LE TRIANGLE
A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Elem-Math VI

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)
N° 36

SOMMAIRE

	Avant-propos	5
I	Réaliser une collection de triangles	7
II	Assemblages	16
III	Pliages	26
IV	Déplacements	30
V	Découpages - Collages	36
VI	Croissance	39
VII	Jeux	48
VIII	Une visite chez Pythagore	51
	Annexe I	55
	Annexe II	57
	Bibliographie	59

Les brochures de l'A.P.M.E.P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public veut être une grande équipe.

La vie d'une équipe, c'est la libre circulation de l'information entre ses membres, le droit qui appartient à chacun, le devoir qui incombe à tous, de rechercher et de poser des questions, d'en proposer des solutions, de remettre en cause...

Il était inéluctable que l'équipe ressentît le besoin d'éditer des brochures, et leur succès grandissant impose la nécessité de poursuivre l'œuvre entreprise, en appelant constamment l'attention des collègues sur la nécessité d'une collaboration permanente de tous.

Nous avons besoin de redéfinir périodiquement nos orientations fondamentales, et c'est dans les chartes ou les textes d'orientation que nous publions les mises à jour. Ces sortes de brochures seraient des bibles, sans le fait essentiel qu'elles ne prétendent pas détenir la vérité. Elles n'en doivent pas moins nourrir notre action.

Il faut aussi assurer à nos collègues une information de base sur la mathématique elle-même (Mots, dictionnaire...), sur les révolutions de notre époque (calculatrices, microprocesseurs,...), sur les sciences de l'éducation (didactique des disciplines, évaluation...), sur les matériaux pour la classe (manuels scolaires...) et, naturellement, développer les thèmes qui s'en dégagent en tenant compte de la demande, soit pour la satisfaire, soit pour la compléter, soit pour la contester, arguments à l'appui.

Nos brochures pénètrent aussi dans les classes (ainsi les Aides Pédagogiques) : elles doivent y subir les feux de l'expérimentation la plus large pour provoquer des débats ou des recherches complémentaires.

L'équipe doit aussi à ses membres la permanence de l'échange culturel. Nous avons beaucoup à travailler pour faciliter l'accès de tous les enseignants de mathématiques à une culture approfondie de la science qu'ils ont à faire aimer. Nous l'avons dit dans la Charte de Caen : "Le maître doit acquérir des connaissances qui dépassent largement celles du niveau de son enseignement".

La diversité des formations initiales ne simplifie pas le problème, et nous rejetons loin de nous l'idée de rédiger des exposés magistraux venant s'ajouter au nombre de ceux qui provoquèrent certaines nausées à l'âge du lycée, ou même de l'Université.

Nous devons trouver ensemble le langage et la présentation qui susciteront de la part de tous une curiosité active pour l'Histoire des Mathématiques, pour la beauté d'un très grand nombre de résultats ou de démarches, pour les jeux ou les paradoxes. Le maître "doit avoir eu l'occasion de poser et de résoudre des problèmes." (Charte de Caen).

Quelques brochures ont déjà partiellement répondu à ces attentes (carrés magiques, nombres complexes, musique,...). D'autres doivent suivre, puisque la demande en est parvenue, et nous attendons des idées et des collaborateurs.

La brochure A.P.M.E.P., enfin, n'est pas l'ouvrage qu'on se contente de lire, chacun pour son propre compte. Elle ne trouve sa raison d'être que dans l'exploitation commune. Le lieu idéal pour cette tâche est le "chantier", réunion de plusieurs enseignants en groupes hétérogènes, où on cherche des problèmes tirés, soit de la pratique habituelle de la classe, soit de situations pêchées dans les brochures ou ailleurs.

De ces assemblées, qui veulent surtout ne pas être doctes, surgissent les idées pour les brochures nouvelles.

Maurice CARMAGNOLE

Pour se procurer les brochures A.P.M.E.P., on peut, soit s'adresser à la Régionale A.P.M.E.P., soit écrire à :

A. BLONDEL, 154 avenue Marcel Cachin,
92320 Châtillon-sous-Bagneux

AVANT-PROPOS

La géométrie est avant tout une étude expérimentale de l'espace où nous vivons.

C'est dire que l'enseignement élémentaire de la géométrie devrait se fonder sur des actions : combiner, assembler, découper, plier, coller, déplacer, agrandir, en un mot, construire des objets. Le point de départ se situe donc dans le travail manuel, en particulier dans ses aspects géométrique et esthétique.

Ces activités devraient permettre aux enfants de faire des constatations qui

• d'une part seront exprimées non seulement à l'aide du langage courant mais également grâce à des dessins, des maquettes, des graphiques, des montages, des mécanismes ;

• d'autre part seront réemployées pour améliorer les constructions initiales ou pour effectuer des prévisions.

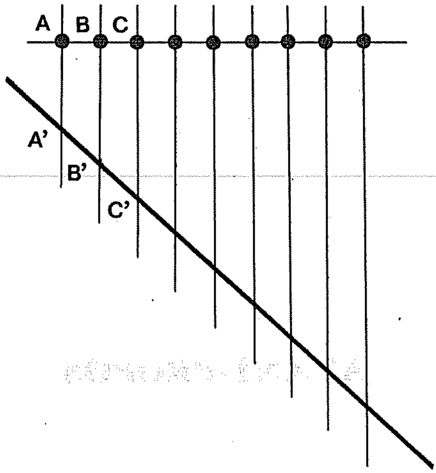
Fonder le premier apprentissage de la géométrie sur de telles activités, c'est tourner le dos aux séances de *contemplation* conduisant à des descriptions propices à l'introduction d'un vocabulaire inutile et ne débouchant sur aucune *pratique*.

Une attitude active — aussi bien en géométrie qu'en activité d'éveil à dominante scientifique — consiste à se donner des objets et, concurremment, à décider d'exercer sur eux des actions convenues, ce qui permet de prendre conscience de certaines permanences.

En voici un exemple : on se donne

- pour objets, des points alignés équidistants : A,B,C, etc.
- pour actions, des projections parallèles sur des droites.

Pour chaque projection sur une droite donnée, on constate que les points images A′, B′, C′, etc., quand ils existent, sont eux aussi équidistants.



Dans ce qui suit on ne trouvera

- ni une progression car, du point de vue mathématique, la géométrie est trop complexe pour pouvoir être présentée à l'Ecole Elémentaire sous forme déductive,
- ni des modèles de leçons car, proposant une démarche-type sur un sujet donné, ils iraient à l'encontre des idées évoquées plus haut.

Nous avons voulu mettre l'accent ici sur les différents types d'actions (assembler, plier, agrandir, déplacer, transformer, etc.) que l'on peut appliquer à un objet, le triangle. Il va de soi que l'on peut appliquer ces mêmes actions à d'autres objets (rectangles, parallélogrammes, polygones, cercles, polyèdres, etc.), enrichissant ainsi le champ des recherches.

Cette brochure est donc moins un catalogue d'activités qu'un recueil, bien incomplet, de suggestions. Nous sommes persuadés que chaque maître saura les exploiter dans le sens d'une géométrie expérimentale et active, liée aux centres d'intérêt des enfants.

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à J. LECOQ, 16 rue du Plateau Fleuri
14000 CAEN

CHAPITRE I

RÉALISER UNE COLLECTION de TRIANGLES

1. Une leçon traditionnelle sur le triangle est, en général, un exercice de contemplation : un triangle a été soigneusement dessiné au tableau ; il est "posé" bien à plat sur l'un de ses côtés qui est horizontal ; ses angles sont presque toujours aigus.

On invite les enfants à émettre des remarques, ce qui conduit à une description du dessin (côtés, angles, sommets) suivie de quelques tracés (hauteurs, médianes).

Une telle leçon introduit un vocabulaire dont on peut se demander quel intérêt il présente aux yeux des enfants.

Ainsi

- les termes introduits resteront étroitement liés à une certaine forme de triangle et ce ne sera pas sans réticence qu'ils seront réemployés dans d'autres situations. Les enfants voient effectivement qu'un triangle a trois sommets et se réfèrent aux coins d'un objet triangulaire ou d'une table par exemple. Mais ce sens trop étroit est difficilement étendu à des dessins plus élaborés (voir Annexe I) ;

- à travers la description évoquée plus haut, le triangle est perçu comme une ligne brisée fermée à trois côtés. C'est restreindre indûment le sens du mot *triangle* qui, selon le contexte, peut aussi désigner
  soit trois points, alignés ou non,
  soit une surface plane.

- on introduit des idées parasites : horizontalité de "la base" et verticalité de "la hauteur". On peut craindre qu'alors, dans l'esprit de l'enfant, un triangle n'ait qu'une hauteur puisque celle-ci est associée à l'intuition de la verticale ;

- le triangle apparaît isolément, sans liens avec d'autres figures : carré, rectangle, quadrilatère, cercle, etc. ; il existe pourtant de tels liens qui jouent un rôle important dans certains problèmes (évaluation d'aires par exemple) ;

- enfin, on néglige le fait qu'un enfant vit dans l'espace usuel, celui où il se déplace et où il manipule des objets. Il y a acquis une certaine expérience, il y a fait certaines constatations qu'il est regrettable de ne pas exploiter.

2. Pliages, découpages libres.

Au cours de la séance de contemplation précédente les enfants n'ont pas d'actions à effectuer sur des objets réels ; ils n'ont par conséquent d'autre liberté que celle de se conformer à l'attente du maître en lui fournissant les "bonnes" réponses.

Pour pallier cet inconvénient, on demande parfois aux enfants de fabriquer des triangles en papier par pliages et découpages et on les laisse libres de faire ce qu'ils veulent.

Les résultats d'une telle activité sont presque toujours décevants : les productions se conforment à des stéréotypes et peu de remarques naissent.

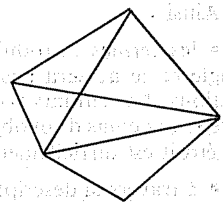
Certes, les enfants ont le droit d'agir, mais ils n'ont pas d'objectif pour guider leur action. Cette incertitude quant au but de l'activité lui ôte tout intérêt et conduit au désœuvrement. L'excès de liberté, loin de stimuler l'imagination, conduit à une impasse.

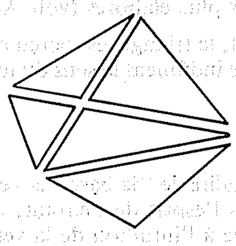
3. Voici au contraire des exemples d'activités qui permettent d'obtenir des triangles. Elles introduisent des contraintes qui limitent le champ de la recherche mais laissent les enfants libres d'organiser à leur gré leur démarche.

Elles pourront donner l'occasion de faire certaines remarques et d'introduire certains mots dont l'usage se révélera commode. Ultérieurement, les objets ainsi réalisés seront utilisés effectivement dans d'autres manipulations.

4. Trouver tous les triangles dessinés dans la figure ci-contre :

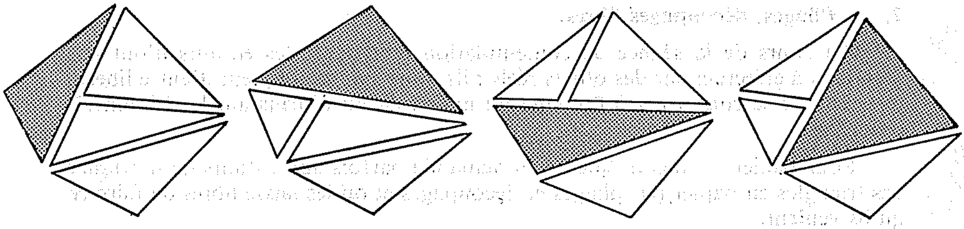
La difficulté consiste à les trouver tous.
On peut procéder de trois façons :
1° - Découper les différentes pièces :





(voilà déjà 5 triangles)

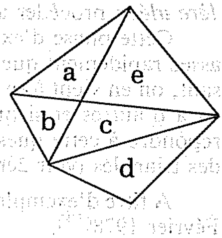
puis les réassembler en respectant les voisinages :



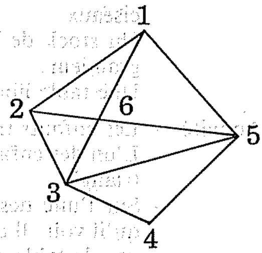
Voilà 4 autres triangles ; soit, au total, 9 triangles.

Au cours de cette activité le mot *triangle* évoque une région du plan dont la frontière est constituée de 3 segments.

2° - Nommer les pièces et dresser la liste des régions qu'on obtient en prenant les pièces une à une, deux à deux, trois à trois, etc. ; puis, éliminer les assemblages qui ne sont pas triangulaires.



3° - Numéroter les sommets, les prendre trois par trois, puis éliminer ce qui ne convient pas (par exemple 1 - 6 - 3).

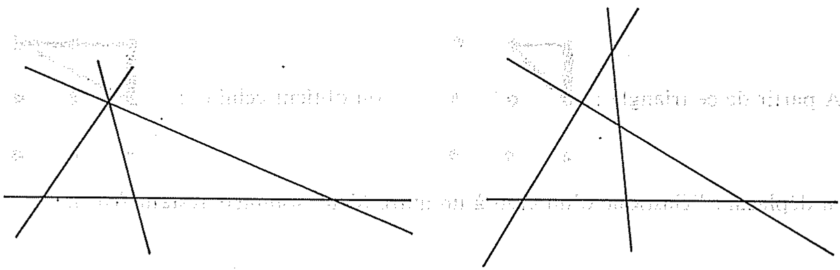


Si le mot *triangle* se réfère à la donnée de trois points non alignés, on retient le triangle 2,3,4 bien qu'il ne soit pas effectivement dessiné (on obtient alors 18 triangles).

Si le mot *triangle* se réfère à une ligne brisée fermée constituée de trois segments effectivement dessinés, on ne retient pas le triangle 2,3,4 (on obtient alors 9 triangles).

5. Voici une autre situation : on dessine 4 droites ; combien forme-t-on de triangles ?

La réponse dépend du dessin initial :



D'autres dessins sont possibles.

Avec 5 droites, puis 6 droites, ... les variantes sont de plus en plus nombreuses. Le nombre des triangles n'est pas nécessairement le même d'une variante à l'autre.

6. A partir d'un géoplan 3 × 3(*)

Il s'agit de trouver tous les triangles qu'on peut réaliser avec un élastique accroché à certains clous d'un géoplan 3 × 3.

1ère idée : procéder au hasard.

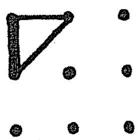
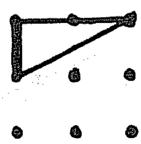
Cette phase d'exploration sans contrainte procure la satisfaction de trouver assez rapidement quelques triangles. Mais, le rythme des productions se ralentissant, on en vient à se demander si on a obtenu tous les triangles possibles ou s'il y en a d'autres et si oui, lesquels. C'est là que réside la difficulté, et le désir de répondre à cette question conduit à réorganiser de façon méthodique la collecte des triangles (voir 2ème idée ci-dessous).

A titre d'exemple, voici comment cette recherche a été vécue dans un CE.1 en Février 1978(**).

Matériel
- Pour deux enfants : un géoplan 3×3, un élastique et une paire de ciseaux.
- Un stock de feuilles sur lesquelles le géoplan est reproduit en vraie grandeur.
- Une table libre réservée au tri des productions.

Activité
- Les enfants travaillent par équipe de deux.
- L'un des enfants place l'élastique sur le géoplan de façon à former un triangle.
- Sur l'une des feuilles où figure le géoplan l'autre enfant dessine ce qu'il voit. Il découpe le triangle qu'il vient de dessiner puis il le porte vers la table commune.
- Si ce triangle peut en recouvrir un autre déjà déposé, on le pose dessus ; sinon on le pose à un endroit libre de la table.
- Après quoi l'équipe, dont les membres peuvent avoir échangé leurs rôles, recherche un nouveau triangle et ainsi de suite.

2ème idée : elle peut naître au cours de l'activité précédente et prend sa source dans la constatation suivante.

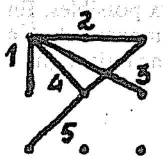
A partir de ce triangle :  on obtient celui-ci : 

en déplaçant l'élastique d'un clou à un autre (deux sommets restant fixes).

(*) Un géoplan est une planchette de contreplaqué quadrillé ; des pointes sont plantées au centre des carrés.

Pour la réalisation de géoplans le lecteur pourra consulter *ELEM-MATH V. Aides pédagogiques pour le Cycle Elémentaire.*

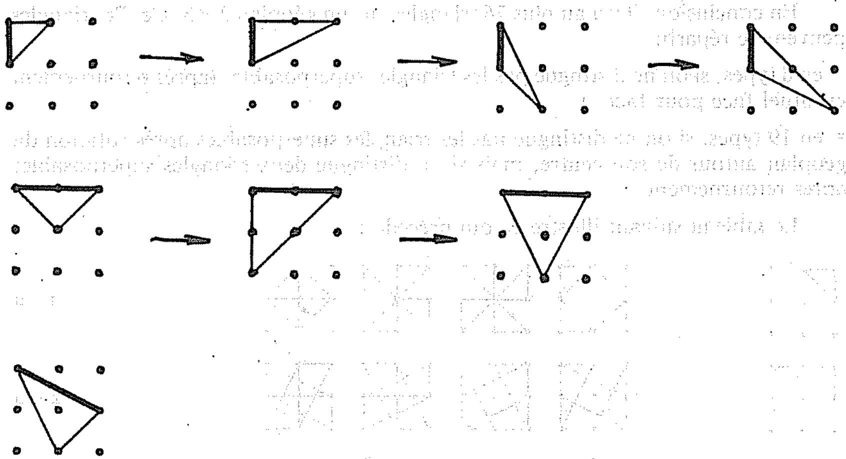
(**) Cette activité ainsi que des prolongements figurent également dans *ELEM-MATH V.*



On est alors amené

- d'une part à dresser la liste des longueurs de segments différentes qu'on peut réaliser sur le géoplan (il y en a 5),
- d'autre part à déformer de proche en proche les triangles.

Voici ce qu'on obtient :

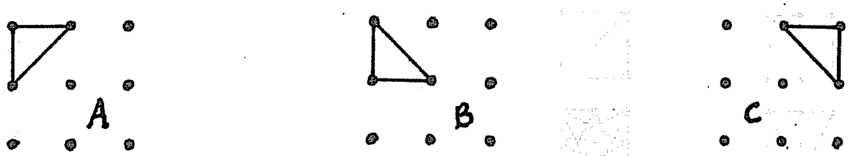


Chemin faisant, on a éliminé des doubles, mais il reste à préciser ce qu'on entend par là.

7. Commentaire à l'activité précédente.

D'après ce qui précède on pourrait être tenté de dire qu'on ne peut réaliser que huit triangles sur un géoplan 3×3. Sans être fausse, une telle affirmation peut être mise en doute. Il s'agit en effet d'expliciter ce qu'on entend par *triangles différents*.

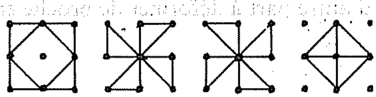
Ainsi les trois triangles que voici



peuvent être considérés comme trois exemplaires d'un même triangle qui "se promène" sur le géoplan.

Si l'on tient compte de la position du triangle sur le géoplan, A, B et C sont trois exemplaires parmi les 16 possibles. Sinon, on rassemble ces 16 triangles et on n'en conserve qu'un pour les représenter.

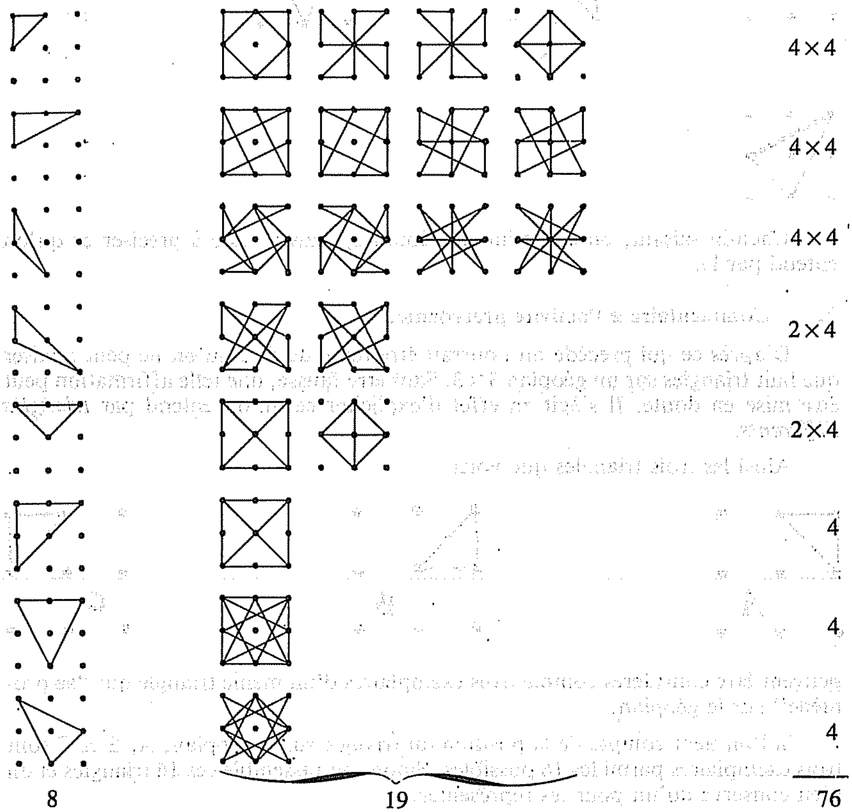
Les deux éventualités précédentes n'épuisent pas tous les choix possibles. En voici un autre : en tournant le géoplan autour de son centre, on peut passer de A à C, mais pas de A à B, ni de B à C. En adoptant ce point de vue, on ne retient que 4 triangles pouvant occuper chacun 4 positions.



En conclusion, il y a au plus 76 triangles sur un géoplan 3×3. Ces 76 triangles peuvent se répartir

- en 8 types, si on ne distingue pas les triangles superposables (après retournement éventuel face pour face) ;
- en 19 types, si on ne distingue pas les triangles superposables après rotation du géoplan autour de son centre, mais si on distingue deux triangles superposables après retournement.

Le tableau suivant illustre ce qui précède :



On a ainsi un exemple de démarche où le dénombrement repose sur un classement implicite qui organise la recherche.

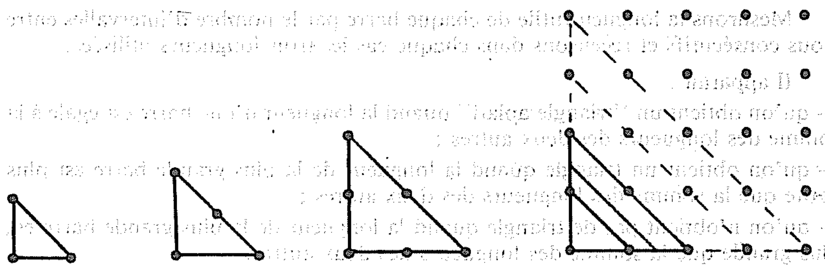
Par ailleurs, les dessins ci-dessus montrent que rotations et symétries interviennent tout au long de la recherche, non pas en elles-mêmes, mais comme des moyens efficaces de dresser la liste complète des triangles.

8. Variantes et prolongements à l'activité présentée en 6.

- Les 8 types de triangles obtenus peuvent donner lieu à divers classements :

  on a 5 triangles isocèles dont 3 sont rectangles,
  on a 4 triangles rectangles dont 3 sont isocèles,
  on n'a pas de triangle équilatéral,
  etc.

- Les triangles rectangles isocèles se ressemblent fortement en ce sens qu'on peut passer des uns aux autres par agrandissement.



Ce n'est pas le cas pour les autres triangles.

- Sur le géoplan 3×3 on peut chercher à réaliser des quadrilatères, essayer de les obtenir tous, puis, à partir de la collection ainsi obtenue, réaliser des classements à partir de différents critères (superposition, convexité, éléments de symétrie, égalité d'aires, etc.).

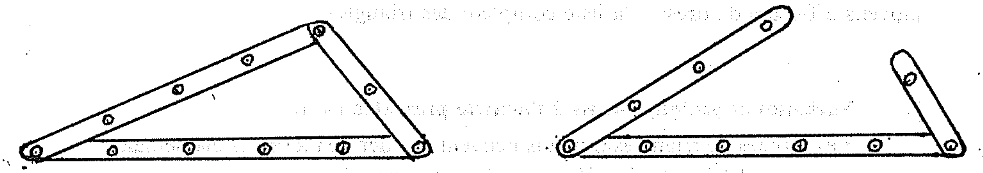
- Les illustrations de la page précédente peuvent être reproduites à grande échelle sur du papier blanc à l'aide des instruments à dessin et, éventuellement, découpées dans du carton fort.

9. Avec des barres de meccano.

On dispose d'un stock de barres de meccano de longueurs variées. On en tire trois "au hasard" et on les assemble par les bouts, dans l'intention de réaliser un triangle.

Tandis que dans les activités précédemment évoquées les triangles apparaissaient comme des régions planes, ici l'attention est attirée sur les côtés.

On obtiendra, certes, de nombreux triangles mais une constatation va apparaître : avec trois barres on n'est pas certain de pouvoir construire un triangle :



Cette constatation incite à être systématique. Ainsi pourrait-on chercher dans quels cas :

— on obtient un vrai triangle,
— on obtient un "triangle aplati",
— on ne peut pas obtenir de triangle.

Mesurons la longueur utile de chaque barre par le nombre d'intervalles entre trous consécutifs et recensons dans chaque cas les trois longueurs utilisées.

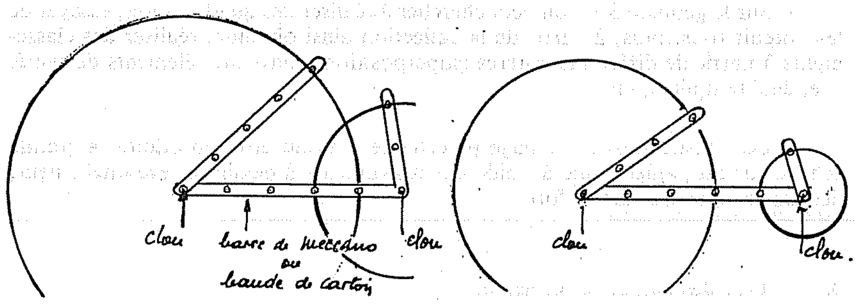
Il apparaît :

— qu'on obtient un "triangle aplati" quand la longueur d'une barre est égale à la somme des longueurs des deux autres ;

— qu'on obtient un triangle quand la longueur de la plus grande barre est plus petite que la somme des longueurs des deux autres ;

— qu'on n'obtient pas de triangle quand la longueur de la plus grande barre est plus grande que la somme des longueurs des deux autres.

La matérialisation des mouvements relatifs des barres peut aider à formuler ces constatations.



Lors de la manipulation chacune des trois barres choisies est fixée à tour de rôle, les deux autres pouvant pivoter, et on compare les dessins obtenus.

Le dispositif de gauche permet de dessiner 6 triangles ; après découpage, on constate qu'ils sont superposables.

Le dispositif de droite ne donne aucun triangle et ce, quelle que soit la barre fixée sur la planchette.

On trouve ainsi :

— un moyen de construire un triangle connaissant les longueurs de ses côtés ;

— le "troisième cas d'égalité des triangles" ;

— un moyen de savoir si deux cercles ont des points communs en ne connaissant que leurs rayons et la distance de leurs centres.

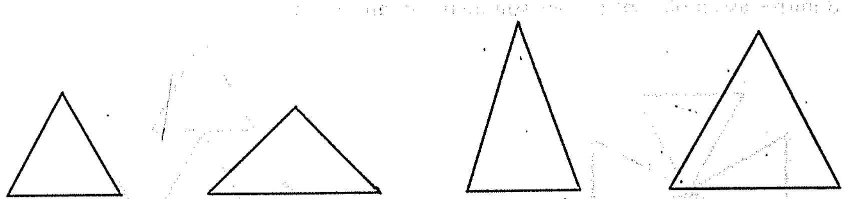
Bien sûr, il ne s'agit pas tant d'aboutir aux énoncés correspondants que de réemployer ces constatations dans d'autres situations (en dessin géométrique par exemple).

10. Une autre activité à partir de barres de meccano.

Dans ce qui suit, nous ne distinguerons pas des triangles qui sont superposables.

- On dispose d'un stock de barres de longueur a. On en prend trois qu'on assemble par les bouts. On ne peut ainsi construire qu'un triangle et il est équilatéral.

- Avec un stock de longueurs a et b, on peut construire au maximum quatre triangles (isocèles, dont deux équilatéraux).



- Avec trois longueurs on trouve, au maximum, dix triangles dont trois sont équilatéraux et six sont isocèles sans être équilatéraux, et au minimum neuf. Il est tentant de continuer méthodiquement et d'observer :

  d'une part les triangles construits,

  d'autre part les résultats numériques.

Nombre de longueurs		1	2	3	4	5	
Nombre de triangles	équilatéraux	1	2	3	4	5	
	isocèles non équilaté-		2	6	12	20	au maximum
	autres			1	4	10	
	Total	1	4	10	20	35	

CHAPITRE II

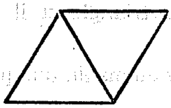
ASSEMBLAGES

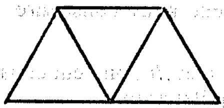
1. Décoration

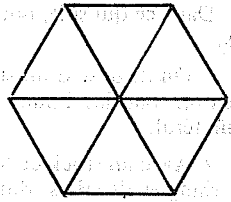
Les enfants ont dessiné et découpé dans des papiers unis de différentes couleurs un stock de triangles équilatéraux de même taille.

On peut leur proposer d'assembler ces triangles pour réaliser des motifs décoratifs.

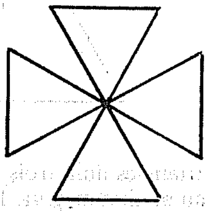
Certains assembleront bord à bord

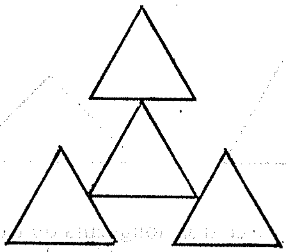




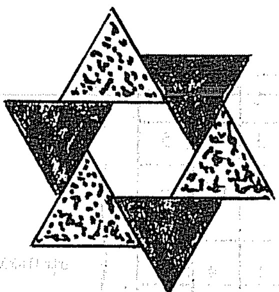


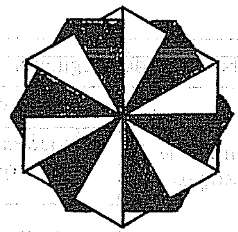
d'autres assembleront par les sommets, ou autrement :



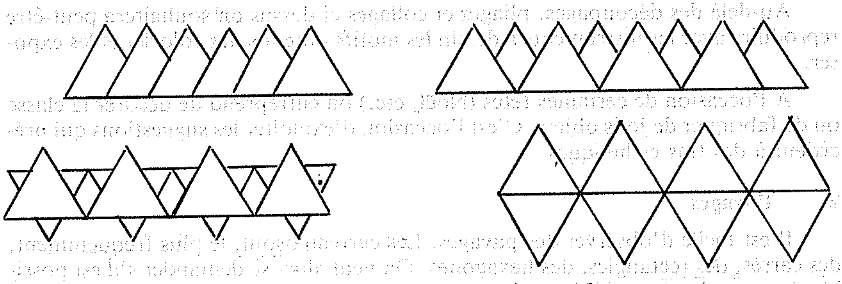


d'autres utiliseront des décalages ou des recouvrements :





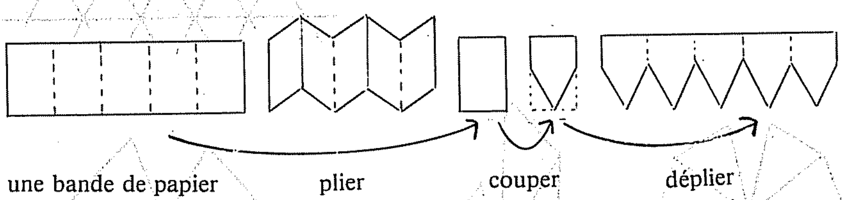
Certains motifs se ferment comme ci-dessus ; d'autres peuvent être prolongés :

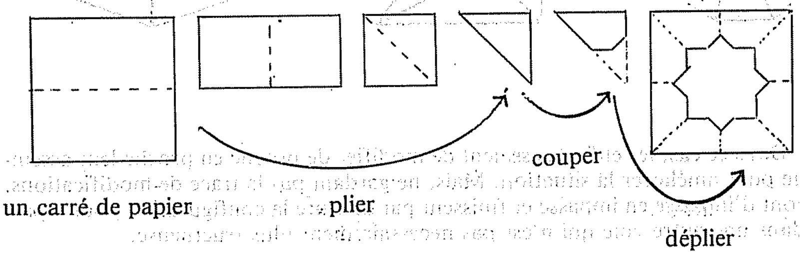


Le caractère esthétique de ces configurations est plus ou moins lié, pour chaque personne, à la présence de translations, de rotations, de symétries qui engendrent des répétitions.

Faire réaliser de tels motifs, c'est donner à l'enfant une expérience vécue de la translation, de la rotation, de la symétrie.

Dans le même esprit on pourra fabriquer des motifs analogues par pliage et découpage ; exemple :





A l'occasion de telles activités, on peut également montrer aux enfants des reproductions de rosaces et de frises décorant des monuments (reproductions, diapositives).

Au-delà des découpages, pliages et collages ci-dessus on souhaitera peut-être reproduire avec les instruments à dessin les motifs obtenus, les colorier et les exposer.

A l'occasion de certaines fêtes (Noël, etc.) on entreprend de décorer la classe ou de fabriquer de jolis objets. C'est l'occasion d'exploiter les suggestions qui précèdent à des fins esthétiques.

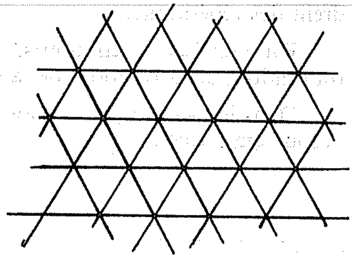
2. Pavages

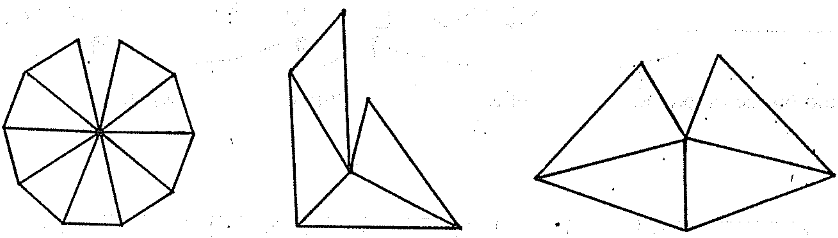
Il est facile d'observer des pavages. Les carreaux sont, le plus fréquemment, des carrés, des rectangles, des hexagones. On peut alors se demander s'il est possible de paver le plan avec des triangles.

2-1. Pour examiner cette question, on met à la disposition des enfants un stock de triangles superposables, découpés dans du papier dont le recto et le verso ont le même aspect.

Si les triangles sont équilatéraux, la réalisation du pavage n'offre pas de difficulté.

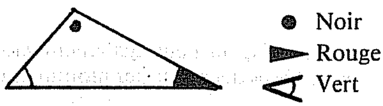
S'ils ne sont pas équilatéraux, certains essais aboutissent à une impasse.





Dans ce cas, les enfants essaient de modifier de proche en proche leur assemblage pour améliorer la situation. Mais, ne gardant pas la trace de modifications, ils vont d'impasse en impasse et finissent par détruire la configuration pour repartir dans une autre voie qui n'est pas nécessairement plus fructueuse.

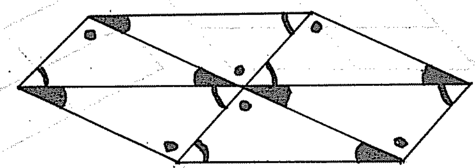
2-2. Pour aider les enfants on leur fournit alors un stock de triangles non-équilatéraux, superposables et dont les "angles" sont coloriés :



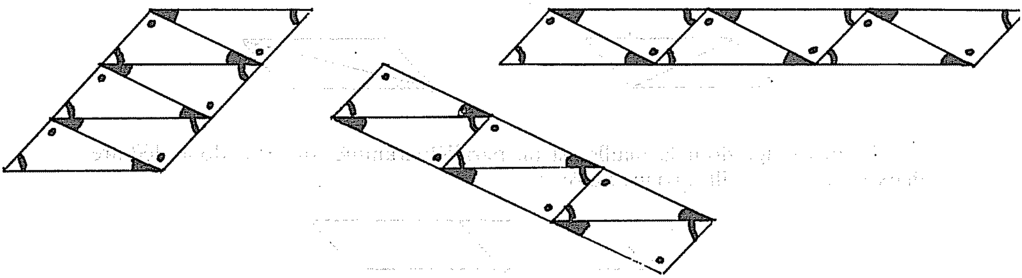
On reprend la phase d'essais.

La présence des couleurs aide à prendre conscience des faits suivants :

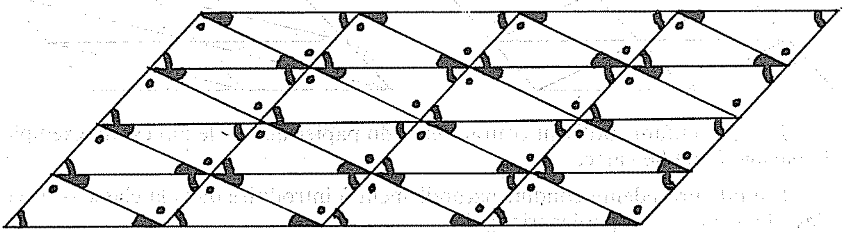
- On peut assembler 6 triangles autour d'un point comme ci-contre : chaque couleur apparaît deux fois.
- De chaque côté de l'une quelconque des 3 droites passant par ce point, chacune des 3 couleurs apparaît.



- On peut aussi réaliser des bandes :

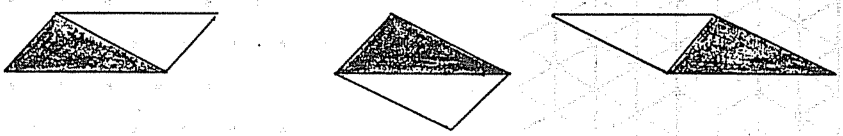


L'utilisation de ces faits permet d'étendre de proche en proche l'assemblage suivant :

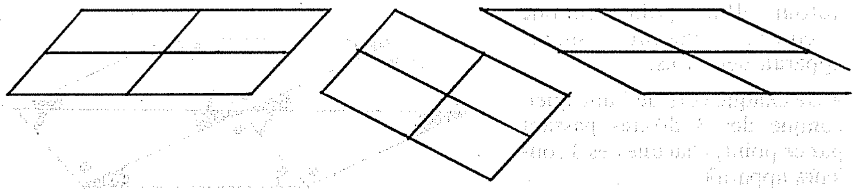


2-3. A partir des pavages ainsi réalisés, on peut dégager les constatations suivantes :

- En assemblant convenablement deux répliques d'un triangle donné, on réalise un parallélogramme et ce, de trois façons différentes en général :

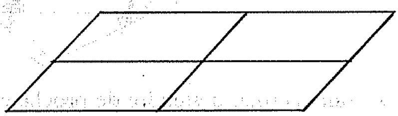


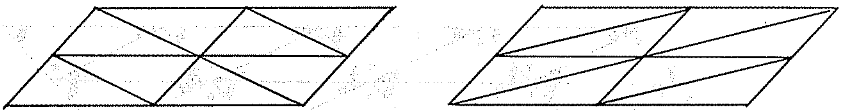
D'un pavage triangulaire on peut donc déduire trois pavages dont les mailles sont des parallélogrammes :



• Inversement, un parallélogramme peut être découpé en deux triangles superposables et ce, de deux façons en général :

D'un pavage dont la maille est un parallélogramme, on peut donc déduire deux pavages à mailles triangulaires :

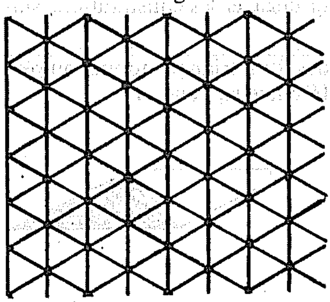


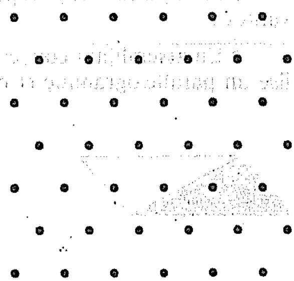


2-4. Les enfants utilisent couramment du papier quadrillé qui est un exemple de pavage à maille carrée.

L'étude précédente conduit naturellement à introduire dans la classe — si ce n'est déjà fait — du papier triangulé.

réglé ou à points





Les possibilités offertes par le papier quadrillé et par le papier triangulé ne sont pas les mêmes. Toutes deux ont leur intérêt.

Voici un exemple d'activité sur papier quadrillé à points.

Les enfants travaillent par équipes de deux. Appelons A et B les deux enfants d'une équipe.

A et B sont placés dans la salle de façon que A ne puisse pas voir ce que fait B et réciproquement.

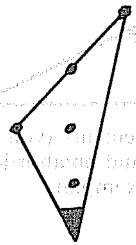
A et B disposent de papier quadrillé à points.

Consignes :

- A dessine un triangle dont les sommets sont des points de la feuille puis il le découpe et colorie l'un des coins en rouge. Après quoi, A donne son triangle à B.
- B doit alors placer le triangle sur une feuille quadrillée à points, de façon que les sommets du triangle coïncident avec trois des points. Puis il rédige un message pour expliquer à A comment il a placé le triangle sur sa feuille (on peut s'attendre à des messages du type suivant : « l'un des sommets est à 2 points au-dessus et un point à gauche du sommet rouge »).
- Si A ne comprend pas le message, il demande à B de le compléter voire de le modifier.

Dans le cas contraire, A et B contrôlent à l'aide du triangle que le message permet de le replacer à un endroit convenable.

- Après avoir échangé leurs rôles, A et B reprennent la même activité.



Variantes :

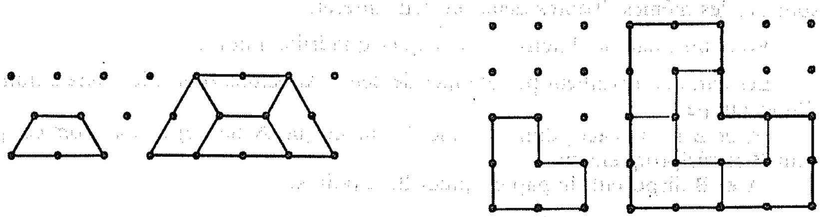
On peut reprendre des activités analogues :

- soit en décalquant sur papier uni le triangle initialement dessiné sur papier à points et en découpant ce décalque qui est transmis à B ;
- soit en utilisant du papier triangulé à points ;
- soit en donnant à A et à B des papiers à points dont les mailles, bien que du même type (carrée ou triangulaire), ne sont pas de la même taille ;
- soit en découpant d'autres figures que des triangles.

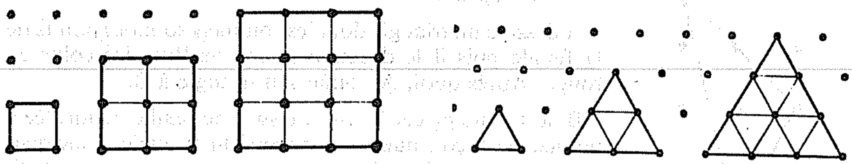
3. Agrandissements

De même qu'on peut assembler quatre carrés pour réaliser un carré plus grand, on peut assembler quatre triangles équilatéraux pour en réaliser un plus grand.

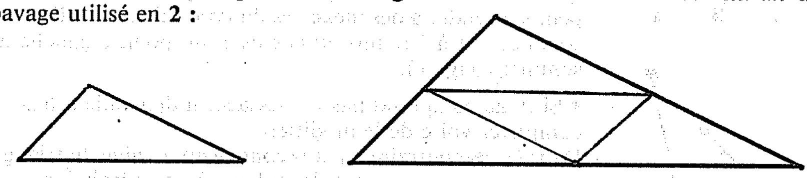
Cette propriété est d'ailleurs commune à d'autres dessins :



On peut bien sûr continuer à agrandir :



ou s'intéresser à des figures moins régulières comme le montre cet extrait du pavage utilisé en **2** :

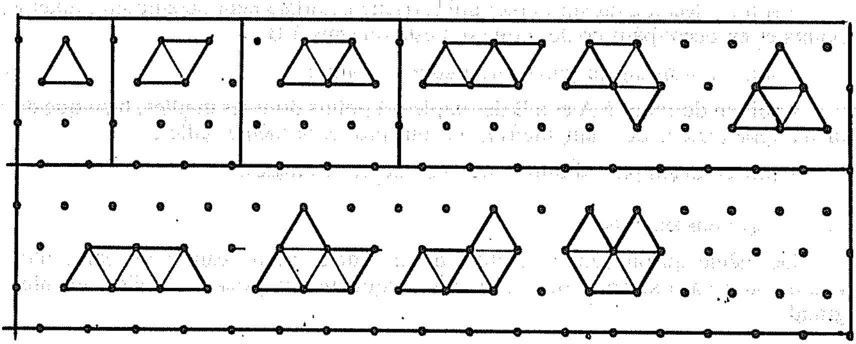


L'examen de ces agrandissements conduit à des dénombrements (voir plus loin, CHAP. VI, Croissance) qui peuvent trouver leur place quand on aborde des problèmes liés aux mesures (longueurs, périmètres, aires, par exemple).

4. D'autres assemblages

On dispose d'un stock de triangles équilatéraux de même taille découpés dans du papier dont le recto et le verso ont la même couleur.

On assemble ces triangles bord à bord, sans superposition ni décalage. En utilisant au plus 5 triangles, les assemblages obtenus sont les suivants :



On pourra aller jusqu'à trouver tous les assemblages de 6 triangles.

Avec les pièces ainsi trouvées on peut inventer des puzzles ; par exemple :
- peut-on assembler les dix pièces représentées ci-dessus à l'intérieur d'un polygone convexe (sans trou, ni recouvrement) ?
- peut-on, avec les assemblages de 6 triangles, former un losange sans trou ?
- etc.

On peut reprendre ici le commentaire de CHAP. I-7.
Par exemple, on trouve 4 assemblages avec 5 triangles si l'on découpe les pièces et qu'on se permet de les retourner dans l'espace ; par contre, on trouve 6 assemblages avec 5 triangles si les glissements sur le plan sont seuls autorisés.

On concrétiserait ce dernier choix en découpant les assemblages dans du papier dont le recto serait blanc et le verso coloré, puis en posant les pièces obtenues de façon qu'elles montrent leur face blanche.

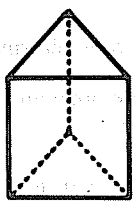
Une variante bien connue de ce thème est la recherche des polyminos (assemblages de carrés au lieu de triangles).

5. Fabrication de boîtes

Les enfants ont pu manipuler des boîtes dont certaines faces, voire toutes, sont des triangles. C'est le cas de certains emballages de lait (berlingots), de chocolats, de bonbons... Voilà un bon point de départ pour l'étude des polyèdres.

En particulier on peut chercher à fabriquer des objets dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Pour ce faire, on peut construire, en un premier temps, les trois pyramides dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux et dont la base est
- triangulaire (c'est le tétraèdre régulier, qui est l'un des objets cherchés),
- carrée,
- pentagonale.

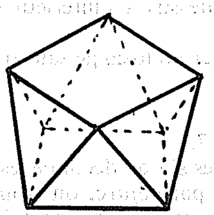
En collant par leurs bases deux pyramides de chacun des trois types précédents on trouve trois nouveaux objets n'ayant que des faces triangulaires (la bipyramide triangulaire, la bipyramide carrée, la bipyramide pentagonale). Les quatre objets ainsi trouvés sont convexes.



Si on se limite à des objets convexes, les quatre derniers sont plus difficiles à trouver si l'on n'a pas déjà commencé à explorer l'univers des polyèdres.

On obtient le plus simple de ces objets en collant trois pyramides à base carrée sur les faces latérales carrées d'un prisme dont la base est un triangle équilatéral.

On trouve ensuite :

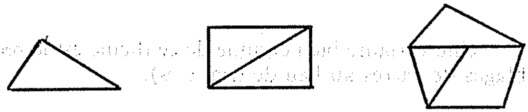


- un objet à douze faces, en insérant un écoinçon fait de deux triangles équilatéraux dans une bipyramide pentagonale ;
- puis un objet à seize faces, en collant deux pyramides carrées sur les bases d'un *antiprisme* à base carrée (voir dessin ci-contre)(*) ;
- enfin, l'icosaèdre régulier (vingt faces), en collant deux pyramides pentagonales sur les bases d'un antiprisme pentagonal.

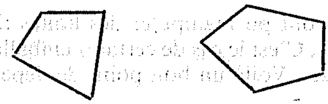
6. Des problèmes de rigidité

La construction de triangles à partir de barres de meccano (voir CHAP. I - 9.) a probablement donné lieu à la réalisation d'autres assemblages plans. On a pu constater que

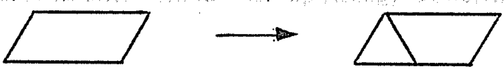
certains sont rigides :



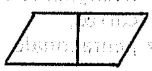
d'autres sont déformables :



On peut rendre rigide un assemblage en lui ajoutant des barres :



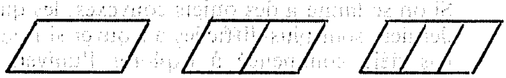
ou



déformable rigide rigide

Mais il ne faut pas disposer les barres n'importe comment.

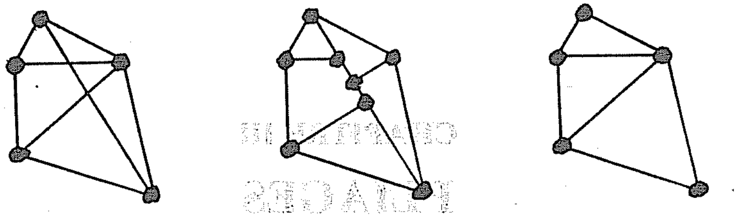
Ainsi



... sont tous déformables.

Ce qui précède suggère le problème suivant : quel est le nombre minimum de barres qu'il faut ajouter à un assemblage pour le rendre rigide ?

(*) Le lecteur intéressé trouvera dans HOLDEN, *Espace, formes et symétrie* (p. 67 et 82), de belles photos d'antiprismes.



Y-a-t-il une relation entre le nombre des côtés d'un polygone et le nombre minimum de barres qu'il faut lui ajouter pour obtenir un assemblage rigide ?

Dans le cas des polygones, si toutes les barres qu'on ajoute partent d'un même sommet, quelles relations y a-t-il entre

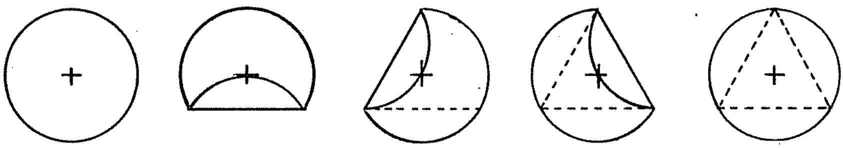
- le nombre de côtés du polygone,
- le nombre des barres ajoutées,
- le nombre des triangles réalisés à la fin du processus ?

CHAPITRE III

PLIAGES

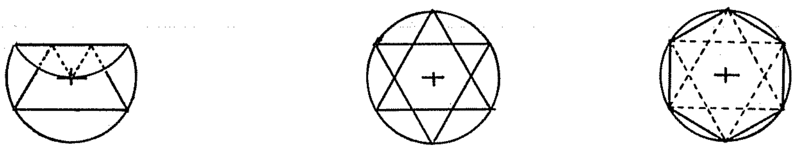
1. Pour la décoration de l'arbre de Noël il arrive qu'on fasse fabriquer par les enfants des solides en carton par découpage, pliage et collage.

Voici, par exemple, comment on peut s'y prendre pour obtenir des faces en forme de triangles équilatéraux :



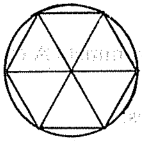
un cercle — 1er pliage — 2^{e} pliage — 3^{e} pliage — Les régions extérieures au triangle servent de languettes pour les collages.

En poursuivant les pliages on obtient des hexagones ; voici comment :



Faire 3 pliages analogues à celui-ci — Etoile de David ou Hexagramme — Hexagone régulier

L'hexagone ainsi obtenu est à rapprocher de ceux qu'on a construits par assemblage de six triangles équilatéraux (voir CHAP. II - 1. et 4.).



On constate à nouveau que chaque côté de l'hexagone régulier a pour longueur le rayon du cercle et on en déduit un procédé qui permet, par report du rayon au cercle, de diviser un cercle en six arcs superposables.

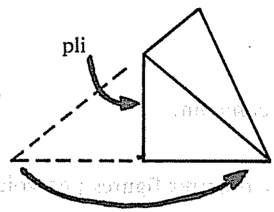
2. Un pliage suivi d'un découpage permet de fabriquer un motif ayant un axe de symétrie. Ce procédé est utilisé de façon systématique dans la réalisation de frises et de rosaces (voir CHAP. II - 1.).

Inversement, on peut rechercher s'il est possible de plier un motif donné de façon que les deux parties se recouvrent exactement. Si le motif est un triangle découpé dans du papier, trois cas se présentent :

- ce n'est pas possible,
- c'est possible d'une seule façon (triangle isocèle non équilatéral),
- c'est possible de trois façons (triangle équilatéral). On constate que les trois plis semblent passer par un même point.

Au lieu de prendre le triangle comme motif, on pourrait prendre le carré, le rectangle, le cercle, etc.

3. Plier un triangle de façon que la moitié d'un côté recouvre exactement l'autre moitié ou, si l'on préfère, de façon que deux sommets coïncident.

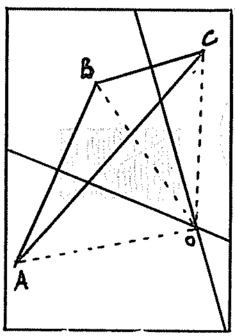


Recommencer successivement avec les deux autres côtés.

On constate que :

- si le triangle a trois angles aigus, les trois plis ont un point commun ;
- si le triangle a un angle obtus, les prolongements des trois plis semblent pouvoir se prolonger jusqu'à un point commun.

La manipulation suivante apporte une explication à ces deux faits.



Pour matérialiser dans tous les cas le point commun, on dessine un triangle sur du papier calque.

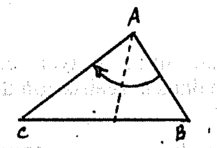
On plie de façon à faire coïncider A et B, puis de façon à faire coïncider B et C, puis de façon à faire coïncider A et C.

Les deux premiers plis se rencontrent en O.

- Dans le premier pliage, les segments [OA] et [OB] coïncident ; les longueurs OA et OB sont égales.
- Dans le deuxième pliage, les segments [OB] et [OC] coïncident ; les longueurs OB et OC sont égales.

Les longueurs OA et OC étant, de ce fait, égales, il n'est pas surprenant que le troisième pli passe par O.

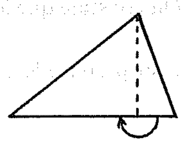
4. Plier un triangle de telle sorte que le pli passe par l'un des sommets A et que le sommet B vienne sur AC.



Faire deux autres plis analogues.

Ici aussi, on constate que les trois plis ont un point commun, fait que l'on pourrait expliquer par une démarche analogue à celle qui est suggérée ci-dessus.

5. Plier un triangle de façon que le pli passe par un sommet et qu'une portion du côté opposé à ce sommet s'applique sur l'autre.



Dans le cas où les trois angles du triangle sont aigus, on peut faire trois plis de ce type. On constate que les trois plis passent par un même point.

Si l'un des angles du triangle est droit ou obtus, on ne peut faire qu'un seul pli qui respecte les conditions précédentes.

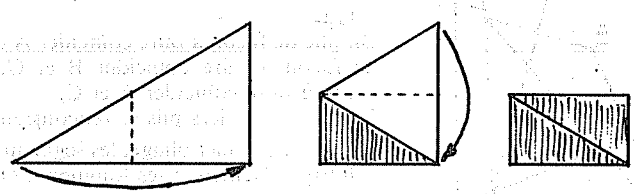
Pour avoir trois plis il est nécessaire :

- de dessiner le triangle sur du papier calque,
- de prolonger les côtés de l'angle droit ou obtus.

On constate alors que les trois plis ont un point commun.

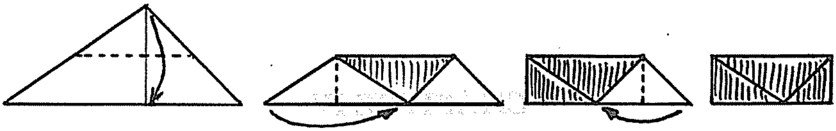
6. En utilisant des pliages, on peut lier le triangle à d'autres figures ; en voici des exemples :

- Partir d'un triangle rectangle et plier comme suit :



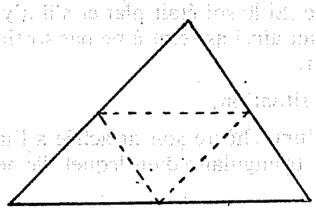
On obtient ainsi un rectangle.

• Pour obtenir un rectangle, on peut aussi plier un triangle quelconque. Voici le film du pliage :



Le rectangle obtenu après pliage évoquera peut-être certaines enveloppes à lettres. On examinera comment ces enveloppes sont réalisées.

• Si l'on part d'un triangle et qu'on plie en suivant chacune des droites qui passent par les milieux de deux côtés, on constate que l'on obtient un tétraèdre, du moins si les trois angles du triangle sont aigus.



En dépliant, on constate que les quatre triangles qui apparaissent sont superposables (pour le constater : découper selon les plis ou utiliser du papier calque).

• Si l'on part d'un triangle équilatéral, le pliage précédent permet de construire un tétraèdre régulier.

Prolongements :

• Trouver les patrons du tétraèdre régulier (à rapprocher du travail suggéré au CHAP. II-4).

• Colorier les 4 faces d'un tétraèdre régulier à raison d'une couleur par face sachant que l'on dispose de 1, ou 2, ou 3, ... couleurs. Dans chaque cas, combien de tétraèdres coloriés différents peut-on réaliser ?

• Chercher d'autres polyèdres dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux (voir CHAP. II-5).

7. Chacun des pliages précédents permet de mettre en évidence un ou plusieurs faits dont il est intéressant de conserver la trace. Cela suggère de faire suivre ces activités de pliages par des exercices de dessin.

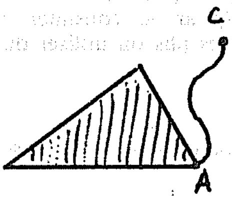
Les enfants doivent reproduire, à l'aide des instruments adéquats, les différents éléments du pliage (figures découpées ou dessinées, marques des plis). Les dessins obtenus — accompagnés d'un bref commentaire rappelant les grandes lignes de la manipulation ainsi que les constatations effectuées — sont ensuite affichés dans la classe.

CHAPITRE IV

DÉPLACEMENTS

1. A l'occasion d'une promenade on pouvait, naguère, observer des animaux en train de paître. Ils étaient parfois attachés à un piquet de façon qu'ils ne puissent brouter qu'une certaine quantité d'herbe. Si le sol était plat et s'il n'y avait pas d'obstacle à proximité, chaque animal était ainsi astreint à ne pas sortir d'un disque, mais pouvait le parcourir entièrement.

L'introduction d'obstacles renouvelle la situation.



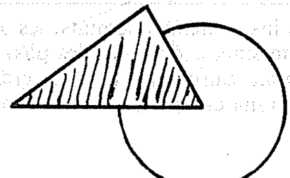
Imaginons qu'une chèvre soit attachée à l'un des coins d'un obstacle triangulaire dans lequel elle ne peut pas pénétrer.

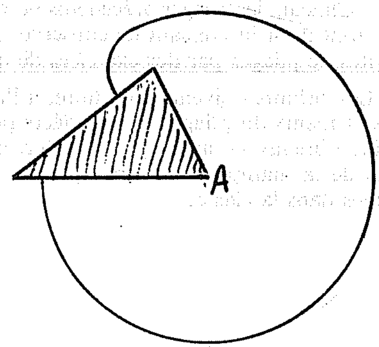
Il s'agit de déterminer la région où peut brouter la chèvre.

1-1. Pour les enfants, une première approche consiste à mimer la situation. Dans la cour on dessine la construction à la craie. Des enfants se placent sur les traits et matérialisent cet obstacle triangulaire.

Deux enfants tiennent chacun une extrémité d'une ficelle. L'un se place en un sommet du triangle, l'autre mime les déplacements de la chèvre. Le reste de la classe suit ses mouvements et tente une première description de la région qu'il peut parcourir.

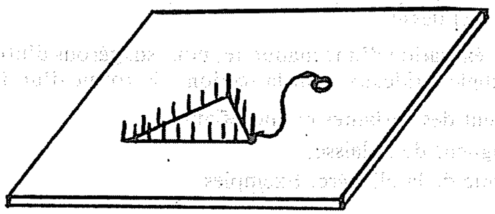
En reprenant cette saynète avec des ficelles de longueurs différentes, on attire l'attention sur le rôle que jouent les enfants placés aux coins de l'obstacle.





1-2. Pour aider les enfants à préciser leurs observations, on peut ensuite chercher à construire des maquettes de la situation, permettant à chacun de manipuler et de faire ses propres constatations.

Voici comment réaliser une telle maquette.



On dessine l'obstacle sur une feuille blanche que l'on fixe sur un support, une planchette de bois par exemple.

On plante des épingles à tête aux sommets du triangle et sur les côtés, ce qui matérialise les murs.

On attache un fil à l'épingle convenable. A l'extrémité libre du fil on attache un anneau dans lequel on passe un crayon. En déplaçant la pointe du crayon sur la feuille on matérialise les mouvements possibles de la chèvre et la frontière de la région où elle peut brouter.

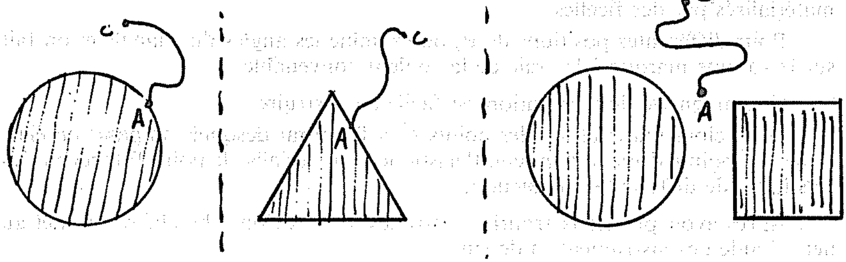
1-3. Le dispositif précédent ne permet pas d'obtenir des tracés très précis. En outre, le rôle de certains éléments de la situation (les sommets en particulier) peut ne pas apparaître très clairement. Il est donc tout indiqué de faire suivre cette activité d'une mise au net des résultats obtenus.

En s'aidant de la feuille utilisée plus haut, les enfants recopient à l'aide des instruments de dessin les tracés utiles pour visualiser l'obstacle d'une part, la région où peut brouter la chèvre d'autre part. Chacune de ces régions est coloriée. On ajoute, au besoin, un bref commentaire et on affiche les dessins ainsi réalisés.

1-4. On peut varier la situation précédente en modifiant un ou plusieurs des éléments suivants :

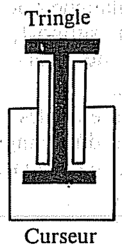
- la longueur de la ficelle
- la forme de l'obstacle
- la position du point d'attache par rapport à l'obstacle
- le nombre des obstacles.

Exemples :



2. Un chien est attaché à une laisse dont la poignée est solidaire d'un curseur qui peut coulisser le long d'une glissière rigide.

Il s'agit de déterminer la zone dangereuse pour le chat.

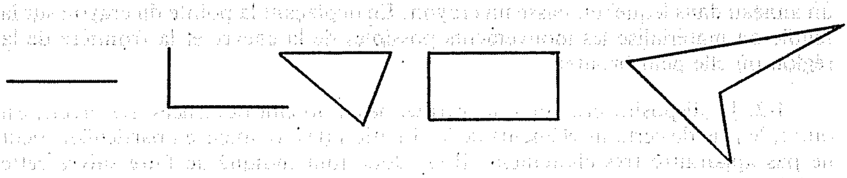


Cette situation peut être étudiée en suivant la même démarche que ci-dessus.

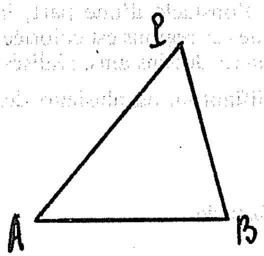
Pour la réalisation d'une maquette, nous suggérons d'utiliser de la tringle à rideaux dont la section a la forme d'un I.

On obtient des variantes en modifiant :

- la longueur de la laisse,
- la forme de la glissière. Exemples :



3. Deux points A et B sont fixés.



Pour chaque point P du plan, l'une ou l'autre des deux éventualités suivantes est réalisée :

- Le triangle PAB a un angle obtus. Dans ce cas, on marque P en rouge.
- Le triangle PAB n'a pas d'angle obtus. Dans ce cas, on marque P en vert.

Préciser la région qui sera ainsi coloriée en rouge et celle qui sera coloriée en vert.

Comme plus haut on peut faire vivre la situation.

Trois enfants jouent le rôle des points P, A et B. Les côtés du triangle sont matérialisés par des ficelles.

Pour différentes positions de P, on examine les angles du triangle et on fait sur le sol une marque à la craie de la couleur convenable.

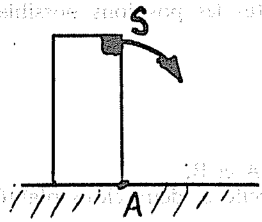
Une maquette de la situation est facile à construire.

Deux clous matérialisent les points A et B autour desquels on passe un élastique. La pointe d'un crayon tend l'élastique et matérialise le point P (prévoir des élastiques de différentes longueurs).

Après avoir précisé la frontière entre les deux régions cherchées, on met au net à l'aide des instruments à dessin.

3. Pour déplacer un tube long et pesant, le plus commode consiste à le faire rouler sur le sol. On procède de même pour certains fardeaux trop lourds pour être portés, une caisse de livres par exemple : dans ce cas, on bascule la caisse avec précaution autour d'une de ses arêtes.

Cela suggère l'activité suivante :



On marque un des sommets S de la caisse. Puis on bascule la caisse autour de l'arête A (voir croquis) et on continue de proche en proche. Quel est le trajet de S ?

Là encore, on commence par vivre la situation. A défaut de caisse, on bascule un rectangle de carton en prenant soin que le sommet A ne dérape pas au cours du basculement.

Pour obtenir plus commodément un tracé du trajet de S, on peut reprendre la manipulation sur une table.

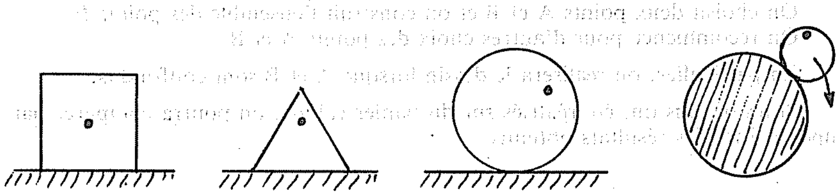
Un guide en bois suffisamment long est fixé sur la table et joue le rôle du sol. Un rectangle de carton posé à plat bascule en s'appuyant le long du guide.

Dans un trou percé dans le rectangle à proximité d'un de ses coins, on place la pointe d'un crayon qui laisse la trace de son itinéraire au cours des basculements successifs du rectangle. Les résultats obtenus sont mis au net avec les instruments à dessin.

Pour obtenir des variantes, modifier :

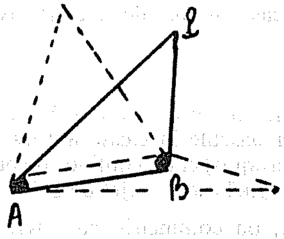
- la forme du carton (triangle, cercle, ..., au lieu d'un rectangle),
- la place du trou dans la plaque de carton choisie,
- la forme du support sur lequel bascule le carton.

Exemples :



On vend dans le commerce un jeu qui comporte des roues dentées percées de trous. On fixe une de ces roues sur un support et on engrène une seconde roue sur la première. La pointe d'un crayon passée dans l'un des trous de la roue mobile laisse sur le papier la trace de son déplacement (voir ci-dessus le dessin de droite).

4. On plante deux piquets A et B. On passe autour de ces piquets une boucle réalisée avec une ficelle. Si maintenant on saisit la ficelle en un point et qu'on la tend, on obtient un triangle PAB. On peut déplacer la boucle, on obtient d'autres triangles (en pointillés sur le dessin ci-contre).



Trouver toutes les positions possibles du point P.

Il est facile de faire vivre cette situation,
soit que des enfants jouent les rôles des points P, A et B,
soit que chaque enfant expérimente avec une ficelle et deux clous plantés en A et B.

On varie les manipulations en modifiant :

- la longueur de la ficelle,
- la distance des points A et B.

Au cours de la mise au net des résultats obtenus, on pourra obtenir deux types de dessins :

1er type. Les deux points A et B sont choisis ainsi que la longueur ℓ de la ficelle. On obtient alors deux positions particulières du point P en procédant comme suit :

- choisir une longueur R inférieure à $\ell - AB$,
- tracer le cercle de centre A et de rayon R,
- tracer le cercle de centre B et de rayon $(\ell - AB) - R$,
- marquer les points communs aux deux cercles.

Ensuite, on efface les cercles et on recommence avec un autre rayon R' et ainsi de suite (Cette façon de procéder est à rapprocher de l'activité suggérée au CHAP. I - 9.).

2e type. On se donne uniquement la longueur ℓ de la ficelle.
On choisit deux points A et B et on construit l'ensemble des points P.
On recommence pour d'autres choix des points A et B.

En particulier, on réalisera le dessin lorsque A et B sont confondus.

Si les dessins ont été réalisés sur du papier calque, on pourra comparer par superposition les résultats obtenus.

5. Un triangle T est dessiné sur une feuille de papier fixée à la table. Un calque T' de T glisse sur la feuille de papier de façon que les côtés de T' restent constamment parallèles à ceux de T.

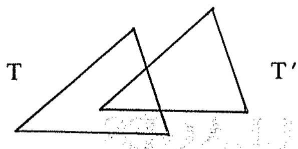
Examiner la région intérieure à la fois à T et à T'.

Recenser les différentes formes qu'elle peut prendre suivant les positions relatives de T et de T'.

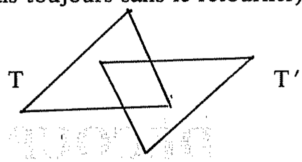
Faire les dessins correspondants.

Remarque : On peut décalquer T puis faire glisser le papier calque

sans le faire tourner



après l'avoir fait tourner
(mais toujours sans le retourner)



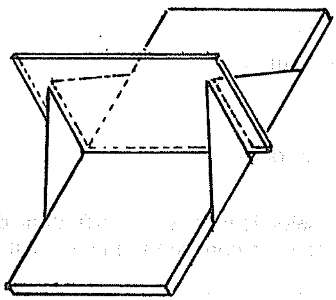
6. On dessine un triangle T, puis une droite D.

On dessine le triangle T′ symétrique de T par rapport à la droite D.

Examiner la région intérieure à la fois à T et à T′.

Recenser les différentes formes qu'elle peut prendre suivant les positions relatives de T et de D.

Faire les dessins correspondants.



Dans le cas où les enfants ne connaissent pas de procédé pour dessiner le symétrique d'un dessin par rapport à une droite, on peut recourir à une glace sans tain (verre à vitre ou mieux plastique transparent).

Quatre équerres sont collées par paires sur deux bords opposés d'une planchette de telle sorte que la glace puisse coulisser entre ces équerres (voir dessin ci-contre).

La feuille portant un dessin est placée sur la planchette et l'on dessine le reflet du dessin ainsi que la trace de la glace sur le papier.

7. On dispose d'un tétraèdre régulier dont les faces sont peintes de quatre couleurs différentes à raison d'une seule couleur par face.

On le pose sur une feuille de papier puis on le bascule autour d'une de ses arêtes en veillant à ce que celle-ci ne glisse pas pendant le basculement. Enfin on imagine que la face qui est en contact avec la feuille y imprime sa couleur.

Colorier la feuille de proche en proche.

Observer et décrire la disposition des couleurs.

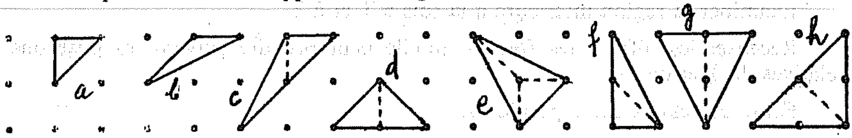
Pour aller d'un triangle coloré à un autre, le tétraèdre peut suivre plusieurs chemins. La couleur de la case d'arrivée dépend-elle du chemin suivi ?

Reprendre cette activité avec un cube coloré et comparer les résultats.

CHAPITRE V

DÉCOUPAGES - COLLAGES

1. Reprenons les huit types de triangles obtenus au CHAP. I - 6. :



Des découpages simples transforment :

c en un *a* et un *b* ; de même pour *f*

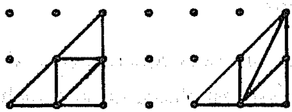
d en deux *a*

e en un *a* et deux *b*

g en deux *f*, donc en deux *a* et deux *b*

h en deux *d*, donc en quatre *a*.

Si on veut classer ces huit triangles selon leurs aires, il suffit donc de comparer les aires de *a* et de *b*. Ce qu'on peut faire en constatant que *h* peut se découper de deux façons :



quatre *a* — deux *a* et deux *b*

d'où l'on déduit que *a* et *b* ont la même aire.

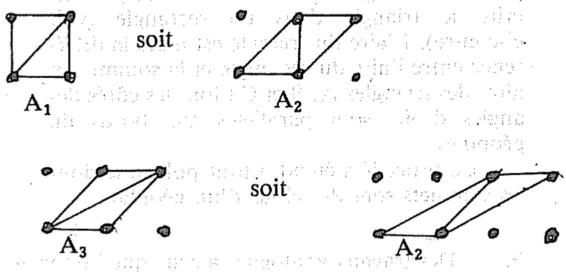
Les constatations précédentes peuvent être résumées dans le tableau suivant :

un *a*	deux *a*	trois *a*	quatre *a*
a *b*	*c* *d* *f*	*e*	*g* *h*

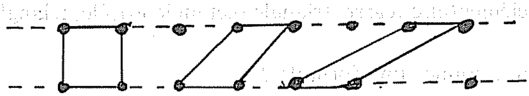
qui classe les huit triangles selon leurs aires.

2. Au lieu de découper on aurait pu juxtaposer. Ainsi :

- deux a donnent soit
- deux b donnent soit

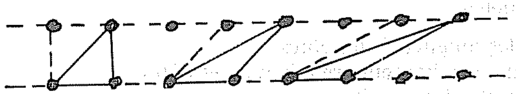


En examinant A_1, A_2 et A_3 — l'aire de chacun est le double de celle de a — on constate une déformation qui fournit des parallélogrammes de même aire :



et ainsi de suite

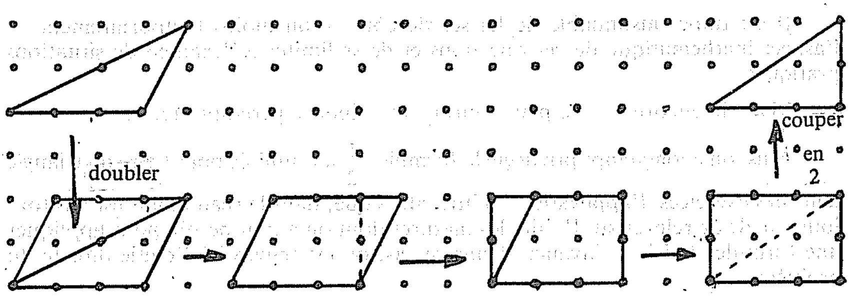
et, en filigrane, une déformation qui fournit des triangles de même aire :



et ainsi de suite

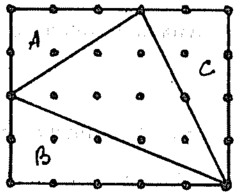
On voit ainsi se dégager des moyens simples qui permettent d'associer à un triangle un rectangle d'aire double.

Etant donné un triangle dont l'un des côtés est parallèle aux bords du géoplan, on peut construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux bords du géoplan et qui a la même aire que le triangle de départ (voir ci-dessous).



Si aucun côté du triangle n'est parallèle aux bords du géoplan, on commence par inscrire le triangle dans un rectangle (voir ci-contre). L'aire du triangle est alors la différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des triangles A, B et C (dont les côtés des angles droits sont parallèles aux bords du géoplan).

Ce procédé s'étend à tout polygone dont les sommets sont des clous d'un géoplan.



3. Des travaux analogues à ceux que l'on vient d'évoquer entrent dans le chapitre des calculs d'aires.

Des papiers à points, quadrillés ou triangulés, sont particulièrement adaptés à ces travaux préparatoires. Ils permettent, grâce à des découpages ou à des assemblages, de calculer directement l'aire d'une région en prenant pour unité celle d'une certaine maille élémentaire (carré, triangle rectangle isocèle, triangle équilatéral, losange, etc.).

Faut-il aller jusqu'à donner une formule ?

D'une part, il faudrait savoir laquelle, ou lesquelles, donner. Ainsi l'aire d'un triangle est exprimée

aussi bien par $\frac{1}{2}ah$ que par $\frac{1}{2}bk$ ou $\frac{1}{2}cl$ ou $\frac{abc}{4R}$ ou pr, etc.

expressions dans lesquelles

$a,b,c,$ désignent les longueurs des côtés
$h,k,l,$ les longueurs des hauteurs relatives à ces côtés
R, le rayon du cercle circonscrit
p, le demi-périmètre
r, le rayon du cercle inscrit.

D'autre part, il faudrait montrer que l'aire d'un domaine peut s'exprimer en fonction des mesures de certaines longueurs associées à ce domaine.

Dans les exemples présentés plus haut, toutes les longueurs utilisées ont pour mesures des nombres naturels puisqu'on se ramène à des triangles rectangles dont les côtés des angles droits sont parallèles aux bords du quadrillage. La généralisation des résultats obtenus dans ce cas ne va pas de soi.

Il est donc raisonnable de laisser de côté — au moins temporairement — l'aspect mathématique de ces questions et de se limiter à l'examen de situations pratiques.

Mais, là encore, on ne peut fournir une réponse péremptoire.

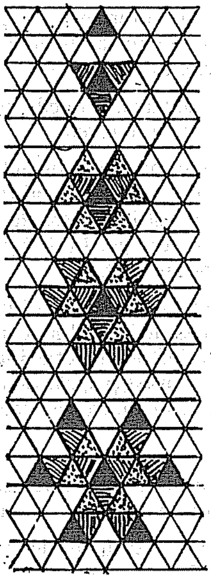
Ainsi on a longtemps privilégié la formule $\frac{1}{2}ah$ utilisée pour l'aire du triangle dans des exercices d'application ad hoc, alors que, dans la réalité, il n'est pas toujours facile de relever sur l'objet les mesures dont on aurait besoin pour appliquer une formule choisie à l'avance. Dans ce cas, on est renvoyé à l'étude directe du problème.

CHAPITRE VI

CROISSANCE

1. Décoration.

Générations :



1-1. Sur fond de papier triangulé, voici un procédé de coloriage inspiré par la croissance d'un cristal.

On part d'une cellule-mère. De nouvelles cellules naissent le long de ses côtés et occupent simultanément tous les triangles libres possibles, et ainsi de suite en respectant les contraintes suivantes :

- un nouveau-né a une seule mère,
- deux nouveau-nés ne peuvent se toucher que par un sommet (voir un exemple ci-contre).

On obtient de jolis coloriages en se fixant une suite de couleurs (par exemple : Rouge, Jaune, Vert, Bleu) qui se reproduit périodiquement de génération en génération. Exemple :

Génération	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Couleur	R	J	V	B	R	J	V	B	R	J	V

1-2. De nombreuses variantes apparaissent quand on modifie les règles de croissance ou de coloriage :

- Au lieu de pousser le long des côtés, les nouveau-nés peuvent pousser par les sommets, ou alternativement par les côtés et par les sommets, etc.
- Les nouveau-nés peuvent changer de taille ou de forme à certaines générations en occupant plusieurs triangles selon certaines règles à choisir.
- Dans l'exemple donné ci-dessus, un nouveau-né touche sa mère par un côté et sa grand'mère par un sommet (sinon la croissance est bloquée après la deuxième génération). A la sixième génération certains nouveau-nés vont toucher leur arrière-grand'mère par un sommet. Selon qu'on accepte ou qu'on refuse cette éventualité, des avenirs différents sont possibles pour ce cristal.
- On peut décider qu'une cellule meurt au bout d'un certain temps. Des cases sont alors libérées, que des nouveau-nés pourront occuper.
- On peut adopter une autre règle de succession des couleurs, ou modifier en cours de coloriage la règle initiale.

Par ailleurs, le nombre et le choix des couleurs varient selon le goût de chacun.

• Au lieu d'un pavage en triangles, on peut utiliser comme support un pavage en carrés ou en hexagones réguliers.

1-3. Intérêt de tels coloriages :

• Un certain effet décoratif.

• La mise en œuvre de répétitions, régularités, symétries, rotations, périodicités. Ainsi la moindre erreur saute à l'œil car il perçoit ces régularités qu'on aurait du mal à exprimer dans le langage courant.

• La liberté de choisir ses propres règles de coloriage — éventuellement de les modifier en cours de route — compensée par la contrainte de devoir les appliquer scrupuleusement. L'effet esthétique recherché est à ce prix.

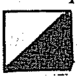
• La possibilité d'observer, selon les individus, à quelle étape s'introduit la première erreur, puis de chercher la raison de cette erreur.

Au début, le coloriage avance assez vite et on a la satisfaction de voir l'effet produit. Mais au bout de quelques générations le grand nombre des nouveau-nés rend leur coloriage fastidieux. Néanmoins, on est impatient de voir la suite et on résiste mal au désir de sauter des étapes du coloriage. La fatigue visuelle aidant, c'est, en général, à ce moment-là que se produit l'erreur(1).

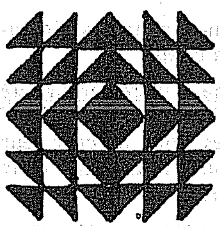
• Les remarques qui précèdent s'appliquent tout aussi bien à des procédés automatiques de calcul (techniques opératoires de la multiplication ou de la division par exemple). De tels procédés réduisent l'effort de réflexion et on a tendance à croire qu'ils sont une garantie de succès. Il n'en est rien car on ne peut négliger ni les erreurs d'écriture, ni les défaillances de la mémoire, ni l'accumulation de la fatigue, ni le désir de sauter des étapes.

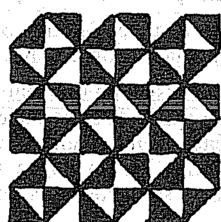
2. On peut réaliser d'autres motifs en utilisant un module, c'est-à-dire une figure géométrique que l'on reproduit indéfiniment selon une loi.

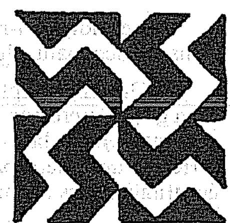
Dans *Un module parcourt l'espace*, de Louis Empain, le module choisi est le suivant :



Voici trois motifs extraits de ce livre, qui détaille bien d'autres façons d'exploiter ce module.







(1) On constate que de jeunes enfants modifient complètement leurs règles de coloriage pour intégrer leur erreur. En général ils poursuivent de façon que le motif conserve au moins un axe de symétrie.

Intérêt :

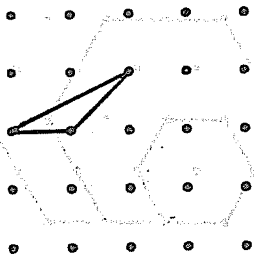
• L'aspect décoratif. Le livre cité donne des moyens d'engendrer des motifs géométriques ; il suggère également des réalisations telles que : tapisseries, broderies, tapis, émaux, mosaïques, vitraux, céramiques, peintures, frises.

• Recherche systématique de motifs composés d'un nombre limité d'exemplaires du module (Par exemple : quels motifs peut-on réaliser avec quatre exemplaires du module ?).

• Utilisation de symétries et de rotations pour réaliser un motif, ou, inversement, recherche des éléments de symétrie d'un motif donné.

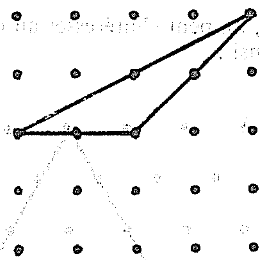
3. Agrandissements.

Plaçons un élastique sur un géoplan 5×5 de façon à former le triangle suivant :



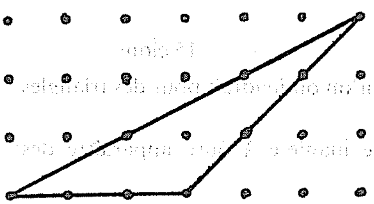
On constate que cet élastique touche 3 clous.

Il est possible de déplacer l'élastique pour réaliser un triangle de même forme mais plus grand :



Maintenant l'élastique touche 6 clous.

A l'étape suivante (utiliser un géoplan plus grand ou dessiner sur papier à points) l'élastique touche 9 clous.



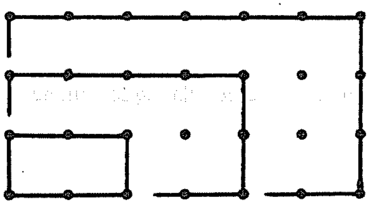
En poursuivant les agrandissements successifs, on obtient la liste : 3, 6, 9, 12, 15, ...

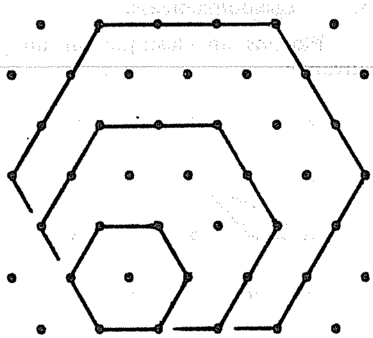
Peut-on prévoir le nombre suivant ?

On constate que les nombres obtenus sont des multiples de 3. En divisant tous ces nombres par 3, on obtient : 1, 2, 3, 4, 5, ... Quelle interprétation peut-on donner à ces nombres dans les figures correspondantes ?

Le même travail effectué à partir d'un carré donne la liste : 4, 8, 12, 16, 20, ..., et après division par 4 on retrouve la liste : 1, 2, 3, 4, 5, ... L'interprétation ci-dessus s'adapte-t-elle au cas du carré ?

On peut, bien sûr, mener des dénombrements analogues en partant d'une autre figure de base :

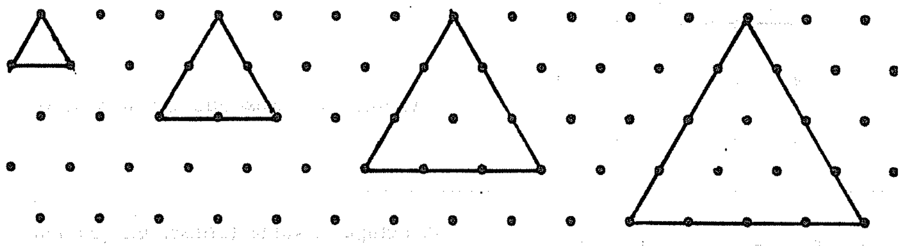




Pour ces deux dernières figures, on trouve la même liste de nombres : 6, 12, 18, 24, ... Pourquoi ?

4. Nombres triangulaires.

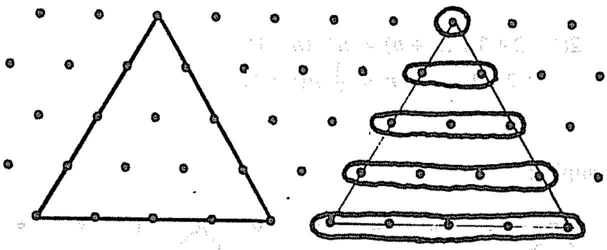
4-1. Au cours des agrandissements précédents, on peut s'intéresser au nombre des clous intérieurs à l'élastique. On obtient ainsi :



3 clous 6 clous 10 clous 15 clous

Essayons de prévoir les nombres de clous qu'on obtiendrait pour des triangles de plus en plus grands.

Par exemple, disposons des élastiques de manière à faire apparaître des couches successives.



Dès lors, les nombres obtenus s'expriment de la façon suivante :

$1 = 1$

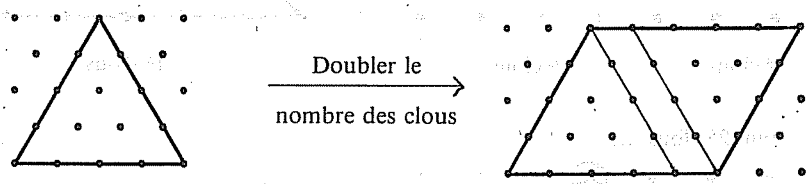
$3 = 1+2$

$6 = 1+2+3$

$10 = 1+2+3+4$

. . . .

4-2. Dans un autre ordre d'idées, on peut associer à un triangle un certain parallélogramme.



15
ou
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$

2×15
ou
$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
mais aussi 5 rangées de 6
c'est-à-dire 5×6

On en déduit : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \times 5 \times 6.$

4-3. Cette démarche peut être mise en œuvre pour des triangles de tailles différentes. Nous invitons le lecteur à réaliser d'autres dessins analogues aux deux précédents pour constater par exemple que

$$1 + 2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \qquad \text{etc.}$$

Ces constatations mettent sur la voie d'une généralisation. Supposons qu'un triangle soit composé de n couches de points. Il y a donc $(1+2+3+\ldots+n)$ clous intérieurs à l'élastique.

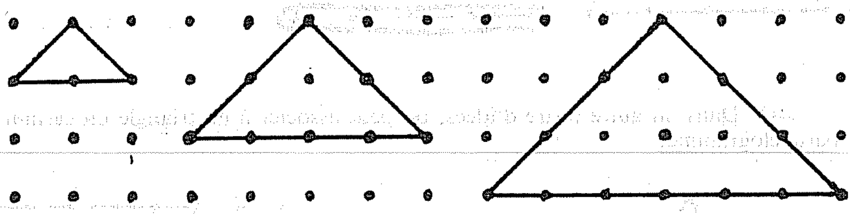
Par ailleurs, le parallélogramme associé au triangle contient n rangées de $(n+1)$ clous, soit $n \times (n+1)$ clous.

Du fait que le parallélogramme contient deux fois plus de clous que le triangle, on déduit

que $$2(1+2+3+\ldots+n) = n \times (n+1)$$

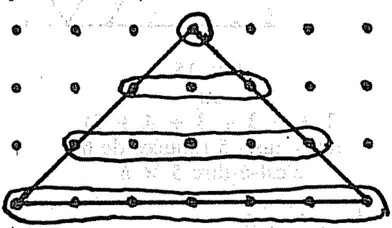
ou que $$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}\,n(n+1)$$

5. Voici un autre exemple :



4 clous 9 clous 16 clous

puis 25 clous, ...



L'examen des couches successives permet une première constatation :

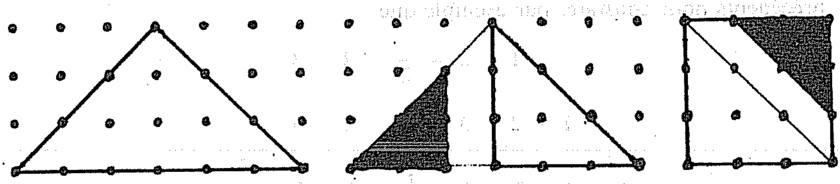
$4 = 1 + 3$

$9 = 1 + 3 + 5$

$16 = 1 + 3 + 5 + 7$

. . . .

Par ailleurs, un autre regroupement des clous suggère une disposition en carré.



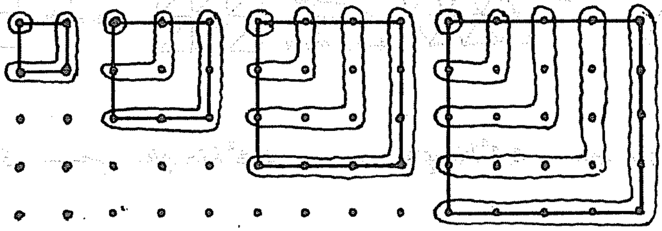
$1 + 3 + 5 + 7$ 4×4

Comme ci-dessus, ce procédé graphique suggère une généralisation. Supposons qu'un triangle rectangle isocèle soit composé de n couches de points et contienne $[1+3+5+\ldots+(2n-1)]$ clous. Le carré qui lui est associé contient n rangées de n clous, soit n^2 clous.

Le fait que le carré contient autant de clous que le triangle initial se traduit par l'égalité

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

On peut retrouver ce résultat en observant la croissance d'un carré, qu'on met en évidence par des équerres emboîtées :



Le dénombrement des points de chaque dessin peut se faire
soit en considérant le carré globalement,
soit en considérant les équerres qui le constituent.

On obtient ainsi les égalités suivantes :

$$2^2 = 1+3 \ , \ 3^2 = 1+3+5 \ , \ 4^2 = 1+3+5+7 \ , \ 5^2 = 1+3+5+7+9 \ .$$

Cette double façon de dénombrer les points intérieurs à un carré suggère la généralisation suivante :

Soit un carré constitué de n lignes de n points chacune ; il contient n^2 points.

On le décompose en équerres qui contiennent successivement

$$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1) \text{ points.}$$

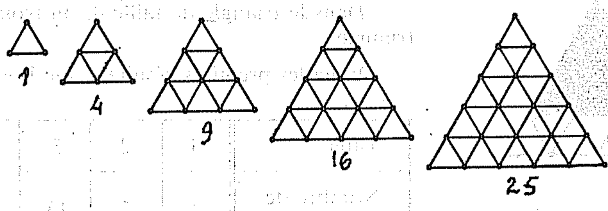
Des deux faits suivants :

- n'importe quel point du carré est dans une équerre
- les équerres ne se chevauchent pas

il résulte que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

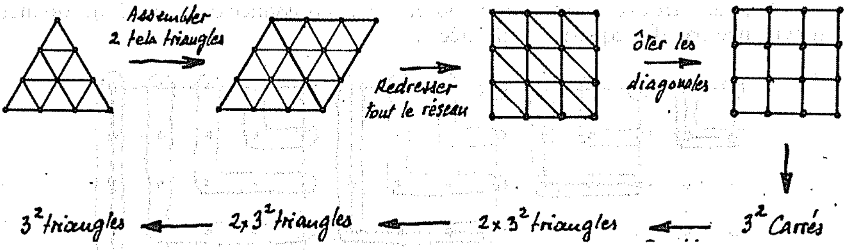
6. On dispose d'un stock de triangles équilatéraux de même taille. On désire en assembler un certain nombre pour réaliser un triangle équilatéral de côté dix fois plus grand. De combien de petits triangles faut-il disposer ?

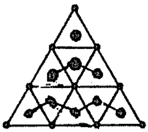
En examinant la croissance d'un triangle équilatéral, on trouve la liste suivante : 1, 4, 9, 16, 25, ...



Les nombres de cette liste expriment aussi la croissance d'un carré.

Voici une suite de dessins qui suggère une explication à ce fait :

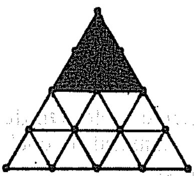




On aurait pu tout aussi bien faire le lien avec la situation présentée au CHAP. VI - 5. où l'on trouvait la même liste de nombres.
Il aurait suffi de poser un pion au centre de chaque petit triangle et de compter les pions ligne par ligne.

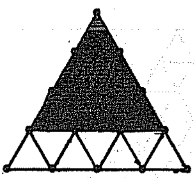
1 + 3 + 5

7. Mais voici plus raffiné.



Encouragé par les résultats déjà obtenus, et le coup d'œil s'aiguisant, on aperçoit dans les dessins qui précèdent des triangles intermédiaires, quant à la taille, entre les petits et le grand triangles.

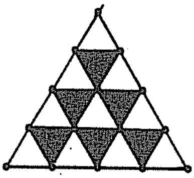
Ainsi dans le triangle de taille 4, outre lui-même et les 16 triangles de taille 1, il y a 7 triangles de taille 2 dont un "pointe en bas" et 3 triangles de taille 3.



Dans le triangle de taille 4, on trouve donc 27 triangles.

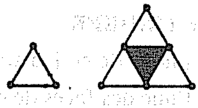
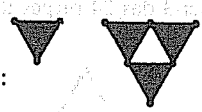
Voici les premiers résultats que l'on obtient :

Taille	1	2	3	4	5
Nombre de triangles	1	5	13	27	48



La liste obtenue paraît tout à fait irrégulière et l'on soupçonne que les irrégularités proviennent des triangles "pointe en bas". Pour voir le rôle qu'ils jouent, on peut colorier le dessin comme ci-contre puis reprendre le décompte des triangles.

Le coloriage permet de distinguer :

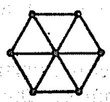
- des triangles à bordure claire, qui ont une "pointe en haut" :  etc.
- et des triangles à bordure sombre, qui ont une "pointe en bas" :  etc.

C'est ainsi qu'on peut dresser le tableau suivant :

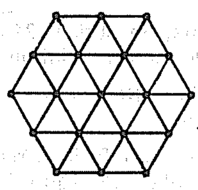
Taille du dessin	Nombre de triangles à bordure claire de taille 1	2	3	4	5	6	Total	Nombre de triangles à bordure sombre de taille 1	2	3	Total	Total général
1	1						1					1
2	3	1					4	1			1	5
3	6	3	1				10	3			3	13
4	10	6	3	1			20	6	1		7	27
5	15	10	6	3	1		35	10	3		13	48
6	21	15	10	6	3	1	56	15	6	1	22	78

qui permet de retrouver des régularités et de conjecturer les résultats suivants pour les tailles successives au-delà de 6.

8. On peut s'inspirer des idées qui précèdent pour étudier la croissance d'autres figures.



Dans un hexagone, par exemple, on peut dénombrer des triangles, des losanges, des hexagones. Si à cette occasion on retrouve des listes de nombres introduites plus haut, on cherchera pourquoi.



Si, comme c'est le cas dans bien des classes, on dispose d'un stock de cubes, on peut étudier la croissance d'objets réalisés par empilement.

CHAPITRE VII

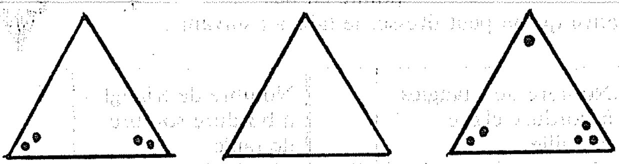
JEUX

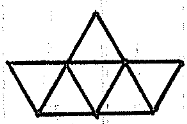
1. Le TRIOKER.

Les pièces de ce jeu sont des triangles équilatéraux.

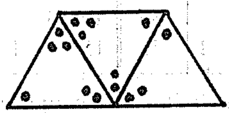
Sur l'une des faces de chaque pièce, les angles sont, ou non, marqués par des points (soit 1, soit 2, soit 3 points dans chaque angle).

Voici 3 des 24 pièces du jeu :



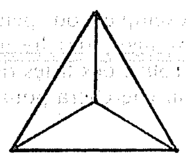


Le jeu consiste à réaliser des silhouettes (par exemple un bateau comme ci-contre) en assemblant les pièces bord à bord et en respectant la règle suivante : les pointes en contact doivent porter un même nombre de points ; exemple :



Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre d'Odier et Roussel : *Surprenants Triangles* (Ed. Cedic) qui détaille de nombreux puzzles et suggère des variantes à ce jeu.

2. Au début de ce siècle, Alexander Mac Mahon a proposé un jeu apparenté au Trioker.



Les pièces sont des triangles équilatéraux partagés en 3 régions comme l'indique le dessin ci-contre. Chacune des régions est uniformément coloriée (2 régions, ou les 3, peuvent avoir la même couleur).

Si on a le choix entre 4 couleurs, on obtient 24 coloriages différents : ce sont les triangles de Mac Mahon.

Comme avec le Trioker, on cherche à réaliser des silhouettes imposées. Les triangles sont juxtaposés le long de côtés de même couleur.

On constate qu'une silhouette donnée est, en général, plus facile à réaliser avec les triangles de Mac Mahon qu'avec les pièces du Trioker. Pourquoi ?

3. Outre leur intérêt propre, les deux jeux précédents suggèrent des problèmes. Par exemple :

- dans le cas du Trioker on affecte un des nombres 0, 1, 2, 3 à chaque sommet. Combien de pièces obtiendrait-on si on affectait aux sommets les nombres de 0 à 2, ou les nombres de 0 à 4, ou les nombres de 0 à 5, etc. ?

- même question dans le cas des triangles de Mac Mahon, mais en utilisant 5 couleurs, 6 couleurs, etc.

Au lieu d'utiliser un triangle équilatéral, on peut utiliser un carré et choisir
- soit d'affecter un nombre à chaque sommet (de 0 à 3 par exemple),
- soit de colorier les 4 régions déterminées par les diagonales (avec 3 couleurs on obtient les 24 carrés de Mac Mahon).

4. Jeu de Sim(1)

Deux joueurs sont munis chacun d'un crayon (les couleurs sont différentes).

On place 5 points (ou 6, ou 7, ou ...) en rond sur une feuille et, à tour de rôle, les joueurs tracent un segment joignant 2 des points. Il est interdit de doubler un segment déjà tracé.

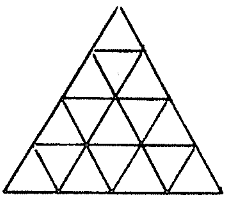
Perd la partie celui qui, le premier, achève de tracer un triangle de sa couleur (les sommets de ce triangle coïncidant avec 3 des 5 points de départ).

5. Voici un jeu extrait d'une publication anglaise intitulée TILES (Ed. Hutchinson).

5-1. Les pièces du jeu sont des triangles équilatéraux de diverses tailles, de dimensions multiples de la plus petite, découpés dans du carton à recto blanc et verso rouge par exemple ; le tableau suivant donne le nombre de pièces :

Taille	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre	15	8	6	3	1	1	1	1

Le triangle de taille 1 a 2 cm de côté.



Un triangle de taille 4

5-2. Le terrain de jeu est dessiné sur du papier triangulé dont la maille a 2 cm de côté.

(1) Ce jeu est dû à SIMMONS (1968) et est cité dans le numéro 1 de la revue PENTAMINO (IREM de Grenoble) publiée par le CRDP de Grenoble.

A chaque partie les joueurs décident de la forme et de la taille de ce terrain de jeu. Ce peut être, par exemple, un triangle équilatéral, un parallélogramme, un hexagone, ou toute autre figure.

5-3. Règles du jeu :

- Le stock des pièces est commun aux 2 joueurs, qui y puisent à tour de rôle.

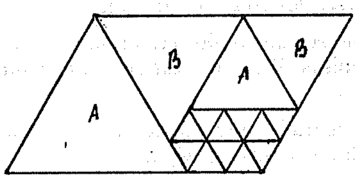
- L'un des joueurs pose ses pièces face blanche au-dessus, l'autre joueur les pose face rouge au-dessus.

- A tour de rôle, chaque joueur choisit une pièce et la pose sur le terrain de jeu de façon que ses bords suivent les traits tracés sur le terrain de jeu.

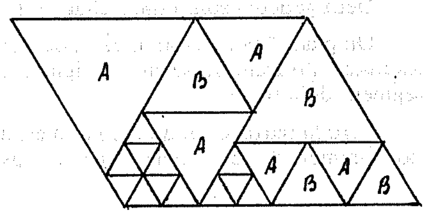
- Deux pièces ne doivent pas se chevaucher.

- Le premier joueur qui ne peut jouer a perdu.

5-4 A titre d'illustration, voici deux problèmes extraits de TILES :



A joue, et B gagne en 8 coups

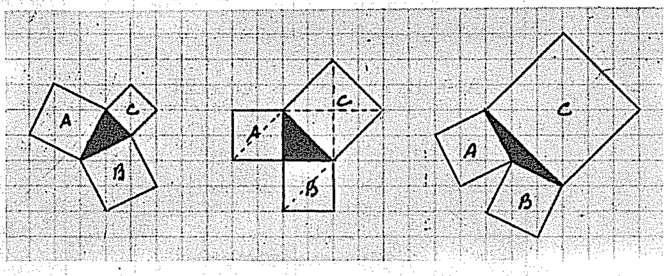


B joue, et A gagne en 9 coups

CHAPITRE VIII

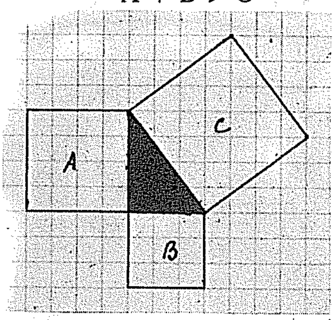
UNE VISITE CHEZ PYTHAGORE

1. Dans les trois dessins ci-dessous, les triangles noirs sont isocèles et on a construit des carrés sur leurs côtés.



On constate — au besoin en comptant les petits carrés — que :

$A + B > C \qquad A + B = C \qquad A + B < C$

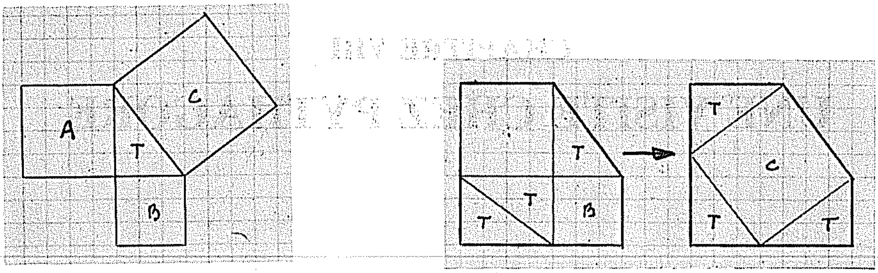


S'il est essentiel que le triangle ait un angle droit pour que l'égalité ait lieu, le fait qu'il soit isocèle est, par contre, inutile, ainsi que le suggère le dessin ci-contre (compter les petits carrés contenus dans A, B et C).

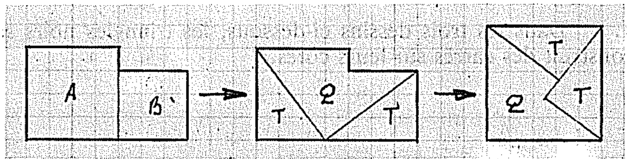
$A + B = C$

2. En utilisant des découpages et des assemblages judicieux, on peut obtenir des amorces de preuve de l'égalité A + B = C, caractéristique des triangles rectangles.

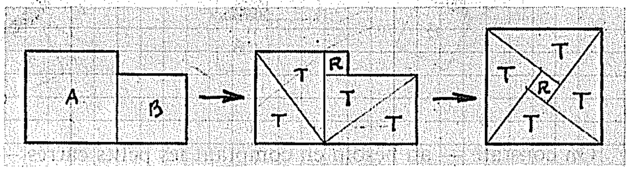
En voici quatre exemples :



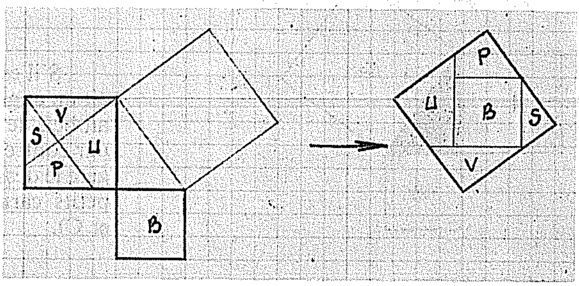
A + B + 3T = C + 3T



A + B = Q + 2T = C

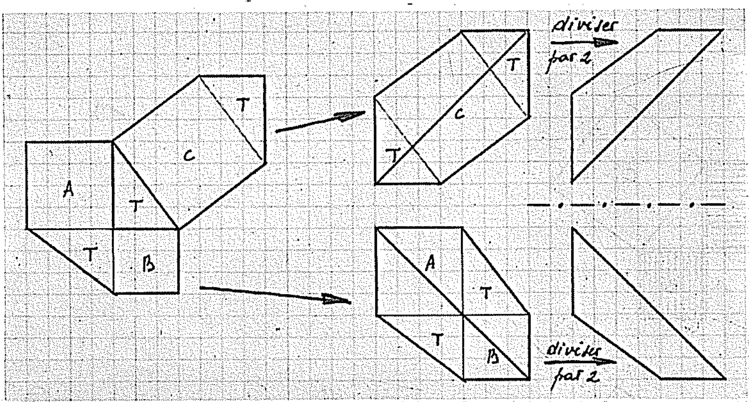


A + B = R + 4T = C



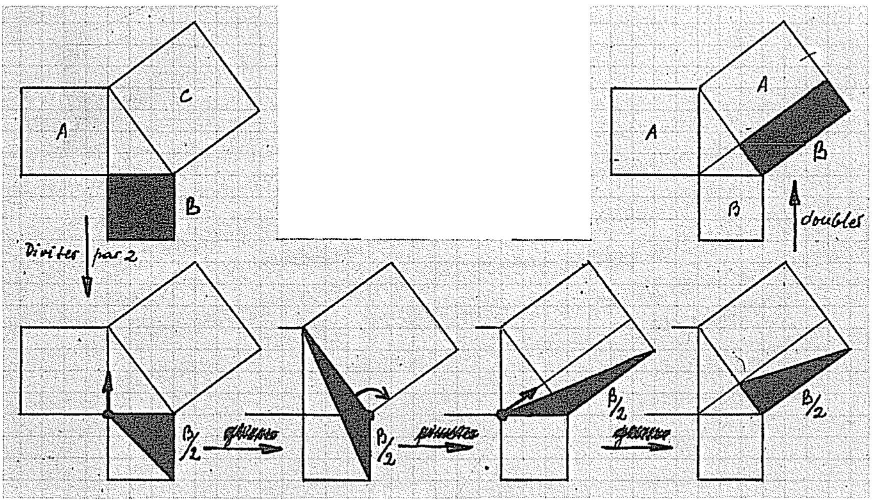
A + B = C

3. Voici plus subtil :

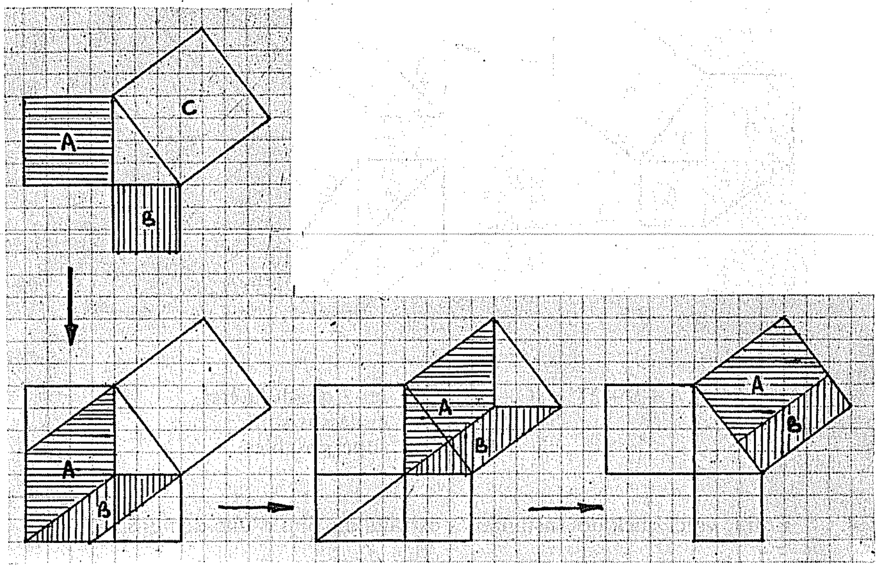


A + B + 2T = C + 2T car les 2 quadrilatères ci-dessus sont superposables.

4. Enfin, voici quelques instantanés extraits du film d'une démonstration :



5. Et, pour terminer, comment ne pas admirer l'élégance de la démonstration suggérée par ces dessins ?



ANNEXE I

Nous sommes dans un CM_1-CM_2 rural.

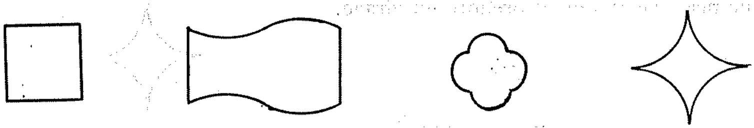
Les élèves disposent d'un grand nombre de catalogues de carrelages. Ils observent assez vite que ces documents font apparaître trois types de carrelages :

- ceux où tous les carreaux ont même forme et même taille
- ceux où tous les carreaux ont même forme mais des tailles différentes
- les autres modèles.

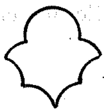
Cela les incite à recenser les différents carreaux qui figurent dans ces carrelages. Ils les décalquent, en trouvent 31 et, pour les présenter sur une affiche, ils cherchent comment les classer. Parmi les différents critères de classement suggérés, l'un d'entre eux les conduit à une discussion serrée dont voici l'essentiel.

Il s'agit de classer les carreaux suivant le nombre de leurs côtés.

Certains carreaux ne posent aucun problème, par exemple :



Mais pour certains autres plusieurs opinions s'affrontent, en particulier à propos de celui-ci :



Différents nombres sont avancés : deux, quatre, sept, huit. Aucun ne réalise l'accord. Les justifications sont vagues. La discussion qui s'instaure est incertaine. Peut-être par lassitude, un enfant va jusqu'à soutenir — sans aucun succès d'ailleurs — que ce carreau n'a qu'un côté (Il pense à la frontière du dessin).

Visiblement les enfants ne veulent pas tolérer l'ambiguïté. Ce qu'ils souhaitent implicitement, c'est un critère clairement formulé leur permettant d'identifier les côtés. L'intérêt de la classe est tel que les deux adultes présents se gardent d'intervenir.

Pour essayer de préciser leur pensée, certains enfants réexaminent des carreaux qui n'avaient pas posé de problème. C'est l'occasion de douter de leurs conclusions antérieures. Ainsi le carreau ci-dessous auquel ils avaient reconnu quatre côtés est maintenant susceptible d'avoir six côtés, les points d'inflexion étant comptés comme sommets.

Les enfants tombent d'accord pour reconnaître qu'"un côté, c'est ce qui est compris entre deux sommets". A ce moment, un enfant prétend avec force qu'il sait reconnaître un sommet. Sommé par ses camarades de s'expliquer, il emploie le langage de l'automobiliste. Il tente de décrire ce qui se passerait si une voiture roulant sur la frontière sortait de la route. Un point d'inflexion n'est pas reconnu comme sommet car la voiture sortant de la route "irait tout droit", qu'elle se déplace dans un sens ou dans l'autre (fig. 1). Les sommets sont identifiés par le fait suivant : si la voiture rate son virage "elle continue tout droit mais pas dans le même sens" (fig. 2). Il ajoute que c'est bien ce qui se passe pour le carré. Dans l'un et l'autre cas, les gestes qui accompagnent l'explication sont parfaitement explicites. La classe adopte ce point de vue et le dénombrement des côtés des carreaux litigieux se déroule sans problème.

fig. 1

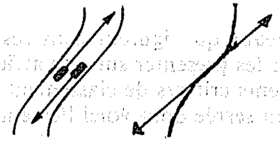
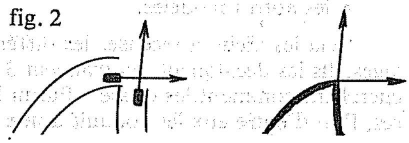
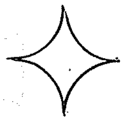


fig. 2



Il est remarquable que, dans l'esprit des enfants, le carreau ci-dessous conserve 4 sommets. En fait, ils tiennent pour évident qu'aux pointes de ce carreau la voiture ne peut pas vraiment prendre un virage.



A travers le langage de l'automobiliste, les enfants ont perçu les points qui ne sont certainement pas des sommets, à savoir les points où deux voitures qui se croisent ont des trajectoires parallèles (en un bref instant tout au moins).

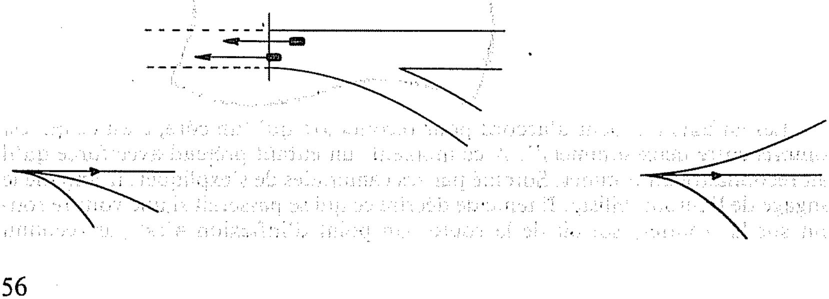
croisement
en ligne droite

croisement
en courbe

S'y opposent les points, que les enfants tiennent pour des sommets, où

- les voitures se croisent à "angle vif" (carrefours usuels)
- les voitures se rejoignent sur une même voie d'autoroute pour aller dans le même sens (bretelles de raccordement).

Ces points correspondent à des sommets.



ANNEXE II. L'ATELIER DE GÉOMÉTRIE (*)

Pour que les enfants puissent avoir une attitude véritablement active en géométrie, il nous semble qu'il faut mettre à leur disposition des objets et des outils. Les actions librement menées dans cet atelier conduiront les enfants à constater certains faits , voire à se poser des questions susceptibles d'alimenter les leçons de géométrie. A l'inverse, lorsqu'à l'instigation du maître tel thème sera à l'étude, c'est grâce à cet atelier qu'on pourra effectuer des manipulations, voire illustrer certains énoncés à l'aide des objets qui s'y trouvent.

Si la liste ci-dessous nous paraît proposer un équipement minimum, elle n'est évidemment pas limitative.

I Des objets

- Un lot de barres de meccano de longueurs variées ; à défaut, des réglettes de carton que l'on assemble à l'aide d'attaches parisiennes.
- Un stock de cubes découpés dans du tasseau.
- Un stock de triangles équilatéraux, de carrés, voire de pentagones, découpés dans du carton.
- Des géoplans ou planches à clous.
- Des planches à trous avec fiches plastiques de différentes couleurs.
- Un Spirograph. Jeu du commerce qui permet de dessiner de très jolies courbes grâce à des engrenages.
- Un Graficus. Jeu du commerce qui permet de réaliser des rosaces grâce à un disque percé de trous.
- Des puzzles géométriques tels que : Trioker - Triangles de Mac Mahon -Tangram - Pentaminos - Polycubes.
  Ils peuvent être réalisés facilement en carton ou en bois.

II Des matériaux

- Contreplaqué
- Polystyrène
- Papiers — papier blanc
  - — papier affiche (recto coloré, verso blanc)
  - — papier calque
  - — papiers quadrillés, réglés ou à points
  - — papier millimétré
  - — papier à dessin (blanc ou de couleur).

(*) Le lecteur intéressé trouvera des compléments dans *Elem-Math IV, Aides Pédagogiques pour le Cycle Elémentaire (APMEP),* chap. 3 - F : Du matériel pour la géométrie.

- Carton
- Ficelle - Elastiques - Elastique au mètre.

III Des outils

- Ciseaux
Cutter avec règle et plaque métalliques
Scies.
- Marteaux et clous
- Râpe, papier de verre
- Ruban adhésif ; colle à carton et à bois.

IV Des documents

- Catalogues de frises, de papiers peints, de carrelages.
- Dans ce domaine tout reste à faire. En particulier on pourrait penser à utiliser
  des livres de travaux manuels (Dessain et Tolra)
  des reproductions d'œuvres graphiques (Vasarely, Escher).

Il faudrait surtout réaliser des albums pour les enfants dans l'esprit des B.T. ("Bibliothèques de travail") publiés par l'ICEM.

BIBLIOGRAPHIE

Jusqu'à présent peu de livres ont été consacrés à la géométrie à l'Ecole Elémentaire. En particulier on chercherait en vain — en langue française tout au moins — des monographies sur des thèmes précis telles que cet ELEM-MATH VI.

I. Livres consacrés à la géométrie

- F. BOULE : *Espace et Géométrie* (CEDIC)
  [Pour les enfants de trois à onze ans, connaissance de l'espace à l'aide de matériels peu coûteux et à travers des thèmes concrets]
- N. PICARD et M.A. GIRODET : *Pavages et Polyèdres* (OCDL)
  [Brochure de 40 pages qui suggère la réalisation et le classement de quelques pavages et polyèdres]
- L. EMPAIN : *Un module parcourt l'espace* (Dessain et Tolra)
  [Propose une exploitation géométrico-décorative d'un triangle rectangle isocèle]
- E. HOLIDAY : *Rythmes pour un dessin* (Dessain et Tolra)
  [Recueil de pavages inspirés de motifs décoratifs arabes. Par coloriage, on obtient une grande variété de dessins]
- M.C. RIVIERE : *Fils et pointes* (Dessain et Tolra)
- J. et S. SAUVY : *L'enfant à la découverte de l'espace* (Casterman)
  [Initiation à la topologie intuitive]
- J. et S. SAUVY : *L'enfant et les géométries* (Casterman)
  [Une réflexion sur la géométrie à l'Ecole Elémentaire]

II. Livres non entièrement consacrés à la géométrie

- WHEELER : *Mathématique dans l'Enseignement Elémentaire* (OCDL)
  [Très bonne initiation aux mathématiques fondée sur l'étude expérimentale de situations]
- C. BANWELL, K. SAUNDERS, D. TAHTA : *Points de départ* (CEDIC)
  [Ouvrage très riche qui passionnera petits et grands. Trois parties : méthodes de travail, points de départ, matériels]
- A. MYX : *6 thèmes pour 6 semaines* (CEDIC)
  [Le 6e thème consacré à la géométrie est particulièrement intéressant]
- COPIRELEM : *Aides pédagogiques pour le C.E.* (APMEP) (Elem. Math V)
  [Suggère des activités géométriques conformes aux textes officiels pour le Cycle Elémentaire]

III. Monographies

- J. ELFFERS : *Tangram* (Editions du Chêne)
  [Magnifique ouvrage consacré au fameux casse-tête chinois]
- M. ODIER et Y. ROUSSEL : *Surprenants triangles* (CEDIC)
  [Etude approfondie du jeu « Le Trioker »]
- A. HOLDEN : *Formes, espace et symétrie* (CEDIC)
  [Pour l'amateur de polyèdres. Très belles illustrations]
- J. MEEUS et P. TORBIJN : *Polycubes* (CEDIC)
  [Etude de puzzles à réaliser avec des assemblages de cubes]
- Y. BOSSARD : *Rosaces, frises et pavages* (CEDIC)
  [Etude systématique de ces objets. Le lecteur est constamment invité à dessiner, décalquer, etc.]

IV. Revues

- La revue *A.R.P.* n'a publié que vingt numéros consacrés à l'Ecole Elémentaire. Elle ne paraît plus. Néanmoins, il est possible d'en trouver des collections complètes dans des bibliothèques d'Ecole Normale.
- *MATH. ECOLE* (1) est consacrée à l'Ecole Elémentaire.
  Cette revue publiée à Genève fait paraître 5 numéros par an.
- *Grand N* (2) est publiée par l'IREM de Grenoble.
  Elle est entièrement consacrée à l'Ecole Elémentaire ; en ce qui concerne la géométrie, voir par exemple :
  - Géométrie et travail manuel (n° 7)
  - Activités géométriques au C.E. (n° 9)
  - activités géométriques au CM.1. (n° 10)
  - Tangram (n° 12)
  - Pavages au CM.2. (n° 14)
  - Avec des carrés bicolores (n° 14)
- *Zoom-Avant* (3) est publiée par l'E.N.G. de Lyon.
  Voir par exemple :
  - Mesure et mesurage (n° 1)

(1) MATH. ECOLE : 11, rue Silleur, CH 1207 GENÈVE.

(2) *Grand N* est édité par le CRDP de Grenoble
11, avenue Général Champon
38031 - Grenoble Cedex

(3) *Zoom-Avant* est édité par l'IREM de Lyon
43, boulevard du 11 novembre 1918
69621 - Villeurbanne

- Exploration de l'espace à l'école maternelle (n° 2)
- Planche à clous en CM.2. (n° 3)
- Jeux géométriques (n° 4, numéro spécial)
- Le cube - quelques activités au CE.1. (n° 6)
- Les circuits (maternelle et C.P.) (n° 6)
- Jeu de dés en C.M. (n° 9)
- Triangles colorés - Carrés de Mac-Mahon (n° 10)

- *Pentamino* (1) est publiée par l'IREM de Grenoble.

Les articles de cette revue sont destinés aux clubs de mathématiques. On trouvera des idées utilisables à l'Ecole Elémentaire dans :
- Tangram (n° 1)
- Tangram rectangulaire (n° 1 et n° 4)
- Pavages (n° 2)
- Polyèdres réguliers (n° 2)
- Polyhexagones (n° 3)
- Polyèdres semi-réguliers (n° 3)
- Rosaces et frises évolutives (n° 3)
- Pavages (n° 4)
- Pavages avec des pentagones (n° 5 et n° 6)

(1) *Pentamino* est édité par le CRDP de Grenoble (voir ci-dessus).

COLLECTION MOTS

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseigne – ment Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Applications linéaires ; proportionnalité ; opérateurs multiplicatifs ; pourcentages, échelles, ... ; équation, inéquation ; ensemble ; cardinal ; approximation (Mots IV, brochure 1978).

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 X 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituées d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normales, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOT permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Les réflexions sur les mots-clés signalés débordent évidemment le cadre de l'école élémentaire.

Aussi les divers tomes de la collection MOTS sont-ils également par excellence des ouvrages de réflexion pour le premier cycle du second degré.

Prix de novembre 1979

Mots 1 : 10 F (port compris : 14 F)
Mots 2 : 10 F (port compris : 14 F)
Mots 3 : 12 F (port compris : 16 F)
Mots 4 : 12 F (port compris : 16 F)
Mots 5 : à paraître, été 1980.

Commander à :

A. BLONDEL, *154 avenue Marcel Cachin*
92320 Châtillon-sous-Bagneux

UNE COLLECTION DE L'A.P.M.E.P.
POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

ELEM-MATH

Elem-Math I : Choix d'articles destinés à l'École Élémentaire publiés dans le Bulletin A.P.M.E.P.
1975. 56 pages. Prix 1979 : 4 F (port compris : 6 F)

Elem-Math II : La multiplication des naturels à l'École Élémentaire.
1976. 56 pages. Prix 1979 : 6 F (port compris : 8 F)

Elem-Math III : La division à l'École Élémentaire.
1977. 100 pages. Prix 1979 : 10 F (port compris : 14 F)

Elem-Math IV : Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire.
1978. 64 pages. Prix 1979 : 9 F (port compris : 13 F)

Elem-Math V : Aides pédagogiques pour le Cours Élémentaire.
1979. 192 pages. Prix 1979 : 18 F (port compris : 24 F)

Commander à :

A. BLONDEL, *254 avenue Marcel Cachin*
92320 Châtillon-sous-Bagneux

Imprimerie VAUDREY - LYON

N° ISBN : 2 - 902680 - 11 - 2