

2 - ÉTUDE SUR LA STABILITÉ DE LA GÉOMÉTRIE EN FIN DE TROISIÈME

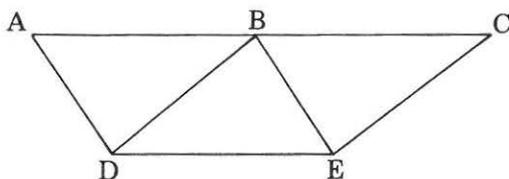
Résultats de deux enquêtes à modalités auprès d'élèves de classes de troisième (âge moyen : 15 à 16 ans).

par Claire DUPUIS, Raymond DUVAL, François PLUVINAGE,
I.R.E.M. de Strasbourg.

1. PRESENTATION DES DEUX QUESTIONNAIRES SUCCESSIFS.

Pour explorer certaines acquisitions concernant la déduction après l'apprentissage de la géométrie, nous avons proposé en fin de troisième un premier questionnaire à quatre modalités concernant l'utilisation des notions suivantes : le parallélisme, le théorème de Thalès et les vecteurs.

(a) Trois questions portaient sur le parallélisme. Dans la première, il s'agissait d'utiliser la transitivité de l'égalité des côtés opposés sur une situation simple : on donne deux parallélogrammes ayant un côté commun et on demande de montrer que B est milieu de AC.

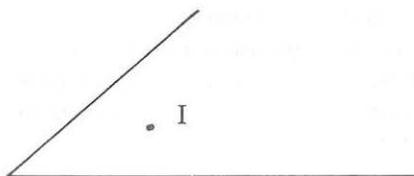


L'informatique amenant à désigner les questions par des abréviations, nous avons appelé cette question LIV.OU. (Le livre ouvert). La seconde question est la reprise de la première, à ceci près que les hypothèses sont présentées en mentionnant les droites parallèles.

les sans parler explicitement des parallélogrammes et que la situation précédente est légèrement enrichie : on prolonge AD et CE de sorte que la figure forme un grand triangle. Nous avons appelé cette question CHAP. (nous avons simplement habillé la situation précédente d'un chapeau). Les différentes modalités du questionnaire nous ont permis de combiner ces deux questions de la façon suivante :

LIV.OU. seul — CHAP. seul — LIV:OU. suivi de CHAP.

Enfin dans la troisième question il s'agissait d'utiliser la propriété des "diagonales qui se coupent en leur milieu" soit pour tracer un parallélogramme soit pour tracer un segment, un point donné I devant être soit le milieu des diagonales, soit le milieu du segment. Deux droites données devaient être le support soit pour deux côtés du parallélogramme, soit pour les extrémités du segment. Nous avons appelé cette question l'OEIL (la situation de départ étant



(b) Dans la question portant sur le théorème de Thalès, il s'agissait de transporter un rapport donné sur le côté d'un triangle, vers un autre côté de ce triangle. Nous avons retenu cette question pour sa ressemblance figurale avec le CHAP., les élèves pouvant assimiler l'une à l'autre les deux situations. Cette question était présentée dans toutes les modalités pour tester l'homogénéité des populations ayant eu les différentes modalités.

(c) Deux questions portaient sur les vecteurs. Dans l'une il s'agissait de déterminer les composantes d'un vecteur \vec{u} , dans l'autre de tracer ce vecteur \vec{u} . Les seules variations que nous avons introduites portaient sur les signes de l'équation $3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ et sur l'isolement ou non de \vec{u} dans un membre de l'équation.

Ce questionnaire a été proposé dans 11 classes de troisième au début du mois de juin 1974. Malheureusement il se trouva à cette période de l'année que toutes les classes n'étaient pas

complètes. Et comme nous avons 4 modalités pour notre questionnaire, cela faisait un échantillon trop restreint :

54 élèves en modalité	A	
61	”	B
54	”	C
63	”	D

232

Nous avons dépouillé et analysé les résultats et nous avons décidé de faire repasser le questionnaire une seconde fois pour vérifier la stabilité des phénomènes que nous avons observés sur ces échantillons restreints.

Pour la seconde passation du questionnaire fin mai - début juin 1975, nous avons procédé aux modifications suivantes :

- réduction à trois modalités pour des raisons techniques d'interprétation à l'aide de l'analyse des correspondances ;
- adjonction d'une question commune sur l'utilisation du théorème de Pythagore, les enseignants proposant souvent des exercices dans ce domaine en vue du B.E.P.C. ;
- transformation de la question sur la projection, la question du précédent questionnaire ayant donné lieu à des réponses trop succinctes pour permettre leur interprétation ;
- demande d'une appréciation de la familiarité de chaque question posée selon qu'elle a été souvent ou non proposée en classe ;
- un chronométrage du temps passé sur chaque question ;
- choix d'un tiercé parmi sept opinions positives et sept opinions négatives sur les mathématiques.

Les questions portant sur le parallélisme et les questions portant sur les vecteurs ont été gardées sans changement.

C'est ce deuxième questionnaire que nous avons joint en annexe. Il y avait une question par page, les indications de temps et d'appréciation pour chaque question se trouvaient respectivement en haut et en bas de la page. Voici une présentation synoptique de la distribution des questions par modalité. Une croix signifie que la question a été posée, et le décalage de deux croix signifie que la question a été posée avec une légère variation.

Question
Sigle d'analyse

	Pythagore		Thalès			Composantes d'un vecteur			Vecteur à tracer			Point M	Livre ouvert	Chapeau		L'oeil		
	PYT	PER	TBC	CTH	THA	AVC	BVC	CVC	AVT	BVT	CVT	PLM	LIV	CHA	AHC	AOE	BOE	COE
A	X	X			X	X			X				X		X	X		
B	X	X			X		X			X			X	X			X	
C	X	X	X	X				X			X	X		X				X

Ce deuxième questionnaire a été présenté à 14 classes, soit un effectif de 366 élèves répartis de la façon suivante :

Modalité A	120
B	116
C	130

Pour cette deuxième enquête effectuée un an après la première, nous sommes allés dans d'autres C.E.S. que ceux où nous étions passés en 1974. Ce sont les résultats de ce deuxième questionnaire que nous présentons et analysons en priorité. Mais nous rappellerons chaque fois ceux obtenus au premier questionnaire pour permettre une confrontation.

2. DEPOUILLEMENT ET ANALYSE

Avant de passer à une analyse détaillée des résultats, question par question, il nous faut dire quelques mots du dépouillement des réponses et des méthodes d'analyse utilisées.

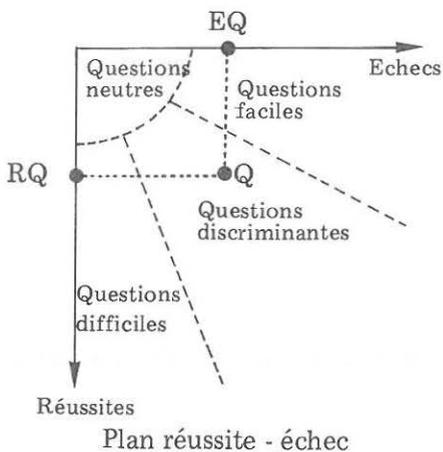
Le dépouillement a posé un problème difficile étant donné que les questions étaient ouvertes et qu'il s'agissait d'enregistrer l'expression partielle, parfois tâtonnante, d'une recherche ou d'un raisonnement. Nous avons élaboré a posteriori un code pour chaque question, permettant d'identifier les types de réponse les plus typiques et les plus fréquents. C'est la caractérisation lapidaire de ces types de réponse qui apparaît dans les tableaux de résultats, mais il n'est pas inutile de signaler que ces caractérisations sont consécutives à l'application d'un protocole de codage (décrit dans [1], annexe 2, page 104) et d'opérations de tri.

La plus grande partie des opérations de tri est effectuée sur machine à l'aide d'un programme, intitulé CATHERINE, mis au point pour les besoins de nos enquêtes, depuis plusieurs années déjà. Les tableaux de résultats donnés plus loin sont une illustration suffisante des possibilités d'exploitation. En revanche, l'utilisation de l'analyse des correspondances, employée à côté de ces opérations de tri, demande quelques précisions. En effet, nous faisons dans nos enquêtes un usage un peu particulier de cette méthode d'analyse, pour l'adapter à nos besoins. Grossièrement, on peut dire que l'analyse factorielle des correspondances déter-

[1] Démarches de réponse. R. Duval et F. Pluvinage. Educ. Studies in Math 8 (1977) p. 51-116.

sinon elle est codée 100 (réussite) ou 010 (échec). Une telle pratique a quelque chose d'un peu choquant a priori en ce qu'elle mêle les véritables réponses, dues aux élèves interrogés, à de "simili-non-réponses", dues à l'expérimentateur (question non posée). Mais une étude détaillée montre que, pourvu que les trois groupes d'individus A, B et C aient des effectifs voisins et que les questions ABC (communes à toute la population) soient en nombre réduit, l'analyse dissocie très bien le fait des élèves de celui de l'expérimentateur.

Rappelons que le tableau $I \times J$ est "vu" comme un nuage de points dans $\mathbb{R}^{[I]}$ muni d'une métrique euclidienne (parce que les individus ont tous même pondération : chaque ligne du tableau $I \times J$ comporte le même nombre de 1). Ces points de l'analyse sont ceux dont les coordonnées sont données par les colonnes du tableau, chacune divisée par la somme marginale correspondante. L'analyse proprement dite consiste à extraire les axes principaux d'inertie de ce nuage, par ordre décroissant d'importance. Dans notre cas, le plan des axes n^{os} 1 et 2 mérite le nom de *plan des modalités*, et l'axe 3 est l'axe *réussite-échec d'ensemble*. Dans le plan 1-2, on repère des attractions, vers l'une des modalités, de la réussite ou de l'échec à une question posée à deux au moins des trois groupes A, B et C. Sur l'axe 3, chaque question apparaît selon deux points : l'un figure la composante de la réussite à cette question, l'autre celle de l'échec ; nous parlerons d'une coordonnée réussite et d'une coordonnée échec pour chaque question. Toutes les coordonnées réussite ont même signe (le signe - dans l'analyse effectuée) et toutes les coordonnées échec ont le signe opposé. Si l'on "casse" l'axe 3, comme sur la figure ci-



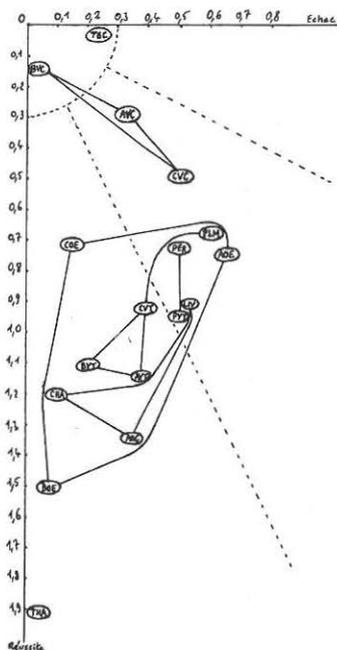
contre, pour représenter une question Q comme le point de coordonnées EQ (échec à Q) et RQ (réussite à Q), les questions apparaissent ainsi dans un quart de plan. Et un régionnement est possible, selon les niveaux respectifs de la réussite et de l'échec à une question. Ce régionnement

conduit à qualifier les questions. Pour les questions proches de l'origine, on peut dire que ni la réussite, ni l'échec ne sont significatifs de réussite ou d'échec d'ensemble.

D'où le nom de "questions neutres". Pour les questions difficiles, seule la réussite est significative ; c'est l'inverse pour les questions faciles : seul l'échec est significatif. Enfin, les questions discriminantes sont significatives aussi bien pour leur réussite que pour leur échec. Bien sûr, les frontières tracées sur la figure sont plus ou moins arbitraires, mais il n'en est pas moins vrai qu'elles enferment des questions nettement typées.

Pour faciliter l'interprétation ultérieure, nous présentons ci-après le plan réussite-échec ainsi formé sur le questionnaire soumis à l'analyse factorielle des correspondances. Les sigles utilisés sont ceux qui figurent dans le tableau de la page 68).

Plan Réussite - Echec



Les questions sont regroupées en "constellations" de questions analogues.

3. RESULTATS DETAILLES

3.1. Résultats de la question sur Pythagore

Détermination de la longueur
des côtés

	A	B	C
Réussite	46	34	46
Pythagore utilisé mais non obtention du résultat : erreurs de calcul, erreurs de donnée, on s'arrête à $\sqrt{169}$	22	19	18
Résultats exacts non expliqués	0	1	3
Mesure dans l'unité donnée (résultat exact ou approché)	1	5	6
Ecrasement (LK = 12 + 5)	6	5	13
Mesure en cm	1	3	2
Erreurs inexplicables (trouve 12 ; 12,5 ...)	10	13	15
Non réponse	34	36	27
	120	116	130

Calcul du périmètre

	A	B	C
Réussite	45	36	63
Formule correcte inapplicable (pas les longueurs nécessaires ou $\sqrt{169}$)	14	10	5
Donne demi-périmètre	1	0	1
Résultats non conformes aux longueurs obtenues	9	10	5
Non respect de la consigne	3	3	3
Non réponse	48	57	52

En posant cette question, nous attendions deux informations : principalement tester l'homogénéité des populations ayant eu les modalités A, B, C, et, en second lieu, voir dans quelle mesure les élèves reconnaîtraient qu'il fallait utiliser le théorème de Pythagore. C'est pour obtenir cette deuxième information que nous avons demandé de calculer le périmètre du parallélogramme ; car nous voulions éviter de présenter trop directement un exercice d'application du théorème de Pythagore.

La distribution des résultats sur le tableau ci-dessus fait apparaître une grande analogie dans la répartition des réponses par modalité. A l'analyse des correspondances, laquelle s'en tient ici au seul partage réussite et non réussite, de faibles attractions apparaissent qui semblent correspondre à la place de cette question dans chaque modalité (en 1ère position pour A, en 5ème pour B, en 4ème pour C) : cette question est d'autant mieux réussie qu'elle est plus en tête du questionnaire.

Il n'y a rien dans nos observations qui nous permette de rejeter l'hypothèse de l'homogénéité des populations.

Pour la deuxième information recherchée, et qui ne prendra de signification que dans une comparaison avec d'autres résultats, retenons qu'un élève sur deux, pour chaque modalité, a utilisé le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur des côtés du parallélogramme. A l'analyse des correspondances, cette question se trouve à la limite entre question difficile et question discriminante. Le calcul du périmètre se trouve dans la zone des questions discriminantes.

3.2. Résultats des questions sur le parallélisme.

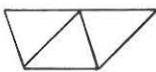
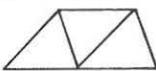
LIV. OU.	Questionnaire 1975		Questionnaire 1974		
	Mod. A	Mod. B	A	B	D
Réussite	50 42 %	39 34 %	26 48 %	28 46 %	26 41 %
Transformation de la demande suivie de "donc B est le milieu"	11 9 %	17 14 %	5 9 %	7 15 %	6 11 %
Recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat	18	18	4	9	9
Voit 2 diagonales se coupant au milieu de DB ou de BE	2	3	0	5	2
Remarques diverses sans conclusion	10	8	3	3	3
Transformation de la demande sans aucune autre indication	9	15	8	5	7
Non réponse	20 17 %	16 14 %	8 15 %	4 7 %	10 16 %
	120	116	54	61	63

CHAP.	Questionnaire 1975			Questionnaire 1974	
	Mod. A	Mod. B	Mod. C	Mod. C	Mod. D
Réussite	22 18 %	13 11 %	8 6 %	5 9 %	10 16 %
Admet un autre milieu + Thalès	22 18 %	37 32 %	33 25 %	7 13 %	11 17 %
Transformation de la demande suivie de "Donc B est milieu"	4	6	6	2	2
Voit les 2 parallélogrammes	2	0	5	0	1
Voit des triangles semblables ou égaux	2	2	4	2	4
Recours à des propriétés apparentes de la figure	16	11	27	8	6
Ni le résultat ni le but	8	17	9	5	3
Transformation de la demande sans aucune autre indication	5	6	13	4	3
Non-réponse	39 33 %	24 21 %	25 21 %	21 39 %	23 37 %
				54	63

Elèves ayant eu la même démarche de réponse aux deux questions LIV. OU. et CHAP.

	A	B
Réussite	22	11
Transformation de l'énoncé de la question, suivie de "Donc B est milieu"	2	1
Recours à des propriétés apparentes de la figure	3	3
Simple transformation de l'énoncé de la question en $AB = BC$	4	5
Non réponse	15	5

Disposition des figures dans le questionnaire de 1975.

	LIV. OU.	CHAP.
A		
B		

La lecture de ces tableaux permet plusieurs observations, en rapport avec les influences possibles des deux éléments suivants :

- le fait qu'une question (CHAP) soit ou non précédée d'une question (LIV.OU.) comportant une sous-figure de la figure proposée ;
- le fait que l'orientation de la sous-figure soit conservée ou non dans la figure CHAP.

1°) L'existence ou non de la question LIV.OU dans le questionnaire conduit au tableau :

		AB	C
CHAP.	{ Réussite	35	8
	{ Echec	201	122

Pour ce tableau, on obtient $\chi_1^2 = 5,68$, qui est significatif au seuil 0,05. Mais ceci masque en fait le phénomène le plus important. En effet, c'est en modalité A que l'augmentation de réussite est la plus forte, c'est-à-dire dans la modalité où l'orientation de la sous-figure ne change pas. La différence est très significative lorsque sont opposées modalité A d'une part et modalités B et C d'autre part ($\chi_1^2 = 7,68$, très significatif). Et l'analyse des correspondances montre que si l'échec apparaît comme neutre en modalités B et C, il revêt un caractère plus significatif en modalité A. Aussi peut-on conclure :

La question CHAP n'est véritablement "préparée" que lorsqu'elle est précédée de la présentation d'une sous-figure *rigoureusement conforme* (côté commun aux deux parallélogrammes en bas dans les deux figures).

De plus, il apparaîtra à l'examen ultérieur (p. 78) que c'est le fait *d'avoir réussi* à la question LIV.OU qui augmente le taux de réussite à CHAP, et non simplement le fait d'avoir eu en main un questionnaire comportant les deux questions.

2°) Il y a pour les élèves une très grande difficulté à reconnaître la même situation lorsqu'elle est représentée une deuxième fois avec une information supplémentaire suggérant une autre organisation d'ensemble. Ainsi 28 élèves parmi les 50 ayant réussi LIV.OU en A ont échoué à la question CHAP. En B, à cause du renversement de la figure, la proportion est encore plus élevée : 28 sur 39. Quel a été le comportement de ces élèves à la question CHAP ? Pour la plupart, ils ont soit abandonné (9 sur 28 en A et 8 sur 28 en B) soit admis un autre milieu et utilisé le théorème de Thalès (9 sur 28 en A et 13 sur 28 en B).

En ce qui concerne la reconnaissance de la même situation dans les deux questions, la démarche des élèves qui n'ont pas réussi LIV.OU. est plus difficile à interpréter. Nous pouvons cependant faire les constatations suivantes. Deux types de réponse se sont révélés semblables sur ces deux questions. La première consiste à noter que pour prouver "B milieu de AC" il suffit de prouver que "AB = BC", sans rien ajouter d'autre. La seconde consiste à tirer directement de cette remarque la conclusion "donc B est milieu". En regardant le dernier tableau ci-dessus, nous pouvons voir que ceux qui ont adopté ce second type de réponse pour LIV. OU. ne le reprennent pas pour CHAP. Et sur les 4 et 6 élèves qui ont fourni cette réponse à CHAP, seulement

2 et 1 l'avaient fournie à LIV.OU. Il y a en revanche une meilleure stabilité pour ceux qui ont adopté le premier type de réponse : sur les 5 et 6 élèves qui ont fourni cette réponse à CHAP, 4 et 5 l'avaient déjà fournie à LIV.OU.

3°) Les questions LIV.OU et CHAP. ont été perçues par la plupart des élèves comme des questions présentant des situations très différentes et faisant appel pour la démonstration à des propriétés différentes. Ainsi on voit apparaître pour la question CHAP un nouveau type de réponse ; l'attraction pour le théorème de Thalès, une partie des élèves n'hésitant pas à commettre un cercle vicieux et à se donner comme admis ou comme évident un autre milieu sur l'un des deux côtés du grand triangle. Autre signe d'une perception très différente des deux questions : les élèves classés sous la rubrique "recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat" ne sont pas les mêmes élèves pour LIV.OU et pour CHAP.

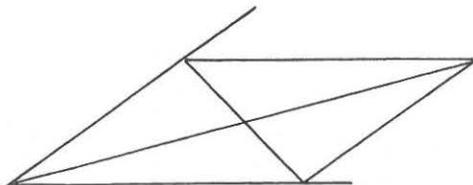
Mais si la plupart des élèves ayant réussi à LIV.OU. n'ont pas reconnu la même situation mathématique dans la question CHAP., *la réussite à CHAP. entraîne la réussite à LIV.OU.* Les deux exceptions que nous avons relevées en modalité B tiennent à une application stricte du codage adopté. Dans les deux cas, les élèves, après avoir mentionné que $AB = BC$ impliquait B milieu de AC, ont affirmé sans justification $AB = BC$. A la question CHAP ils ont justifié cette affirmation en indiquant les deux parallélogrammes. Nous ne nous sommes pas autorisés à considérer la réponse de la page suivante pour interpréter favorablement la réponse précédente.

Nous pouvons donc légitimement supposer que les élèves qui en modalité C ont réussi la question CHAP. auraient réussi la question LIV.OU.. Nous avons d'ailleurs introduit cette dernière question pour nous donner un moyen d'interpréter certains échecs qui pourraient se produire à la question CHAP.. Principalement pour déterminer si l'échec ne tiendrait pas à la difficulté de distinguer les deux parallélogrammes, c'est-à-dire de choisir l'information pertinente, ou au contraire à la difficulté de mettre en oeuvre la transitivité de l'égalité des côtés opposés. L'une et l'autre difficulté se révèlent extrêmement importantes en fin de Troisième. Et quand elles sont cumulées, comme dans la question CHAP., nous sommes en présence d'une tâche insurmontable pour 80 % de la population dans l'état actuel de l'enseignement.

4°) Non seulement les résultats de l'enquête de 1975 confirment les observations faites sur l'enquête de 1974, mais ils se révèlent sur certains points une troublante stabilité. L'écart des taux de réussite est inférieure à 0,10, le taux de réponse "transformation de la demande suivie de 'Donc B est milieu'" est presque le même, les non réponses interviennent selon la même proportion, etc... Mais le plus important concerne la réussite en modalité D (quest. 1974). La figure pour la question CHAP. était renversée par rapport à la figure du LIV. OU. à la page précédente (comme pour la modalité B du questionnaire de 1975). Nous pouvons observer des taux de réussites très proches : $\frac{10}{26} = 0,38$ en 1974 et $\frac{13}{39} = 0,33$ en 1975. Précisons que les 10 élèves qui en 1974 ont réussi CHAP. ont aussi réussi LIV.OU.. Enfin en 1974, nous avons ajouté dans la modalité A une question intermédiaire pour le LIV. OU., de façon à "mettre sur la voie" : "comparer les longueurs BC et DE". Cette suggestion n'a eu aucun effet sur les résultats ($\frac{26}{54} = 0,46$ en A contre $\frac{28}{61} = 0,48$ en B).

3.3. L'oeil.

Le but de la troisième question était de voir dans quelle mesure les élèves utilisent la propriété selon laquelle les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. Dans la modalité A nous demandions de tracer un parallélogramme de telle sorte que O soit un sommet et I le milieu des diagonales. Dans les modalités B et C nous demandions de tracer un segment AB tel que I soit le milieu et que A soit sur l'une des deux droites, B étant sur l'autre. Pour inciter les élèves à situer ce problème dans la situation du parallélogramme nous avons fait une suggestion sous deux formes différentes. En B nous leur demandons d'énumérer les propriétés du parallélogramme qu'ils connaissent et en C nous leur présentons la figure suivante comme référence:



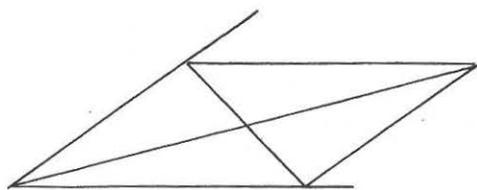
Enfin, pour faciliter l'interprétation des réponses, nous avons demandé aux élèves de numérotter les traits dans l'ordre où ils les traceraient (ce que nous n'avions pas fait en 1974).

Voici le tableau des différentes réponses obtenues.

L'OEIL (en gras : taux)	1975						1974					
	A		B		C		A		B		C	
	construire un parallélogramme		construire un segment AB		construire un segment AB		construire un segment AB		construire un segment AB		construire un parallélogramme	
Réussite	52	0,43	10	0,9	22	0,17	16		15		17	
Procédure non identifiable	2		1		4		3		7		7	
"Réussite" par tâtonnement (utilisation directe du double décimètre)	6	0,05	57	0,49	62	0,48	17		34		12	
Bon départ par 20I mais application défectueuse	16		1		0							
Erreur due seulement à une attraction pour l'orthogonalité	4		1		2							
Erreurs de consignes ; I pas du tout au milieu	10	0,08	10	0,09	8	0,06						
Echec à reproduire une figure respectant les propriétés d'un parallélogramme ou à tracer un segment	13	0,10	3	0,07	2	0,02						
Non-réponse	17	0,14	32	0,28	30	0,23	4		3		2	
							54		61		54	

Sur ce tableau apparaît un renversement spectaculaire entre la modalité A et les modalités B et C. La propriété concernant les diagonales du parallélogramme n'a vraiment été utilisée qu'en modalité A : 52 plus les 16 qui ont commencé par 2 OI, soit 68 élèves sur 120. En revanche, les élèves des modalités B et C ont cherché à tracer directement le segment AB par ajustage à l'aide d'un double décimètre ; et cela malgré la suggestion précédant la question. Dès que la tâche ne porte plus explicitement sur le parallélogramme comme dans la modalité A, la propriété cesse pratiquement d'être utilisée. Un phénomène analogue que nous observerons sur les vecteurs nous inciterait à dire davantage : *dès qu'une propriété cesse d'être explicitement associée à la situation privilégiée par son apprentissage, elle cesse d'être utilisable*. C'est peut-être pour cette raison que les indications destinées à "mettre sur la voie" se sont révélées inopérantes. Nous avons remarqué le même phénomène dans le questionnaire de 1974 sur le LIV.OU.

Sur le tableau de l'analyse des correspondances, cette question est complètement dispersée dans le plan Réussite-Echec (c'est la seule question de l'enquête à s'éparpiller ainsi.). Elle est discriminante en modalité A, moyennement difficile en C (où nous présentions la figure de référence



) et très difficile en B.

Il est intéressant de comparer les réponses des élèves à cette question et à la question LIV.OU., bien que ces deux questions ne fassent pas appel aux mêmes propriétés du parallélogramme. Le premier tableau ci-dessous, à gauche, indique les réponses à LIV.OU. des élèves qui ont fait des erreurs de consignes à la question OEIL ou qui ont échoué à reproduire une figure qui soit un parallélogramme en modalité A. Le deuxième tableau indique les réponses à la question OEIL de ceux qui ont réussi LIV.OU..

	A	B
Réussite	6	1
Transformation de la demande suivie de "donc B est le milieu"	2	5
Recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat	7	1
Voit deux diagonales se coupant en leur milieu	2	0
Remarques diverses sans conclusion	2	1
Transformation de la démarche sans aucune autre indication	2	2
Non-réponse	2	3
TOTAL	23	13

	A	B
Réussite	35	5
Réussite par tâtonnement	0	20
Bon départ par 2 OI mais application défectueuse	5	1
Erreur due seulement à une attraction par orthogonalité	0	1
Echec concernant l'application de la consigne ou d'une figure	6	1
Non-réponse	4	11
TOTAL	50	39

Au vu de ces deux tableaux, on peut estimer que c'est pratiquement la même population d'élèves qui réussit ou réussit presque (35 + 5 sur 50) à la question OEIL, dans la modalité A, c'est-à-dire dès qu'il s'agit explicitement du parallélogramme. On peut voir d'ailleurs dans le plan Réussite-Echec du tableau de l'analyse des correspondances que pour cette modalité A les questions LIV.OU et OEIL sont proches. Ce n'est plus le cas pour la modalité B. Dans cette modalité, la tâche exigeant seulement un détour par l'une des propriétés du parallélogramme, la population qui réussit LIV.OU se partage en trois groupes pour la question OEIL : réussite, "réussite" par tâtonnement et abstention, ces deux derniers groupes étant les plus importants. Sur le tableau de l'analyse par correspondance, cela se traduit par un écart dans la position de ces deux questions.

Concernant les trois questions dont nous venons d'analyser brièvement les résultats, nous pouvons dire ceci en résumé. *Les élèves qui peuvent utiliser une propriété du parallélogramme sont aussi capables d'en utiliser une autre.* Mais, pour la plupart, cette utilisation semble restreinte aux situations où il s'agit de travailler explicitement sur un parallélogramme. En comparant LIV.OU. à CHAP. d'une part et à l'OEIL d'autre part (modalité B), nous constatons qu'il y a un seuil important entre savoir mettre en oeuvre une propriété du parallélogramme et recourir à cette propriété lorsque le parallélogramme n'est pas montré explicitement ou exclusivement. La reconnaissance du parallélogramme dans une situation plus riche et la conduite de détour telle qu'elle est exigée dans OEIL ne relèvent pas des mêmes démarches. Y a-t-il un lien entre elles ou sont-elles indépendantes ? Le taux peu élevé d'élèves ayant réussi l'une ou l'autre dans la modalité B ne nous permet pas de trancher. Ainsi les 11 élèves qui ont réussi LIV.OU. et CHAP. se partagent ainsi pour OEIL : 3 ont réussi en utilisant la propriété des diagonales se coupant en leur milieu, 4 ont réussi par tâtonnement et 4 se sont abstenus.

3.4. Résultats des questions sur les vecteurs

Calcul des composantes d'un vecteur \vec{u}

	1975						1974							
	A		B		C		A		B		C		D	
	$3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$		$3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$		$3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$		$\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$		$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$		$3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$		$3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$	
Réussite	61	51 %	49	43 %	63	48 %	21	39 %	26	43 %	26	48 %	27	43 %
Erreurs de calculs portant sur les signes	13	11 %	7	6 %	4	3 %								
Erreurs de calculs autres que de signes	8		6		3									
Composantes de $3\vec{u}$ correctes mais non celles de \vec{u}	4		2		7									
Equation vectorielle correcte (avec isolement de $3\vec{u}$) et arrêt	2		4		7									
Mauvaise équation vectorielle	20	17 %	8	7 %	21	16 %								
Egarement	3		4		5		2		1		1		0	
Non-réponse ou abandon	9	8 %	36	31 %	20	15 %	10	19 %	12	20 %	10	19 %	10	16 %
	120		116		130									

En toute rigueur, le tableau comporte les résultats de populations différentes sur des questions différentes. Il ne permettrait alors pas d'établir des comparaisons. Toutefois, les choses changent à partir du moment où nous nous demandons si les questions posées sont *interchangeables*, c'est-à-dire si les résultats obtenus sont ou non les mêmes dans les différents cas. Cette question d'interchangeabilité peut être posée de plusieurs façons, conduisant à plusieurs vérifications par un test de χ^2 . Sur le bloc des trois questions, on obtient $\chi_2^2 = 4,31$ ce qui est non significatif au seuil 0,05.

	A	B	C
R	60	44	62
E	60	72	68

Cependant, la modalité B semble se détacher de A et C. La variation des questions entre les trois modalités porte soit sur l'isolement de la variable $3\vec{u}$, soit sur la présence du signe "—". Il apparaît que la modalité B, où il faut isoler $3\vec{u}$ puis travailler sur l'expression $(\vec{w} - \vec{v})$, est celle où il y a le moins de réussites et le plus d'abandons. En revanche, les réponses obtenues pour les modalités A et C sont sensiblement les mêmes à deux différences près : il y a plus d'erreurs de calcul pour $3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ mais moins d'abandons que pour $3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$. Tout semble se passer comme si la présence d'une seule difficulté n'arrêtait pas la moitié des élèves mais induisait chez certains des élèves de l'autre moitié des comportements spécifiques. La présence d'une variable à isoler tend à décourager les élèves d'essayer un calcul ; la présence du signe "—" ne rend pas la question inabordable, mais révèle de ce fait une insuffisante maîtrise du maniement des signes dans le calcul algébrique.

Effectivement, pour le tableau

	AC	B
R	122	44
E	128	72

on obtient $\chi_1^2 = 4,12$ qui est significatif au seuil 0,05.

En admettant, comme nous l'avons vu ci-dessus pour Pythagore, l'homogénéité des populations A, B et C, on est conduit à rejeter l'hypothèse que les questions comportant une difficulté et la question comportant deux difficultés soient interchangeables.

Cette dernière question, posée en modalité B et ayant obtenu le moins de réussites, apparaît dans la zone neutre du plan réussite-échec issu de l'analyse des correspondances, au lieu d'être dans la zone des questions difficiles ou celle des questions discriminantes. Nous ne pouvons ici que relever ce phénomène curieux. Signifierait-il que l'accumulation de deux difficultés sur ce type de question serait analogue à un parasitage ? Ou n'avons-nous pas méconnu un phénomène lié à l'organisation des questionnaires ? En tout cas, on peut légitimement supposer au vu de tous ces résultats que si nous avons posé la question $3\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$ nous aurions obtenu davantage de réussites.

Remarquons une nouvelle fois la stabilité des résultats de 1975 par rapport à ceux de 1974 (modalités C et D), au moins en ce qui concerne le taux des réussites. La limitation de notre questionnaire à trois modalités ne nous a pas permis d'étudier l'influence éventuelle qu'a un coefficient différent de 1 pour \vec{u} ou pour \vec{v} .

3.5. Tracés de vecteurs. (voir tableau page 87)

Les résultats dans les modalités A et B sont très proches les uns des autres pour chacun des types de réponse. La différence de signe ne semble avoir aucune influence. En revanche, la modalité C présente simultanément une augmentation du taux des réussites et une diminution de celui des abandons ou des non-réponses. Pour A et B la question apparaît dans la zone des questions difficiles et pour C la question est à la limite entre question difficile et question discriminante (voir le tableau de l'AFC). Tout se passe ici comme si l'isolement de la variable présentait une difficulté particulière, difficulté qui semble confirmée par les résultats de l'enquête de 1974. Le taux de réussites est inférieur à celui obtenu pour les composantes : pratiquement moitié moins sauf en C. De plus certains élèves, qui sont capables d'isoler la variable quand il s'agit d'un calcul, ne l'isolent plus lorsqu'il s'agit d'une tâche de construction. En d'autres termes, les procédures acquises pour résoudre une équation cesseraient d'être utilisables

Construire le vecteur \vec{u}

	1975					
	A		B		C	
	$\vec{u}-2\vec{v}=\vec{w}$		$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$		$\vec{u}=\vec{w}-2\vec{v}$	
Réussite	26	22 %	23	20 %	38	29 %
\vec{v} multiplié par 2 mais application défec- tueuse de la règle du parallél. ou du triang.	28		22		13	
\vec{v} non multiplié par 2	3		3		11	
Ecrasement : longueur seule prise en compte	19	16 %	22	19 %	30	23 %
Somme vue comme vecteur tracé à l'extré- mité de \vec{v} ou de \vec{w}	5		7		7	
Abandon ou non-réponse	36	30 %	22	30 %	30	19 %
Réponse ininterprétable	3		4		6	

	1974							
	A		B		C		D	
	$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$		$\vec{u}-2\vec{v}=\vec{w}$		$\vec{u}=\vec{w}-2\vec{v}$		$\vec{u}=\vec{w}+2\vec{v}$	
	17	31 %	12	19 %	18	33 %	28	44 %
	21		14		7		5	
	1		10		9		6	

pour une partie des élèves dès qu'on ne leur demande plus explicitement un calcul.

La comparaison des réponses données par les élèves pour le calcul des composantes et pour le tracé des vecteurs ne permet pas une interprétation précise. Sans produire ici de nouveaux tableaux, nous indiquons seulement les données les plus frappantes.

En modalité A, des 26 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$), 20 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$) soit les 3/4. Des 61 élèves qui ont réussi les composantes, 17 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle dans la construction du vecteur et 13 ont abandonné. Les 11 autres élèves se dispersent sur les autres types de réponse.

En modalité B, des 23 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$), 8 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$) soit 1/3. Des 48 élèves qui ont réussi les composantes, 11 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle, 16 ont abandonné et 11 ont écrasé en simple longueur. Détail particulier à cette modalité, 13 élèves n'ont pas répondu aux deux questions.

En modalité C, des 38 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} = \vec{w} - 2\vec{v}$), 23 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$) soit les 3/5. Des 63 élèves qui ont réussi les composantes, 15 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle, 12 ont abandonné. Détail particulier à cette modalité, 10 élèves ont reproduit, pour le calcul des composantes, lors de la substitution des valeurs, une mauvaise équation vectorielle et ont procédé à un écrasement pour la construction du vecteur \vec{u} .

Il semble qu'on ne puisse établir une liaison entre les comportements de réponse à "construction du vecteur \vec{u} " et au "calcul des composantes du vecteur \vec{u} ". Au cours de la première enquête, des enseignants nous avaient signalé qu'ils n'avaient pas eu ou peu eu le temps de faire travailler les élèves sur la construction des vecteurs. Les résultats étaient d'ailleurs apparus extrêmement différents selon les classes. Pour le questionnaire de 1975, nous avons comparé par classes les résultats pour le calcul des composantes et pour la construction des vecteurs. Dans 9 classes sur 14, il y a un écart considérable entre les performances pour le calcul et celles pour la construction, au bénéfice de l'une ou

l'autre question selon les classes. Tout se passe comme si dans ces classes, on avait mis l'accent soit sur le calcul des composantes, soit sur la construction des vecteurs ! Dans les 5 autres classes, le taux des performances est presque le même ou l'écart est peu important.

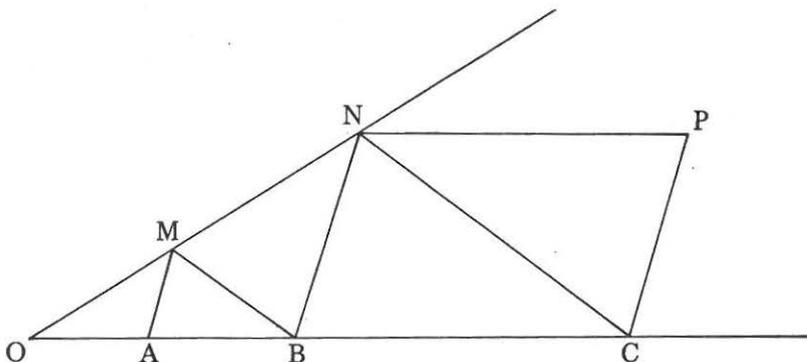
Ce manque de liaison entre les comportements pour le calcul des composantes et pour la construction des vecteurs apparaît comme une conséquence de la façon dont les vecteurs ont été ou n'ont pas été enseignés.

3.6. Résultats des questions sur le théorème de Thalès

Sur la figure ci-dessous, les relations de parallélisme étant données comme hypothèses, on demandait :

de montrer d'une part que $\frac{OB}{BC} = \frac{OA}{AB}$

et d'indiquer d'autre part les quantités égales à $\frac{PN}{BO}$.



Dans la modalité A, nous avons présenté pour la première question une figure simplifiée sans NP et PC, c'est-à-dire en supprimant le parallélogramme.

Dans la modalité C, nous avons supprimé la deuxième question et modifié la première de la manière suivante. On demandait de compléter $\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{\dots}$ puis de montrer que $\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{NP}$. La première question se trouvait en quelque sorte plongée dans une situation légèrement plus riche quant aux données.

Voici les résultats.

Première question :

	A	B	C
Réussite	5 4 %	3 3 %	1
Montre l'égalité en posant chacun des rapports égal à 1	14 12 %	9 8 %	4 3 %
Echoue, mais cherche à utiliser les points M et N	10 8 %	9 8 %	14 11 %
Echoue sans utiliser M et N, c'est-à-dire en travaillant sur la droite AC	30 25 %	26 22 %	38 29 %
Non-réponse	61 51 %	69 59 %	73 56 %

Deuxième question :

	A	B
Non-réponse	70 57 %	79 67 %
Réponses interprétables	22 18 %	15 13 %
Erreurs issues de l'impression de milieu	15 13 %	7 6 %
Réussite du point de vue de l'égalité des longueurs mais pas de rapports égaux	6	3
Réussite	1	1
Erreurs diverses	6	11

Question préliminaire : $\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{\dots}$

	Modalité C
Réussite ; BC justifiée	5
Réponse BC sans aucune justification	96 74 %
Réponse autre que BC	15
Non-réponse	14

Les deux points à relever sont :

- le taux extrêmement élevé de non réponse
- le taux extrêmement bas de réponses dans lesquelles les élèves ont réussi à sortir de la droite OC, tous les points intervenant explicitement dans l'énoncé de la question se trouvant sur cette droite.

Seule la question préliminaire, en Modalité C, demandant de reconnaître l'égalité des côtés opposés du parallélogramme, a obtenu un taux élevé de réponses. Et cette question n'a rien à voir avec l'énoncé de Thalès.

Un certain nombre d'élèves ayant cherché à utiliser le théorème de Thalès dans la question CHAP., il est intéressant de regarder leur comportement sur cette question. C'est ce qu'indique le tableau suivant.

	A	B	C
réussite	0	2	0
égalité $1 = 1$	5	2	6
utilisation de M et de N	4	4	2
pas d'utilisation de M et de N	6	6	6
non réponse	7	23	19

4. CONCLUSIONS

L'étude détaillée des résultats nous permet de dégager des observations plus générales, soit parce qu'elles apparaissent dans plusieurs questions, soit parce que des recoupements peuvent être organisés avec des résultats d'enquêtes antérieures.

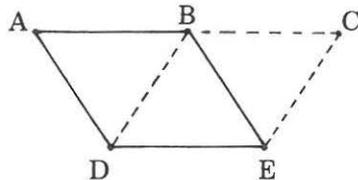
1°) Une différence apparaît entre la présence d'une difficulté et celle de deux *difficultés simultanées*. Cette différence, déjà observée en Cinquième, se retrouve ici en Troisième dans le cas du calcul des composantes d'un vecteur, où les équations donnent lieu à des manipulations comparables au traitement des équations numériques. Cela permet de préciser l'observation que nous avons mentionnée dans [1] (annexe 2, p. 203), à l'issue de l'enquête

[1] Démarches de réponse (loc. cit.).

1974, sur la *différence de fonctionnement* entre les équations vectorielles présentées à l'aide de composantes et les mêmes équations faisant intervenir des constructions géométriques.

2°) L'information contenue dans une figure géométrique simple n'est pas directement accessible pour beaucoup d'élèves. Le plus souvent, les propriétés apprises ne sont mobilisables que dans des *situations très typées*. A l'appui de cette affirmation, nous voyons que la perception d'une sous-figure n'est déjà pas une évidence, surtout dès qu'apparaît une quelconque modification. Les propriétés à utiliser ont un caractère trop local : le moindre écart avec les situations de référence constitue un véritable mur entre beaucoup d'élèves et le(s) résultat(s) à mettre en jeu.

3°) Il semble qu'à côté des *connaissances stabilisées*, coexistent au même instant des *connaissances erratiques*. Si l'une de celles-ci est susceptible d'intervenir de manière apparemment décisive, comme l'ultime pièce d'un puzzle, elle est capable de forcer la conviction (au moins pendant un certain temps). Cette interprétation convient très bien à la réponse suivante, que nous donnons à titre d'exemple. Il s'agit d'une réponse LIV.OU, extraite de la catégorie "Voit deux diagonales se coupant au milieu" (cf. tableau en 3.2. ci-dessus) "B milieu de AC car : C est le symétrique de A par rapport à B. Les diagonales DB et EB se rencontrent au point B."



D'autres observations nous laissent à penser que ces connaissances erratiques peuvent éventuellement l'emporter chez un individu sur des démarches correctes. Cependant, toutes les citations — sic ne sont pas de ce type. Ainsi l'exemple ci-dessus fait apparaître une simple paraphrase de l'énoncé, comportant le mot "symétrique" ; pour l'élève, c'est peut-être uniquement l'étalage d'un certain savoir. A propos de la même question LIV.OU., nous avons obtenu un nombre non négligeable de citations de Thalès, qui sont ici hors sujet. Mais, peut se dire un élève, là où il y a du parallélisme, il y a souvent du Thalès ; alors on ne sait jamais...

4°) Une remarque d'un autre genre, quoique prolongeant la précédente, concerne les polémiques, parfois passionnées, sur

l'enseignement de la géométrie. C'est ainsi que l'on a entendu défendre les vertus de telle axiomatique par rapport à telle autre, l'affine avant ou après le métrique, le caractère minimal de telle présentation. Ces débats sont certes intéressants, mais ils ne font pas intervenir les difficultés éprouvées par les élèves, autres que celles sur les contenus. Et de ce fait se crée une distorsion entre les questions sur ces contenus de l'enseignement et les activités des élèves. Indépendamment de :

“Enseignera-t-on le plan affine réel selon la présentation A ou selon la présentation B (circulaire n° 71-370 du 22.11.1971) ?” on peut se demander, dans une réflexion sur les programmes d'enseignement :

“Donnera-t-on aux élèves des occasions de décrire les figures ?”

“Dictera-t-on des figures ?”

“Y aura-t-il des exercices d'extraction, de reconstitution de données ?”

“Mettra-t-on en évidence des invariants par rapport à des modifications ?”.

Lorsque l'on voit combien le recours le plus direct à une transitivité reste difficile pour de nombreux élèves de Troisième (dans la question LIV.OU, $AB = BC$ parce que $AB = DE$ et $DE = BC$), se poser de telles questions n'apparaît pas comme inutile.

5°) La réflexion que nous venons de décrire exige de recueillir des données et de répertorier des éléments. Ceci ne peut résulter que d'un travail spécifique, qui n'était pas le but de ces enquêtes.

La présente analyse ne constitue pour nous qu'une première exploration du vaste domaine de la géométrie plane apprise et utilisée par les élèves. D'une part, notre analyse ne prend pas en compte la totalité des données recueillies ; par exemple, nous n'avons pas parlé ici des résultats concernant les impressions et les opinions des élèves. A suivre.... D'autre part, il faudra envisager de nouvelles enquêtes, plus délimitées que celles-ci, pour préciser non seulement les performances des élèves sur une question ou un groupe de questions, mais aussi la perception individuelle d'une question par rapport aux impressions sur l'apprentissage et l'enseignement antérieurs.

ANNEXE

Les questionnaires présentés aux élèves

Pour mieux vous permettre d'apprécier les variations de questions entre les différentes modalités, les pages suivantes donnent une présentation synoptique des trois modalités du questionnaire. Pour reconstituer les questionnaires effectivement présentés aux élèves, rappelons qu'il y avait

①° Une page 0.

ETABLISSEMENT

NOM

PRENOM

Que ferez-vous l'année prochaine ?

Ce questionnaire ne constitue pas un test d'orientation ou de contrôle, mais une enquête statistique. Votre classe a été choisie comme représentative d'une catégorie d'élèves.

Veillez *ne pas utiliser de brouillon*, mais faites vos essais sur ces feuilles et ne les effacez pas.

N'oubliez pas de *marquer l'heure* en haut des pages, *même si* vous passez à une autre question *sans avoir répondu*.

②° Puis une question par page, dans l'ordre suivant :

Page	1	2	3	4	5	6	7
Modalité A	PYT-PER	THA	AVC	LIV	AHC	AVT	AOE
Modalité B	LIV	CHA	BVT	THA	PYT-PER	BVC	BOE
Modalité C	PLM	CHA	CVT	PYT-PER	CVC	TBC-CTH	COE

Le libellé de chaque question désignée ci-dessus se trouve plus bas.

③° En haut à droite de chacune des pages 1 à 7 :

INDICATION
HORAIRE

Page

commencée à

terminée à

et en bas :

Avez-vous déjà fait en classe un exercice semblable à cette question ?

- Oui, plusieurs fois
- Oui, une fois
- Non

Avez-vous déjà fait en classe des exercices du même genre, mais posés autrement ?

- Souvent
- Rarement
- Jamais

④ Des pages 8 et 9 où l'on demandait aux élèves leur opinion sur les mathématiques.

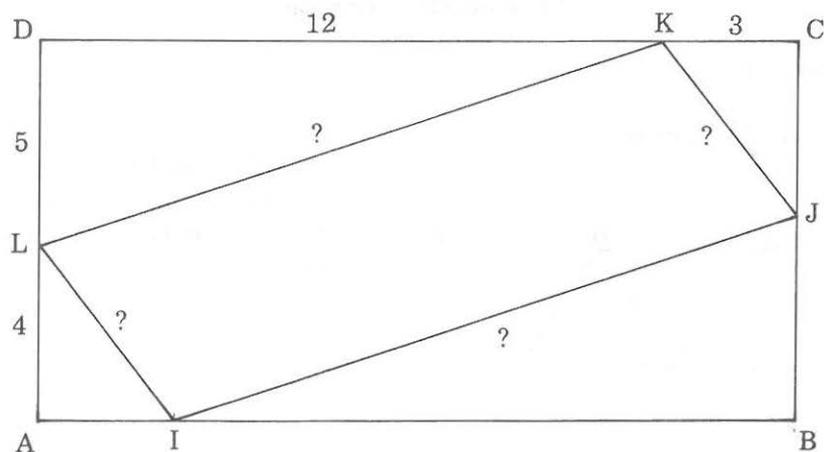
L'exploitation des temps, impressions et opinions des élèves fera l'objet d'une autre épître.

Page

PYThagore — PERimètre

Modalités A, B et C

ABCD est un rectangle, IJKL un parallélogramme.



Des mesures, effectuées avec une certaine unité de longueur, ont donné les valeurs indiquées sur la figure :

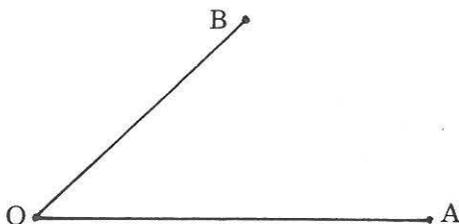
$$AL = 4 \quad , \quad LD = 5 \quad , \quad DK = 12 \quad , \quad KC = 3 \quad .$$

Avec cette même unité de longueur, quelle valeur obtient-on pour le périmètre du parallélogramme IJKL ?

Page

Point LM

Modalité C



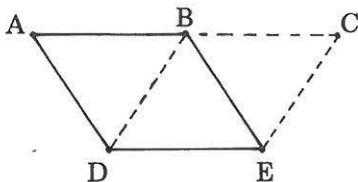
Placer sur la figure le point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2 \overrightarrow{OB}$$

Livre ouvert et chapeau

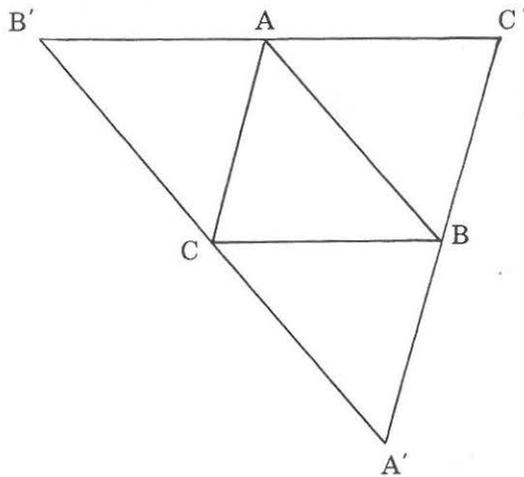
Page LIV

Modalités A et B



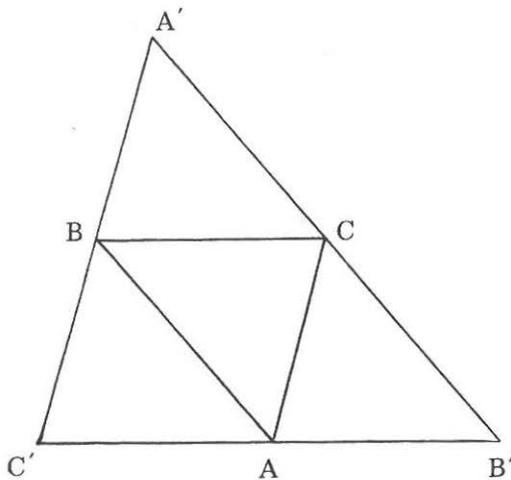
ABED et BCED sont des parallélogrammes. Prouver que B est le milieu de AC.

Modalité A



Page CHApeau

Modalités B et C



$A'C'$ et AC sont parallèles

$A'B'$ et AB sont parallèles

$B'C'$ et BC sont parallèles

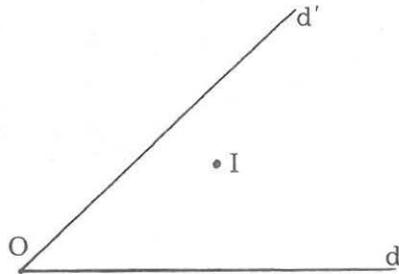
Prouver que A est le milieu de $B'C'$

Page AOE

Modalité A

En numérotant les traits dans l'ordre où vous les tracez, *construisez* sur la figure un parallélogramme tel que :

O est un sommet du parallélogramme, le parallélogramme admet, en plus de O, un sommet A sur d et un sommet B sur d',
I est le milieu des diagonales du parallélogramme.



Expliquez votre construction.

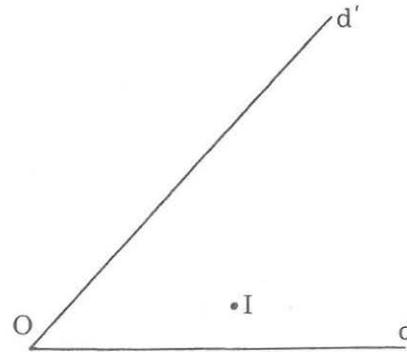
Page BOE

Modalité B

Etant donné un point et deux droites, on cherche à construire, autrement que par tâtonnement, un segment ayant le point pour milieu et ayant ses extrémités sur les deux droites.

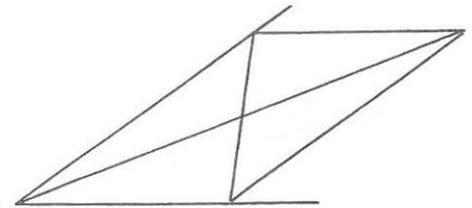
1° Rappelez les propriétés que vous connaissez sur le parallélogramme.

2°



Page COE

Modalité C



La figure ci-dessus pourra vous inspirer.

En numérotant les traits dans l'ordre où vous les tracez, *construisez* sur la figure ci-contre le segment (AB) tel que :

A est un point de d
B est un point de d'
I est milieu de (AB).

Expliquez votre construction.

Vecteurs : Tracé et Composantes

Page AVT en modalité A

Page BVT en modalité B

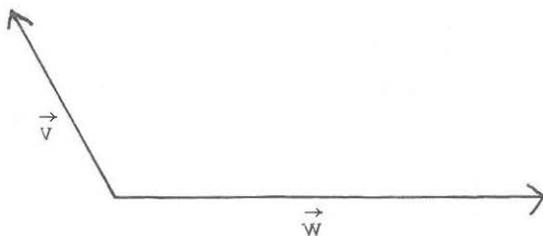
Page CVT en modalité C

Voici deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} du plan; tracer le vecteur \vec{u} tel que

$$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$$

$$\vec{u} = \vec{w} - 2\vec{v}$$



Indiquez aussi comment vous avez procédé pour tracer le vecteur \vec{u} .

Page AVC en modalité A

Page BVC en modalité B

Page CVC en modalité C

Par rapport à un repère \vec{i}, \vec{j} du plan, deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont donnés par leurs composantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Déterminez les composantes du vecteur \vec{u} tel que

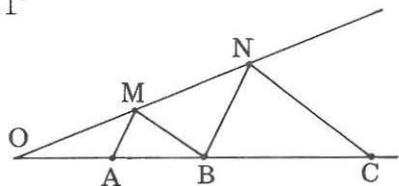
$$3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

$$3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

$$3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$$

Modalité A

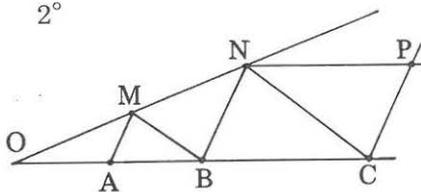
1°



Sur cette figure, les droites AM et BN sont parallèles, de même que les droites BM et CN.

Démontrer l'égalité $\frac{OB}{BC} = \frac{OA}{AB}$

2°



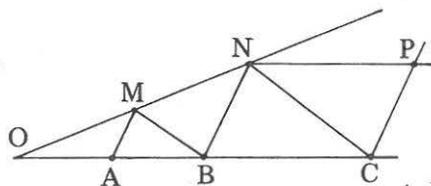
La figure est la même que précédemment avec, en plus, un parallélogramme BCPN.

En utilisant les points marqués sur la figure, et ceux-là seulement.

quelles quantités égales à $\frac{PN}{BO}$ peut-on former ?

Modalité B

1°



Modalité C

Hypothèses :
 $\left\{ \begin{array}{l} AM \parallel BN \parallel CP \\ BM \parallel CN \\ BC \parallel NP \end{array} \right.$

1° Compléter en utilisant des points marqués sur la figure, autres que N et P

$$\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{\dots}$$

2° Démontrer que

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{NP}$$