

4 - GÉOMÉTRIE EN QUATRIÈME-TROISIÈME AVEC UNE TABLE TRACANTE

Présentation d'une expérimentation conduite dans les I.R.E.M. de Lorraine et de Poitiers.

La présence d'une seule machine (disponible en temps limité) dans la classe, le nombre d'élèves d'une division (25 à 35 élèves), les programmes officiels déjà lourds, nous ont contraints à fixer les objectifs suivants :

- travailler dans le cadre du programme de géométrie de Quatrième-Troisième,
- utiliser au maximum 24 heures dans l'année,
- faire agir le plus possible chaque élève,
- travailler dans des divisions complètes,
- limiter l'apprentissage de la programmation des matériels utilisés à une douzaine d'instructions.

Le matériel utilisé a été un calculateur programmable HEWLETT PACKARD modèle 10 (avec bloc math et bloc PLOTTER) et une table traçante.

I. METHODES DE TRAVAIL

Le travail demandé aux élèves est donné sur des fiches pour un travail en équipe de trois ou quatre élèves. La recherche personnelle est régulée par l'équipe et nécessite un consensus à l'intérieur du groupe. Chaque équipe est autonome. L'enseignant est ainsi disponible pour répondre à la demande de chaque équipe et faire respecter le droit d'accès à la machine pour tous.

Aucune recherche ne doit être effectuée devant la calculatrice. Chaque équipe ne doit venir auprès de la machine que si elle est libre et avec un programme écrit *précis*.

Un élève de l'équipe se charge de la frappe sous le contrôle des autres. Dès que la machine a fourni sa réponse (listing ou dessin) les membres de l'équipe retournent à leur place pour l'exploitation.

Chaque équipe de travail, travaillant à son rythme, n'a pas

besoin de la table traçante au même moment. L'attente du passage en machine est ainsi réduite.

II. ASPECT INFORMATIQUE

Il n'était pas question d'enseigner la programmation ou "l'informatique", mais les élèves ont été placés dans "des situations informatiques".

- analyse de problèmes
- rédaction de programmes simples pour obtenir des dessins avec le traceur
- entrée de ces programmes au clavier
- analyse des résultats.

Les programmes fabriqués par l'enseignant sont enregistrés sur des cartes magnétiques et les élèves les utilisent suivant leurs besoins.

D'autre part, l'utilisation d'un automate, évidemment très rapide et précis dans ses réalisations, offre aux élèves l'occasion d'investigations personnelles s'appuyant sur des expérimentations nombreuses et conduites avec une grande liberté (à l'intérieur d'un cadre fixé à l'avance et dépendant de contraintes matérielles).

III. PROGRAMME

Les modules d'enseignement utilisés sont :

1. Classe de Quatrième.

Module A

La position de la plume du traceur est déterminée par ses coordonnées dans un repère fixé à l'avance et introduit en mémoire. Il est donc nécessaire d'apprendre les instructions permettant :

- l'entrée d'un couple dans deux registres (ici x et y)
- le déplacement de la plume d'un point à un autre en ligne droite, en traçant ou sans tracer
- la détermination du repère de la feuille avec le tracé des axes (avec une carte magnétique et l'entrée de quatre nombres : valeurs minimum et maximum de x et de y).

Ce module permet de familiariser les élèves avec la notion de repère et de coordonnées cartésiennes dans le plan. A la fin de ce module, ils peuvent dessiner des figures de leur choix (voir IV, 1).

Remarque : Ce module peut être utilisé seul en Sixième et en Cinquième en consacrant plus de temps à la créativité des élèves.

Module B

Apprentissage et étude de la notion de translation. Composition des translations. Milieu d'un bipoint. Parallélogramme.

Dessins de frises utilisant la composition des translations (voir IV, 2).

Remarque : On peut utiliser ce module seul, en Sixième et Cinquième : les élèves de ces classes disposeront d'un temps plus long pour imaginer et réaliser des dessins.

Module C

Apprentissage et étude de la symétrie centrale.

Construction de frises.

Composition de symétries centrales.

Module D

Exploitation des documents obtenus dans les modules précédents pour l'introduction de la notion de vecteur.

2. Classe de Troisième

Module A

Apprentissage et étude de la symétrie orthogonale. (Voir IV, 3a)

Composition de symétries orthogonales. Frises.

Module B

Isométries : mise en évidence de la notion après découverte de l'image d'un triangle par une transformation. (Voir IV, 3b)

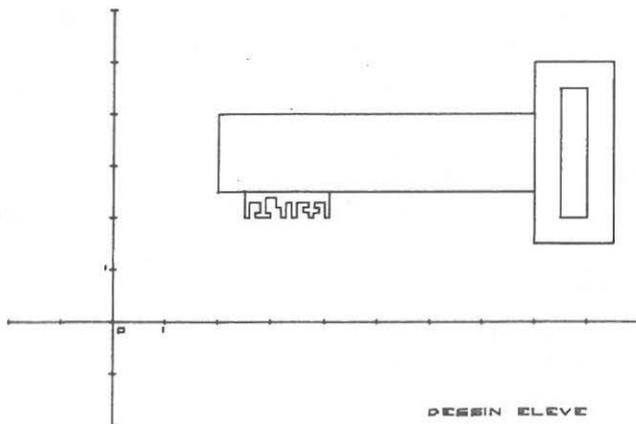
Transformations de figures par des isométries.

Composition d'isométries.

Remarque : Les modules troisième peuvent être utilisés par des élèves n'ayant pas étudié les modules quatrième. Dans ce cas il paraît souhaitable de commencer par un apprentissage très réduit de l'utilisation de la machine (instruction de passage d'une carte ; entrée d'un nombre et d'un couple) et un rappel des transformations étudiées en quatrième.

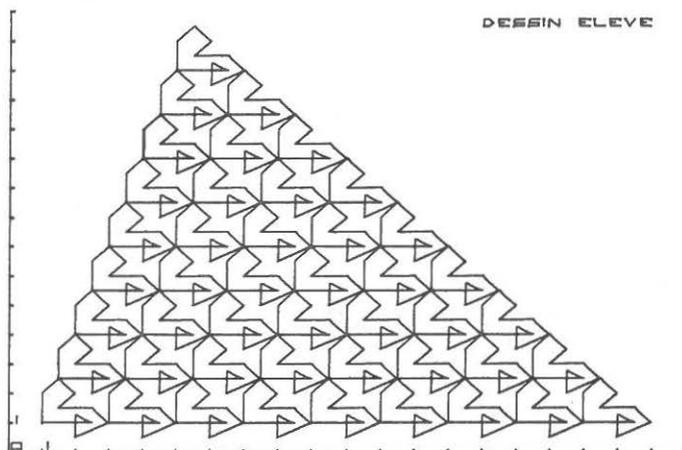
IV. EXEMPLES : FICHE DE TRAVAIL ELEVE ET DESSINS

1) Classe de Quatrième : Module A



2) Classe de Quatrième : Module B

Si un élève veut dessiner une frise à partir d'un motif simple et avec une transformation (ici des translations), il dispose d'une carte magnétique qui lui permet de faire tracer son dessin et l'image de celui-ci par la transformation choisie (il lui suffit d'entrer les coordonnées des points et le couple de la translation). L'élève choisit son motif, sa transformation, il peut modifier le repère du plan de la feuille sur laquelle il dessine, changer de transformation, etc.



3) Classe de Troisième

a) Module A

Exemples de fiches élève.

Toutes les transformations utilisées en Quatrième ou en Troisième procèdent d'un mode d'emploi identique. Il est ainsi possible de composer deux transformations différentes sans avoir à frapper une nouvelle fois les coordonnées des points du motif choisi. Les cartes magnétiques utilisées ont deux pistes. Sur une piste les coordonnées de tous les points et des images sont imprimées sur le listing afin de permettre des calculs ultérieurs. Sur l'autre piste on n'obtient pas l'impression dans le cas où l'élève veut seulement construire une frise (gain de temps).

5

Généralisation et composition

a) La carte F' permet d'obtenir un repère orthonormé à partir des données

- x maximum
- x minimum
- y minimum

Choisis ces trois nombres pour déterminer ton repère.

b) La carte S_1 permet d'obtenir l'image d'une figure par une symétrie orthogonale.

- *) Choisis une figure et note :
 - le nombre n de segments ($n \leq 10$)
 - les coordonnées des sommets
- *) Choisis les coefficients a, b, c d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$
- *) Consulte la fiche "Mode d'emploi de S_1 " I et prépare ton passage à la machine.
- *) Va à la machine
- *) Recommence plusieurs fois avec différentes figures et droites.

c) Composition

Choisis une figure

Choisis deux droites D_1 ($a_1 ; b_1 ; c_1$) et D_2 ($a_2 ; b_2 ; c_2$)

- α) Tu vas utiliser la fiche " Mode d'emploi de S_1 " I avec la droite D_1 puis II avec D_2 . Prépare ton travail, puis va l'exécuter à la machine.
- β) Même exercice que α) en utilisant I avec D_2 et puis II avec D_1 .
- γ) Même exercice que α) en utilisant I avec D_1 puis III
- δ) Reprends α) ou β) avec D_1 orthogonale à D_2 ou D_1 parallèle à D_2

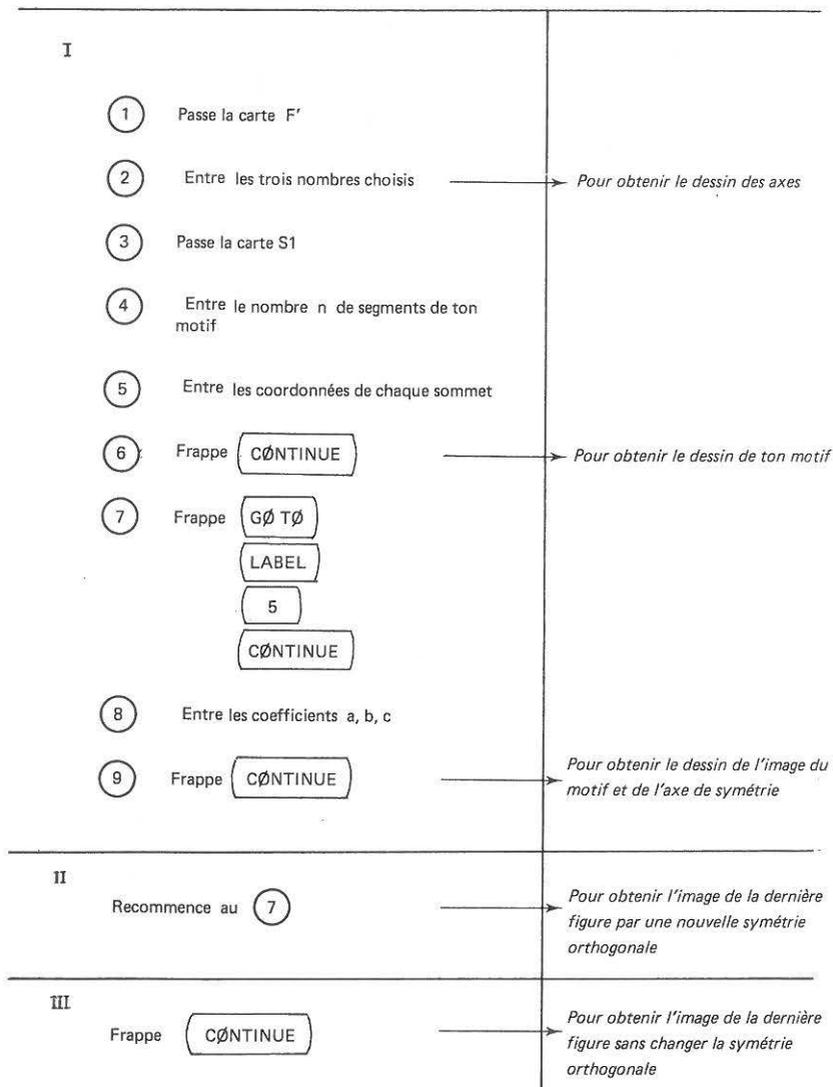
Questions :

-) La composée de deux symétries orthogonales est-elle une symétrie orthogonale ? Justifie ta réponse.

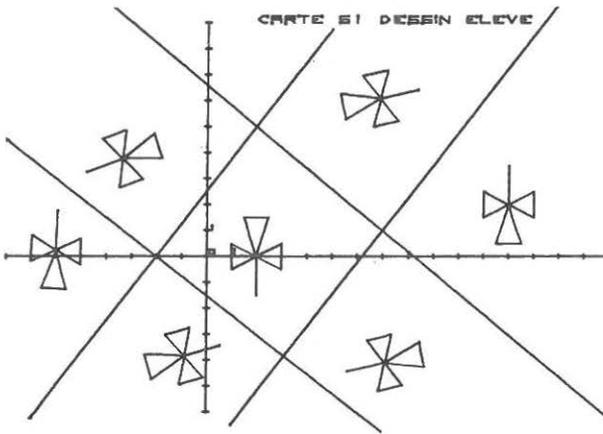
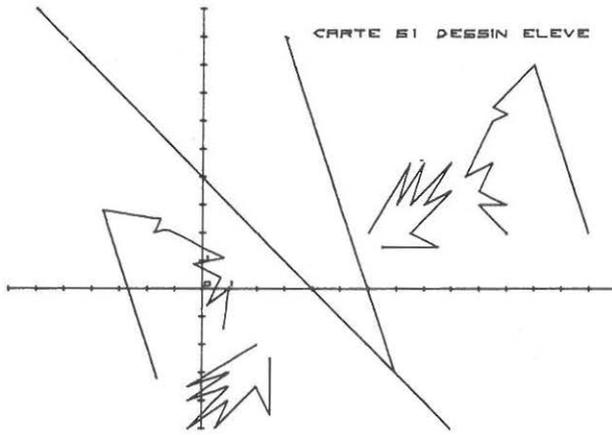
-) Compare les résultats de α) et β).
-) Que remarques-tu avec γ) ? avec δ) ?

d) Imagine un «joli» dessin fabriqué à partir d'un motif et de plusieurs symétries composées.

MODE d'EMPLOI de S1



Exemples de dessins.



b) Module B

Pour l'étude d'exemples et de contre-exemples d'isométries, en donnant à l'ordinateur les coordonnées des sommets d'un triangle et les caractéristiques d'une transformation (rotation, translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale, homothétie, inversion ; ces transformations sont désignées par un code $B_{1,1} \dots B_{1,6}$; l'élève nommera celles qu'il a étudiées, les autres restant codées), l'élève obtient dans un repère orthonormé le dessin de son triangle et de l'image de celui-ci quel que soit le triangle

choisi au départ. Le temps d'utilisation machine est court, mais la richesse des situations à analyser est importante.

L'utilisation de la calculatrice permet de montrer à chaque élève l'*existence* de transformations qui ne sont pas au programme de Troisième sans alourdir celui-ci. Il est alors possible de classer les transformations et de mettre en évidence la notion d'isométrie.

Les exemples et les contre-exemples ainsi obtenus doivent enrichir l'expérience de chacun et faciliter la conceptualisation et la mathématisation ultérieure indispensable.

Exemple 1 : fiches élèves B1 et Annexe : image d'un triangle par une transformation.

Image d'un triangle par différentes transformations

- ① Chacune des cartes B11, B12, ..., B16 permet d'obtenir l'image d'un triangle (A, B, C) que tu choisiras, par une transformation que tu vas étudier.
Choisis l'une de ces transformations et complète le tableau correspondant (Annexe B1) .
Va à la machine.
Passe la carte correspondant à la transformation retenue et entre tes nombres.
Retourne à ta place.

- ② Réponds aux questions suivantes sur une feuille annexe sans oublier de préciser la carte utilisée.
(Si le dessin obtenu ne te permet pas d'y répondre, essaie de trouver pourquoi et propose une solution à ton professeur) :
 - a) Reconnais les points A, B, C, A', B', C' sur le dessin et note-les.
 - b) Reconnais-tu la transformation ?
Si oui, précise ses caractéristiques.
 - c) L'image du triangle est-elle un triangle ?
 - d) La transformation conserve-t-elle les distances ?
 - e) La transformation conserve-t-elle les écarts angulaires ?

- ③ Recommence avec une autre transformation.
Tu dois passer successivement les 6 cartes et répondre à chaque fois au questionnaire précédent.

B 13

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \\ c = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

B 12

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

B 11

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

B 16

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \\ c = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

$$-3 \leq c \leq +3$$

B 15

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \\ c = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

$$-3 \leq c \leq 3$$

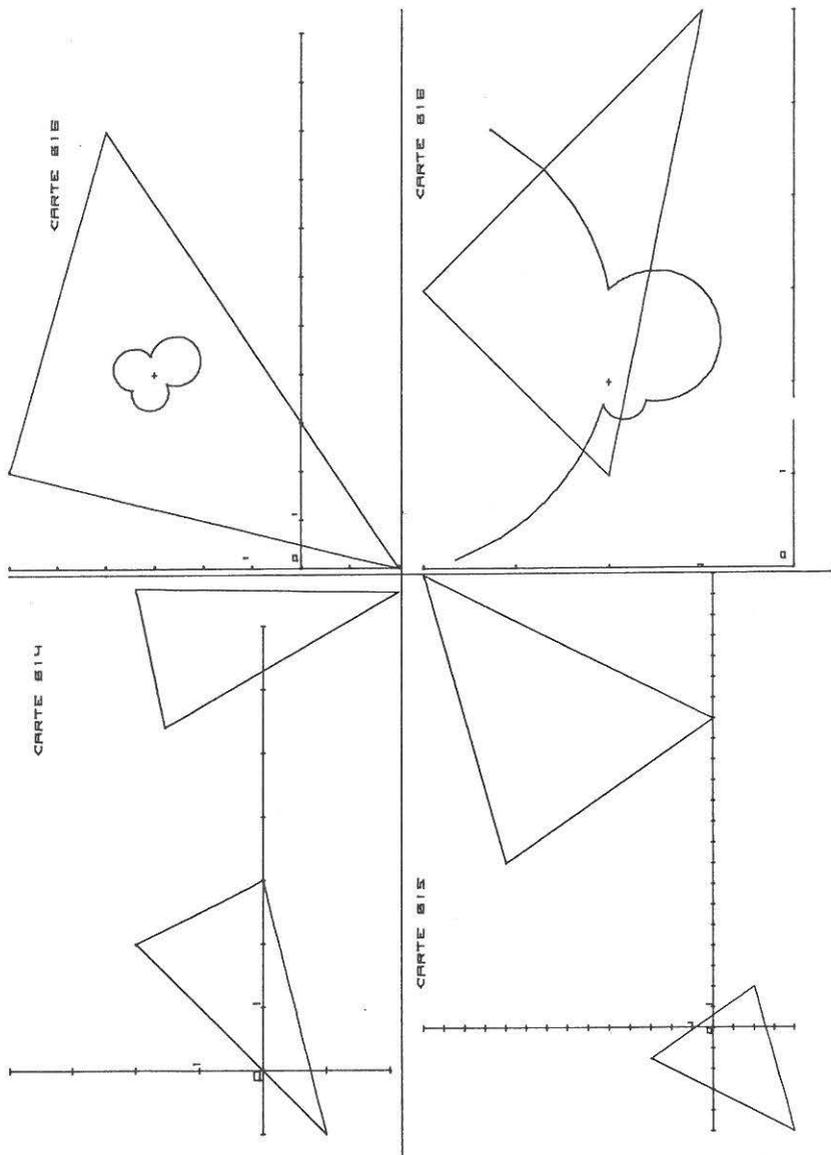
B 14

$$\left. \begin{array}{l} xA = \\ yA = \\ xB = \\ yB = \\ xC = \\ yC = \end{array} \right\} \text{Triangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \\ b = \\ c = \end{array} \right\} \text{Transformation}$$

$$0 < c \leq 180$$

Exemple 2 : dessins élèves.



Après avoir obtenu l'image d'un triangle pour chaque transformation proposée, l'élève va étudier l'image d'une figure quelconque qu'il a choisie (sauf pour l'inversion). [Fiche B2 — ①].

Après avoir reconnu les isométries [fiche B2 — ③] il va composer deux isométries et essayer de construire un "joli dessin" utilisant la composition des transformations [fiche B2 ④ et ⑤].

Exemple 3 fiche B2

① Image d'une figure par différentes transformations.

a) Choisis une figure formée de n segments consécutifs ($n \leq 10$) ; pour un polygone n'oublie pas de prendre comme dernier point ton point de départ.

Note les coordonnées des sommets.

b) Choisis les coefficients d'une transformation :

a et b pour les cartes B₂₁ et B₂₂

a, b et c pour les cartes B₂₃, B₂₄ et B₂₅.

c) Consulte la fiche «Mode d'emploi de S1» qui est la même pour chacune des cartes.

d) Choisis tes axes de façon que la figure et son image soient dessinées dans ta feuille.

e) Prépare ton passage à la machine pour la transformation choisie.

f) Va à la machine.

g) Recommence en a) jusqu'à ce que tu aies utilisé les 5 cartes.

② Recommence l'exercice ② de la fiche B₁ pour les figures choisies.

3 Définition :

Une isométrie est une bijection dans le plan qui conserve la distance :
pour 2 points quelconques M et N du plan on a :

$$\begin{array}{l} M \longmapsto M' \\ N \longmapsto N' \end{array} \quad \text{avec } d(M,N) = d(M',N')$$

Question : parmi les relations étudiées dans les fiches B_1 et B_2 , lesquelles sont des isométries ?

Remarque à l'intention du professeur :

Il est possible d'exploiter les figures obtenues pour retrouver par le calcul les principaux résultats concernant les isométries (orthogonalité, distance), car le listing donne les coordonnées des points et de leurs images.

4 Composition de deux isométries.

- a) Choisis un dessin.
- b) Choisis 2 isométries différentes pour les composer (même mode d'emploi que celui de S_1 pour la première carte ; pour composer avec la deuxième isométrie, tu passes la deuxième carte et tu recommences en 6 du mode d'emploi de S_1).

c) Ton dessin est-il complet ?

Si non, prépare un autre passage à la machine pour avoir un dessin complet.

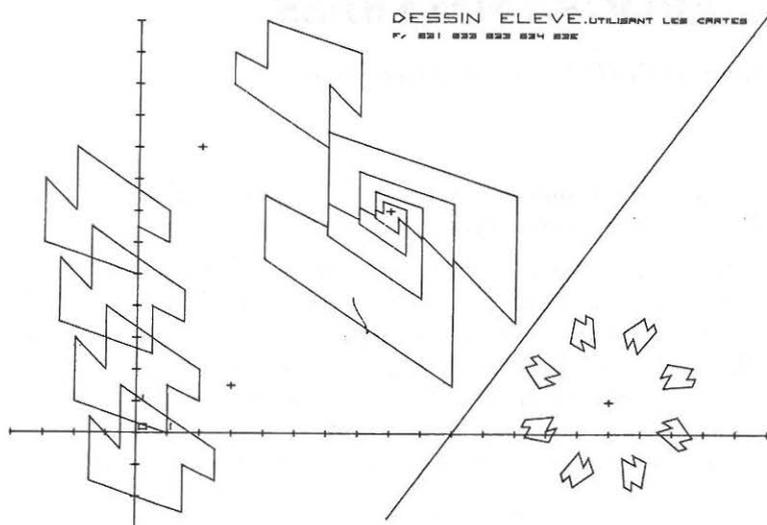
Si oui, réponds aux questions suivantes :

- La composée est-elle une isométrie ? (justifie ta réponse)
- Peux-tu obtenir l'image de ton dessin par la composée en utilisant une seule des cartes B_{21}, \dots, B_{25} ?
(Si tu as le temps, fais une vérification sur machine avec cette carte).

5 Imagine un «joli dessin» fabriqué à partir d'un motif et en composant une ou plusieurs transformations B_{21}, \dots, B_{25} . (Même mode d'emploi que celui de S_1 pour répéter une transformation ; si tu changes de transformation, passe la nouvelle carte et recommence au

6 du mode d'emploi de S_1).

Exemple 4 dessin



V. EVALUATION

Les modules ont été testés dans une quarantaine de classes à Poitiers, Montmorillon et dans divers CES de Lorraine.

Une évaluation a été menée en comparant les classes expérimentales et des classes témoin en 76-77 en Quatrième et 77-78 en Troisième. La collaboration du laboratoire de psychologie de l'Université de Poitiers a été précieuse.

Des tests de connaissances, des tests d'aptitude et un questionnaire ont été soumis aux élèves en début et en fin d'expérimentation.

Les résultats sont en cours d'interprétation.

VI. PUBLICATION

L'I.R.E.M. de Lorraine vient de publier une brochure sur cette expérimentation :

"Géométrie en Quatrième et Troisième avec une table traçante".

Chaque I.R.E.M. a reçu deux exemplaires. D'autres sont disponibles à l'I.R.E.M. de Lorraine.

Jeannine LEFORT, I.R.E.M. Lorraine
Michel PUYGRENIER, I.R.E.M. Poitiers