos_{180} 27$".

En dehors de nous, tout le monde (et c'est heureux) a continué à parler du cosinus de 27°, d'un angle d'incidence de 20°, d'une latitude de 50°, etc. c'est-à-dire à *se référer aux classes, et non pas aux nombres*. Le parti-pris numérique qui a provoqué l'introduction des écarts angulaires (et bien d'autres errements) ne pouvait qu'éloigner notre langage de celui des utilisateurs : il est à souhaiter que ces écarts... de langage ne laissent pas de traces durables dans l'enseignement.

V. BISSECTRICES

V.I. Bissectrice d'un secteur. Un secteur s, de sommet A, de côtés x et y, étant donné, il existe une demi-droite z d'origine A, et une seulement,

(*) On appelle *écart* dans un ensemble U toute application E de $U \times U$ vers $\mathbf{R}^+$ qui satisfait aux axiomes suivants :
Quels que soient les éléments X, Y, Z de U,
1) $E(X,Y) = E(Y,X)$
2) $E(X,Y) + E(Y,Z) \geqslant E(X,Z)$
3) si $X = Y$, alors $E(X,Y) = 0$
On reconnaît trois des axiomes de la distance, mais le quatrième n'intervient pas.

incluse dans s et telle que $\widehat{xAz} = \widehat{zAy}$; elle est appelée la *bissectrice* du secteur. L'angle des secteurs $[\widehat{xAz}]$ et $[\widehat{zAy}]$ est la *moitié* de l'angle du secteur s.

V.2. En particulier tout secteur plat admet une bissectrice, qui est perpendiculaire à ses côtés. Les deux secteurs qu'elle détermine sont appelés des *quadrants*, et l'angle associé aux quadrants est l'*angle droit*. Les angles plus petits que l'angle droit sont dits *aigus*, les angles saillants plus grands que l'angle droit sont dits *obtus*.

Les qualifications "droit", "aigu", "obtus" peuvent être appliquées aussi bien aux angles de paires de demi-droites qu'aux angles de secteurs ; les qualifications "aigu" et "obtus" peuvent être étendues sans inconvénient aux saillants auxquels ces angles sont associés.

V.3. (Droite) bissectrice d'une paire de demi-droites de même origine. Des demi-droites x et y de même origine A étant données, la bissectrice z

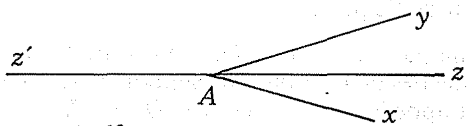


Fig. 10

de $[\widehat{xAy}]$ et la bissectrice z' de $[\overline{xAy}]$ ont le même support (Fig. 10). Cette droite est appelée (*droite*) *bissectrice* de $\{ x,y \}$.

V.4. Bissectrices d'une paire de droites sécantes. Le point A commun à

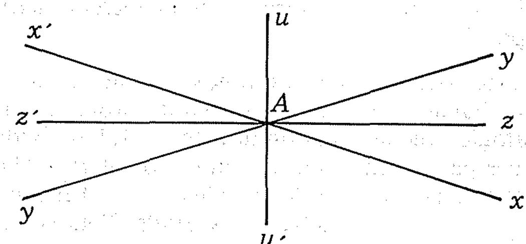


Fig. 11

deux droites sécantes détermine sur elles quatre demi-droites x, x', y, y' (Fig. 11). Les bissectrices z, u, z', u' des quatre saillants ainsi formés sont portées par deux droites perpendiculaires, qui sont les *bissectrices* de la paire de droites donnée.

V.5. Remarques. L'expression "bissectrice d'un angle" (phrase 2) est à proscrire. Le théorème classique sur l'ensemble des points équidistants des "côtés d'un angle" ne peut être conservé sous cette forme, mais seulement sous la forme beaucoup plus restreinte : "L'ensemble des points d'un saillant qui sont équidistants de ses côtés est la bissectrice du saillant". En revanche, l'énoncé "L'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes est la réunion de leurs bissectrices" peut être conservé tel quel.

VI. ANGLE D'UNE DEMI-DROITE OU D'UNE DROITE AVEC UNE DROITE (OU UN PLAN)

VI.1. Soit d'une part une demi-droite x, d'autre part une droite D (ou un plan P). Chacune des demi-droites incluses dans D (ou P) détermine avec x un angle de paires de demi-droites. Dans le cas de D il y a en général deux tels angles, dans le cas de P il y en a en général une infinité : le plus petit de tous ces angles s'appelle *angle* de x avec D (ou P) ; dans le cas particulier où x est perpendiculaire à D (ou P), il n'y a plus qu'un angle, et il est droit : c'est lui l'angle de x avec D (ou P). Hormis ce cas, l'angle ainsi défini est aigu — nul si x est parallèle à D (ou P) — et c'est l'angle de x avec sa projetée orthogonale sur D (ou P).

Exemple : la latitude d'un lieu est l'angle de la verticale ascendante du lieu avec le plan de l'équateur.

VI.2. Soit d'une part une droite G, d'autre part une droite D (ou un plan P). Chacune des demi-droites de support G fait le même angle avec D (ou P) ; on l'appelle *angle* de G avec D (ou P).

VII. DIÈDRE. ANGLE DE DEMI-PLANS OU DE PLANS.

VII.1. Dans la terminologie traditionnelle, le mot "dièdre" (littéralement : à deux faces) était une abréviation pour "angle dièdre" ; si l'on veut mettre quelque cohérence dans le vocabulaire actuel, il vaudrait mieux le considérer comme une abréviation de *secteur dièdre* (au sens de "secteur d'espace").

VII.2. Une porte tournant sur ses gonds évoque le mouvement d'un demi-plan qui "balaie" l'espace en tournant autour de sa droite frontière Δ. L'analogie avec la situation décrite en II.2 est évidente ; elle est encore renforcée par la remarque suivante. Soient P et Q des positions de la porte, x et y leurs traces sur le plancher (fig. 12) et soit A la trace de la ligne des gonds. Tout ce qui a été dit en II des secteurs (de plan) peut être répété au sujet des (secteurs) *dièdres* sous la seule condition de remplacer

"sommet A" par "*arête* Δ"
"côtés x et y" par "*faces* P et Q"

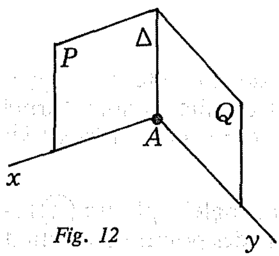


Fig. 12

VII.3. Sous forme plus mathématique, si P et Q sont des demi-plans fermés de même frontière Δ, la section de la figure par un plan perpendiculaire à Δ associe à chacun des dièdres de faces P et Q un secteur de côtés x et y, et l'on dit que ce secteur est un *rectiligne* du dièdre considéré ; de plus tous les rectilignes qu'on forme en déplaçant le plan sécant perpendiculairement à Δ sont isométriques. On montre alors que tout le contenu de III, concernant les classes, les mesures, l'égalité, l'ordre, l'addition, passe des secteurs aux dièdres. En outre, grâce à la convention naturelle qui consiste à prendre, pour représenter l'unité de dièdre, un dièdre dont les rectilignes représentent l'unité d'angle, tout dièdre est mesuré par le même nombre que ses rectilignes : on peut alors parler commodément de dièdres de 35°, de 240 gr, de 5 rad, etc.

VII.4. On définit le *demi-plan bissecteur* d'un dièdre comme on a défini la bissectrice d'un secteur en V.1 ; d'où l'extension à l'espace des notions du paragraphe V.

VII.5. Enfin :

- Etant donnés deux demi-plans de même frontière, on définit leur *angle* comme l'angle des rectilignes du dièdre *saillant ou plat* qu'ils forment ; exemple : l'angle du prisme en optique.
- Etant donnés deux plans, on définit leur *angle* comme l'angle des rectilignes du dièdre *aigu ou droit* que forment ces plans ou n'importe quels plans qui leur sont respectivement parallèles ; exemple : l'angle d'un plan incliné ou, éventuellement, vertical avec le plan horizontal.

VIII. CONCLUSION

Essayons de résumer dans quelles conditions le mot "angle" et les notions qu'il recouvre peuvent être employés sans risques excessifs, du moins aux niveaux qui nous occupent (Ecoles et Collèges).

En premier lieu, il semble indispensable de renoncer à désigner par "angle" un ensemble de points. Le mot "secteur" répond parfaitement aux besoins ; on peut même penser qu'élémentairement les secteurs *saillants* ou *plats* suffisent, à l'exclusion de tout autre adjectif, avec des notations du type "secteur xAy".

Une fois mise à part la notion de secteur, les "angles" désignent exclusivement des classes d'équivalence — au même titre que les "longueurs" ou les "aires" — mais l'ambiguïté du mot subsiste du fait que diverses relations d'équivalence peuvent être envisagées. On a pu remarquer que nous avons systématiquement utilisé des locutions *qui forment un tout*, comme "angle de secteurs", "angle de paires" (de demi-droites, ultérieurement étendu aux droites et plans), et signalé la possibilité de considérer des "angles de couples" (note du § IV.1.1.). Seules de telles locutions ont un sens précis.

Cependant — et surtout si l'on se limite aux secteurs saillants ou plats — il nous semble tolérable, et d'ailleurs conforme aux besoins courants de la physique ou de la technologie (voire du programme de trigonométrie du Premier Cycle), de rassembler sous la dénomination abrégée d'*angle* aussi bien "l'angle de secteurs saillants" que "l'angle de paires de demi-droites", avec des notations du type $\widehat{xAy}$, ou éventuellement $\widehat{A}$. On garde la possibilité de dire : "la mesure en degrés de l'angle de l'hexagone régulier est 120", mais on a aussi le droit de dire et d'écrire sans remords : $\widehat{A} = 120°$ (ou $\frac{2\pi}{3}$ rad) et $\cos \widehat{A} = -0{,}5$. Quant à l'écart angulaire, on lui accordera un charitable oubli.

Certains demanderont peut-être : Etait-il bien utile de "moderniser" la géométrie pour revenir à un vocabulaire et des notations somme toute assez classiques ? Nous croyons une telle objection trop sommaire. Des erreurs ont sans doute été commises dans la rédaction du programme de 1971, et aussi des excès dans son application ; mais en "inquiétant", ils n'ont pas eu que des aspects fâcheux. Même si l'on revient à certaines abréviations dans la langue courante, on est devenu plus conscient de la diversité des objets qu'elles recouvrent, et l'on dispose, en cas de besoin, d'expressions et de notations plus précises pour lever les ambiguïtés. Du moins est-ce avec cet objectif que nous croyons devoir, dans notre collection MOTS, participer à cette réflexion collective.

LE VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE (80)

On donne souvent en exemple la précision et la clarté du vocabulaire mathématique. Il est pourtant loin d'être exempt de reproche :

• D'une part, dans la mesure où il est autonome, il est soumis aux lois de tout langage : il évolue du fait des progrès de la science mathématique, progrès dont le foisonnement entraîne, pour le vocabulaire, un certain désordre, au moins provisoire. Du côté des enseignants, la pesanteur des traditions et des habitudes acquises lors de la formation initiale gêne la mise à jour du vocabulaire utilisé dans les classes.

• D'autre part, il cohabite nécessairement avec le vocabulaire de la vie courante, auquel il emprunte beaucoup, mais duquel il se sépare fréquemment. C'est ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, que *nombre* disparaît peu à peu de la langue de tous les jours au profit de *chiffre,* alors que, dès l'apprentissage du calcul, ces deux mots, en mathématiques, désignent deux notions fort différentes ; d'où des difficultés pour les élèves.

Ce genre de difficultés est particulièrement présent pour la géométrie enseignée pendant la scolarité obligatoire, du fait que la plupart des mots utilisés en classe le sont aussi dans le langage courant, et pas toujours avec la même signification. Et la lecture des dictionnaires usuels de la langue française est d'un faible secours pour l'autodidacte qui voudrait y contrôler l'emploi en mathématiques de certains mots courants...

Dans les rubriques qui suivent, nous étudions quelques-uns de ces mots.

TRIANGLE (80)

I. Voici une figure géométrique bien simple : le triangle. Une brochure entière de l'A.P.M.E.P. (ELEM.MATH. VI) est consacrée aux activités qu'elle peut susciter à l'Ecole Elémentaire, sans qu'il y figure la moindre définition du mot *triangle* : peu importe, puisque tout le monde sait de quoi il s'agit...

Voyons tout de même d'un peu plus près. Voici quelques phrases où ce mot est employé :

1. *Calculons l'aire du triangle ABC.*
2. *Un triangle est une ligne polygonale fermée.*
3. *La géodésie applique la trigonométrie aux triangles d'une figure (triangulation).*

4. *Marque trois points D,E,G ; trace à la règle le triangle DEG, puis hachure-le.*

Dans ces quatre phrases, le mot *triangle* a trois significations distinctes ; il peut désigner :

- soit une *surface*, comme dans la phrase 1 ; on sait effectivement calculer l'aire d'une surface triangulaire ;
- soit une *ligne*, comme dans la phrase 2 ;
- soit un ensemble de trois points, comme dans la phrase 3 ; en géodésie, on ne considère ni des lignes triangulaires, ni des surfaces triangulaires, du moins sur le terrain.

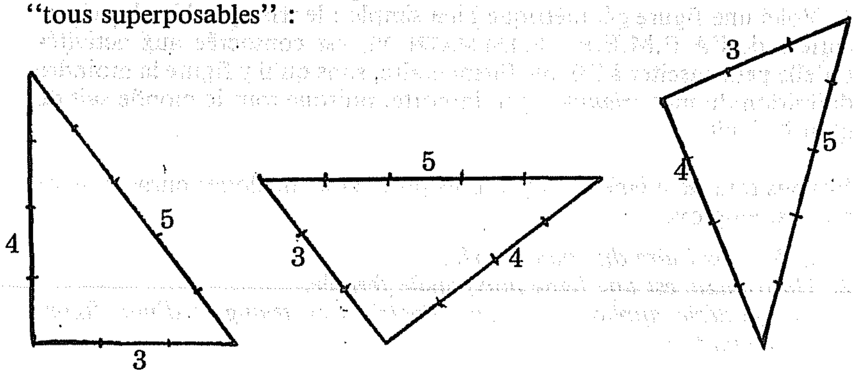
La phrase 4 évoque explicitement deux de ces sens (on trace une ligne, on hachure une surface) et implicitement le troisième puisque trois points sont marqués au départ.

Ces trois sens se retrouvent en dehors des mathématiques : un panneau routier en forme de triangle évoque le premier sens ; le triangle, instrument de musique, évoque le second ; le Triangle Austral des astronomes, le troisième.

On utilise aussi, en astronomie, en navigation, en géodésie... des triangles sphériques, curvilignes, ... Nous n'en parlerons pas ici.

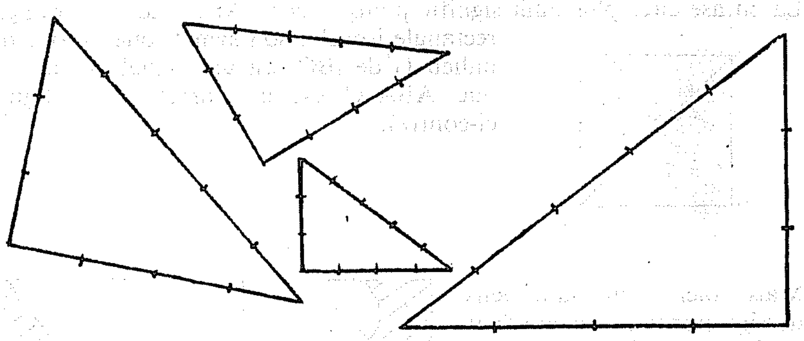
II. Voici une autre phrase :
Dès la plus haute antiquité, on a constaté que le triangle 3 ; 4 ; 5 est rectangle.
Faut-il conclure de cette phrase que *triangle* peut signifier "ensemble de trois nombres" ?
Non, sans doute, car on n'entend guère parler du triangle 4 ; 5 ; 6, et encore moins du triangle π ; $\sqrt{2}$; 4,1.

En fait, les trois nombres 3, 4 et 5 sont ici les mesures des côtés d'un triangle, une unité de longueur étant préalablement choisie.
— D'*un* triangle ? Mais n'y a-t-il pas une infinité de triangles dont les côtés ont pour mesures, avec cette unité, 3, 4 et 5 ?
— Si ; mais ils sont "tous pareils", diraient nos élèves, voulant dire "tous superposables" :



Ils mettent ainsi en évidence un autre sens du mot *triangle* : la relation, dans l'ensemble des triangles, "a mêmes longueurs de côtés que", ou encore "est isométrique à", est une relation d'équivalence ; et "*le* triangle 3 ; 4 ; 5" est une des "classes d'isométrie", c'est-à-dire une des classes de cette relation d'équivalence (voir RELATION D'ÉQUIVALENCE). A condition toutefois qu'on sache quelle unité de longueur a été choisie ! Car le triangle de côtés 3 cm, 4 cm, 5 cm et le triangle de côtés 3 km, 4 km, 5 km sont deux classes d'isométrie bien différentes...

Ces deux classes ont tout de même quelque chose de commun, qui mène à la relation, non plus d'isométrie, mais de similitude : tous les triangles de côtés 3 ; 4 ; 5, sans qu'on ait précisé l'unité de longueur, — ou encore tous les triangles dont les côtés ont des mesures proportionnelles à 3 ; 4 ; 5 quand l'unité est précisée — sont des triangles semblables. De ce point de vue, "le triangle 3 ; 4 ; 5" est une classe de similitude ; c'est un cinquième sens du mot *triangle*.



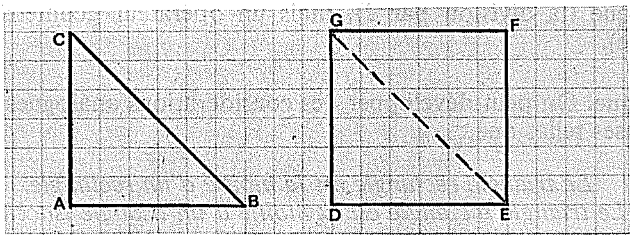
Mêmes considérations à propos des expressions courantes "*le* triangle équilatéral", "*l'*hexagone régulier", etc.

III. Dans la phrase

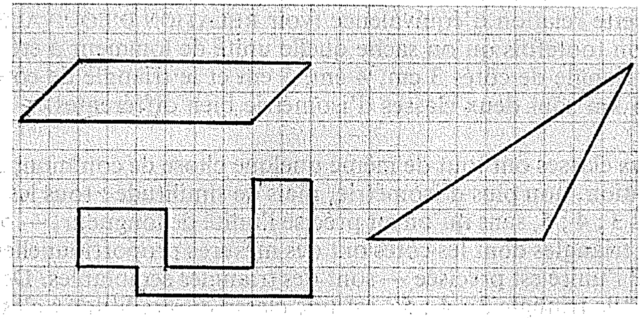
Le triangle rectangle isocèle est la moitié d'un carré

que signifie le mot "moitié" ?

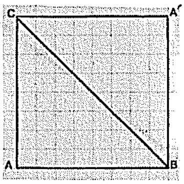
A première vue, on pourrait penser qu'il s'agit de la moitié d'une aire ; effectivement, l'aire de ABC est la moitié de l'aire du carré DEFG.



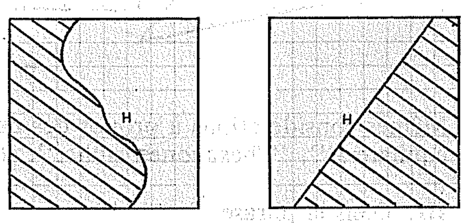
Mais bien d'autres surfaces, simples ou biscornues, ont aussi cette propriété (on en a dessiné trois ci-dessous) sans qu'on énonce que "chacune d'elles est la moitié d'un carré".



La phrase citée plus haut signifie plutôt ceci : "ABC étant un triangle rectangle isocèle, son symétrique autour du milieu H de [BC] est un triangle A'BC tel que ABA'C est un carré" (voir figure ci-contre).



Mais voici maintenant deux dessins montrant chacun deux surfaces de même aire, moitié de celle d'un carré, et de plus déduites l'une de l'autre par la symétrie autour du centre H du carré : on pourrait tout aussi bien dire, à propos de chacun d'eux, que la surface hachurée est la moitié du carré.



Dans de telles phrases, le mot "moitié" évoque, non plus un opérateur numérique (la division par 2), mais un opérateur géométrique (une symétrie).

Remarque. On peut développer des considérations analogues à propos de phrases telles que :

Le triangle rectangle est la moitié d'un rectangle.
Le triangle rectangle est la moitié d'un triangle isocèle.

IV. Notations pour un triangle

Un triangle, dans chacun des sens de ce mot évoqués en I, est bien déterminé par la donnée de ses trois *sommets*. D'où l'idée d'utiliser les noms de ces sommets pour le désigner.

La notation {A,B,C,} , qui désigne un ensemble de trois points, met en valeur le troisième sens vu en I.1, avec l'intention d'exclure les deux autres sens.

La notation (A,B,C) est très contestable ; car elle désigne un triplet de points, tout comme (2 ; 7 ; 4) désigne un triplet de naturels, tout comme (A,B) désigne un couple de points (voir COUPLE). Or, le plus souvent, un triangle n'est pas un triplet de points, car il n'y a pas lieu d'imposer un ordre aux trois sommets d'un triangle. Au contraire, convenons de désigner un repère du plan en citant, dans cet ordre : le point origine, le point qui aura comme couple de coordonnées (1 ; 0), le point qui aura comme couple de coordonnées (0 ; 1) ; alors, trois points non alignés A,B,C étant donnés,

(A,B,C) , (B,C,A) , (C,A,B) , (C,B,A) , (A,C,B) , (B,A,C) désignent six repères distincts (et non pas un triangle).

Finalement, la notation la plus simple pour désigner le triangle dont les sommets s'appellent A,B et C est ABC ; c'est celle que nous avons déjà utilisée dans ce qui précède.

Encore faut-il remarquer que ce même triangle peut se noter alors de six façons distinctes :

ABC , ou BCA , ou CAB , ou CBA , ou ACB , ou BAC .

Il est toujours loisible de remplacer "ABC" par "le triangle ABC" si on redoute une ambiguïté, par exemple en géométrie dans l'espace pour distinguer le "triangle ABC" du "plan ABC" (c'est-à-dire du plan contenant les trois points A,B,C).

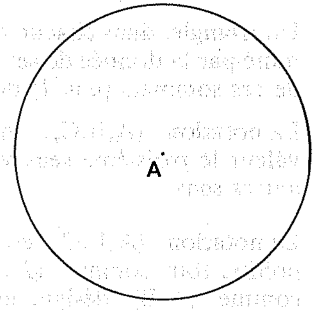
V. Le lecteur a pu remarquer que, en essayant de parler des seuls triangles, nous n'avons pas évité l'emploi d'autres mots mathématiques : *point, ligne, surface, repère, carré, isocèle, rectangle, côté, longueur, aire, mesure, symétrique,...*

CERCLE - DISQUE (80)

I. Pour parler des "ronds", nous disposons de deux mots : *cercle*, qui désigne une ligne, et *disque*, qui désigne une surface.

Un cercle a une longueur ; un disque a une aire.

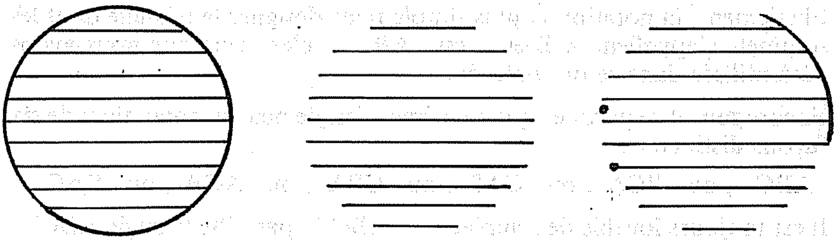
La définition de *cercle* ne présente pas de difficulté, dès lors qu'on possède la notion de distance : le cercle de centre A et de rayon 2 cm est l'ensemble des points du plan qui sont à 2 cm du point A. Il se trace à l'aide d'un compas.



Le disque, en gros, c'est l'intérieur d'un cercle. Mais la recherche d'une définition plus précise amène à distinguer entre une distance *strictement inférieure* à 2 cm et une distance *inférieure ou égale* à 2 cm. On aboutit ainsi aux définitions suivantes :

Cercle : ensemble des points dont la distance à un point donné est égale à une distance donnée.
Disque fermé : ensemble des points dont la distance à un point donné est inférieure ou égale à une distance donnée.
Disque ouvert : ensemble des points dont la distance à un point donné est strictement inférieure à une distance donnée.

Mais le dessin d'un disque pose problème. On peut suggérer les figures suivantes :



disque fermé *disque ouvert*

La figure de droite représente un ensemble de points qui n'est ni un disque ouvert, ni un dique fermé ; il s'agit de la réunion d'un disque ouvert, d'un arc du cercle frontière et d'une paire de points de ce cercle.

Remarques :

1° Le mot *circonférence* a pratiquement disparu ; naguère, il désignait la ligne, ou la longueur de cette ligne, ou la mesure de cette longueur après le choix d'une unité.

2° En géométrie dans l'espace, on utilise les mots suivants :
Sphère : ensemble des points dont la distance à un point donné est égale à une distance donnée.
Boule fermée : ensemble des points dont la distance à un point donné est inférieure ou égale à une distance donnée.
Boule ouverte : ensemble des points dont la distance à un point donné est strictement inférieure à une distance donnée.

II. Le point donné s'appelle le *centre* (du cercle, du disque, de la sphère, de la boule).
La distance donnée s'appelle le *rayon*. Mais *rayon* désigne aussi tout segment ayant pour extrémités le centre et un point du cercle ou de la sphère.

Dans la phrase suivante, *rayon* est employé successivement avec les deux sens ci-dessus :

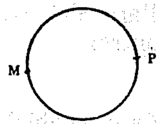
Traçons le cercle de centre E et de rayon 3 cm ; la tangente à ce cercle en l'un de ses points, G, est perpendiculaire au rayon [EG].

Diamètre, lui, peut désigner :
- soit une longueur : *Le diamètre est le double du rayon.*
- soit un segment : *Un diamètre est une corde qui passe par le centre.*
- soit une droite : *Le diamètre commun à deux cercles non concentriques est un axe de symétrie pour la figure.*

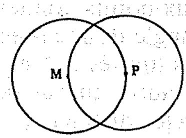
En outre, chacun des deux mots *rayon* et *diamètre* peut désigner, non plus une longueur, mais la mesure d'un segment pour une unité choisie :

R étant le rayon d'un cercle, la mesure de la longueur de ce cercle est $2\pi R$.
C'est le cas aussi de plusieurs autres mots que nous rencontrerons plus loin.
Pour illustrer l'ambiguïté de ces deux mots, remarquons que, étant donné deux points M et P, il existe :

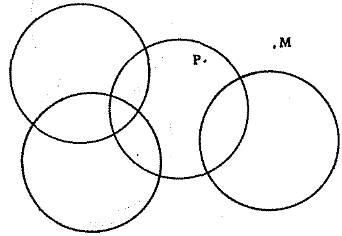
- un cercle unique de diamètre [MP]



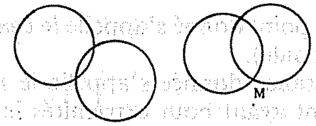
- deux cercles de rayon [MP]



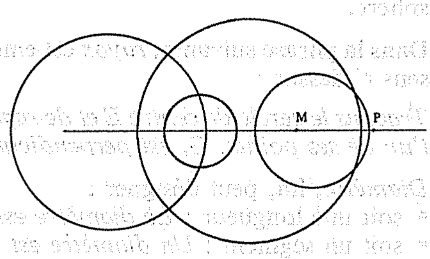
- une infinité de cercles de rayon MP (MP désignant une longueur) :



• une infinité de cercles de diamètre MP (MP désignant une longueur)

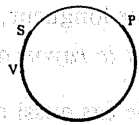


• une (autre) infinité de cercles de diamètre MP (MP désignant une droite), à savoir les cercles centrés sur la droite MP.

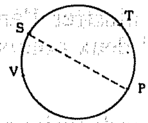


III. Soit S et P deux points d'un cercle ; on parle souvent, à tort, de *l*'arc SP ; on oublie que ces deux points délimitent *deux* arcs de cercle. On peut les distinguer :

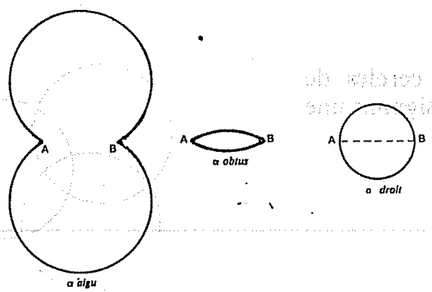
• soit en marquant un point V sur l'arc visé et en parlant alors de l'arc SVP ;



• soit en précisant qu'il s'agit du petit arc ou du grand arc (sur la figure ci-contre, c'est le grand arc SP qui est en trait épais), à moins que [SP] soit un diamètre... auquel cas il faut parler de l'arc SVP ou de l'arc STP (voir figure ci-contre).

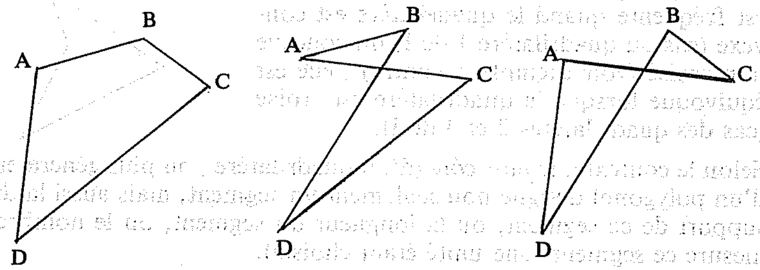


Quant à "*l*'arc capable" de naguère, il était mal nommé puisque, A et B étant deux points donnés, l'ensemble des points Z du plan tels que $\widehat{AZB}$ soit un angle donné α est, non pas *un* arc de cercle, mais la réunion de *deux* arcs limités à A et B (ces deux points étant exclus) et symétriques l'un de l'autre autour de la droite AB ; ces deux arcs sont inclus dans deux cercles distincts (sauf si α est l'angle droit).



QUADRILATÈRE (80)

I. La donnée de trois points (non alignés *) détermine un triangle et un seul. Au contraire, la donnée de quatre points (trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés *) détermine, non pas *un* quadrilatère, mais *trois* quadrilatères, qui se différencient par la façon dont on joint les points :



quadrilatère 1 *quadrilatère 2* *quadrilatère 3*

Il n'est donc pas question d'assimiler un quadrilatère à un ensemble de quatre points, ni de le désigner par une notation du type { A,B,C,D }.

Un quadrilatère n'est pas davantage un quadruplet de points, contrairement à ce qu'on pourrait croire en remarquant que l'ordre intervient dans la façon de joindre les quatre points. Car il existe 24 quadruplets dont les termes sont les quatre points, et seulement 3 quadrilatères ; par exemple, (A,B,C,D) et (B,C,D,A) suggèrent chacun de tracer les quatre mêmes segments dans deux ordres distincts, mais tels qu'on aboutit au même quadrilatère, celui qui est numéroté 1.

On convient généralement de désigner le quadrilatère 1 par l'une des 8 écritures suivantes :

ABCD ; BCDA ; CDAB ; DABC ; ADCB ; DCBA ; CBAD ; BADC ,
le quadrilatère 2 par ABDC ou DBAC ou ... (huit écritures),
le quadrilatère 3 par BDAC ou CADB ou ... (huit écritures).

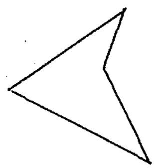
Remarquons que ces 24 écritures sont les 24 "mots" qu'on peut former avec les quatre lettres A,B,C,D prises chacune une fois et une seule et qui correspondent aux 24 quadruplets évoqués plus haut.

II. Les quatre points A,B,C,D sont les *sommets* du quadrilatère ABCD.

* "Points alignés" signifie couramment "points situés sur une même droite" (et non pas "sur une même ligne"...)

Les quatre segments [AB] , [BC] , [CD] et [DA] sont les *côtés* du quadrilatère ABCD, qui peut être défini comme étant la réunion de ces quatre segments ; un quadrilatère est alors considéré comme une ligne (ligne polygonale fermée à quatre côtés).

Mais *quadrilatère* peut aussi désigner une surface : celle dont la frontière est la ligne précédente. Cette interprétation est fréquente quand le quadrilatère est convexe (cas du quadrilatère 1 de I) ou concave non croisé (voir exemple ci-contre) ; elle est équivoque lorsque le quadrilatère est croisé (cas des quadrilatères 2 et 3 de I).



Selon le contexte, le mot *côté* (d'un quadrilatère , ou plus généralement d'un polygone) désigne non seulement un segment, mais aussi la droite support de ce segment, ou la longueur du segment, ou le nombre qui mesure ce segment (une unité étant choisie).

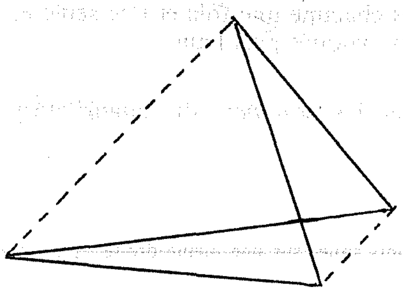
III. Deux *côtés consécutifs* sont deux côtés ayant une extrémité commune. Deux côtés non-consécutifs (d'un quadrilatère) sont dits *côtés opposés*.

Ainsi, [AB] et [CD] sont côtés opposés pour les quadrilatères 1 et 2 (mais ce ne sont pas des côtés du quadrilatère 3). Pour le quadrilatère 3, [AC] et [BD] sont opposés, bien que sécants.

Dire que deux sommets sont *consécutifs* signifie que ces deux sommets sont les extrémités d'un même côté du quadrilatère. Deux sommets non consécutifs sont dits *sommets opposés*. Par exemple, A et D sont consécutifs pour les 3 quadrilatères 1 et 3 ; ils sont opposés pour le quadrilatère 2.

Diagonale signifie "segment limité par deux sommets opposés". Tout quadrilatère a *deux* diagonales. Par exemple, les diagonales du quadrilatère 1 sont [AC] et [DB] ; celles du quadrilatère 2 sont [AD] et [CB] ; celles du quadrilatère 3 sont [AB] et [CD].

Mais le mot *diagonale* — tout comme le mot *côté* — peut désigner aussi, selon le contexte, une droite, ou une longueur, ou un nombre.



Si l'on veut dire que "les diagonales d'un quadrilatère se coupent si et seulement si le quadrilatère est convexe", il est préférable de préciser qu'il s'agit des segments diagonaux. Car les deux droites-diagonales d'un quadrilatère, convexe ou non, se coupent (sauf dans certains cas où elles sont parallèles : voir exemple ci-contre).

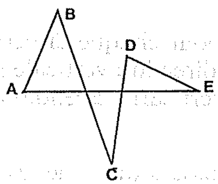
On retrouve que quatre points donnés dans le plan donnent naissance à six paires de points (extrémités respectives des quatre côtés et des deux diagonales de l'un quelconque des trois quadrilatères 1, 2, 3). Si on donne quatre points non situés dans un même plan, on trouve les six arêtes d'un tétraèdre (voir GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE) dont ils sont les sommets.

IV. Les définitions précédentes de "sommets consécutifs" et de "côtés consécutifs" s'étendent au cas de tout polygone. Il n'en est pas de même pour "sommets opposés" et "côtés opposés".

Diagonale d'un polygone signifie d'abord "segment dont les extrémités sont deux sommets non consécutifs du polygone", mais peut désigner aussi une droite, une longueur ou un nombre.

Exemple : les diagonales (segments) du pentagone ci-contre sont

[AC] , [AD] , [BD] , [BE] et [CE].



DIRECTION — SENS (80)

I. L'usage le plus courant du mot *parallèle* concerne les droites et les plans (voir d'autres sens dans PARALLÈLE).

L'expression "deux droites parallèles" a commencé par désigner deux droites d'un même plan et sans point commun. L'étude de droites plus nombreuses deux à deux parallèles mène à la relation "est parallèle à" dans l'ensemble des droites du plan (ou de l'espace). On l'a rendue réflexive en décidant que toute droite est parallèle à elle-même. Dès lors, elle est transitive. De plus, elle est symétrique. C'est donc une relation d'équivalence ; ce qui facilite l'énoncé de certains théorèmes par utilisation des propriétés propres aux relations d'équivalence. Par exemple, l'énoncé

Si $d \,//\, d'$ *et si* $d' \,//\, d''$, *alors* $d \,//\, d''$

est vrai, que d et d'' soient confondues ou non.

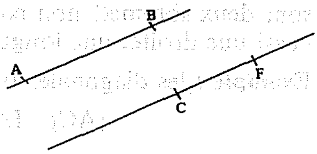
(Voir dans ORDRE, page 12, un exemple de simplification analogue, obtenue en passant des relations notées $>$ et $<$ aux relations — réflexives, elles — notées $\geqslant$ et $\leqslant$).

Les classes de cette relation d'équivalence sont appelées les *directions* (on précise "direction de droites" en géométrie dans l'espace si on craint une confusion avec "direction de plans", qui se définit de manière analogue).

On peut parler de segment parallèles (segments dont les droites supports sont parallèles) ou même de couples-de-points parallèles (définition analogue).

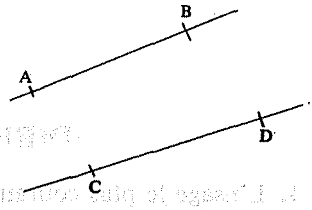
II. Mais, à propos des couples de points, s'introduit une notion supplémentaires : celle de *sens*.

Les droites AB et CF étant parallèles, les couples (A,B) , (C,F) , (B,A) , (F,C) sont parallèles ; de plus (voir figure), (A,B) et (C,F) sont de même sens ; alors que (A,B) et (F,C) sont de sens contraires ; (A,B) et (B,A) sont de sens contraires.

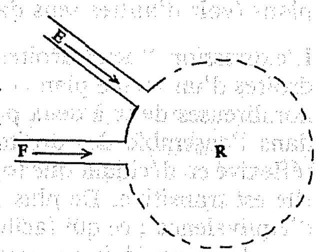


On peut ainsi distinguer, pour chaque direction, deux sens. Par exemple, en un lieu donné, à la direction verticale sont associés le sens (vertical) ascendant et le sens (vertical) descendant.

Remarque. L'intuition pousse à dire que les couples (A,B) et (C,D) (voir ci-contre) ont le même sens, bien que les droites AB et CD ne soient pas parallèles ; elle s'appuie sur le fait que ces deux droites sont "presque parallèles"...

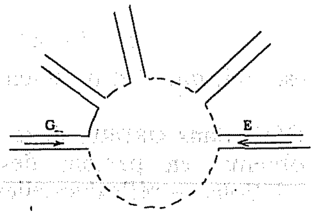


C'est ainsi que les véhicules E et F, se rendant au rond-point R par deux avenues "qui font un petit angle", vont "dans le même sens". (En fait, on introduit ainsi la notion d'"angle aigu" formé par deux demi-droites de même origine)



Mais, de proche en proche, par transitivité on en arriverait à dire que les deux véhicules E et G vont... dans le même sens !

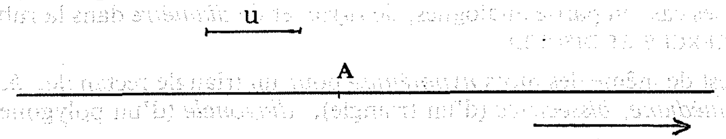
On a préféré, en mathématique, réserver les expressions "de même sens" et "de sens contraires" à deux couples de points, ou à deux demi-droites, ayant la même direction.



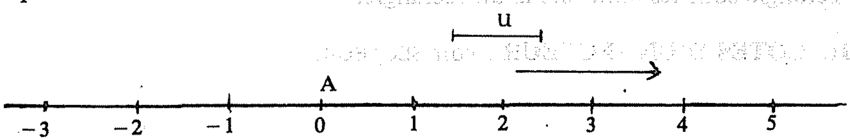
III. Le langage courant est souvent en contradiction avec ce qui précède :

"Le train en direction de Paris est annoncé" ; "Direction Vincennes" ; etc. : ces emplois de *direction* se rattachent plutôt à la notion mathématique de "sens" ; notion qu'en revanche on retrouve dans l'expression "rue à sens unique".

IV. Pour repérer les points d'une droite donnée *d*, on est amené à choisir sur cette droite une unité de longueur *u*, un point A (dit *origine*) et un sens (choisi parmi les deux sens possibles).



On peut alors *graduer* la droite. Au lieu de "droite graduée", on dit le plus souvent *axe*.



On peut dès lors parler, à propos d'axes dont les droites supports sont parallèles, d'"axes de même sens" et d'"axes de sens contraires".

V. On parle aussi de "sens", non plus sur une droite ou sur une direction de droites, mais sur un cercle ou sur les cercles d'un même plan (ou sur d'autres lignes) : "sens giratoire à un carrefour".

VI. En géométrie plane, *perpendiculaires* et *orthogonaux* sont souvent interchangeables, en particulier tant qu'il s'agit de droites, de directions, d'axes (on dit aussi "axes rectangulaires").

En géométrie dans l'espace, on réservait naguère "droites perpendiculaires" à "droites se coupant à angle droit", par exemple dans l'expression "perpendiculaire commune à deux droites" (expression qui garde son intérêt) ; "droites orthogonales" signifiait "deux droites de directions orthogonales, sécantes ou non".

CÔTÉ (80)

I. CÔTÉ (d'un triangle, d'un quadrilatère, plus généralement d'un polygone) a plusieurs sens :

Il désigne : chacun des segments constituant le polygone
ou la droite support d'un tel segment
ou la longueur d'un tel segment
ou la mesure, pour une unité de longueur donnée, d'un tel segment.

(Voir les cas, en partie analogues, de *rayon* et de *diamètre* dans la rubrique CERCLE ET DISQUE).

Il en est de même des mots *hypoténuse* pour un triangle rectangle, *hauteur, médiane, bissectrice* (d'un triangle), *diagonale* (d'un polygone).

Pour un rectangle non carré, la *longueur* est la plus grande des ... longueurs des côtés, la *largeur* en est la plus petite. Longueur et largeur du rectangle sont les *dimensions* du rectangle.

II. CÔTÉS D'UN SECTEUR : voir SECTEUR.

SOLIDES (80)

I. INTRODUCTION

I.1. Le mot *solide* recouvre de façon un peu vague des objets aussi divers qu'un domino, un anneau, une pomme de terre ; grosso modo, un solide est une portion d'espace délimitée de toutes parts par une surface rigide, sa *frontière*.

De même qu'on peut mesurer la *longueur* d'un segment, l'*aire* d'une surface, on peut mesurer le *volume*, la *capacité* ou l'*encombrement* d'un solide. Nous n'aborderons pas cette question dans la présente rubrique.

Nous porterons notre attention sur ceux des solides dont les formes sont qualifiées parfois de "géométriques" : dés à jouer, jetons, dominos, boîtes, cartons, valises, berlingots, chapeaux de clown, abat-jour, cornets à glace, rouleaux à pâtisserie, manches à balais, boules, balles, bouteilles, pyramides d'Egypte, meubles, immeubles, tiges, poteaux, anneaux ...

I.2. Si l'on reprend l'ensemble hétéroclite d'objets mentionné plus haut, pour tenter une mathématisation, on constate qu'un rôle important est tenu par la *convexité*. (On appelle qu'un ensemble de points est dit *convexe* lorsque le segment qui joint deux points de l'ensemble est inclus dans celui-ci, et cela pour toutes les façons possibles de choisir les deux points : par exemple, une boule de billard, une brique pleine, sont des solides convexes ; un anneau n'en est pas un).

En effet, tant qu'on s'en tient à des solides convexes, l'aspect mathématique et l'aspect intuitif sont en bonne concordance ; notamment les notions de *frontière* et de *région intérieure* s'imposent d'elles-mêmes. Au contraire, si l'on aborde les ensembles non convexes, des difficultés apparaissent dès la géométrie plane (par exemple, qu'est-ce que "l'intérieur" du polygone croisé ci-dessous ?). Ces difficultés se retrouvent aggravées en géométrie dans l'espace, et il devient nécessaire d'introduire des conventions qui n'ont rien de "naturel".

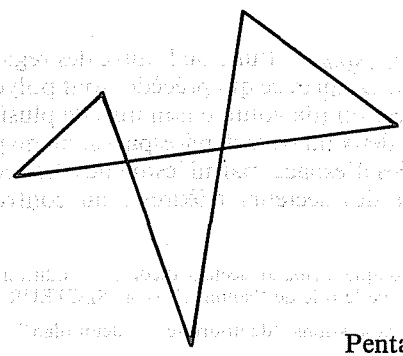


Fig. 1 Pentagone croisé

C'est pourquoi, dans cette rubrique, nous nous attacherons principalement aux solides convexes.

II. POLYÈDRES

II.1. Imaginons un bloc de terre glaise qu'on tronquerait plusieurs fois, avec une lame plane, dans diverses directions de plans, jusqu'à obtenir un solide dont la frontière est la réunion de parties de plans. Celles-ci, qui sont appelées les *faces* (ou *facettes*) du solide, sont nécessairement des polygones convexes : ainsi un cube est délimité par six faces carrées. Deux faces contiguës ont en commun un côté, qu'on appelle une *arête* du solide : ainsi un cube a douze arêtes. Enfin, les sommets des faces polygonales s'appellent aussi *sommets* du solide : ainsi un cube a huit sommets.

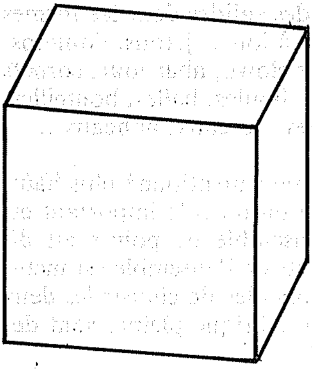
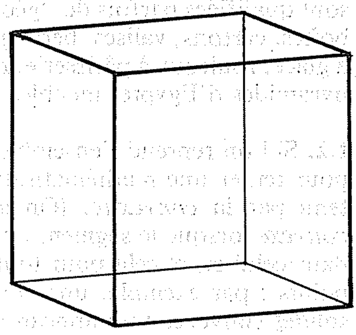


Fig. 2



2a : cube opaque

2b : cube transparent

Les solides obtenus par un tel procédé sont convexes ; on les appelle *polyèdres convexes* (étymologiquement, le mot "polyèdre" signifie : "à plusieurs faces", sous-entendu : "planes").

On se gardera de confondre polyèdre et *secteur polyèdre* : un secteur polyèdre est, lui aussi, une portion d'espace dont la frontière est la réunion de parties de plans, mais cette portion d'espace est *illimitée* ; de plus, elle n'a qu'un seul sommet, ses arêtes sont des demi-droites et non des segments, et elle a pour faces, non des polygones, mais des secteurs de plans*.

II.2. Appelons *demi-espace*** l'une ou l'autre des régions délimitées dans l'espace par un plan. D'après ce qui précède, tout polyèdre convexe apparaît comme l'intersection (de volume non nul) de plusieurs demi-espaces. Toutefois, avec un, deux ou trois demi-espaces, on ne peut constituer que des portions illimitées d'espace, parmi lesquelles des secteurs dièdres (voir SECTEUR-ANGLE) et des secteurs trièdres ; au contraire, quatre demi-

* Cette description s'applique même au secteur dièdre, à condition qu'on ait distingué sur son arête *un* point qui joue le rôle de "sommet" (voir SECTEUR-ANGLE).

** A comparer avec les expressions "demi-droite", "demi-plan".

espaces convenablement disposés ont pour intersection un véritable polyèdre convexe ; celui-ci a quatre sommets. Cela nous amène aux définitions suivantes, qui sont équivalentes :

- Tout polyèdre convexe est l'intersection (de volume non nul) *bornée* (c'est-à-dire non illimitée) d'au moins quatre demi-espaces.

- Tout polyèdre convexe est l'*enveloppe convexe* d'au moins quatre points non situés dans un même plan (l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est la plus petite région convexe de l'espace contenant ces points).

II.3. Tétraèdres. Comme on vient de le voir, les plus simples des polyèdres convexes ont quatre faces : ce sont les *tétraèdres* ; on reconnaît qu'ils ont quatre sommets : A, B, C, D et six arêtes : [AB], [AC], [AD], [BC], [CD] et [BD], cette dernière étant cachée sur la figure 3a ci-contre et dessinée sur la figure 3b.

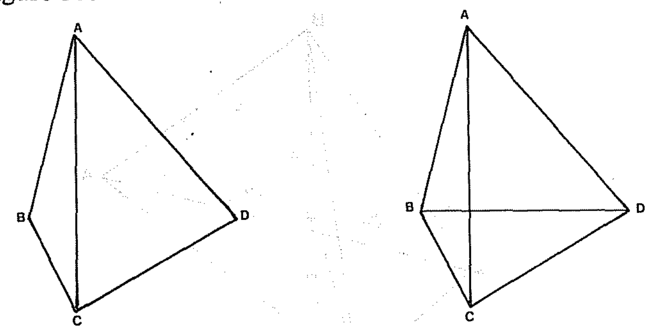
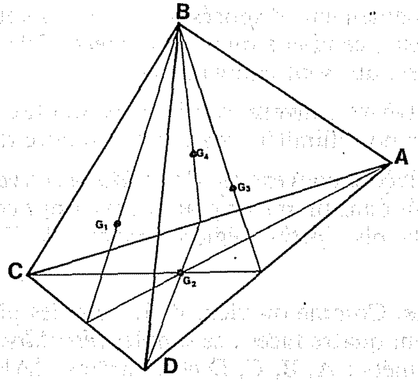


Figure 3 3a : tétraèdre opaque 3b : tétraèdre transparent

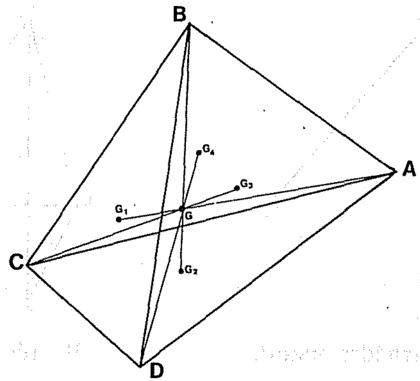
Le tétraèdre joue dans l'espace un rôle analogue à celui du triangle en géométrie plane ; en particulier, de même qu'un triangle est entièrement déterminé par la donnée de trois points non situés sur une même droite, la donnée de quatre points non situés dans un même plan détermine entièrement le tétraèdre qui les a pour sommets*. Certaines des propriétés des triangles s'étendent facilement : par exemple, le tétraèdre admet une sphère circonscrite, une sphère inscrite, un centre de gravité (point de concours des segments joignant chaque sommet au point de concours des médianes de la face opposée) ; certaines autres propriétés, comme l'existence d'un point de concours des hauteurs, ne s'étendent qu'à certains tétraèdres ; en revanche, des propriétés nouvelles apparaissent, comme celle des segments joignant les milieux de deux arêtes opposées : ces segments concourent en leur milieu commun, qui est le centre de gravité défini ci-dessus.

* Noter la différence avec le cas du plan où la donnée de quatre points, trois quelconques d'entre eux n'étant pas sur une même droite, détermine *trois* quadrilatères.

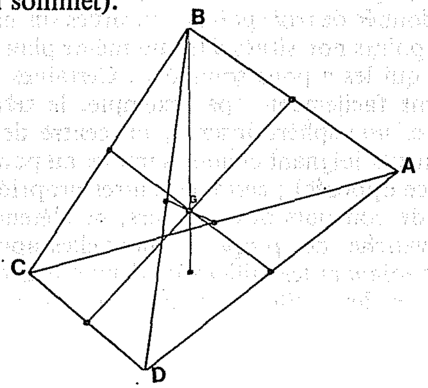
Figure 4 :



4a : Centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 des 4 faces.



4b : Centre de gravité G du tétraèdre, point commun aux 4 "médianes"[AG_1], [BG_2], [CG_3], [DG_4] (aux trois quarts de chacune d'elles à partir du sommet).



4c : Les 3 segments joignant les milieux de 2 arêtes opposées concourent en G (le même qu'en 4b), lequel est le milieu commun à ces 3 segments.

II.4. On pourrait être tenté de poursuivre la discussion pour introduire des pentaèdres convexes, des hexaèdres convexes, etc., de la même façon qu'on a considéré dans le plan des pentagones convexes, des hexagones convexes, etc. En fait, la situation est foncièrement différente : alors que tous les polygones convexes ayant le même nombre de côtés ont une certaine ressemblance (et en particulier autant de sommets que de côtés), il ne suffit pas de savoir qu'un polyèdre convexe a 5 faces pour avoir une idée de sa forme, car il peut assi bien avoir 5 sommets et 8 arêtes que 6 sommets et 9 arêtes (fig. 5). Ni le nombre des sommets, ni celui des arêtes ne le caractériseraient mieux, d'ailleurs ; car, si un polyèdre convexe a 5 sommets, il peut aussi bien avoir 5 faces et 8 arêtes que 6 faces et 9 arêtes ; et, s'il a 9 arêtes, il peut aussi bien avoir 5 faces et 6 sommets que 6 faces et 5 sommets. La complexité croît avec le nombre de sommets, ou de faces, ou d'arêtes.

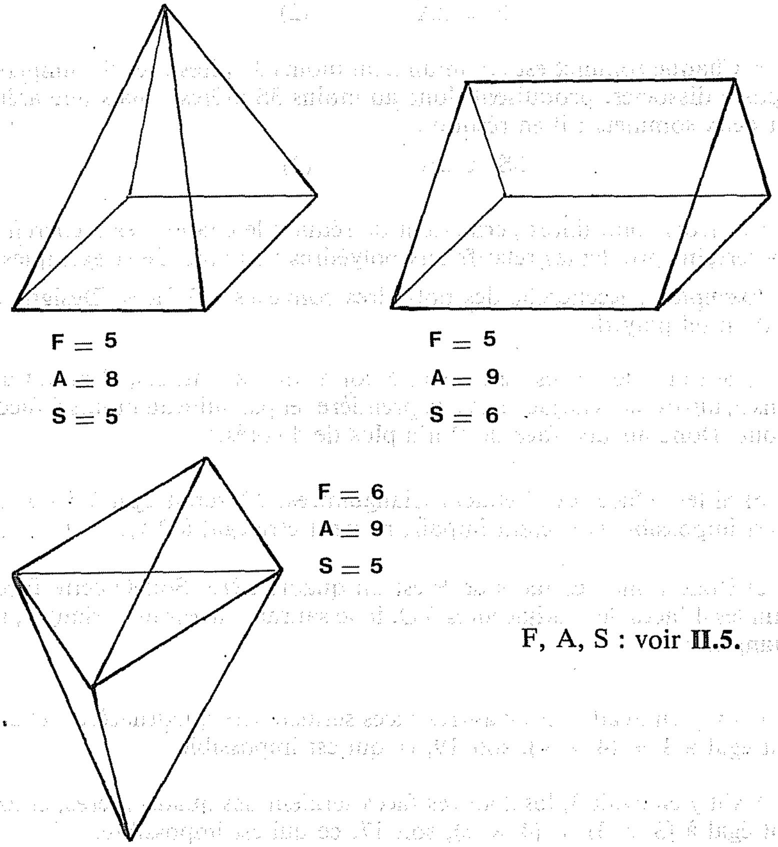


Figure 5

II.5. Mais on peut démontrer que, pour tout polyèdre convexe, le nombre F des faces, le nombre S des sommets et le nombre A des arêtes sont liés par l'égalité

$$S + F = A + 2 \qquad (1)$$

dite "égalité d'Euler".

Le lecteur pourra le contrôler pour chacun des polyèdres convexes cités dans cette rubrique et pour ceux qu'il imaginera.

On dispose en outre de deux inégalités :

• Chaque face a au moins 3 côtés ; les F faces, supposées dissociées, ont donc au moins 3F côtés ; mais une arête est un côté commun à deux faces , il en résulte :

$$3F \leqslant 2A \qquad (2)$$

• Chaque sommet est commun a au moins 3 arêtes ; les S sommets, supposés dissociés, produisent donc au moins 3S arêtes ; mais une arête joint deux sommets ; il en résulte :

$$3S \leqslant 2A \qquad (3)$$

Ces trois contraintes permettent de réduire le champ des recherches dans certains problèmes relatifs aux polyèdres ; en voici deux exemples :

Exemple 1. Recherche des polyèdres convexes à 5 faces. Désignons par P un tel polyèdre.

a) Si l'une des faces de P avait 5 côtés (ou davantage), P aurait au moins 5 autres faces adjacentes à la première, et par suite au moins 6 faces en tout. Donc aucune face de P n'a plus de 4 côtés.

b) Si les 5 faces de P étaient triangulaires, 2A serait égal à 5×3, ce qui est impossible (15, étant impair, ne peut être égal à 2A).

c) Donc l'une des faces de P est un quadrilatère. Soit Q cette face. Parmi les 4 faces de P adjacentes à Q, il ne saurait y avoir ni 1 triangle, ni 3 triangles :

• s'il y en avait 1, les 4 autres faces seraient des quadrilatères, et 2A serait égal à $3 + (4 \times 4)$, soit 19, ce qui est impossible ;

• s'il y en avait 3, les 2 autres faces seraient des quadrilatères, et 2A serait égal à $(3 \times 3) + (4 \times 2)$, soit 17, ce qui est impossible.

Les 4 faces adjacentes à Q peuvent être triangulaires : voir fig. 6 ; alors $S = 5$ et, d'après (1), $A = 8$.

Elles peuvent encore être deux triangles et deux quadrilatères (ces 2 quadrilatères ne peuvent être adjacents) : voir fig. 6 ; alors S = 6 et d'après (1), A = 9.

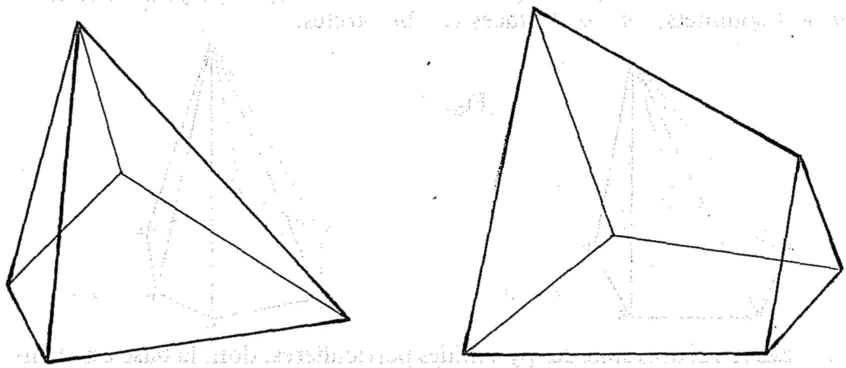


Fig. 6

Exemple 2. Il n'existe pas de polyèdre convexe ayant 7 arêtes. En effet, si A était égal à 7, (1), (2) et (3) entraîneraient :

$$\begin{cases} F + S = 9 \\ 3S \leqslant 14 \\ 3F \leqslant 14 \end{cases} \quad \text{donc aussi :} \quad \begin{cases} F + S = 9 \\ S \leqslant 4 \\ F \leqslant 4 \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} F + S = 9 \\ F + S \leqslant 8 \end{cases} \quad \text{ce qui n'est pas réalisable}$$

Remarque. Le lecteur pourra s'assurer que, A étant un naturel plus grand que 5 et différent de 7, choisi arbitrairement, il existe des polyèdres convexes ayant A arêtes (on pourra distinguer deux cas : A pair, A impair).

II.6. Une classification générale des polyèdres convexes serait très délicate ; du moins peut-on distinguer des classes simples de polyèdres. Nous allons en examiner quelques-unes.

III. PYRAMIDES (CONVEXES)

III.1. Considérons dans un plan un polygone convexe P et un point S extérieur à ce plan, et joignons S à chacun des sommets A,B,C,D... de P. Le solide dont les faces sont, d'une part P, d'autre part les triangles SAB, SBC, SCD,... est appelé *pyramide*.

P est sa *base*, les triangles SAB, SBC,... sont ses *faces latérales*. Bien que chacun des points A, B, C, D,..., S soit un sommet du polyèdre obtenu, S est appelé plus spécialement *le sommet* de la pyramide.

On vérifie sans peine que, si P a n côtés, le polyèdre obtenu a $n + 1$ sommets, $n + 1$ faces et $2n$ arêtes.

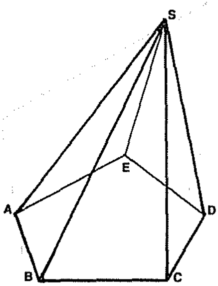
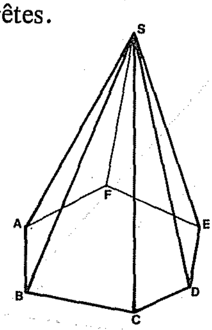


Fig. 7

$n = 5$



$n = 6$

Les tétraèdres sont des pyramides particulières, dont la base est triangulaire ; de surcroît, n'importe laquelle des 4 faces pouvant être prise pour "base", tout tétraèdre peut être considéré comme pyramide de 4 façons.

III.2. *Pyramide régulière.* Une pyramide est dite *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier et que la droite joignant son sommet au centre de ce polygone est perpendiculaire au plan de la base. Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles, isométriques entre eux.

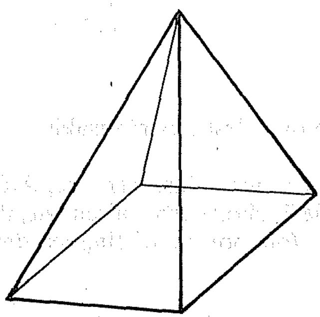


Fig. 8

Exemples : a) la Pyramide de Chéops était, dans son état originel, une pyramide régulière à base carrée ;

b) une pyramide qui a pour base un triangle équilatéral et pour faces latérales trois triangles isocèles est régulière.

Remarque. Dans ce dernier exemple, si de plus ces trois triangles isocèles sont eux aussi équilatéraux, on obtient alors un *tétraèdre régulier* (voir ci-dessous V). Mais, tandis que *les* tétraèdres réguliers sont *des* pyramides triangulaires régulières, *les* pyramides triangulaires régulières ne sont pas, en général, *des* tétraèdres réguliers (alors que "tétraèdre" et "pyramide triangulaire" sont synonymes).

III.3. Tronc de pyramide.

Si l'on coupe une pyramide (convexe) par un plan parallèle au plan de base, on obtient une pyramide et un *tronc de pyramide* (convexes).

Appelons n le nombre de côtés du polygone de base ; alors, le tronc de pyramide a $n + 2$ faces, $3n$ arêtes, $2n$ sommets.

Quand la pyramide est régulière, le tronc de pyramide est lui-même dit *régulier*. Exemple : la pyramide de Chéops, dans son état actuel, est à peu près un tronc de pyramide régulier à base carrée.

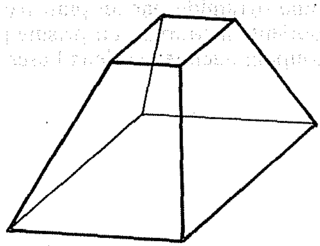
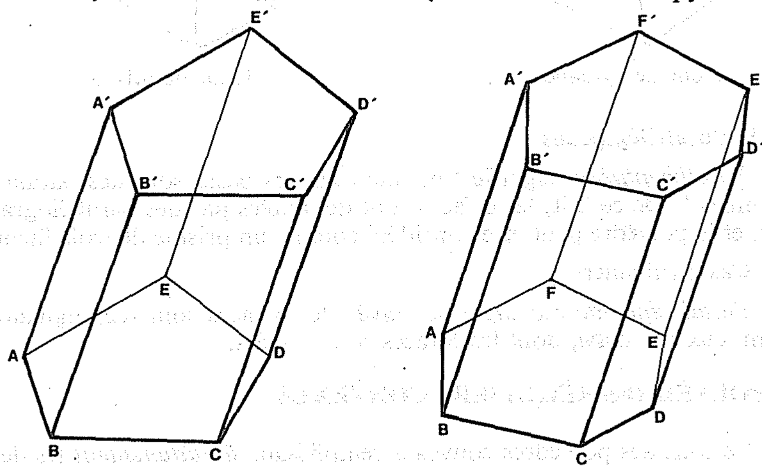


Fig. 9

IV. PRISMES

IV.1. En partant d'une surface polygonale plane convexe à n sommets A, B, C, D..., on définit une autre sorte de polyèdres en traçant des segments [AA′], [BB′], [CC′], [DD′], ..., situés d'un même côté du plan de ABCD..., tous de même direction et de même longueur. La surface polygonale A′B′C′D′... est l'image de la première par une translation. Ces deux polygones et les n parallélogrammes tels que ABB′A′ délimitent un *prisme*, dont les *bases* sont les deux polygones (les plans des bases sont parallèles) ; les parallélogrammes constituent la *surface latérale* du prisme ; [AA′], [BB′], ... en sont les *arêtes latérales*. Un tel prisme a $n+2$ faces, $3n$ arêtes et $2n$ sommets (comme le tronc de pyramide).



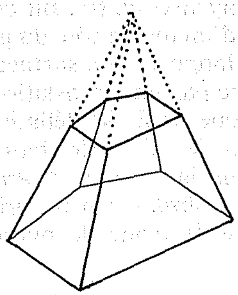
$n = 5$ Fig. 10 $n = 6$

IV.2. Si les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases, autrement dit si les faces latérales sont des rectangles, le prisme est dit *prisme droit* (sinon, c'est un *prisme oblique*). Exemple : les prismes utilisés en optique sont généralement des prismes droits à bases triangulaires.

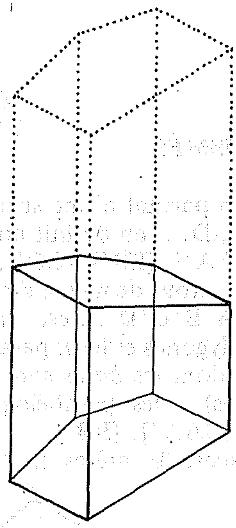
Si de plus les bases sont des polygones réguliers, le prisme est dit *prisme régulier*.

Signalons une bizarrerie de vocabulaire : alors qu'un "tronc de pyramide" s'obtient en coupant une pyramide par un plan parallèle au plan de la base, un "tronc de prisme" s'obtient en coupant un prisme par un plan non parallèle aux plans des bases et ne coupant aucune des deux bases ; il coupe alors toutes les arêtes latérales.

Fig. 11



Tronc de pyramide



Tronc de prisme

IV.3. Parallélépipèdes

Parallélépipède signifie "prisme dont les bases sont des parallélogrammes". De ce fait, les 6 faces sont délimitées par des parallélogrammes, et le polyèdre peut être considéré comme un prisme de trois façons.

Cas particuliers.

Parallélépipède rectangle ou *Pavé* : les 6 faces sont rectangulaires. Parmi eux : le *cube*, dont les 6 faces sont carrées.

V. POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

Ce sont des polyèdres convexes remplissant *simultanément* les deux conditions suivantes :

1°) Toutes les faces sont des polygones réguliers convexes ayant le même nombre de côtés.

2°) Chaque sommet est extrémité d'un même nombre d'arêtes.

[En accolant par une face commune deux tétraèdres réguliers de même longueur d'arête, on obtient un polyèdre — dit "bipyramide triangulaire" — dont les 6 faces sont des triangles équilatéraux ; il vérifie donc la première condition ; mais il ne vérifie pas la seconde : ce n'est pas un polyèdre régulier ; voir figure 5].

Les seuls polyèdres réguliers convexes sont :

- le *tétraèdre régulier* (4 sommets, 6 arêtes, 4 faces qui sont des triangles équilatéraux)
- le *cube* (8 sommets, 12 arêtes, 6 faces carrées), dit encore *hexaèdre régulier**
- l'*octaèdre régulier* (6 sommets, 12 arêtes, 8 faces qui sont des triangles équilatéraux)
- le *dodécaèdre régulier* (20 sommets, 30 arêtes, 12 faces qui sont des pentagones réguliers)
- l'*icosaèdre régulier* (12 sommets, 30 arêtes, 20 faces qui sont des triangles équilatéraux).

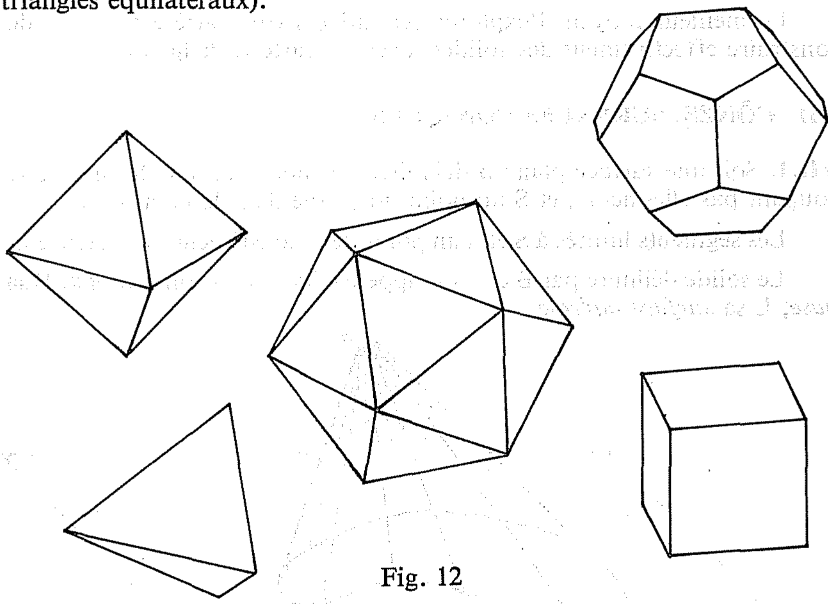


Fig. 12

* Les primes à base carrée sont des hexaèdres (polyèdres à 6 faces) ; mais un prisme régulier à base carrée n'est un hexaèdre régulier (c'est-à-dire un cube) que si ses faces latérales (qui sont des rectangles : Voir IV-2.) sont, elles aussi, des carrés. A comparer avec la remarque de III.2.

Certains de ces objets sont connus depuis la plus haute antiquité. L'impossibilité de construire d'autres polyèdres réguliers convexes est connue au moins dès l'époque de Platon (4ème siècle avant J.-C.) qui, dans le *Timée*, fonde sa construction du monde sur ces cinq polyèdres.

VI. POLYÈDRES NON CONVEXES.

Dans ce qui précède, nous nous sommes bornés aux polyèdres convexes.

On peut obtenir des solides non convexes :

- en accolant deux polyèdres convexes par une face ou une partie de face (par exemple : un cube posé sur un cube plus grand).
- en creusant un polyèdre convexe (par exemple, un cube dont on prélève un morceau cubique).
- etc.

Lesquels de ces solides non convexes appelle-t-on encore "polyèdres" ? Les conventions diffèrent sur ce point selon les auteurs.

L'égalité d'Euler ne s'étend qu'à certains de ces solides.

Le meilleur moyen d'explorer cet univers très varié est encore de construire effectivement des solides, avec du carton, de la colle...

VII. CÔNES. SURFACES CONIQUES

VII.1. Soit une surface plane B délimitée par une courbe C fermée ne se coupant pas elle-même, et S un point non situé dans le plan de B.

Les segments limités à S et à un point de C constituent une surface L.

Le solide délimité par B et L est appelé *cône* ; S est son *sommet*, B sa *base*, L sa *surface latérale.*

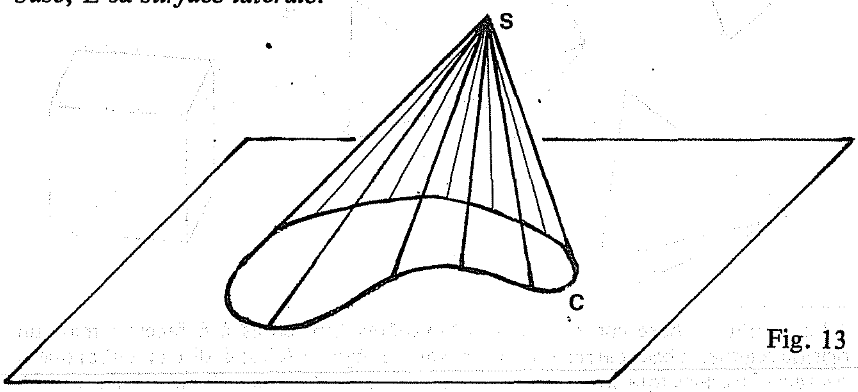


Fig. 13

Une pyramide est un cône dont la base est un polygone.

Si B est un disque et S un point de l'*axe* du disque (c'est-à-dire de la droite passant par le centre de B et perpendiculaire à son plan), le cône est un *cône de révolution*. Il peut être engendré par un triangle rectangle tournant autour de l'un de ses deux côtés perpendiculaires.

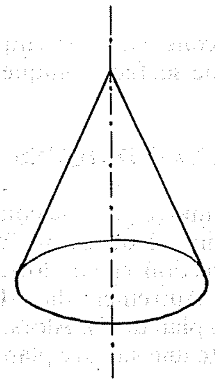


Fig. 14

VII.2. Etant donné une courbe plane C et un point S non situé dans le plan de C, les droites passant par S et ayant un point commun avec C constituent la *surface conique* de *sommet* S et de *directrice* C. Ces droites en sont les *génératrices*. Cette surface est la réunion de deux nappes, engendrées chacune par une demi-droite d'origine S ; chacune des 2 nappes est illimitée.

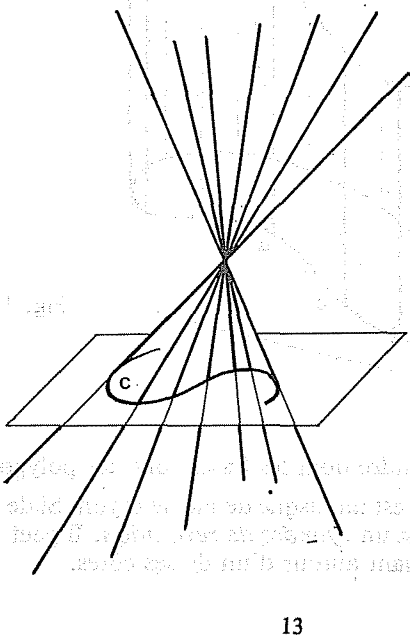


Fig. 15

Dans le cas particulier où C est un polygone, on obtient une *surface pyramidale.*

Reprenons la surface L de VII-1. ; en remplaçant les segments constituant L par les droites qui les supportent, on obtient une surface conique.

VII.3. *Remarque.* En fait, le mot *cône* est aussi employé à la place de "surface conique", ou de "nappe de surface conique".

VIII. CYLINDRES. SURFACES CYLINDRIQUES

VIII.1. Soit B une surface plane délimitée par une courbe C fermée ne se coupant pas elle-même. A tout point M de C, on fait correspondre le point M′ tel que [MM′] a une direction et une longueur constantes et reste d'un même côté du plan de B. Autrement dit, M′ est l'image de M par une translation (non parallèle au plan de B). Alors, quand M décrit C, M′ décrit une courbe C′ qui délimite une surface plane B′. Les segments [MM′] constituent une surface L.

B, B′ et L délimitent un solide appelé *cylindre* ; B et B′ sont ses *bases*, L est sa *surface latérale*.

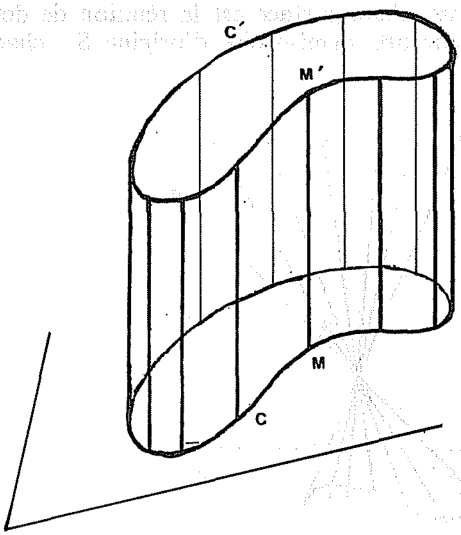


Fig. 16

Un prisme est un cylindre dont les bases sont des polygones.

Si B est un disque, B′ est un disque de même rayon. Si de plus ils ont le même axe, le cylindre est un *cylindre de révolution.* Il peut être engendré par un rectangle tournant autour d'un de ses côtés.

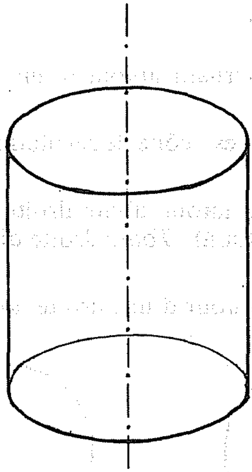


Fig. 17

A propos des troncs de cône et troncs de cylindre, on retrouve la bizarrerie de vocabulaire signalée en IV.2.

VIII.2. Etant donné une courbe plane C et une droite D non parallèle au plan de C, les droites parallèles à D et ayant un point commun avec C constituent une *surface cylindrique* de *directrice* C ; ces droites en sont les *génératrices*. Une telle surface est illimitée.

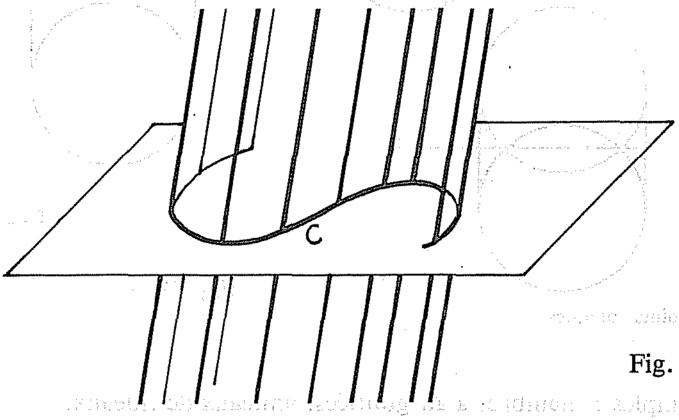


Fig. 18

Dans le cas particulier où C est un polygone, on obtient une *surface prismatique*.

Si un plan coupe une surface cylindrique suivant une courbe fermée, la portion d'espace délimitée par la surface cylindrique, ce plan, et un second plan parallèle au premier, est un cylindre.

VIII.3 En fait, le mot *cylindre* est aussi employé à la place de "surface cylindrique".

IX. SOLIDES DE REVOLUTION

Une surface plane fermée S tournant autour d'une droite engendre un *solide de révolution.*

On vient d'en avoir deux exemples : cône de révolution et cylindre de révolution. En voici d'autres :

• Si S est un disque tournant autour d'une droite diamétrale, on obtient une *boule* (voir CERCLE-DISQUE). *Toute* droite diamétrale est un *axe de révolution* pour la boule.

• Si S est un disque tournant autour d'une droite non diamétrale de son plan, on obtient un *tore* :

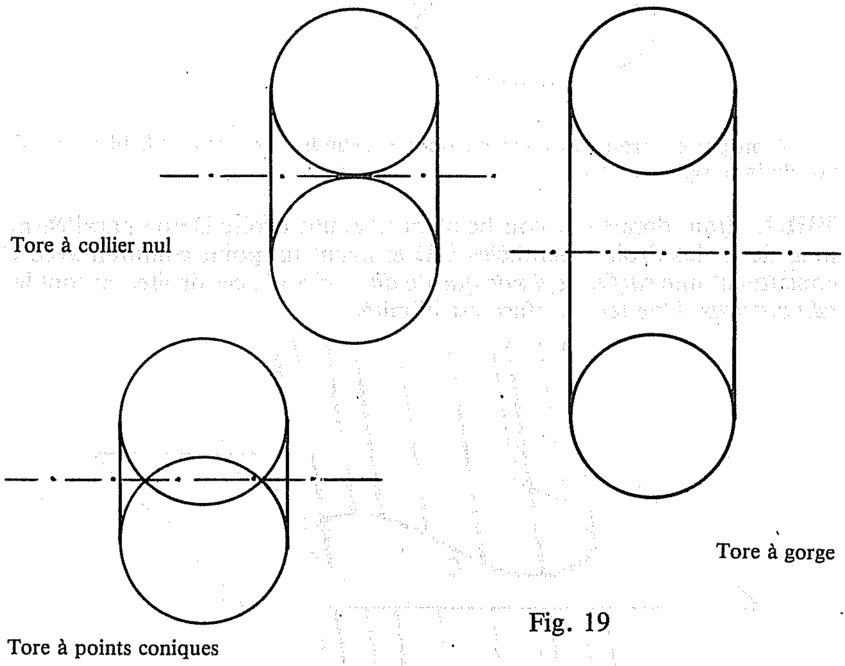


Fig. 19

Exemples : chambres à air gonflées, anneaux de rideaux.

• Si S est limitée par une ellipse et si elle tourne autour de la droite portant le grand axe de l'ellipse, on obtient un *ellipsoïde de révolution allongé.* Si elle tourne autour de la droite portant le petit axe, on obtient un *ellipsoïde de révolution aplati.* Par exemple, les planètes sont, grosso modo, des ellipsoïdes de révolution aplatis.

• Beaucoup d'objets usuels (vases, pieds de table tournés,...) sont des solides de révolution.

PARALLÈLE,
UN MOT QUI PARAÎT BIEN CONNU (80)

Le passage suivant est extrait d'un manuel destiné au Cours moyen :

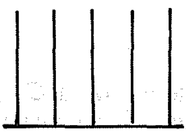
"Comme les droites, les courbes peuvent être parallèles ; dessine des roseaux couchés sous le vent, tous courbés parallèlement. Trace une courbe irrégulière ouverte et mène-lui une parallèle à 1 cm d'écartement. Au compas, trace trois circonférences parallèles (sans bouger de place la pointe du compas). Qu'arrive-t-il si l'on jette un caillou dans une mare bien calme ?"

I. QUELLES SIGNIFICATIONS DONNER À "COURBES PARALLÈLES", À "COURBÉS PARALLÈLEMENT" ?

Les roseaux couchés sous le vent évoquent une certaine définition ; les ronds sur l'eau en évoquent une autre.

I.1. Les roseaux, en l'absence de vent, peuvent être figurés par des segments de droites verticaux (fig. 1. a).

Supposés rectilignes et inclinés de la même façon par le vent, ils sont figurés par des segments obliques (fig. 1 b). Une propriété commune à ces deux schémas, c'est qu'on passe du dessin d'un roseau au dessin d'un autre roseau par un déplacement parallèle à la droite qui figure le sol. C'est cette même propriété qui préside, sur la fig. 1 c, au dessin des roseaux "couchés sous le vent, tous courbés parallèlement". Si en particulier ils sont figurés par des arcs de cercle, les cercles desquels sont extraits ces arcs sont de même rayon, et ont des centres distincts ; les cercles desquels sont extraits deux roseaux voisins se coupent (fig. 1. d).


a


b

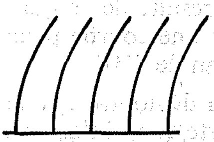
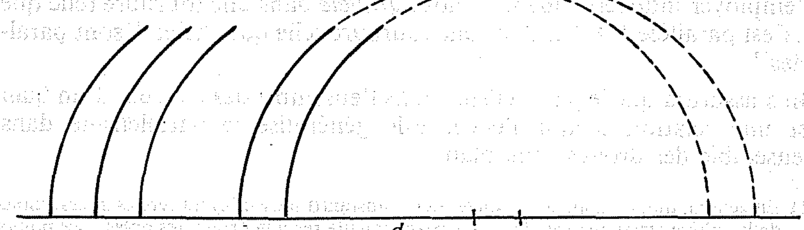

c

Fig. 1


d

I.2. Le caillou jeté dans une mare bien calme évoque, au contraire, des cercles concentriques (fig. 2)

Le texte cité nous invite, pour dessiner trois *cercles parallèles*, à n'utiliser qu'un seul centre ; les rayons sont donc inégaux et aucun des cercles dessinés n'en coupe un autre.

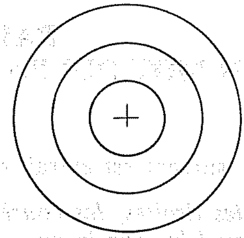


Fig. 2

I.3. Les deux interprétations de l'expression *courbes parallèles* suggérées successivement par le texte cité sont incompatibles. Il ne faut pas attendre qu'à partir d'elles, un lecteur, adulte ou enfant, sache tracer une courbe parallèle à une courbe donnée.

II. VOICI COMMENT ON DÉFINIT UNE COURBE PARALLÈLE À UNE AUTRE.

Soit une courbe plane C. Soient un point M de C (fig. 3) et t la tangente à C en M (nous nous limiterons dans ce qui suit au cas, usuel, où C a une tangente, et une seule, en chacun de ses points). Soit n la perpendiculaire à t en M, située dans le plan de C. Cette droite n est appelée *normale* à C en M.

Portons sur n, d'un certain côté de M, un point M' situé à une distance donnée d de M. Quand M décrit C, M' décrit une courbe C' dite parallèle à C.

Il résulte de ce qui précède que C' est une courbe plane située dans le plan de C (1).

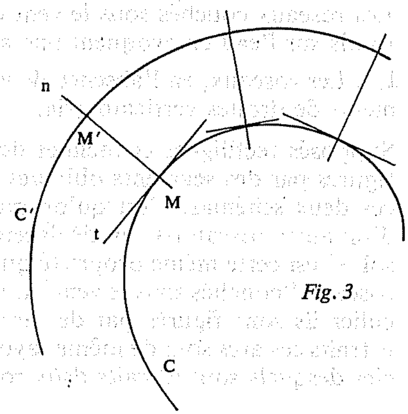


Fig. 3

On démontre que la droite n est également normale en M' à C' ; en sorte que, si l'on se donne la courbe C', et si l'on construit la courbe qui lui est parallèle et qui passe par M, on obtient la courbe C. Autrement dit, si C' est parallèle à C, C est parallèle à C'. Ce qui permet d'employer indifféremment le mot *parallèle* dans une tournure telle que "X est parallèle à Y" et dans une tournure telle que "X et Y sont parallèles".

On s'assurera que le parallélisme dans l'ensemble des courbes d'un plan est une relation d'équivalence. Elle généralise le parallélisme dans l'ensemble des droites d'un plan.

(1) En géographie, on appelle *parallèles* (ici : substantif masculin) les cercles intersections de la sphère terrestre avec des plans perpendiculaires à la droite des pôles. Les points d'un tel cercle ont tous même latitude. Ces cercles ne sont pas des courbes parallèles ; en effet, deux quelconques d'entre eux sont des courbes planes mais situées dans des plans distincts.

Ayant choisi un plan, appliquons en effet la définition à une droite C de ce plan. La tangente à C en M (fig. 4) est C elle-même. Sur la perpendiculaire à C en M, on porte, d'un certain côté de C, une longueur MM' invariable. Quand M décrit C, M' décrit une droite C' ; on obtient deux droites *parallèles* C et C', au sens connu de ce mot.

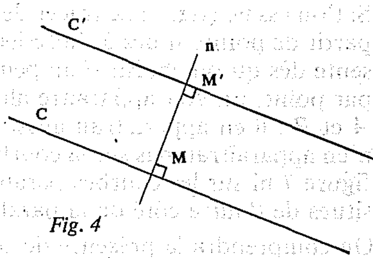


Fig. 4

III. APPLIQUONS LA DÉFINITION À UN CERCLE C

Soit O le centre du cercle. La normale n en M est la droite OM elle-même (fig. 5) ; si l'on porte sur elle une longueur MM' constante, la longueur OM' est constante également : la courbe parallèle obtenue, C', est un cercle de même centre que C.

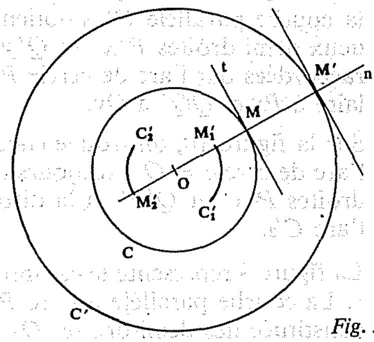


Fig. 5

On remarquera que M' décrit C' dans le même sens que M décrit C, même si M' et M sont de part et d'autre du centre O (cas de M'_2 et M) ; si M' est diamétralement opposé à M, M' décrit C lui-même.

Si M' est en O, il y reste quand M décrit C : la courbe parallèle à C est alors réduite au point O ; elle est dite "cercle-point". Bien que, pour un "cercle-point", on ne sache définir ni tangente, ni normale, on décide que les courbes parallèles à un cercle-point sont les cercles centrés en ce point.

Les arcs de cercles représentant sur la figure 1d les roseaux courbés par le vent ne sont pas des courbes parallèles.

IV. APPLIQUONS LA DÉFINITION À UNE COURBE QUELCONQUE : DES COMPLICATIONS INATTENDUES

Utilisons la définition pour tracer la courbe C' parallèle à la courbe C de la figure 6. Nous rencontrons bientôt une difficulté : dans la région R. La courbe C n'a pourtant rien de spécial et l'auteur du manuel la rangerait certainement parmi les "courbes irrégulières ouvertes".

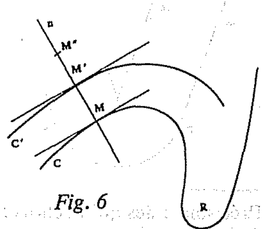


Fig. 6

Si l'on essaie (fig. 7) de tracer des courbes parallèles à une parabole *C*, à partir de points situés à l'intérieur de celle-ci, la même difficulté se présente dès qu'on choisit *d* un peu grand [1]. Si l'on essaie un tracé point par point, on voit apparaître alors deux points, dits de rebroussement, *A* et *B* : il en apparaîtrait aussi dans la région *R* de la figure 6, mais il n'en apparaîtrait pas sur la courbe parallèle passant par le point M'_1 de la figure 7 ni sur les courbes parallèles passant par des points tels que M'_2 situés de l'autre côté de la parabole.

On comprendra la présence de ces rebroussements en choisissant, pour courbe *C*, celle des figures 8, 9 et 10, constituée de l'arc *PQ* de cercle de centre *O* et des deux demi-droites, *Px* et *Qy*, tangentes à ce cercle.

Sur la figure 8, la longueur *MM'* est plus courte que le rayon *r* de l'arc et la courbe parallèle *C'* s'obtient sans difficulté : elle est constituée de deux demi-droites *P'x'* et *Q'y'* parallèles à *Px* et *Qy* respectivement, raccordées par l'arc de cercle *P'Q'*, de centre *O* ; *PP'* est perpendiculaire à *Px* et *QQ'* à *Qy*.

Sur la figure 10, on trouve encore les demi-droites P'*x'* et *Q'y'*, mais l'arc de cercle *P'Q'*, toujours de centre *O*, toujours tangent aux demi-droites *P'x'* et *Q'y'*, a la disposition rencontrée sur la figure 5 pour l'arc C'_2.

La figure 9 représente le cas intermédiaire : la longueur *MM'* est égale à *r*. La courbe parallèle à l'arc *PQ* se réduit au cercle-point *O* et *C'* est constituée des demi-droites *Ox'* et *Oy'*.

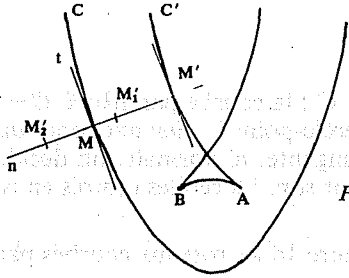


Fig. 7

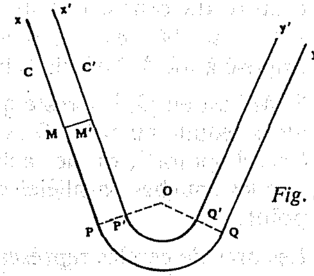


Fig. 8

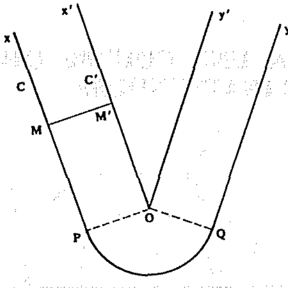


Fig. 9

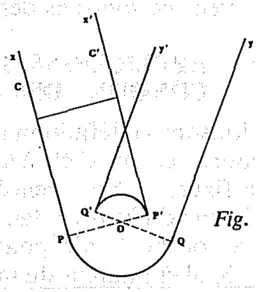


Fig. 10

(1) Précisons : dès qu'on choisit *d* supérieur au double de la distance du foyer au sommet de la parabole.

V. ILLUSTRATION

Une voiture à deux roues (de même axe, mais non solidaires l'une de l'autre) laisse sur le sol des traces qui sont des courbes parallèles, au moins en l'absence de dérapage. Il est facile de reproduire, à l'aide d'une remorque de bicyclette par exemple, sur un sol ratissé ou légèrement enneigé, ces trois types de dessins.

Pour celui de la figure 8, les deux roues tournent, autour de leur axe commun, toujours dans le même sens ; la roue extérieure, celle qui décrit l'arc PQ, tourne plus vite que l'autre, de même que, sur la piste du cirque, le cheval le plus éloigné du centre est celui qui fait les pas les plus nombreux (ou les plus grands).

Les roues arrière d'une automobile décrivent, elles aussi, deux courbes parallèles ; si elles sont motrices, un mécanisme particulier, le différentiel, permet à leurs vitesses de rotation de n'être pas égales. Quant aux deux roues avant, leurs axes de rotation ne sont confondus que si la trajectoire est rectiligne ; en virage, le segment MM' qui joint leurs points de contact avec le sol est bien de longueur constante mais n'est pas normal aux courbes dessinées sur le sol ; les roues avant d'une automobile ne dessinent donc pas des courbes parallèles.

Pour le dessin de la figure 10, qu'obtient par exemple un charretier manœuvrant dans une rue étroite, la roue décrivant C' change de sens à son passage en P' ainsi qu'à son passage en Q' : quand elles décrivent les arcs PQ et $P'Q'$, les roues tournent, autour de leur axe commun, en sens contraires.

Pour le dessin, intermédiaire, de la figure 9, pendant que la roue extérieure dessine son arc, l'autre cesse de tourner autour de son axe ; son point de contact avec le sol reste fixe, comme on l'a dit du point M' de la figure 5 lorsque celui-ci est en O ; le plan de cette roue tourne autour de la verticale du point de contact. Il y a évidemment un gros risque que cette roue se décercle si la charrette est lourdement chargée et si le sol est empierré et mal uni, ou qu'elle endommage le macadam. Le rayon de braquage d'une automobile ou d'un camion n'est jamais assez petit pour qu'une des roues arrière fasse un tel surplace ; il n'en est pas de même pour les roues arrière d'un semi-remorque.

VI. DES COURBES PARALLÈLES QUI SE COUPENT

On peut définir le parallélisme de deux droites coplanaires aussi bien en déclarant celles-ci sans point commun, comme le font les cours de géométrie usuels, que par la constance de la longueur du segment MM' ; on montre que, pour des droites, ces deux définitions sont équivalentes. C'est ce deuxième aspect qu'on a utilisé ci-dessus pour définir le parallélisme de deux courbes : constance de la longueur MM'.

En géométrie plane, la propriété pour deux droites parallèles d'avoir une intersection vide, constatée aussi pour deux cercles parallèles (donc concentriques) ne s'étend pas à toute paire de courbes parallèles. On s'en assurera en effectuant, sur la figure 6, le tracé de la courbe parallèle à C passant par M''. Sur la figure 11, qui reproduit la figure 10 mais avec un autre choix des longueurs OP et d, l'intersection des courbes parallèles C et C' est un ensemble de 4 points.

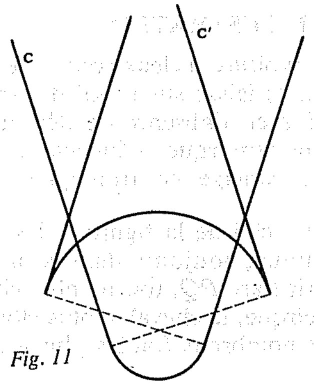


Fig. 11

VII. SURFACES PARALLÈLES

Le mot *parallèle* s'emploie aussi à propos de surfaces : on sait ce que sont deux plans parallèles. La définition d'une "surface parallèle à une autre" est analogue à celle d'une "courbe plane parallèle à une autre".

Soit une surface S. Soient un point M de S et T le plan tangent à S en M (nous nous limiterons au cas, usuel, où S a un plan tangent, et un seul, en chacun de ses points). Soit n la droite perpendiculaire à T en M. Cette droite n est appelée *normale* à S en M.

Portons sur n, d'un certain côté de M, un point M' situé à une distance donnée d de M. Quand le point M décrit S (c'est-à-dire quand il occupe toutes les positions possibles sur S), M' décrit une surface S' dite parallèle à S.

On démontre que la droite n est également normale en M' à S', de sorte que, si l'on se donne la surface S', et si l'on construit la surface qui lui est parallèle et qui passe par M, on obtient la surface S. Autrement dit, si S' est parallèle à S, S est parallèle à S'. Ce qui permet, là encore, d'employer le mot *parallèle* dans la tournure "X est parallèle à Y" et dans la tournure "X et Y sont parallèles".

Le parallélisme, dans l'ensemble des surfaces, est une relation d'équivalence.

Bornons-nous aux exemples simples suivants :
Les surfaces parallèles à une sphère sont les sphères de même centre, y compris celle qui, de rayon nul, est réduite à un point.

Les surfaces parallèles à une surface cylindrique de révolution sont les surfaces cylindriques de révolution de même axe, y compris celle qui, de rayon nul, est réduite à une droite. Les surfaces parallèles à une surface conique de révolution sont les surfaces coniques de révolution de même axe et de même angle au sommet.

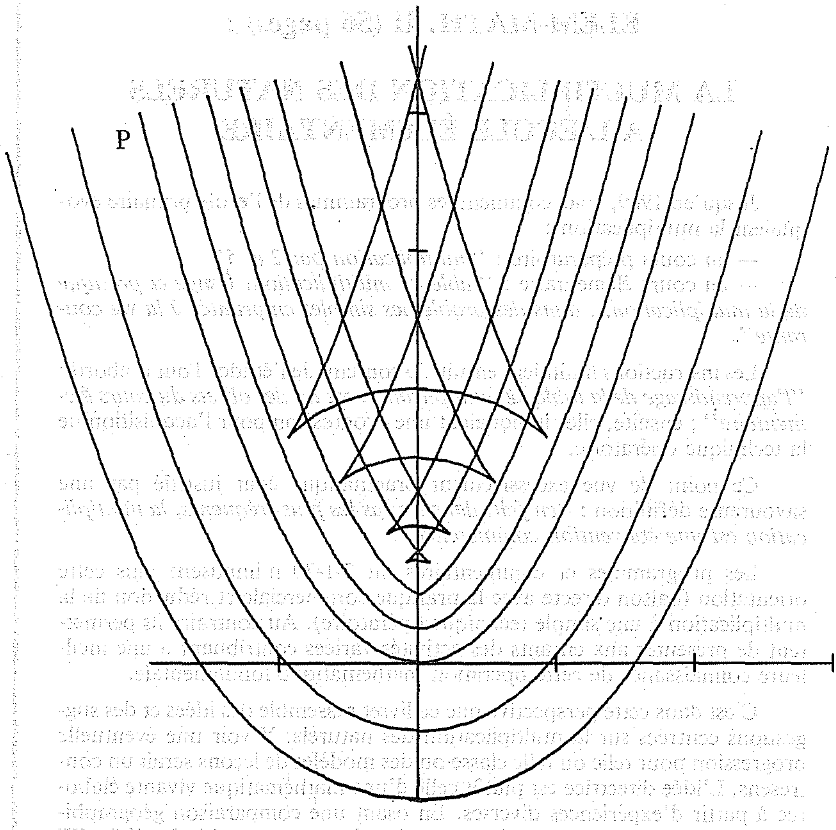


Fig. 12

Courbes parallèles à la parabole P, obtenues en donnant au segment [MM'] de la figure 7 des longueurs diverses

ELEM-MATH. II (56 pages) :

LA MULTIPLICATION DES NATURELS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jusqu'en 1969, voici comment les programmes de l'école primaire évoquaient la multiplication :

— au cours préparatoire : *"multiplication par 2 et 5"*

— au cours élémentaire : *"table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication... dans des problèmes simples empruntés à la vie courante"*.

Les instructions limitaient ensuite le contenu de l'étude. Tout d'abord : *"l'apprentissage de la table de multiplication est un des objets du cours élémentaire"* ; ensuite, elles indiquaient une progression pour l'acquisition de la technique opératoire.

Ce point de vue excessivement pragmatique était justifié par une savoureuse définition : *"en fait, dans les cas les plus fréquents, la multiplication est une convention commerciale"*.

Les programmes et commentaires du 2-1-70 n'imposent plus cette orientation (liaison directe avec la pratique commerciale et réduction de la multiplication à une simple technique opératoire). Au contraire ils permettent de présenter aux enfants des activités variées contribuant à une meilleure connaissance de cette opération mathématique fondamentale.

C'est dans cette perspective que ce livret rassemble des idées et des suggestions centrées sur la multiplication des naturels. Y voir une éventuelle progression pour telle ou telle classe ou des modèles de leçons serait un contresens. L'idée directrice est plutôt celle d'une mathématique vivante élaborée à partir d'expériences diverses. En osant une comparaison géographique, disons que c'est un essai de description du paysage multiplicatif du CE à la classe de sixième.

Les idées présentées dans ce livret ne sont pas originales. Elles sont le fruit de la réflexion qui s'est développée dans les Ecoles Normales depuis quelques années et des échanges réalisés à l'occasion des nombreuses rencontres organisées tant par l'A.P.M.E.P. que par les IREM. Elles ont été, à coup sûr, influencées par les travaux de recherche mis en œuvre dans les IREM en particulier ceux de Guy Brousseau et de son équipe de l'IREM de Bordeaux. Si ce fascicule a quelque intérêt le mérite leur en revient.

Prix : 6 F (port compris : 8 F).

VERTICAL — HORIZONTAL
ou
GÉOMÉTRIE ET FIL A PLOMB (80)

I. GÉOMÉTRIE ET GÉOGRAPHIE

Parmi les droites qui passent par un point donné A, il en est une qui a un rôle particulier dans notre monde physique : celle qui a la direction de la pesanteur. Cette droite, matérialisée par le fil à plomb, est dite *droite verticale de A* ou plus simplement *verticale de A*.

Il est utile de proposer à l'écolier, au collégien, en s'adaptant à leurs possibilités, des activités autour des notions de *vertical* et *horizontal*.

Les verticales des divers points d'une salle semblent parallèles. Mais la géographie nous apprend qu'en première approximation la Terre peut être considérée comme sphérique, et que toute verticale peut être considérée comme passant par le centre O de cette sphère (1). Les verticales de deux points A et B sont donc ou bien confondues, ou bien distinctes et non parallèles. Si A et B sont tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit d'un degré (exemples approximatifs : Amiens et Paris, Caen et Rouen), elles font un angle d'un degré (fig. 1). La verticale d'un point de latitude 50° (Amiens) fait avec celle du Pôle Nord un angle de 40°. La verticale d'un point de latitude 45° (Bordeaux) fait avec celle du Pôle Nord un angle de 45° (fig. 2). Celle d'un pôle est perpendiculaire à celle d'un point de l'équateur (fig. 3). Celles de deux antipodes K et L sont confondues (fig. 4).

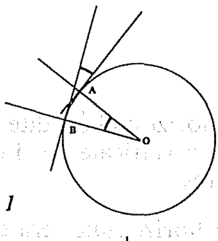


Fig. 1

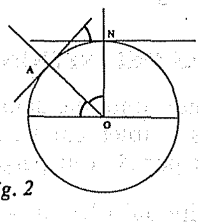


Fig. 2

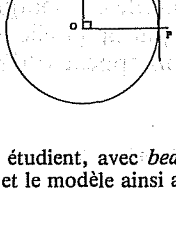


Fig. 3

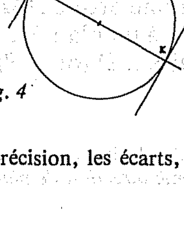


Fig. 4

(1) Les géodésiens étudient, avec *beaucoup* de précision, les écarts, toujours minimes, entre la réalité et le modèle ainsi adopté.

Si la distance AB est petite par rapport au rayon terrestre, l'angle des verticales de A et B est lui aussi petit : moins de 0,01° si elle est 1 km. Aussi les verticales des points de la salle de classe, de la ville, sont-elles acceptées comme parallèles.

Le plan perpendiculaire en A à la verticale de A est appelé *plan horizontal de* A ; la surface d'un liquide au repos donne une représentation d'un tel plan. Les plans horizontaux de A et B, si $\widehat{AOB}$ est 1°, font un angle de 1° (sur la figure 1, ces plans sont représentés par leurs intersections avec le plan AOB pris pour plan de la figure). Le plan horizontal du Pôle Nord fait avec celui d'un point de latitude 45° un angle de 45° ; il est perpendiculaire au plan horizontal d'un point P de l'équateur ; les plans horizontaux de deux antipodes K et L sont parallèles (voir les figures 2, 3 et 4, à interpréter comme la figure 1).

Si la distance AB est petite par rapport au rayon terrestre, les plans horizontaux de A et de B sont acceptés comme parallèles. Ainsi, pour les usages courants, les plans horizontaux des points de la ville sont parallèles et la verticale d'un point quelconque de la ville est perpendiculaire au plan horizontal de tout point de la ville.

Nous n'envisagerons par la suite que des portions de plans, que nous continuerons d'appeler plans, et des portions de droites que nous continuerons d'appeler droites, situées dans une région petite par rapport au globe terrestre.

Nous nous autoriserons ainsi à parler de *la* direction verticale, sans être tenus de préciser en quel point on l'envisage, et à parler de même de *la* "direction de plan" horizontale (1). Les verticales de Rouen sont considérées comme parallèles, et celles de Caen également, mais les unes font un angle d'un degré avec les autres.

II. QUELQUES DÉFINITIONS

II.1. Toute droite contenue dans un plan horizontal est dite *droite horizontale* ou plus simplement *horizontale.* La verticale de A et une horizontale passant par A sont perpendiculaires.

II.2. Toute droite qui n'est ni verticale ni horizontale sera dite *oblique* (ou inclinée).

Quand on dit d'une droite AM (fig. 5) qu'elle est oblique par rapport à une droite D (ou à un plan P), on entend par là qu'elle n'est ni parallèle ni perpendiculaire à D (ou à P). Quand on appelle *oblique* toute droite

(1) De mêmes que des droites parallèles sont dites de même *direction*, des plans parallèles sont dits de même *direction de plan*.

qui n'est ni verticale ni horizontale, on entend de même qu'elle n'est ni perpendiculaire ni parallèle *à un plan horizontal*.

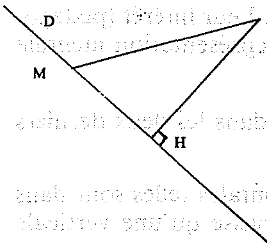


Fig. 5

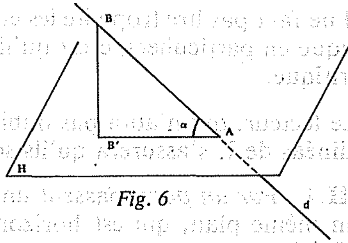


Fig. 6

Une droite peut être plus ou moins penchée, plus ou moins en pente. On définit, pour une oblique, *sa pente*. De la façon suivante : soient deux points *A et B* d'une droite d (fig. 6) ; envisageons le plan H, horizontal de A, et l'intersection B' de la verticale de B avec H. La pente de d est $\dfrac{BB'}{AB'}$ (elle est la tangente de l'angle α que fait la droite d avec le plan H ; l'angle d'une droite et d'un plan, c'est l'angle que fait cette droite avec sa projetée orthogonale dans ce plan). Dire que la pente d'une route est 6 %, c'est dire que la dénivellation BB' est les 6/100 de la longueur AB'.

Pour une horizontale, la pente $\dfrac{BB'}{AB'}$ est nulle puisque BB' l'est ; pour une verticale, elle n'est pas définie puisque AB' est nul.

II.3 Tout plan qui contient une verticale v (fig. 7) est dit *vertical* ; il contient alors la verticale v' de l'un quelconque A de ses points. Tout plan vertical est perpendiculaire à tout plan horizontal (1).

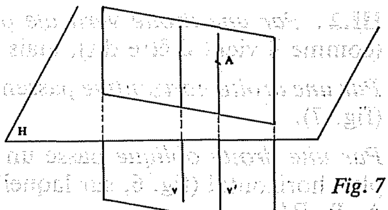


Fig. 7

II.4 Un plan qui n'est ni horizontal ni vertical est dit *oblique* (ou incliné). Il faut, là encore, entendre par "oblique" qu'il n'est ni parallèle ni perpendiculaire *à un plan horizontal.*

(1) A tout plan on peut associer une direction (de droite) perpendiculaire à ce plan. Deux plans sont dit *perpendiculaires* quand leurs deux directions associées sont perpendiculaires. La direction associée à un plan horizontal est la direction verticale ; la direction associée à un plan vertical est une certaine direction horizontale.

III. DES AFFIRMATIONS CONTENANT LES MOTS *HORIZONTAL, HORIZONTALE, VERTICAL, VERTICALE.*

Il ne faut pas lire trop vite les énoncés qui suivent. Leur intérêt (pédagogique en particulier), c'est qu'ils obligent à une représentation mentale critique.

Le lecteur, qui n'aura pas oublié la réserve faite dans les deux derniers alinéas de I, s'assurera qu'ils sont vrais.

III.1. *Par un point* passent une infinité d'horizontales (elles sont dans un même plan, qui est horizontal) ; mais il ne passe qu'une verticale (fig. 8).

Par un point passe un seul plan horizontal, mais il passe une infinité de plans verticaux ; chacun d'eux contient la verticale de ce point (fig. 9).

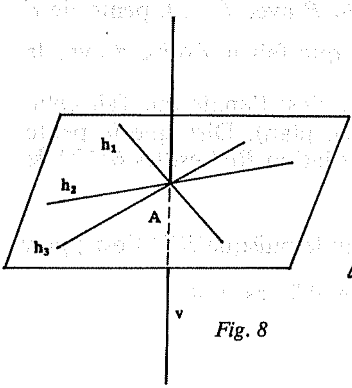


Fig. 8

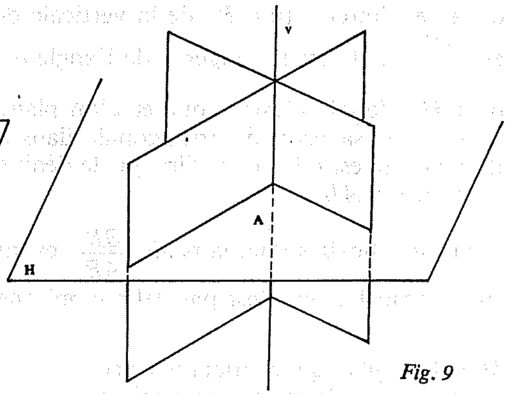


Fig. 9

III.2. *Par une droite verticale* passent une infinité de plans verticaux (comme il vient d'être dit), mais il ne passe aucun plan horizontal.

Par une droite horizontale passent un plan vertical et un plan horizontal (fig. 7).

Par une droite oblique passe un plan vertical, mais il ne passe aucun plan horizontal (fig. 6, sur laquelle le plan vertical est celui des 3 points A, B, B').

III.3. *Deux droites verticales* sont nécessairement parallèles ; il n'en est pas de même de deux horizontales.

Deux plans horizontaux sont nécessairement parallèles ; il n'en est pas de même de *deux plans verticaux.* Si deux plans verticaux ne sont pas parallèles, ils se coupent selon une verticale (fig. 9).

III.4. *Dans un plan horizontal*, toutes les droites sont des horizontales ; un plan horizontal ne contient aucune verticale, aucune oblique.

Dans un plan vertical, il existe des horizontales (elles sont parallèles), des verticales, et des obliques.

Dans un plan oblique, il existe des horizontales ; elles sont parallèles ; on les appelle *lignes de niveau* du plan (fig. 10) ; elles sont les intersections du plan avec les plans horizontaux. Mais il n'y a pas de verticale. Il y a des obliques ; celles qui ont la plus grande pente sont perpendiculaires aux horizontales de ce plan ; on les appelle *lignes de pente* du plan ; c'est selon elles que rouleraient des billes, au départ immobiles, ou que s'écouleraient des gouttes de pluie.

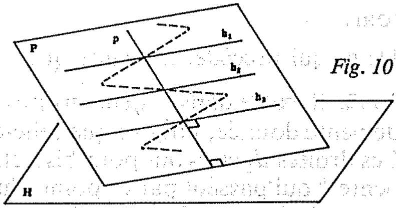


Fig. 10

III.5. L'emploi du mot *perpendiculaire*, auquel on pense volontiers à propos des mots *vertical* et *horizontal*, permet la construction de phrases qui obligent elles aussi à une représentation mentale critique.

Dans l'énoncé, vrai : ''Tout plan perpendiculaire à une droite verticale est horizontal'', si on remplace *verticale* par *horizontale* et *horizontal* par *vertical*, on obtient un autre énoncé vrai ; mais dans l'énoncé, vrai : ''Toute droite perpendiculaire à une verticale est horizontale'', si on échange *horizontale* et *verticale*, on obtient un énoncé faux ; il existe en effet des perpendiculaires à une horizontale qui ne sont pas verticales ; en particulier, il en existe qui sont horizontales.

Dans la phrase ''Tout plan perpendiculaire à un plan horizontal est vertical'', les mots *horizontal* et *vertical* ne sont pas permutables.

IV. DROITES APPARTENANT À UN PLAN OBLIQUE, ET PLANS CONTENANT UNE DROITE OBLIQUE

IV.1. Soit un plan oblique P (fig. 11) et un point A de ce plan. Parmi toutes les droites de P qui passent par A, soit h celle qui est horizontale.

Faisons pivoter dans P une droite d autour de A, sa position initiale étant h. La pente de d croît, jusqu'à un maximum qu'elle atteint quand d a pivoté d'un quart de tour ; d occupe alors la position k, ligne de pente du plan. La pente qu'elle a alors est appelée pente du plan P : la *pente d'un plan*, c'est la pente de ses lignes de pente.

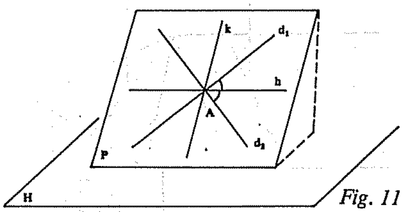


Fig. 11

Quand d continue à pivoter, sa pente décroît et devient nulle quand d prend à nouveau la position h après avoir pivoté d'un nouveau quart de tour.

De ce qui précède, il résulte que :

IV.2. Il existe dans P deux droites d_1 et d_2 qui passent par A et qui sont de pente donnée, pourvu que celle-ci soit inférieure à la pente du plan P. Les droites d_1 et d_2 ont pour bissectrices la ligne de niveau h et la ligne de pente k qui passent par ce point. Sur un flanc de colline ou de montagne supposé plan, en chaque point on peut tracer deux voies de pente donnée inférieure à celle du plan. Quand on gravit un sentier en lacets, de pente constante, on utilise alternativement les deux directions de ces voies (voir sur la fig. 10 le tracé en traits interrompus). Dans un pays au relief modeste, où les flancs des collines les plus en pente, assimilés à des plans, ont pour pente 8 %, les cyclistes ne risquent pas de trouver des routes à 10 % ; par contre, en tout pays, même de montagne, on trouve des routes de faible pente ; ou même horizontales : celles qui suivent une ligne de niveau.

IV.3. Par une oblique d donnée passent deux plans de pente donnée pourvu que cette pente soit plus grande que celle de d. Si elle est égale à celle de d, il n'en passe qu'un, et d est une des lignes de pente de ce plan. Les deux pans sécants, de même pente, d'une toiture se coupent selon une arête ; les gouttes de pluie qui tombent sur celle-ci (ou au voisinage de celle-ci) ne la suivent pas : elles se dirigent selon une ligne de pente de l'un ou l'autre des deux pans (fig. 12). A moins que les deux pans ne soient ceux d'un patio : les gouttes qui suivent les lignes de pente de l'un ou l'autre de ces pans suivent ensuite, le cas échéant, leur droite d'intersection, selon un trajet moins en pente, que les couvreurs appellent *noue* (ligne *mn*, fig. 13).

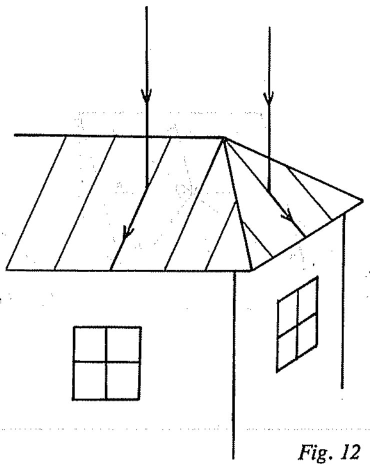


Fig. 12

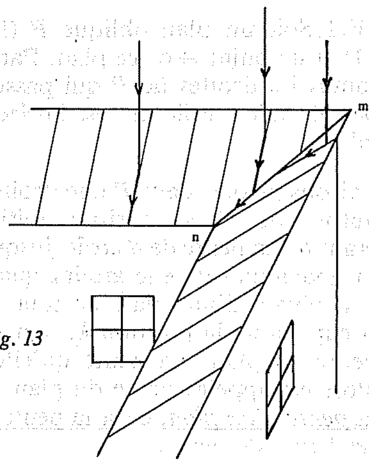


Fig. 13

V. LANGUE MATHÉMATIQUE ET LANGUE COURANTE, CONSIDÉRATIONS PÉDAGOGIQUES

V.1. Afin d'éviter chez les enfants toute confusion entre les propriétés qui viennent d'être dites et les propriétés géométriques que peut avoir une figure, lesquelles sont indépendantes de la position de celle-ci, il est prudent d'éviter l'emploi des mots *horizontal* et *vertical* avec des sens autres que ceux qui viennent d'être présentés.

En particulier, face à de jeunes élèves, afin de leur donner des idées claires (et aussi d'exercer leur coup d'œil), il convient de ne pas toujours dessiner, ou faire dessiner, un carré, un rectangle, avec leurs bords parallèles à ceux du tableau ou de la feuille de papier, ni un losange avec ses diagonales parallèles à ces bords ; de ne pas toujours dessiner un triangle isocèle "posé sur sa base" ; ni un triangle en plaçant un de ses côtés parallèlement au bord horizontal du tableau, côté vite privilégié et déclaré "base" ; l'expression "demi-produit de *la* base par *la* hauteur" est incorrecte puisqu'aucun des trois côtés n'est *base*.

Si un carré "repose sur la pointe" (fig. 14), cela n'entraîne pas qu'il soit "rétrogradé" en losange. Quand deux bandes de même largeur se coupent, c'est selon un losange ; si les bords de l'une d'elles sont "horizontaux" (fig. 15), cela ne "déclasse" pas ce losange en parallélogramme.

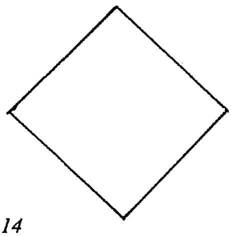


Fig. 14

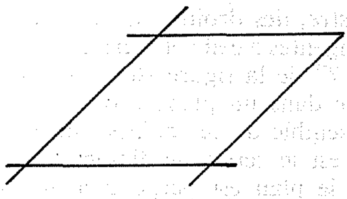


Fig. 15

V.2. Le contenu du mot *perpendiculaire* est souvent mêlé indûment aux contenus des mots *vertical* et *horizontal* ; on confond "plus ou moins" les deux affirmations suivantes :

1) A est perpendiculaire à B,
2) A est vertical et B est horizontal.

L'étymologie elle-même du mot *perpendiculaire* (perpendiculum, fil à plomb) laisse entendre qu'une telle confusion n'est pas nouvelle. Dire que deux rues sont perpendiculaires, cela n'a rien à voir avec la direction du fil à plomb. Dans la construction de nos concepts, la pesanteur a beaucoup de poids...

V.3. Le mot *orthogonal* a une étymologie claire : celle *d'angle droit*. Mais le mot *droit* lui-même porte le reflet, parmi ses nombreux sens, de la même confusion entre "A est perpendiculaire à B" et "A est vertical et B est horizontal" : faire qu'un poteau (rectiligne) soit planté *droit*, c'est faire qu'il soit vertical, c'est-à-dire perpendiculaire au sol supposé horizontal ; ou simplement vertical si le sol est oblique.

Le mot *orthogonal* a été introduit dans un contexte mathématique qui dépasse le cadre de l'enseignement obligatoire. Dans le cadre de celui-ci, il n'y a pas d'inconvénient à considérer comme synonymes *perpendiculaire* et *orthogonal*.

V.4. Les mots *vertical, horizontal* avaient, dans tout ce qui précède, une définition physique précise, donnée en I, indépendante, en un lieu donné, de la situation du locuteur.

Dans la langue courante, ces mots ont des acceptions diverses, parfois peu nettes, où interviennent la situation de celui qui parle et la situation de l'objet ou de la figure qu'il décrit.

V.4.1. *L'horizon* - conformément à l'étymologie - est la ligne *qui borne* le regard. Dans le cas simple d'un observateur *A* sur une île plate en pleine mer, cette ligne est un cercle, dont le plan est, pour cet observateur, horizontal. En effet, les points qui "bornent le regard" sont les points de contact, avec la sphère terrestre, des droites passant par *A* et tangentes à celle-ci : tels les points *T* et *T'* de la figure 16 qui est une coupe dans un plan vertical de A. L'ensemble de ces points, ou *horizon*, est le cercle de diamètre *TT'* dont le plan est perpendiculaire à celui de la figure ; mais ce n'est pas le plan horizontal de *A*, lequel est le plan H. La distance de ces deux plans est faible, et peut être négligée dans les situations courantes : si l'observateur est à 10 mètres d'altitude (AB = 10 m), le plan du cercle-horizon, dont le rayon CT est environ 11 km, est situé à une vingtaine de mètres au-dessous de lui.

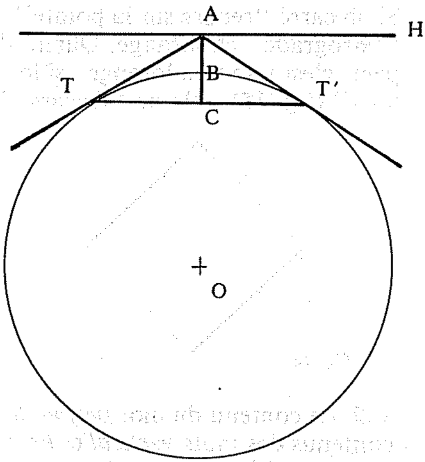


Fig. 16

V.4.2. Dérivé du latin *vertex* (sommet), le mot *vertical* présente diverses ambiguïtés, qu'il partage avec les mots *haut* et *bas*.

Un tableau de nombres, disposé comme on en a l'habitude, tracé dans un plan vertical, a ses lignes horizontales et ses colonnes verticales ; et il est licite de parler du haut et du bas d'une colonne. Ce tableau étant recopié sur une feuille de papier placée sur la table, on conserve ordinairement le même langage : on continue de dire verticales les colonnes, et horizontales les lignes, à parler du haut et du bas d'une colonne bien que dans un plan horizontal toutes les droites soient horizontales et qu'il n'y ait ni "haut" ni "bas".

Autre déviation du sens du mot *vertical* : une feuille de papier rectangulaire placée face à soi dans un plan vertical est souvent dite verticale si ses grands côtés sont verticaux, et horizontale s'ils sont horizontaux.

V.4.3. De telles déviations sont des habitudes de parole ; peut-être sont-elles aussi le signe d'un aspect de notre perception de l'espace : nous avons tendance à distinguer ce qui est approximativement parallèle à la ligne de nos yeux, baptisé horizontal, de ce qui lui est perpendiculaire, baptisé vertical. Egocentrisme.

Pour identifier un rectangle, on fait en sorte que l'un de ses plans de symétrie (autre que son propre plan) soit approximativement le plan de symétrie du visage. C'est bien cette coïncidence qu'on réalise lorsque, pour lire un texte placé "de travers", on déplace le texte ou on tourne la tête.

V.5. Ces divers usages, et d'autres encore, des mots *horizontal* et *vertical* peuvent évidemment être acceptés en classe, au moins quand ils sont sans conséquence.

Plus généralement, il est intéressant de faire remarquer aux élèves combien certains mots présentent dans leurs usages courants de telles possibilités d'emploi, de telles richesses même, mais aussi de telles sources d'ambiguïté. Pour être enseignant de mathématiques, on n'en est pas moins enseignant de français.

ELEM-MATH III (96 pages)

LA DIVISION A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Traditionnellement, à l'Ecole Elémentaire, le mot *division* désigne une technique de calcul. Comme la technique enseignée est assez complexe (mise en jeu simultanément de produits et de différences, procédures d'estimation, apparition occasionnelle d'une virgule au quotient, ...) il n'est pas étonnant que les enfants essuyent bien des déboires et que les maîtres éprouvent bien des déceptions.

Nous appuyant sur de nombreux travaux de didactique en cours nous pensons qu'il est souhaitable de concevoir un enseignement des mathématiques essentiellement centré sur la résolution de problèmes.

* * *

QUELQUES QUESTIONS A PROPOS DE LA PRATIQUE DE LA DIVISION mettent en évidence certaines difficultés liées à la technique de calcul habituelle et introduisent aux trois chapitres suivants.

- L'examen des problèmes utilisés traditionnellement pour présenter la division montre qu'un calcul de division n'est en fait qu'une suite de calculs de différences (VERS LA DIVISION EUCLIDIENNE).
- Le souci de réduire les écritures inhérentes à ces calculs successifs nous amène ensuite à suggérer des travaux sur les MULTIPLES D'UN NATUREL.
- Nous montrons alors comment la volonté de réduire les écritures fait évoluer les procédures de calcul au prix d'une complexité croissante des calculs auxiliaires à effectuer de tête (TECHNIQUES OPERATOIRES DE LA DIVISION EUCLIDIENNE).

Enfin, on trouvera en annexe des comptes rendus de travaux effectués dans des classes élémentaires.

* * *

Pour respecter le volume habituel des brochures de la collection ELEM-MATH, il n'était pas question d'aborder les problèmes liés à la virgule (introduction de l'ensemble **Q** des rationnels, rôle privilégié des rationnels décimaux, division dans **Q** et division euclidienne dans N). Nous nous sommes donc délibérément limités à la division euclidienne dans l'ensemble N des naturels.

96 pages, 14 F (sans port : 10 F).

EXPOSANT — PUISSANCE (80)

I. LA LÉGENDE DU JEU D'ÉCHECS

Selon une légende, le jeu d'échecs, inventé dans un pays oriental, aurait enchanté par sa subtilité le prince qui régnait sur ce pays et celui-ci aurait laissé le soin à l'inventeur de fixer lui-même sa récompense. Celui-ci aurait alors demandé qu'on lui donnât :

1 grain de blé pour la 1e case de l'échiquier
2 grains de blé pour la 2e case de l'échiquier
4 grains de blé pour la 3e case de l'échiquier
8 grains de blé pour la 4e case de l'échiquier

et ainsi de suite, en doublant chaque fois, jusqu'à la 64e case.

Stupéfait de la modicité apparente de la demande, le prince aurait sans doute accordé la récompense si son trésorier n'était intervenu à temps.

En effet, les premiers calculs ouvrent d'inquiétantes perspectives :

N° de la case	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nbre de grains	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Total	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191

A la 20e case, la récompense s'élève déjà à 1 048 575 grains de blé.

A l'instar du trésorier prévoyant, recherchons donc une évaluation (voir APPROXIMATION) de la quantité de blé réclamée.

Si on n'effectue pas les calculs au fur et à mesure, la 2e ligne du tableau se présente ainsi :

$$1\ ,\ 2\ ,\ 2\times2\ ,\ 2\times2\times2\ ,\ 2\times2\times2\times2\ ,\ 2\times2\times2\times2\times2\ ,\ \ldots$$

Ces écritures rendent compte du fait qu'on double à chaque fois ; par contre, leur longueur les rend d'un emploi malaisé. Convenons donc de les abréger de la façon suivante :

au lieu de $2\times2\times2$ écrivons 2^3 (lire : 2 exposant 3)
au lieu de $2\times2\times2\times2$ écrivons 2^4 (lire : 2 exposant 4)

au lieu de $2\times2\times2\times2\times2$ écrivons 2^5 (lire : 2 exposant 5) et ainsi de suite.

Le tableau précédent prend alors l'aspect suivant :

N° de la case	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nbre de grains	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
Total	1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1	2^6-1	2^7-1	2^8-1	2^9-1	2^{10}-1	2^{11}-1	2^{12}-1	2^{13}-1

Cette façon d'écrire permet de conjecturer qu'il faut donner 2^{63} grains de blé pour la 64^e case et que la récompense demandée s'élève à (2^{64}-1) grains de blé.

Pour évaluer le nombre noté 2^{64},nous allons utiliser l'égalité $2^{10} = 1024$ et décider de substituer 1000 — c'est-à-dire 10^3 — à 2^{10}. Nous obtiendrons ainsi une évaluation par défaut.

D'après la convention introduite plus haut :

$$2^{64} = \underbrace{2\times2\times2\times \ldots\ldots\ldots \times2}_{\text{2 figure ici 64 fois}}$$

Grâce à l'associativité de la multiplication, cette égalité peut s'écrire :

$$2^{64} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4$$

Nous en déduisons que 2^{64} est plus grand que

$$10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 2^4 ,$$

c'est-à-dire plus grand que $2^4 \times 10^{18}$.

Nous en concluons que la récompense demandée s'élève à plus de 16 000 000 000 000 000 000 (seize milliards de milliards) de grains de blé.

Le nombre exact de grains de blé réclamés est

18 446 744 073 709 551 615

quantité qui défie l'imagination.

Si on admet qu'il y a 25 grains de blé au gramme, la récompense demandée s'élève à plus de 730 000 000 000 (sept cent trente milliards) de tonnes.
En 1970, la Terre entière a produit 316 582 000 tonnes de blé.
Ainsi, 2300 fois la production mondiale de 1970 ne font pas le compte.

II. INTÉRÊTS COMPOSÉS

Bien d'autres situations mettent en jeu des multiplications répétées. Par exemple : on place 1 F à intérêts composés au taux de 5 % ; de quelle somme disposera-t-on au bout de 5 ans, de 10 ans, de 20 ans ? Au bout de combien d'années aura-t-on doublé le capital ?

Là encore, la convention d'écriture introduite plus haut permet d'exprimer commodément l'évolution du capital.

Ainsi, au bout d'un an on dispose (en francs) de $1 + \frac{1}{20}$

au bout de 2 ans on dispose (en francs) de $(1+\frac{1}{20}) + \frac{1}{20}(1+\frac{1}{20})$ soit $(1+\frac{1}{20})^2$

au bout de 3 ans on dispose (en francs) de $(1+\frac{1}{20})^2 + \frac{1}{20}(1+\frac{1}{20})$ soit $(1+\frac{1}{20})^3$

....

au bout de n ans on dispose (en francs) de $(1+\frac{1}{20})^{n-1} + \frac{1}{20}(1+\frac{1}{20})^{n-1}$ soit $(1+\frac{1}{20})^n$

De sorte que :

au bout de 5 ans on dispose de $\left(\frac{21}{20}\right)^5$ soit environ 1,28

au bout de 10 ans on dispose de $\left(\frac{21}{20}\right)^{10}$ soit environ 1,63

au bout de 20 ans on dispose de $\left(\frac{21}{20}\right)^{20}$ soit environ 2,65

Pour répondre à la 4^e question posée ci-dessus, il faut chercher le plus petit naturel n tel que $(1+\frac{1}{20})^n \geqslant 2$. Tenant compte des calculs précédents, nous constatons que n est compris entre 10 et 20 (pour la suite du calcul de n, voir V).

III. RÈGLES DE CALCUL

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit une nouvelle écriture ; en voici les règles d'emploi.

III.1. En généralisant la convention introduite plus haut :

a désigne un nombre (naturel, entier, rationnel, réel, ...)
n désigne un *naturel* au moins égal à 2
a^n désigne le même nombre que $\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{a \text{ figure ici } n \text{ fois}}$

Dans l'écriture a^n, n s'appelle *exposant*, a s'appelle *base*.

a^n se lit a *exposant* n .

On dit parfois que a^n est la *puissance d'exposant n de a.*

On entend encore souvent "a puissance n" comme lecture de a^n. Cette expression présente des dangers car elle crée la confusion chez les élèves entre la puissance d'exposant n de a et l'exposant, qui est n. Par exemple, pendant des années, l'expression "puissances négatives de 10" a figuré dans les programmes officiels ..., alors qu'il s'agissait des puissances de 10 d'exposant négatif, lesquelles sont des nombres positifs. Si nous voulons munir nos élèves d'un vocabulaire correct, commençons par balayer devant notre porte.

En outre :
a^2 se lit aussi *a carré* ou *a au carré* ou *a élevé au carré.*
a^3 se lit aussi *a cube* ou *a au cube* ou *a élevé au cube.*

Ces lectures trouvent leur origine dans le fait suivant :
une unité de longueur étant choisie, si la mesure du côté d'un carré est a, alors la mesure de son aire avec l'unité correspondante est a^2. Si la mesure de l'arête d'un cube est a, alors la mesure de son volume avec l'unité correspondante est a^3.

III.2. De la définition précédente et des propriétés de la multiplication, il résulte immédiatement, moyennant la convention selon laquelle $a^1 = a$, que :

quels que soient les nombres a et b et les naturels non nuls n et n'

- $a^n \times a^{n'} = a^{n+n'}$
  En particulier $a^n \times a^1 = a^{n+1}$
  ce qui justifie la convention précédente.
- $(a \times b)^n = (a^n) \times (b^n)$
- $(a^n)^{n'} = a^{nn'}$
- et, si $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Si $a \neq 0$, la fraction $\dfrac{a^n}{a^{n'}}$ donne lieu aux simplifications suivantes :

- si $n > n'$, $\dfrac{a^n}{a^{n'}} = a^{n-n'}$
- si $n < n'$, $\dfrac{a^n}{a^{n'}} = \dfrac{1}{a^{n'-n}}$
- si $n = n'$, $\dfrac{a^n}{a^{n'}} = 1$.
  L'utilisation dans ce cas de l'une ou l'autre des égalités précédentes aurait donné $1 = a^0$ ou $1 = \dfrac{1}{a^0}$. On est ainsi amené à convenir que, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

IV. PREMIER PROBLÈME POSÉ AU BANQUIER

IV.1. A quel taux faut-il placer 1 F à intérêts composés pour doubler le capital au bout de la dixième année ?

Désignons par t l'intérêt produit par 1 F en un an. Au bout de 10 ans le capital s'élève à $(1 + t)^{10}$. Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue t :

$$(1 + t)^{10} = 2$$

Pour trouver t — ou tout au moins un encadrement de t — nous n'avons pas d'autre moyen pour l'instant que de calculer $(1+t)^{10}$ pour différentes valeurs de t. Par exemple, pour un taux de 10 % :

$t = 0{,}1$ c'est-à-dire $1+t = 1{,}1$

alors $(1+t)^2 = 1{,}21$

$(1+t)^3 = 1{,}331$

d'où $(1+t)^5 = 1{,}21 \times 1{,}331$

c'est-à-dire $(1+t)^5 = 1{,}61\,051$, donc $(1+t)^5 > 1{,}61$

De même, puisque

$$(1 + t)^8 = (1 + t)^3 \times (1 + t)^5$$

nous constatons que

$$(1 + t)^8 > 2{,}14 \text{ , par conséquent } t < 0{,}1 \text{ ,}$$

et le taux cherché est inférieur à 10 %.

On poursuit de même les calculs. Voici quelques résultats :

taux	5 %	6 %	7 %	8 %
$1 + t$	1,05	1,06	1,07	1,08
évaluation de $(1 + t)^{10}$	1,629	1,791	1,967	2,159

Ainsi le taux d'intérêt doit être compris entre 7 % et 8 %. Des calculs plus poussés montrent qu'il doit être compris :

entre 7,1 % et 7,2 %
entre 7,17 % et 7,18 %
etc.

On est ainsi en mesure — tout au moins théoriquement — de calculer des encadrements de plus en plus fins de t. L'intuition ne met pas en doute l'existence d'une solution au problème posé.

On démontre qu'effectivement l'équation d'inconnue t

$$(1 + t)^{10} = 2$$

admet une et une seule solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

IV.2. Les calculs précédents mettent en jeu l'application qui à $(1 + t)$ associe $(1 + t)^{10}$, où t est un décimal positif.
Si nous la notons : $\left|\begin{array}{l} \mathbf{D}^+ \longrightarrow \mathbf{D}^+ \\ x \longmapsto x^{10} \end{array}\right.$

le problème précédent consiste à résoudre l'équation d'inconnue x

$$x^{10} = 2$$

Cette équation n'est qu'un cas particulier d'équations d'inconnue x dont le type est le suivant :

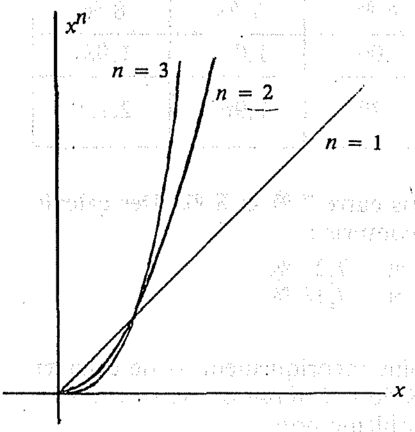
$$x^n = a$$

où n désigne un naturel donné et a désigne un décimal positif donné.
En utilisant l'application $\left|\begin{array}{l} \mathbf{D}^+ \longrightarrow \mathbf{D}^+ \\ x \longmapsto x^{n} \end{array}\right.$

on peut obtenir des encadrements aussi fins qu'on le veut de la solution escomptée mais on démontre que, sauf exception, de telles équations n'admettent pas de solution dans $\mathbf{D}^+$, ni même dans $\mathbf{Q}^+$.

Historiquement, l'étude de ces équations a fortement contribué à la création d'un nouvel ensemble de nombres, l'ensemble $\mathbf{R}$ des réels, dans lequel toute équation de ce type possède au moins une solution.

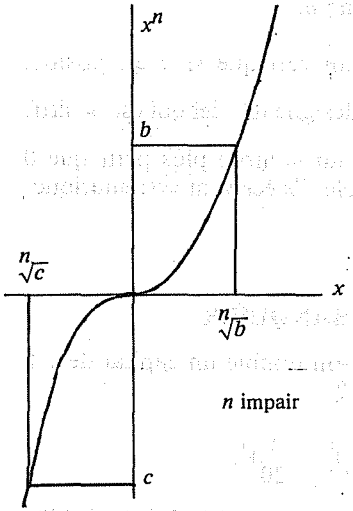
IV.3. En résumé, on démontre que l'application $\left|\begin{array}{l} \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ x \longmapsto x^{n} \end{array}\right.$, où n est un naturel non nul donné, est une bijection. Elle peut être représentée par une courbe dont l'allure est figurée ci-contre dans les cas $n=1$, $n=2$, $n=3$. Ainsi, quel que soit le réel positif a, et quel que soit le naturel non nul n, l'équation d'inconnue x $x^n = a$ admet dans $\mathbf{R}^+$ une et une seule solution notée $\sqrt[n]{a}$ (lire "radical n-ième de a"). $\sqrt[n]{a}$ désigne donc un réel positif.

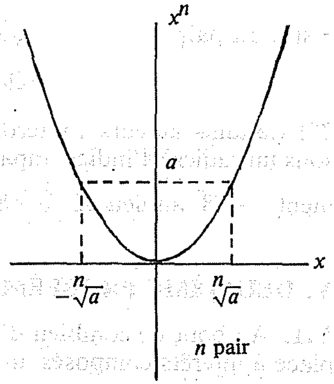


La situation est différente lorsqu'on s'intéresse aux équations d'inconnue réelle x $x^n = a$ où a désigne un réel et n un naturel non nul.

Elles mettent en jeu les applications $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n\end{array}\right.$

qui n'ont pas les mêmes propriétés suivant que n est pair ou impair, ainsi qu'il apparaît sur une représentation graphique.





Ces applications ne sont bijectives que si n est impair. Il en résulte que

- Si n est impair, l'équation d'inconnue x $x^n = a$ admet une et une seule solution notée $\sqrt[n]{a}$. Si a est positif, $\sqrt[n]{a}$ est positif.

  Si a est négatif, $\sqrt[n]{a}$ est négatif, (c'est l'opposé de $\sqrt[n]{-a}$).

- Si n est pair, trois cas se présentent :
  - $a < 0$: l'équation d'inconnue x $x^n = a$ n'a pas de solution.
  - $a = 0$: l'équation d'inconnue x $x^n = 0$ a une seule solution qui est 0.
  - $a > 0$: l'équation d'inconnue x $x^n = a$ a 2 solutions opposées.

    $\sqrt[n]{a}$ désigne la solution positive.

    $-\sqrt[n]{a}$ désigne la solution négative.

Remarques.

1°) Il résulte de ce qui précède que

- si n est impair, $\sqrt[n]{a}$ désigne un réel quel que soit le réel a, et ce réel a même signe a.

- si n est pair, $\sqrt[n]{a}$ ne désigne un réel que si a est positif. Dans ce cas $\sqrt[n]{a}$ désigne un réel qui est positif.

2°) Certains auteurs s'interdisent d'écrire un nombre plus petit que 0 sous un radical d'indice impair ; par exemple, ils écrivent systématiquement $-\sqrt[3]{8}$ au lieu de $\sqrt[3]{-8}$.

V. DEUXIÈME PROBLÈME POSÉ AU BANQUIER

V.1. Au bout de combien d'années aura-t-on doublé un capital de 1 F placé à intérêts composés au taux de 5 % ?

Désignons par n le nombre cherché.
A l'issue de la $n^{\text{ième}}$ année, on dispose de $\left(1 + \frac{1}{20}\right)^n$.

Nous sommes donc ramenés à chercher le plus petit naturel n tel que

$$\left(1 + \frac{1}{20}\right)^n \geqslant 2$$

Pour trouver n, nous ne disposons pas d'autre moyen pour l'instant que de calculer $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ pour quelques valeurs de n.

Un calcul fastidieux — en l'absence de machine tout au moins — permet d'établir :

$$1{,}27 < \left(\frac{21}{20}\right)^5 < 1{,}28$$

ce qui entraîne

$$(1{,}27)^2 < \left(\frac{21}{20}\right)^{10} < (1{,}28)^2$$

dont nous déduisons

$$1{,}61 < \left(\frac{21}{20}\right)^{10} < 1{,}64$$

Par conséquent

$$1{,}27 \times 1{,}61 < \left(\frac{21}{20}\right)^5 \times \left(\frac{21}{20}\right)^{10} < 1{,}28 \times 1{,}64$$

dont nous déduisons

$$2{,}04 < \left(\frac{21}{20}\right)^{15} < 2{,}10$$

Enfin, puisque

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{14} \times \left(\frac{21}{20}\right) < 2{,}10$$

nous obtenons $\left(\frac{21}{20}\right)^{14} < \frac{20}{21} \times 2{,}10$

soit $\left(\frac{21}{20}\right)^{14} < 2$

Ainsi le capital n'atteint pas 2 F à l'issue de la 14e année et dépasse 2 F à l'issue de la 15e.

V.2. Les calculs précédents mettent en jeu l'application $\left|\begin{array}{l} \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \\ n \longmapsto \left(\frac{21}{20}\right)^n \end{array}\right.$

Pour une autre valeur du taux d'intérêt, nous aurions utilisé une application du même type que nous pouvons noter :

$$f: \left|\begin{array}{l} \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \\ n \longmapsto a^n \end{array}\right.$$ où a désigne un décimal non nul donné.

L'application f possède une propriété bien commode dans la pratique des calculs, à savoir :

$$f(n) \times f(p) = f(n + p)$$

qui n'est autre que la traduction de $a^n \times a^p = a^{n+p}$

Nous pouvons illustrer cette propriété par le schéma suivant :

$3 + 5$

$+$

n	0	1	2	3	4	5	8
a^n	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^8

$+$

$a^3 \times a^5$

V.3. Cette propriété est à l'origine d'une extension de la notion de puissance d'un nombre réel non nul.

D'après leur définition même, les écritures :

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$$

sont particulièrement faciles à manier dans des calculs de produits. Or il se trouve que a^n, étant différent de 0, admet, de ce fait, un inverse que l'on note $\frac{1}{a^n}$.

Ainsi le produit et le quotient de deux nombres de la liste

$$\ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$$

sont des nombres qui figurent dans cette liste.

Par exemple : $a^3 \times a^5 = a^8$; $\dfrac{a^5}{a^3} = a^2$ ... $\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2}$.

On obtient des notations plus homogènes en convenant d'écrire a^{-2} au lieu de $\dfrac{1}{a^2}$ et plus généralement en posant :

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad \text{où } n \text{ désigne un naturel.}$$

Ce faisant, nous pouvons prolonger le tableau précédent

...	$-n$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	n	...
...	a^{-n}	...	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	1	a	a^2	a^3	...	a^n	...
...	$\dfrac{1}{a^n}$	...	$\dfrac{1}{a^4}$	$\dfrac{1}{a^3}$	$\dfrac{1}{a^2}$	$\dfrac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	...	a^n	...

On se trouve ainsi en présence de l'application :

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \\ z \longmapsto a^z \end{array} \right. \quad \text{où } a \text{ désigne un réel non nul donné,}$$

et g possède la propriété suivante :

quels que soient les entiers z et z' , $g(z + z') = g(z) \times g(z')$

Remarque. Dans le cas où $a = 10$, les nombres de la 2[e] ligne du tableau ci-dessus sont utilisés dans le système de numération décimale (c'est-à-dire à *base dix*, le mot *base* ayant bien le sens signalé en III.1).

En effet : $26{,}345 = (2 \times 10) + 6 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{5}{1000}$

ou encore

$$26{,}345 = (2 \times 10) + 6 + (3 \times 10^{-1}) + (4 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3})$$

V.4. Pour rendre compte de nombreux phénomènes — physiques, chimiques, biologiques, démographiques, économiques, etc. — on a étendu l'application g et défini des applications h de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, dites *fonctions exponentielles*, qui possèdent la propriété signalée plus haut :

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

a désignant un réel strictement positif, l'exponentielle de *base a* est notée habituellement : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto a^x \end{array} \right.$

On démontre que les fonctions exponentielles dont la base est différente de 1 sont des bijections de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_*^+$ (si $a=1$, on obtient la fonction constante : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right.$)

Ainsi une équation du type $a^x = b$, où x désigne l'inconnue et où b désigne un réel strictement positif, admet une solution et une seule.

Cette solution est notée $\log_a b$, qui se lit *logarithme à base a de b.*

V.5. La bijection réciproque de la bijection $\left|\begin{array}{l}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_*^+ \\ x \longmapsto a^x\end{array}\right.$

est la bijection $\log_a$ $\left|\begin{array}{l}\mathbf{R}_*^+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \log_a x\end{array}\right.$

Elle possède la propriété suivante :
quels que soient les réels strictement positifs x et y ,

$$\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$$

qui traduit en termes de logarithmes la propriété fondamentale de la fonction exponentielle de *base a.*

VI. TABLES DE LOGARITHMES

VI.1. C'est au début du XVII[e] siècle que les logarithmes font leur apparition dans le cadre des recherches astronomiques — apparition qui eut, par ailleurs, des répercussions importantes sur l'évolution ultérieure des mathématiques.

Certes, le maniement des puissances tel qu'il apparaît dans les paragraphes I, II, III ci-dessus était connu depuis l'Antiquité ; mais il fallut la complexité des calculs astronomiques pour motiver l'exploitation systématique de la propriété fondamentale des logarithmes.

Schématiquement, cette propriété exprime qu'une application logarithme constitue l'équivalent d'un dictionnaire permettant de traduire le langage multiplicatif entre réels strictement positifs en langage additif entre réels, et réciproquement. En voici des illustrations.

$\mathbf{R}_*^+$	x	y		xy
$\mathbf{R}$	$\log_a x$	$\log_a y$		$\log_a x + \log_a y$

$\mathbf{R}_*^+$	x	y		x/y
$\mathbf{R}$	$\log_a x$	$\log_a y$		$\log_a x - \log_a y$

$\mathbf{R}_*^+$	x		x^n
$\mathbf{R}$	$\log_a x$		$n \log_a x$

$\mathbf{R}_*^+$	x		$\sqrt[n]{x}$
$\mathbf{R}$	$\log_a x$		$\frac{1}{n} \log_a x$

On entrevoit donc l'intérêt qu'ont eu les logarithmes dans la pratique des calculs numériques jusqu'à une époque récente. Encore faut-il disposer de la table de l'application $\log_a$ pour une valeur de a.

VI.2. John Napier of Merchiston, dit Neper, (1550-1617), dressa la première table de logarithmes.

Voici quelques calculs qui permettront au lecteur de se faire une idée de la façon dont il procéda.

Nous avons utilisé plus haut le fait que $2^{10} \simeq 10^3$. Nous en déduisons que, quel que soit le réel a strictement positif,

$$10 \log_a 2 \simeq 3 \log_a 10$$

Choisissons $a = 10$; alors $\log_{10} 10 = 1$.
(L'usage international est, dans ce cas, de noter simplement *lg* au lieu de $\log_{10}$. On rencontre souvent *log* en France).

Ainsi $10 \lg 2 \simeq 3$ soit $\lg 2 \simeq 0{,}3$

De $4 = 2^2$, nous déduisons $\lg 4 = 2 \lg 2$, soit $\lg 4 \simeq 0{,}6$
De $8 = 2^3$, nous déduisons $\lg 8 = 3 \lg 2$, soit $\lg 8 \simeq 0{,}9$

et ainsi de suite.
De $10 = 2 \times 5$, nous déduisons $1 = \lg 2 + \lg 5$, soit $\lg 5 \simeq 0{,}7$.
En constatant que 3^9, égal à 19 683, est voisin de 2×10^4, nous déduisons de façon analogue $\lg 3 \simeq 0{,}48$
et ainsi de suite.

Henry Briggs (1561-1630) dressa la première table des logarithmes décimaux (logarithmes à *base dix*) des 31 000 premiers naturels en poussant les calculs jusqu'à la 14ᵉ décimale.

De nos jours, on trouve en librairie des tables de logarithmes décimaux. Les plus courantes permettent — entre autres résultats — de connaître par simple lecture les logarithmes des 10 000 premiers naturels avec 5 décimales, soit une valeur approchée à $0{,}5 \times 10^{-5}$ près par excès ou par défaut. Réciproquement, elles permettent d'obtenir une évaluation d'un nombre dont on connaît le logarithme.

S'il n'est pas question ici de détailler le mode d'emploi d'une table de logarithmes (mode d'emploi qui figure dans la table et auquel nous renvoyons le lecteur), nous voudrions néanmoins insister sur le fait que la table ne fournit — sauf exception — que des évaluations des logarithmes. De sorte que le bon usage d'une table doit s'accompagner d'un raisonnement destiné à préciser l'ordre des approximations effectuées au cours du calcul à traiter (voir APPROXIMATION).

VI.3. De nos jours, les tables de logarithmes perdent de l'intérêt et sont appelées à disparaître, vu la diffusion massive et à bon marché des machines à calculer.

VII.

VII.1. Dans de nombreux domaines — scientifiques en particulier — on a besoin d'écrire des nombres très grands ou très petits.

Ainsi :

- on évalue actuellement la population de la Terre à 4 000 000 000 (quatre milliards) d'individus ;

• la distance de la Terre à l'étoile la plus proche est de l'ordre de 40 000 000 000 000 km (quarante mille milliards de kilomètres).

Vu leur longueur, de telles écritures sont difficiles à lire. Pour éviter cet inconvénient, on peut leur substituer des écritures où figure une puissance de *dix*, soit 4×10^9 et 4×10^{13} pour les exemples précédents.

VII.2. Le procédé courant pour abréger les écritures de mesures de grandeur consiste à changer d'unité. C'est le cas en astronomie où l'on utilise l'*année de lumière* comme unité, de préférence au kilomètre.

L'année de lumière est définie comme la longueur du trajet que parcourt la lumière en une année. La vitesse de la lumière étant voisine de 300 000 km/s, on en déduit que l'année de lumière est voisine de 10^{13} km.

Ainsi la distance de la Terre à l'étoile la plus proche est de l'ordre de 4 années de lumière.

VII.3. L'usage scientifique ne peut se contenter de telles évaluations, et l'un des efforts permanents des scientifiques porte sur l'amélioration de la précision de leurs mesures.

C'est ainsi que l'évaluation actuelle de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide est de $2{,}997\,924\,58 \times 10^8$ m/s , et qu'on aura fait un progrès notable lorsqu'on aura précisé un chiffre significatif de plus.

ANNEXE

Préfixes du système international d'unités.

Puissance de 10	Préfixe	Abréviation
10^{18}	exa	E
10^{15}	péta	P
10^{12}	téra	T
10^9	giga	G
10^6	méga	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	déca	da
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Exemple : 1 MW = 10^6W
lire : "1 mégawatt égale 1 million de watts"

Instituteurs, Professeurs du Premier Cycle ...
Pouvez-vous ignorer plus longtemps le phénomène CALCULATRICES ?

Regardez autour de vous ; ouvrez les yeux dans votre classe ...
La calculatrice est là, elle fait partie de l'univers quotidien de l'enfant.
Une récente circulaire ministérielle en recommande l'usage tout au long de la scolarité, l'impose en 4e et 3e, l'autorise dès cette année aux examens.

Vous qui devez enseigner l'art du calcul,
n'attendez plus !

lisez la nouvelle brochure A.P.M.E.P. n° 31

CALCULATRICES QUATRE OPERATIONS
(ELEMENTAIRE ET PREMIER CYCLE)

Un ouvrage écrit pour vous, par des collègues, à un prix modique.
Un ouvrage qui apporte des réponses aux questions que vous vous posez ... et qui entend faire le point sur ce sujet d'actualité :

1. **Les calculatrices dans la classe** : Pour ou contre ?
Ce qu'en pensent enseignants, parents, élèves ... en France ou à l'étranger.
2. **Calculatrices et pédagogie** : les caractéristiques des calculatrices actuelles ; leur fonctionnement ; leurs possibilités mais aussi leurs limites, leurs contraintes ... et leurs dangers.
Quelques approches possibles de la machine dans la classe.
3. **Calculatrices et mathématique** : des calculatrices pour quoi faire ? du C.P. à la 3e, des thèmes à exploiter, des comptes rendus de travaux avec les élèves, des idées à développer, des objectifs simples mais précis...
4. **Calculatrices, autres disciplines ... et vie quotidienne.**
5. **Calculatrices et informatique** : outil à calculer bien sûr, la calculatrice permet aussi et surtout d'**expliciter les algorithmes** de nombreux savoir-faire ;
une façon intelligente, vivante et dynamique d'apprendre à calculer.
6. Et pour finir, une bibliographie fournie, et de bonnes adresses ...

176 pages — 15 F (port compris : **19 F**)

INDEX TERMINOLOGIQUE

commun aux brochures I(1974), II(1975), III(1976), IV(1978) et V(1980)

Abréviations des rubriques :

AF : APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
AL : APPLICATIONS LINEAIRES
AP : APPROXIMATION
AS : ASSOCIATIVITE
CA : CARDINAL
CG : CONGRUENCES
CM : COMMUTATIVITE
CO : COUPLE
DE : DIVISION EUCLIDIENNE
DI : DIVISION
DS : DISTRIBUTIVITE
DT : DIVISIBILITE
E : ENSEMBLE
EG : EGALITE
EI : EQUATION, INEQUATION
EL : ELEMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION
EN : ENSEMBLES DE NOMBRES
EP : EXPOSANT, PUISSANCE
ER : ENTIERS ET RATIONNELS
EX : EXEMPLE, CONTRE-EXEMPLE
FR : FRACTION
ND : NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE
NN : NOMBRE NATUREL
NU : NUMERATION
OM : OPERATEURS MULTIPLICATIFS
OP : OPERATION, LOI DE COMPOSITION
OR : ORDRE
OU : COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS **N**, DANS $\mathbf{D}^+$
PA : PARTAGES
PE : PARTITION, EQUIVALENCE
PEC : POURCENTAGES, ECHELLES, ...
PL : PARALLELE
PO : PROPRIETES DES OPERATIONS
PR : PREORDRE
PT : PROPORTIONNALITE
RB : RELATION BINAIRE
RE : PROPRIETES DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE
RG : REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
S : SOLIDES
SA : SECTEUR, ANGLE
SL : SEGMENT, LONGUEUR
VG : VOCABULAIRE DE LA GEOMETRIE
VH : VERTICAL, HORIZONTAL

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Certains mots se retrouvent dans presque toutes les rubriques : **contre-exemple, couple, définition, écriture, égalité, élément, énoncé, ensemble, exemple, naturel, nombre, notation, nul, partie, représentation, représenter, situation, sous-ensemble, zéro,...** Nous n'avons laissé dans l'index que l'indication des rubriques "à astérisque" éventuelles les concernant.

Nous avons supprimé des mots comme : **collection, construction, démontrer, dessin, figure, formule, généralisation, hypothèse, notion, objet, propriété, tableau, théorème.**

côté EG* — RG — PE — AL — PT — CA — AP — VG* — SA* — VH — S
couple CO* — SL — SA — VG
courbe PL — EP — S
courbe représentative AF* — RG
critère (de divisibilité) DI
croisé S
croissance, croissante (application—) (strictement) PT — EI*
croissant (ordre—) OU*
croix OP — E*
cube RG — AL — CA
cube (d'un nombre) EP*
cylindre S*
cylindrique (surface) S* — PL

damier RG
décimal ND* — EN* — EG — FR — ER — AF — DI — OU — OM — EI — CA — AP — EP
décimal (d'ordre n) DI* — AP*
décimale AL — AP
décomposition EI
décrire PL — S
décroissante (application—) (strictement) EI*
décroître VH
défaut (par—) DI — AP* — EP
degré SA* — VH
degré (d'une équation) EI*
demi-droite CA — SL* — SA — PL — VG — S
demi-espace EI — S*
demi-plan EI — SA* — S
demi-somme EI
démonstration EX
démonstration de type exhaustif EX*
démonstration de type déductif EX*
dénombrable EN* — CA*
dénombrement RG — E — CA*
dénominateur FR* — EN — PEC
départ (ensemble de—) RB* — OM
descendant (vertical) VG
désignation, désigner EG — ER — OP
déterminé (nombre—) EG
déterminer, détermination RB* — AL
développement décimal AP
développer EI
diagonale RE — PR — CM — VG* — VH
diagramme RG
diamètre AL — VG* — VH
diamétrale (droite) S
dictionnaire (ordre du—) OU*
dièdre SA*
différence ER — OP* — CM — AS — AP
différent EG — EN
dimension DT — AP — VG*

direction VG* — SA — VH — S
direction (de plan) VG* — VH — S
directrice S*
discernable PA*
disjoint E — CA
disposition (d'un calcul) OP
disque AL — AP — VG* — SL — SA — S
distance PEC — EI — SL* — SA — VH — PL — VG
distinct PA — OR— OU — CA
distributivité EN* — DS* — PO — CG — AL — OM — E
dividende DE* — DT — DI — OP*
diviser DT — CA
diviseur DE* — DT* — DI — RB — AF — RG — OP* — OR — PR
divisible, divisibilité DT* — RG — DI — DE
divisif (opérateur—) OM*
division DI* — EG — ER — OP — AS — EL — PO — CG — EI — AP
division euclidienne DE* — PE — DT — DI — PA — NU — OP — CG
dizaine NU
dm EG
dodécaèdre (régulier) S*
double NN — RB — AL
douzaine NU
droit VH
droit (angle) SA* — VH — VG
droite EG — RG — AL — OM — EI — E — CA — SL — SA — PL — VH — VG — S
droite (orientée) SA
duodécimal (système—) NU*

écart OP* — CM — CG — EI
écart (angulaire) SA*
échelle PEC* — EI
écriture à virgule EN — ND
effectuer OP*
égal, égaler EG*
égalité EG* — SL — SA
élément E*
élément remarquable (pour une loi de composition) EL*
ellipse S
ellipsoïde (de révolution) S*
encadrement EI — AP* — EP
encombrement S
engendré S
ensemble E*
ensemble des antécédents AF*
ensemble d'existence AF*
ensemble quotient PE* — PR
ensemble des solutions EN* — DT — EI*
entier EN* — ER* — FR — PR — OM — EI — E — CA — AP — EP
entière (partie) ND — OU*
entraîne ND
enveloppe (convexe) S*
équateur SA — VH

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 37, rue Jacob 75006 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". Fondée en 1909, elle regroupe aujourd'hui près de 13 000 enseignants. L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de : Pluridisciplinarité [Orléans, 1975]. Problèmes de comportement [Rennes, 1976]. Formation Permanente [Limoges, 1977]. Problèmes, évaluation, erreur [Reims, 1978]. Enseignement, innovation, recherche [Grenoble, 1979]. En septembre 1980 (4 au 7 septembre), le thème sera : Quelle formation pour les enseignants de mathématiques ? [Bordeaux].

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents.
Parmi les dernières brochures parues :
Elem-Math 5 (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire.
Activités mathématiques en 4e-3e, tome 1 (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index.
Les manuels scolaires de mathématiques (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables.
Pour une mathématique vivante en Seconde (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !
Pavés et bulles (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout).
Calculatrices quatre opérations (1979) : Elémentaire et premier cycle.
Du quotidien à la mathématique (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle).

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de Mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Juin 1980

LISTE DES SECTIONS REGIONALES
(Juin 1980)

Aix-Marseille : P. NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille
Amiens : Jean CAPRON, Résidence La Hotoie-Tivoli, bât. C, esc. 3, appt n° 53, 80000-Amiens
Besançon : Martial THIRIOT, I.U.T, 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon
Bordeaux : Viviane BASTIER-LECLERCQ, 18 rue Levieux, 33000-Bordeaux
Brest : François PARISOT, 14 rue Francis Garnier, 29200-Brest
Caen : Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu
Clermont-Ferrand : André HENNETON, Sauvagnat Ste-Marthe, 63500-Issoire
Dijon : Gérard BOUILLOT, 7 rue du Dr Durande, 21100 Dijon
Grenoble : Nicolas BALACHEFF, Université de Grenoble, Tour IRMA, B.P. 53, 38041-Grenoble Cedex
Guadeloupe : A.P.M.E.P. Guadeloupe, IREM Guadeloupe, Bât. P 3e étage, Lycée Classique et Moderne de Baimbridge, 97110-Pointe à Pitre
Lille : Jean MERCIER, B.30, Résidence Lefebvre d'Orval 59500-Douai
Limoges : Michel L'ABROUSSE, 10 rue Rhin et Danube, 87100-Limoges
Lyon : Bernard ARNAUD, 401 av. du 8 mai 1945, 69300-Caluire
Martinique : Mme LAMOTTE, 1 km 700 route de Schœlcher, voie n° 6, 97200-Fort-de-France
Montpellier : Bernard CHAUVET, Lycée Montaury, 30000-Nîmes
Nancy : André MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54000-Nancy
Nice : Monique LEENHARDT, 36 D avenue Primerose, 06000-Nice
Orléans-Tours : Pierre CHRISTOFLEAU, Résidence St-Exupéry, 10 rue Jean Duverger, 41100-Vendôme
Paris (75, 77, 78, 91, 93, 94, 95) : Marie-José HOUSSIN, 28 av. Villemain, 75014-Paris
Poitiers : Colette BLOCH, 138 rue de la Mérigote, 86000-Poitiers
Reims : Marie DETREY, 39 rue Flechambault, 51100-Reims
Rennes : Michel LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon
Rouen : Albert SAVALLE, 46 avenue de l'Hippodrome, 76310-Sainte-Adresse
Strasbourg : Guy MEHL, 8 rue de Franck, 67000-Strasbourg
Toulouse : Jean-Paul BARDOULAT, Chemin du Becq, 09000-Foix

Imprimerie VAUDREY - LYON

ISBN 2-902680-12-0