2 - DE L'EXPERIENCE OPC A LA RECHERCHE SUR PROGRAMMES ET EVALUATION PAR OBJECTIFS

par Régis GRAS, I.R.E.M. de Rennes

Je voudrais esquisser rapidement ici quelles ont été les lignes pédagogiques directrices de l'expérience O.P.C. dont Ch. PEROL a parlé plus haut et l'ouverture sur la notion de programme par objectifs à laquelle elle a naturellement conduit. A l'heure où sont écrites ces lignes, des projets de programme de quatrième et troisième bousculant les programmes actuels fournissent un terrain favorable à la mise en application à court terme des principales options pédagogiques que je décris ci-dessous.

2.1. LIGNES DE FORCE DE L'EXPERIENCE

Soulignons que ces lignes de force ne sont apparues clairement ni avant, ni au début de l'expérience mais plutôt à la suite de différents colloques, à travers confrontations, encouragements, critiques ou réflexions sur l'action. Je reste donc persuadé que la bonne conduite et peut-être la réussite d'une expérience ne tiennent pas nécessairement à une définition trop rigoureuse et précise du plan et des objectifs expérimentaux, mais beaucoup au travail, à la bonne volonté, à la tolérance, à la lucidité, à l'imagination, à l'enthousiasme et au dynamisme des équipes engagées.

La *définition* s'est d'abord dégagée négativement :

- refus d'une axiomatique globale et linéaire comme modèle didactique pour les classes de quatrième et troisième
- refus d'un enseignement essentiellement verbal (voire verbeux), formel et détaché des situations du réel
- refus de la seule prise en compte d'une orientation élitiste vers les classes C.

Tout en visant l'atteinte des contenus globaux imposés par les programmes, les groupes ont précisé des *objectifs généraux* d'une autre nature :

- faire construire à chaque élève les représentations des concepts qu'il juge selon lui les mieux ressenties, les plus appropriables et, par conséquent, les plus opératoires (numérique, analytique, géométrique ou toute situation réelle isomorphe), ceci en vue de lui procurer une meilleure autonomie face aux contenus mathématiques
- donner un sens à ses activités scolaires en multipliant les appuis sur ses motivations, les illustrations et les applications situées hors du champ strictement mathématique
- ensemencer un terrain favorable à l'intuition et au développement de l'esprit scientifique où l'induction retrouve sa place à côté du raisonnement déductif ou hypothético-déductif

$$\text{(hypothèses} \xrightarrow[\text{(théorie)}]{\text{déduction}} \text{conclusion)}$$

Pour mettre en oeuvre ces projets ambitieux, nous avons pratiqué selon des *méthodes*, peaufinées elles aussi avec le temps. Citons les principaux points :

① *Place à une activité véritable de l'enfant* par des manipulations sur matériel, objectivées ou ouvertes, par des constructions graphiques, des enquêtes statistiques, des problèmes de natures et de niveaux très variables, certains mettant en oeuvre une réelle activité intellectuelle. C'est une tentative de mise en pratique des théories Piagétiennes relatives à la vertu des méthodes actives qu'il ne faut pas confondre avec les méthodes perceptives, assez inefficaces, pratiquées souvent pour se donner bonne conscience.

② *L'activité s'exerce en groupe* ; ceci en vue d'échanges interindividuels qui favorisent la socialisation de l'enfant à travers l'organisation d'une tâche collective, dans la tolérance de conceptions différentes et par la mise en place d'une logique s'imposant plus comme impératif moral et social que comme dette à l'autorité du maître. Le groupe fait naître aussi des affrontements et des conflits ouverts qui provoquent avec bonheur les remises en cause et les déséquilibres dans le champ des connaissances, seules sources de progrès dans l'appropriation des concepts. Enfin, l'activité du groupe permet au professeur une meilleure observation de la vie de classe et, en particulier, une détection des modèles implicites, sous-jacents aux comportements des élèves, révélateurs de ces modèles.

③ *L'apprentissage* des notions de quatrième et troisième (et a fortiori des classes antérieures) s'appuie sur une théorie mathématique primitive où les concepts et les termes descriptifs sont surabondants : "milieu" et "distance", par exemple, ne sont pas bannis du vocabulaire et reçoivent, au début de la géométrie de quatrième, le statut technique et opératoire dont les naturels, en particulier, disposent jusqu'à l'Université. Ainsi, plutôt que d'appauvrir les points d'appui, de séparer obstinément affine et métrique et d'avoir la prétention (que le professeur seul apprécie) de construire linéairement un édifice, et de croire que c'est ainsi qu'il se met en place chez l'enfant, nous préférons lui procurer ou lui autoriser des outils lui permettant de résoudre des problèmes ni naïfs, ni triviaux.

④ *Les transformations sont privilégiées* en raison de la dynamique dont elles sous-tendent les concepts plus statiques figurant aux programmes de quatrième et troisième :

Symétrie centrale → parallélogramme

Translation → parallélogramme, bipoint, vecteurs

Symétrie axiale → médiatrice, bissectrice

Homothétie → produit d'un vecteur par un entier, un rationnel

Rotation → angle

En outre, ces transformations, abordées sous deux représentations différentes (nombre et espace) procurent un liant naturel entre ce que l'on continue traditionnellement à séparer en les appelant : algèbre et géométrie. Enfin, ce sont ces transformations qui permettent avantageusement, au niveau de l'appropriation conceptuelle, de dégager des invariants et de faire fonctionner les structures trop souvent simplement construites puis contemplées : structures affine, métrique de la droite et du plan, structure de groupe, etc...

⑤ *Les contenus des programmes* sont intégrés dans des *thèmes*, à support concret, préfigurant une présentation d'un programme en ilôts. Citons, par exemple, certains de ceux qu'a développés l'équipe de Rennes-Vannes dans l'intention de l'apprentissage de quelques contenus :

Lignes et surfaces → incidence, orthogonalité

Ombres → projection → Thalès ; graphiques, abaques

Equilibre autour d'un point →	parallélogramme moyenne symétrisation d'ensembles (Z, puissances de 10, $\mathbb{Q}$)
Glissement →	bipoints, vecteurs quelques fonctions numériques
Tableaux statistique (enquêtes) →	données ⟶ tableaux ⟶ graphiques extrapolation
Appareils gradués →	graduations décimaux
Pliage →	médiatrice, bissectrice quelques fonctions numériques

etc.

On trouvera en annexe le développement intégral d'un thème tel qu'il a été pratiqué en classes expérimentales.

6 Chaque thème fait apparaître les concepts sous différentes *formes signifiantes ou représentatives* et à *plusieurs niveaux d'activités* (1).

a) *Lors d'une première étape*, les élèves "bricolent", manipulent, recueillent des informations, formulent des premières hypothèses relativement aux algorithmes de construction qui modélisent l'action de l'outil manipulé, soumettent par des simulations et des prévisions ces hypothèses à des confrontations effectives avec le réel. Les élèves conçoivent ici leurs premiers théorèmes en acte selon un modèle implicite : par exemple, pour construire l'image d'un polygone par une symétrie orthogonale, on constate qu'il suffit de chercher l'image des sommets et de joindre... Pas de théorie ! Les interrelations que l'enfant a ici avec son milieu (professeur, camarade, appareillage,

(1) Trois films super 8 élaborés à l'I.R.E.M. de Rennes par l'équipe OPC locale illustrent ce dernier point.

objets divers) sont dénommées par G. Brousseau *dialectique de l'action*. Les apprentissages sensori-moteurs acquis ici sont avantageusement réinvestis dans les activités plus mentales vécues ultérieurement.

b) Lors de la 2ème étape, l'élève fait fonctionner les algorithmes de construction graphique ou numérique précédemment conçus et se montre capable d'exprimer ses actes au moyen d'images ou du verbe (*dialectique de la formulation* selon G. Brousseau). Ces constructions se substituent à l'exécution faite par l'outil dans la phase initiale. Elles servent également de terrain d'apprentissage au dessin et à l'organisation de calculs où soin et minutie s'imposent ou sont exigibles naturellement.

c) Enfin, dans une 3ème étape, l'élève opère au niveau du modèle mathématique ou tout au moins il *valide*, à travers le modèle, ses actions antérieures. Cette activité est plus élevée dans la hiérarchie des démarches intellectuelles : en particulier, l'enfant est susceptible ici d'effectuer des opérations sur les opérations (raisonner à la 2ème puissance, dirait Piaget) à l'aide du langage formel dont il est maintenant muni. Par exemple, il validera un théorème en acte antérieur : "un triangle isocèle (AB = AC) est globalement invariant dans la symétrie d'axe la bissectrice issue du sommet A", ou bien prouvera que la composée d'un nombre pair de symétries centrales est une translation.

Bien entendu, ces trois types d'activités ne sont pas toujours séparés dans les actions et la pensée de l'enfant : mais nous voulons qu'un temps soit accordé dans chaque thème à chacune de ces étapes afin que tout enfant vive sa propre aventure, construise ses propres schémas conceptuels en disposant des homomorphismes de passage de l'un à l'autre, et enrichisse à son gré sa propre préparation à des orientations ultérieures très différentes.

2.2. POUR UNE PEDAGOGIE PAR OBJECTIFS

La tradition enseignante, fortement entretenue par la majorité du corps administratif, garant du système éducatif, veut que les contenus de l'enseignement soient la substance des programmes et que la méthodologie didactique se dégage des seuls objectifs de savoir. Nous venons de voir quelle est notre position au sujet de la méthodologie. Mais il manque un élément structurant la mission qui nous est confiée et qui donne un sens au "comment enseigner" : c'est le "pourquoi enseigner". Des points de vue et des propositions à ce sujet sont présentés, entre autres, dans "Pour une pédagogie par objectifs" (GREPPO — IREM d'Orléans) et dans "Vers une pédagogie par objectifs" (R. GRAS — IREM de Rennes). Aussi, je ne développerai pas ici les types de réponse apportés à la question mais en indiquerai seulement les grandes lignes, en communiquant les principales réflexions des équipes O.P.C..

2.1. *Nécessité de définition des finalités et objectifs généraux*

Sans entrer dans des considérations philosophiques qui auraient peu de chances de se concrétiser au niveau de la classe, nous distinguons trois finalités éducatives à court et moyen termes, attribuables à notre discipline :

1 - Préparation à une insertion à la vie quotidienne, sociale et professionnelle
2 - Préparation à une poursuite éventuelle des études techniques ou générales
3 - Formation humaniste

Ces finalités dans leur réalisation subissent des distorsions plus ou moins importantes du fait de certains facteurs comme la conjoncture, les idéologies de la société et de la famille, les motivations des enseignés, des enseignants, etc... Il s'en dégage néanmoins trois classes d'objectifs généraux qu'il est nécessaire de définir, préciser et prendre en compte dans notre action quotidienne :

- objectifs cognitifs
- objectifs affectifs
- objectifs psycho-moteurs

Les premiers traduisent les niveaux d'appropriation et de mise en disponibilité des connaissances : par exemple les capacités à analyser, à transposer, à structurer, à créer des exemples, des contre-exemples, etc... Les seconds touchent l'affectivité propre de l'élève (prendre intérêt à la recherche, à la rigueur, se poser des questions, avoir une attitude scientifique et humaine face à un problème concret, s'épanouir, etc...) ou bien son socio-comportement (échanger et produire collectivement, convaincre, admettre, tolérer, etc...). Les derniers décèlent la part éducative accordée à l'action dont nous avons parlé plus haut : vivre en acte des aventures mathématiques, simuler une action, la contrôler, etc...

2.2. *Opérationalisation de ces objectifs*

Nous avons dégagé des classes de verbes d'action (physique ou mentale) nous semblant rendre opérationalisables ces objectifs qui risqueraient sans eux de demeurer des voeux pieux, typiques d'instructions très moralisatrices, mais ne passant pas dans les faits.

Ces classes sont définies par un mot dont nous précisons le sens ici :

1 - *Heuristique* : recouvre tout ce qui est lié aux séquences de recherche, à vocation de découverte par l'élève.

2 - *Traductif* : recouvre les activités de passage d'un langage dans un autre langage (langue maternelle formalisée, dessin, tableau, graphique, etc...)

3 - *Classificatoire* : recouvre les activités de classement selon un critère, activités supposant éventuellement une perte d'information en faveur d'une identification classifiante.

4 - *Calculatoire* : recouvre toutes les activités algorithmiques, portant essentiellement, en premier cycle, sur les nombres, ce qui ne sera pas toujours le cas ultérieurement.

5 - *Logique* : recouvre les activités de type hypothético-déductif. Le développement des qualités de raisonnement y est visé.

6 - *Technique* : recouvre les activités où soin, minutie, précision, persévérance sont fortement sollicités.

7 - *Transfert* : recouvre toutes les activités dites d'application où les champs de représentation sont différents : on y passe, en général, d'un modèle au réel où l'on utilise les résultats établis dans le modèle.

8 - *Critique* : recouvre les activités où s'exercent l'esprit critique, la comparaison d'un résultat par rapport à un référentiel connu ou présumé.

9 - *Prédictif* : recouvre enfin les activités tournées vers l'extérieur du champ perçu et prospecté, activités qui mettent en oeuvre les facultés inductives de l'"apprenant".

Le tableau qui suit indique certains des verbes d'action satisfaisant ces objectifs :

Classes d'objectifs opérationalisables	1 Heuristique	2 Traductif	3 Classificatoire	4 Calculatoire
Verbes d'action permettant l'opération-alisation	.bricoler .chercher .inventer .créer .émettre des hypothèses	.observer et choisir .analyser .schématiser .représenter .décrire .modéliser .transposer	.organiser classifier .discerner .ordonner .analyser .synthétiser .identifier	.dénombrer .calculer .appliquer un algorithme

5 Logique	6 Technique	7 Transfert	8 Critique	9 Prédictif
.prouver .convaincre .rédiger (pour être lu) .tolérer .déduire .résoudre des problèmes	.soigner la présentation d'un dessin ou d'un calcul .se montrer précis, minutieux, méticuleux .se montrer persévérant et organisé	.appliquer .construire un exemple, un modèle .illustrer .faire fonctionner	.contrôler interpréter .évaluer .maîtriser la vraisemblance .critiquer (contre-exemple) .remettre en question .valider invalider .optimiser	.estimer (approximativement) .induire .prévoir .conjecturer

Dans le cadre de la recherche O.P.C. nous élaborons progressivement une grille qui, à titre d'exemple, essaie de tenir le pari de satisfaire simultanément les objectifs de contenus et les objectifs cités ci-dessus. Bien entendu, tout éventuel usager donnera le sens et la matière qui lui conviennent à l'activité proposée succinctement à l'intersection ligne-thème et colonne-objectif. Libre au lecteur de substituer, aux thèmes cités ici, d'autres thèmes plus conformes à ses voeux, à son tempérament ou aux aspirations de la classe. Nous décrivons plus loin comment un de ces thèmes (Papiers peints) a trouvé sa place dans des classes diverses de sixième, cinquième et troisième.

Objectifs pédagogiques / Thèmes (Situations)	HEURISTIQUE	TRADUCTIF	CLASSIFICATOIRE	CALCULATOIRE et TECHNIQUE	LOGIQUE
Enigmes policières Master-Mind		Choix des informations	Ordonner les informations		Déduction Preuve
Circuits électriques	Bricolage Invention de circuits	Schéma (codage)	Recherche de montages équivalents	Calcul booléen	Activités sur une algèbre booléenne
Factures et crédits	Trouver l'algorithme d'élaboration	Analyse de factures données ; élaboration		Vérification de calculs. Application d'algorithmes	
Jeu du "Compte est bon"	Recherche et création de problèmes	Organigramme		Calcul mental	
Ombres	Recherche de la loi. Recherche du rôle du plan de projection	Observer et schématiser	Classement des types d'ombres	Dessin en perspective cavalière	
Enquêtes statistiques	Recueil et premier ordonnancement des informations	Report des données	Inventaire et répartition des tâches. Relevé de données	Dénombrement	
Tableaux et traitement des données numériques		Analyse : tableaux graphiques, schémas divers	Classement selon critères divers	Dégager des paramètres ; construire des indices	Choix opportun d'indices
Le cube	Développement Squelette Intersections par des figures diverses	Paramètres spatiaux (sommets, faces, arêtes, représentations diverses)	Relations diverses (entre arêtes et faces ; coloriages possibles) Classement des solides par leurs patrons	Mesurages divers Combinatoire des paramètres	Cheminement sur un treillis booléen

REINVESTISSEMENT (Transfert)	CRITIQUE	PREDICTIF	SATISFACTION DES OBJECTIFS ACTUELS EN MATHEMATIQUES 1er CYCLE			
			6è	5è	4è	3è
			Approche des règles de logique			
			Approche des règles de logique (distributivité en particulier)			
	Critique d'un devis. Recherche optimale	Prévoir des mensualités de crédit	Proportionnalité (ou non). Pourcentages (exemples - contre-exemples)		Fonctions polynômes (taux d'intérêt approché)	Fonctions linéaires et affines
	Optimiser l'algorithme		Usage des parenthèses			
Reconstitution d'une figure initiale			Approche globale des transformations ponctuelles non bijectives concernant ou non les formes		Projections. Proportionnalité. Rapport de projection. Thalès (toutes propriétés affines et projectives)	
Simulations	Validité des sondages	Sondage Prévision de phénomènes	Introduction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{D}$ Pourcentages		Graphiques	
	Rejet de résultats aberrants. Interprétation des résultats Critique des indices	Dégager des tendances. Prolonger Induire	Proportionnalité ; moyenne. Approche de la notion de distance	Approche du barycentre	Barycentre Vecteurs (non géométriques)	Distance
Construction du treillis des diviseurs Lecture de plans	Reconnaissance des patrons absurdes	Extension à la connaissance de l'espace ambiant (ou "surambiant")	Exercices d'observation et de mesure sur des objets géométriques. Pavage de figures élémentaires	Parallélisme Orthogonalité. Ensemble des diviseurs	Axiomes d'incidence	Eléments de symétrie

Mailles et réseaux	A clouter sur la planche à trous. Utilisation du papier quadrillé	Quadrilatères "téléphonés" Repérage par point ou par case Codage de déplacement	Classification des quadrilatères Classification points ou cases selon la direction Recherche de formes de mailles pour engendrer un réseau Du parallélogramme au classement des bipoints	Mesurages divers (pavages carrés par ex.) Aire d'une figure par la formule de PICK Dénombrement sur décomposition et recomposition de mailles à partir de mailles éléments	
Tables	Une table étant donnée, recherche de la loi	A partir d'un ensemble de données construire une table. Lecture d'abaques Construction d'un graphique à partir d'une table	Recherche de propriétés communes à plusieurs tables	Ayant une loi construction d'une table Interpolation (calculs) Produits matriciels	
Papiers peints	Recherche du motif minimal Recherche des instruments	Codage et expression des déplacements Modélisation par choix des paramètres	Classification des papiers peints suivant les isométries qu'on y trouve	(ex. raccords sautés, calcul de nombre de rouleaux, tricot Jacquard)	Application des lois découvertes. Règles d'utilisation des instruments
Calendriers	Recherche du jour de la semaine où tombe une date donnée	Traduire les observations par des tableaux de correspondance ex. : le 1er janvier tombe un mercredi, combien de fêtes tomberaient un week-end	Recherche de loi de périodicité (penser au calendrier des marées)	Appliquer les algorithmes découverts	Explication des procédés de calcul
Polyminos	Découvertes des formes	Codages des formes	Classement des dessins selon les formes représentées	Dénombrement Aires	Prouver qu'on peut (ou non) reconstituer un carré, un rectangle de dimensions données

Messages "bélinographiques" Génération de réseaux à mailles quelconques topologiquement équivalents, aux mailles données	Comptabilité de mailles avec générateurs de réseaux	Passage du plan quadrillé au plan affine Passage du quadrillage au plan vectoriel	Quadrilatères divers	Déplacement sur quadrillages	Plan repéré Bipoints équivalents Vecteurs	Equations de droites. Inéquations Représentation des solutions
Superposition et composition de tables. Construction d'abaques	Détection d'erreurs et calculs approximatifs	Extrapolation Interpolation	Propriétés des opérations et des relations	$(\mathbb{Z},+)$	Groupes finis	Tables Trigo
Reconnaître des transformations dans des domaines différents (dynamiques) Translation Phénomènes périodiques	Des règles étant données critique de leur application	Prolongement d'un papier fabrication d'un papier	Composition de transformation - lois de composition - codage Transports de dessins Repérage		Translation Symétrie - point	Isométrie Groupe Symétrie orthogonale. Phénomènes périodiques Pavage du plan
Etude d'autres calendriers. Phénomènes astronomiques périodiques	Comparaison des différentes méthodes de calcul ; critique de choix de calendriers	Choix d'un système de fêtes légales qui optimiserait les congés. Problème d'étalement des vacances	Opérations	Divisibilité p p m c (compatibilité de congés)	Changement de graduation	
Poser et résoudre des questions analogues à partir de figures élémentaires différentes	Comparaison de méthodes de construction exhaustivité	Quelles questions peut-on se poser à propos de l'ensemble des polynômes?	Aires, relations Aire-périmètre, Nombre de carrés Nombre de formes	Démonstration par contreexemples		

Equilibres	Manipulation : balances Roberval, romaine ; didagraphes. Bilans - Alliages	Détermination graphique de barycentres Représentation de droites et hyperboles Coordonnées barycentriques	Recherche d'ensembles munis d'une loi interne et d'un invariant (centre d'équilibre)	Dégager la loi Appliquer l'algorithme Calculs de moyenne pondérée	Notion de vraisemblance
Calculateurs	Boîte noire (manipulation de la machine) Familiarisation avec des propriétés numériques Investigations	Organigrammes Programmes	Fonctions directes, réciproques	Tabulation d'une fonction Utilisation exhaustive de la machine	Construction d'organigramme Recherche d'erreurs Notion de boucle et test
Transformations de formes et de figures	Manipulation Observation des figures obtenues par source lumineuse ou appareils à transformer (didagraphes, appareil photo, miroirs) Perspectives Modèle réduit	Passage de l'analytique au graphique : plan, cartes / échelles dessin technique	Classement des transformations par leurs propriétés (invariant, linéarité, ordre, distance, angles, frontière) et des formes	Usage de l'algorithme de construction	
Agrandissement Réduction	Maquette Appareil photo Cartes Compas de réduction	Schématisation en "un plan"	Classification des homothéties et affinités	Echelle donnée recherche d'images Calcul d'échelles	Choix opportun d'une échelle

<table>
<tr><td>Faire opérer la loi "moment" sur des phénomènes réels
Pont de Wheat-stone</td><td>Vraisemblance des résultats</td><td>Interpolation
Extrapolation</td><td>Associativité. Distributivité. Proportionnalité</td><td>Décomposition en facteurs entiers (pb: $xy=A$)</td><td colspan="2">Equations-Inequations
Fonction affine
Puissances de 10 ($xy=1$
Symétrie centrale -
Milieu - Barycentre -
Parallélogramme -
Figures admettant un centre de symétrie</td></tr>
<tr><td>Organisation et traitement des données
Tables traçantes</td><td>Maîtrise des limites de la machine (arrondis)
Contrôle d'un programme
Optimisation d'un programme</td><td>Investigations (conjectures)
Recherche d'aires par des méthodes aléatoires</td><td colspan="2">Calcul mental dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$
Opérations - Usage des parenthèses
Simplifications d'écriture</td><td>Variables et constantes
Encadrement
Différentes écritures d'un nombre (virgule fixe ou flottante)</td><td>Résolution d'une équation par le schéma de Hörner
Fonctions trigonométriques</td></tr>
<tr><td>Etant donné 2 figures, recherche d'une transformation les échangeant</td><td>Fourniture de contreexemples relatifs aux propriétés des transformations géométriques
Reconstitution d'un concept à l'aide d'une de ses représentations (fidélité de certaines transformations)
Fidélité des sondages</td><td>Prévision de forme et figures quand on connaît des éléments de leurs transformés</td><td colspan="2">Transformations sur quadrillages
Bijections</td><td colspan="2">Toutes transformations planes :
. symétries
. translation
. homothétie
. affinité
. inversion</td></tr>
<tr><td>Diverses situations intervienent des facteurs multiplicatifs</td><td>Facteurs additifs et multiplicatifs
Fidélité d'une représentation par rapport à son objet</td><td>Sondage. Inférence statistique</td><td colspan="2">Echelles - Proportionnalité
Multiples, diviseurs</td><td colspan="2">Produit d'un vecteur par un scalaire
Applications affines et linéaires
Propriétés de Thalès
Homothétie - trigonométrie</td></tr>
</table>

2.3. POUR UNE EVALUATION PAR OBJECTIFS

2.3.1. *Nécessité oblige.*

Il est évident maintenant qu'une évaluation traditionnelle, déjà défectueuse dans le système actuel, n'a plus sa place dans le cadre d'un programme par objectifs où elle n'assumerait qu'une fonction étroite de mesure d'un acquis de savoir. Se limiter en effet à ne prendre en compte que les seules capacités de régurgitation de contenus, et de procédés ou d'automatismes pour les appréhender, a le double défaut de n'évaluer qu'une partie des acquisitions de l'élève et d'infléchir le comportement du maître à une mise en conditionnement question-type-réponse (tout au moins à l'approche des épreuves évaluatives).

Appauvrir l'instrument de mesure revient à notre avis à appauvrir l'acte éducatif lui-même. Il y a donc lieu de redéfinir sa fonction et sa forme. Il est bien clair que nous chercherons et dans sa fonction diagnostique (repérer les obstacles par exemple) et dans sa fonction sélective ou partitive à intégrer l'évaluation des objectifs visés. Que certains d'entre eux soient difficielement évaluables, sinon inévaluables, ne doit pas être un alibi pour ne pas tenter de les apprécier.

Nous travaillons actuellement à la construction d'un questionnaire cherchant à cerner les phénomènes affectifs et l'atteinte des objectifs dans ce domaine. Sur le plan cognitif, les groupes O.P.C. ont élaboré des exercices qui, utilisant peu ou prou la typologie de l'IREM de Strasbourg (1) et la typologie précédente, ont pour ambition de mesurer la satisfaction de chacune des 9 classes d'objectifs décrites précédemment. Ils s'efforcent, dans la forme, de mieux préciser ce que le correcteur (ou l'auto-correcteur) peut attendre de telle ou telle question, éclairant ainsi le contrat évaluateur-évalué. Ils s'efforcent aussi de limiter et homogénéiser les objectifs de tel problème et, selon cette ligne, dans le cadre en particulier d'un examen comme le BEPC, de rendre indépendants plusieurs petits exercices où numérique et géométrique peuvent s'associer.

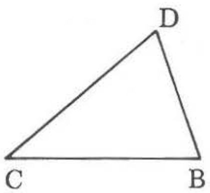
Par exemple, l'un d'entre eux aura pour mission de mesurer la capacité d'effectuer un raisonnement, un autre de mesurer la capacité à transposer une situation d'un langage dans un autre (tableau ⟷ graphique) ou bien celle d'effectuer un calcul précis

(1) Cf. "Pédagogie de l'exercice et du problème". Tome I CEDIC

où soin et méthode seront appréciés, un autre de mesurer la capacité à créer un exemple personnel satisfaisant à des données imposées ou illustrant une situation ou bien de mathématiser et résoudre un problème du champ réel, etc.... Nous fournissons ci-dessous à titre d'exemples 3 textes niveau BEPC et quelques sujets d'exercices aux fonctions plus précises et moins appauvries semble-t-il qu'à l'ordinaire.

2.3.2. *Première proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. RENNES-VANNES*

I - D, B et C sont trois points donnés. Toutes les constructions demandées sont à faire avec soin. Il en sera tenu compte lors de la correction.



1°) Construis (en noir) l'image du triangle DBC par la symétrie de centre C.

2°) Construis (en noir) l'image du triangle DBC par la symétrie par rapport à (BC).

3°) Construis (au crayon gris) l'image D'B'C' du triangle DBC par la symétrie par rapport à la médiatrice de [BC].

4°) Construis (en noir) l'image du triangle D'B'C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

II - Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, place les points :

A(11, 13) B(−4, 13) C(−4, −7) M(8, 4)

1°) Calcule les distances AB ; BC ; AC.

2°) Détermine et place les points A', B' et C' tels que :

$\overrightarrow{MA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{MC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

3°) Calcule les distances A'B' ; B'C' ; A'C'.
Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Pouvais-tu le prévoir dès la 2ème question ? Pourquoi ?

III - Pour une vente-réclame, un magasin de disques donne une grande photo de chanteur à tout client achetant un disque 33 t. à 50 F ou pour l'achat d'un paquet de six disques 45 t. à 60 F le paquet. Un groupe de jeunes se propose

d'acheter des disques pour leur foyer pour un montant ne pouvant excéder 360 F.
Quelles sont les solutions possibles pour obtenir six photos ? Combien au maximum ces jeunes peuvent-ils obtenir de photos ?

IV - ABC est un triangle rectangle en B.

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

P est le point tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; I est le milieu de [BP].

1°) Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

2°) Montrer que (MI) est la médiatrice de [BP].

3°) M′ est le symétrique de M par rapport à (BC). Le cercle de centre M′ et de rayon M′B coupe (AB) en N.
Démontrer que P, M′ et N sont alignés.

Notes pour les professeurs

Relativement à la classification de l'exercice et du problème,

l'exercice I est une *tâche technique* demandant surtout du soin et de la méthode

l'exercice II est un *exercice didactique* mesurant l'acquisition de mécanismes

l'exercice III est un *exercice d'application* demandant une reconnaissance du modèle

l'exercice IV est un *problème* où l'on attend une démonstration rigoureuse de la part des enfants.

2ème proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. RENNES-VANNES

I - On donne $f(x) = x^2 + 6x + 5$; on cherche à factoriser f(x).

1°) Complète $A(x) = x^2 + 6x + ...$ pour que cette expression soit le carré B^2 d'un binôme du 1er degré B.

2°) Quel entier faut-il ajouter à B^2 pour obtenir f(x) ?

3°) Factorise f(x) en pensant à la forme obtenue à la question 2.

II - On donne $A(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 2x + 10$.

Calcule $A(\frac{1}{2})$ et $A(\sqrt{3})$.

III. Le but de cet exercice n'est pas de justifier les réponses données, mais de fournir les réponses convenables, au besoin en tâtonnant.

a) Dessine un triangle ABC tel que [AB] mesure 3 cm et que [AC] mesure 4 cm. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b) Peux-tu construire un triangle ABC tel que [AB] mesure 3 cm, [AC] mesure 4 cm et [BC] mesure 8 cm ?

c) Choisis toi-même plusieurs valeurs pour la mesure de [BC] et essaie chaque fois de construire le triangle. Est-ce toujours possible ? Dans quel intervalle la mesure de [BC] doit-elle être comprise pour que la construction soit possible ?

IV - Le but de cet exercice est de trouver et de rédiger une démonstration.
ABC est un triangle rectangle en A.
A' est le symétrique de A par rapport à (BC).
B' est le symétrique de B par rapport à (AA').
$(A'B') \cap (AC) = \{K\}$

1°) Démontre que les quatre points A, B, A' et C sont sur un même cercle.

2°) Quelle est la nature du triangle AA'K ? Justifie ta réponse.

3°) Donne une condition sur l'angle $\widehat{BAA'}$ pour que B' soit au milieu de [BC] .

Note pour les professeurs

Relativement à la classification de l'exercice et du problème :

l'exercice I est un *exercice didactique* mesurant l'acquisition de mécanismes

l'exercice II est une *tâche technique* demandant surtout du soin et de la méthode

l'exercice III est une *manipulation*, c'est-à-dire qu'elle correspond à la redécouverte en acte d'un théorème l'exercice IV est un *problème* qui comporte un enchaînement de raisonnements mais où les démonstrations ne se réduisent pas à des calculs numériques ou algébriques.

3ème proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. CAEN

A — Exercice didactique.

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$

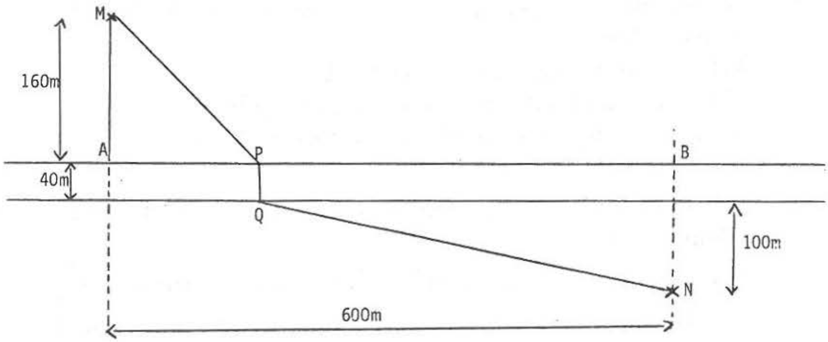
1°) $f(x)$ est-il le carré d'un binome du 1er degré ? Justifier.

2°) Déterminer m pour que $x^2 - 6x + m$ soit le carré d'un binome du 1er degré.

3°) En remarquant que $5 = m - b$, trouver b et factoriser $f(x)$.

4°) De même factoriser $4x^2 - 20x + 16$.

B — Exercice d'application + tâche technique



Une route doit passer impérativement par les points M et N, de part et d'autre d'une voie ferrée que doit enjamber un pont de 40 m. Ce pont doit être perpendiculaire à l'axe de la voie ferrée. On se propose de trouver entre A et B l'emplacement du pont afin que la route formée de 2 tronçons rectilignes et du pont soit la plus courte possible. (On exprimera les distances en décamètres).

a) P étant entre A et B, on note x la distance entre A et P. Exprimer, en fonction de x, les distances $d(M, P)$, $d(Q, N)$.
Soit $f(x) = d(M, P) + d(P, Q) + d(Q, N)$.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

b) Calculer f(x) pour les valeurs de x comprises entre 0 et 60 (dam) qui sont multiples de 5.
Faire une représentation graphique (utiliser la table de carrés).

c) Quelle valeur de x faut-il choisir pour que la distance entre M et N soit la plus courte possible ?

C — **Problème**

Soit un parallélogramme (A, B, C, D). Une droite issue de D coupe (AC) en M et coupe la parallèle à (AC) menée par B en N.

Construire la figure et démontrer que M est le milieu de (D, N).

2.3.3. *Sujets divers classés*

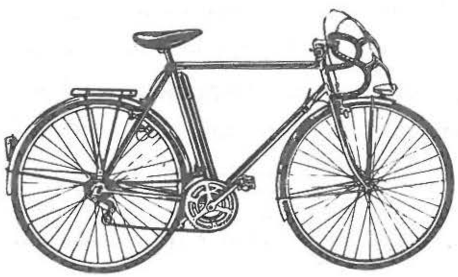
I — **Application**

Le double plateau est la double roue dentée solidaire des pédales. La roue libre est la roue dentée liée à la roue arrière. La chaîne relie l'un des plateaux du pédalier à l'un des pignons dentés de la roue libre.

Chaque dent d'un plateau engrène une maille de la chaîne qui dans le même temps engrène une dent du pignon.

On admettra dans tout le problème que le vélo s'arrête dès que l'on cesse de pédaler.

700 est la mesure du diamètre (en mm).



BICYCLETTE GRAND SPORT 10 VITESSES

DEMI-COURSE - Fourche 1/2 chromée - Pneus 700 C sport - Garde-boue **Uginox** - Moyeux **Normandy** grandes joues - Disque protège-rayons - Freins 1/2 course **Racer** dural tirage central - Guidon course potence dural luxe - Selle course luxe matelassée - Pédales 1/2 course manivelles 3 branches - Double plateaux 45/50 dents - Roue libre 14, 16, 19, 22, 26 dents - Porte-bagages arrière sport chromé - Timbre - Pompe - Sacoche de selle avec outillage - Entrejambe 78 à 85 cm - Coloris ARGENT - Poids 14,4 kg.

1°) Si la chaîne relie le plateau 45 dents au pignon 22 dents (le cycliste utilise alors le rapport 45/22) et si on fait 1 tour de pédale, quel est le nombre de tours de roue ?

2°) Quelle est alors la distance parcourue par la bicyclette (cette distance est le développement). Pour ce calcul prendre 22/7 pour valeur approchée de π .

3°) Quel est le développement de cette bicyclette pour chacun des 10 rapports ?

(*Proposé par l'équipe OPC — Limoges*)

II — Manipulation

① On se pose la question : deux rectangles qui ont même aire ont-ils le même périmètre ?

1) On considère tous les rectangles dont les mesures des côtés, exprimées en cm, sont *deux naturels* l_1 et l_2, et dont l'aire est 16 cm^2 .

a) Compléter le tableau suivant, en envisageant tous les cas possibles.

l_1	l_2	Périmètre du rectangle exprimé en cm $[2(l_1 + l_2)]$

b) Le périmètre est-il le même pour tous les rectangles ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond le plus petit périmètre ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond le plus grand périmètre ?

2) Même dernière question si l'aire des rectangles est 36 cm^2.

3) Même dernière question si l'aire des rectangles est 12 cm^2.

4) Deux rectangles ont la même aire. L'un d'eux est un carré. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ? Avez-vous une intuition de la réponse ?

② On étudie maintenant un *ensemble de rectangles ayant le même périmètre.*

On considère tous les rectangles dont le périmètre est 12 cm et dont les mesures des côtés, exprimées en cm, sont *deux naturels* l_1 et l_2 .

1) Compléter le tableau suivant en envisageant tous les cas possibles :

l_1	l_2	Aire du rectangle exprimée en cm^2 $[l_1 \times l_2]$

2) A quels couples (l_1, l_2) correspond la plus petite aire ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond la plus grande aire ?

(Textes proposés par l'équipe OPC — Limoges)

③ Tu disposes des instruments suivants :

règle graduée, rapporteur, compas.

Tu dessines dans un plan où il y a déjà une demi-droite fixe Ox, d'origine O.

Nous considérerons des nombres *naturels* t .

A chaque entier nous ferons correspondre un (et un seul) point M. Il s'agira de placer les points M de la façon la meilleure possible pour suivre, en lisant la figure, l'influence de la variation de t . Ceci, à partir des règles du I ci-dessous.

I Nous avons $0 \leqslant t \leqslant 6$

M est défini par $\left| \begin{array}{l} OM = \frac{1}{2} t \text{ (unité = cm)} \\ \text{En degrés, } \widehat{M0x} = 30\, t. \end{array} \right.$

1°) Place M pour t = 5.

2°) Place M pour chacune des autres valeurs possibles de t.

II Continue ton dessin pour $t > 6$. [Pour cela, change, le moins possible, la définition précédente de M]. Indique brièvement comment tu pourrais le poursuivre indéfiniment.

III Mêmes consignes, pour $t < 0$.

IV Parle-nous un peu de ton dessin ...

(Proposé par l'équipe OPC — Toulouse)

④ On donne un point A du plan.

a) Construire un parallélogramme (A, B, C, D) tel que $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm.

b) Il y a tout un ensemble de parallélogrammes répondant à la question ;

— dans quel sous-ensemble du plan se trouve nécessairement le point C ?

— dans quel sous-ensemble du plan se trouve nécessairement le centre 0 du parallélogramme ? Fais un dessin.

c) Peux-tu (en faisant éventuellement des tâtonnements) trouver un sous-ensemble du plan dans lequel se trouvent nécessairement B et D ?

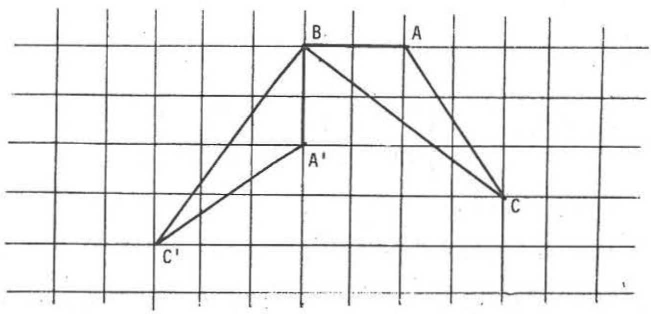
Hachure cet ensemble sur le dessin.

Dans quel sous-ensemble du plan se trouvent nécessairement B et D si (A,B,C,D) est un *losange* ?

(Proposé par l'équipe OPC RENNES-VANNES)

⑤ Trouve une isométrie qui, précédée de la symétrie d'axe (BC), transforme le triangle ABC en le triangle A′ B C′ .

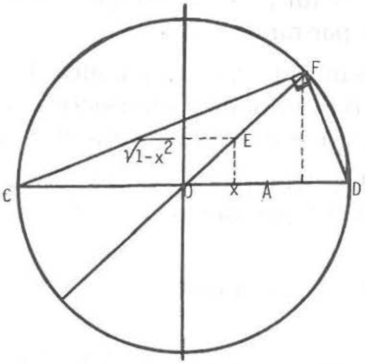
Donne toutes indications utiles sur le dessin et en particulier la figure intermédiaire.



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

III — Problèmes

1



Soit un plan (euclidien) rapporté à un repère orthonormé.
Soit A (1;0) et $E(x,\sqrt{1-x^2})$ où x est un réel compris entre -1 et 1.

1°) Choisis une valeur numérique non entière de x. Dessine le point E correspondant.

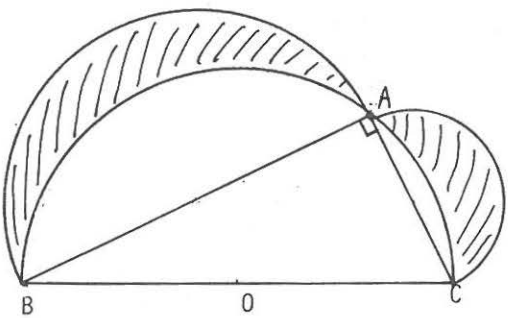
2°) Soit C($-$ 2 ; 0) et D(2 ; 0).

Explique comment tu construis, avec règle et compas, un point F tel que $\left|\begin{array}{l} F \in (OE) \\ (CF) \perp (FD) \end{array}\right.$

3°) Comment choisir x, entier ou non, pour que l'aire du triangle CFD soit maximum. (RAPPEL : aire du triangle $= \frac{1}{2}$(mesure d'un côté $\times$ mesure de hauteur correspondante).

(Proposé par l'équipe OPC — TOULOUSE)

2 ABC est un triangle rectangle. On trace les demi-cercles de diamètres [BC], [AB], [AC].
Y a-t-il une relation entre l'aire hachurée et celle du triangle ABC ?



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

③ Soient un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ et un point A tel que $d(O, A) < r$. A′ est le symétrique de A par rapport à O.

Soient D une droite passant par A et sa parallèle D′ passant par A′. On appelle B et B′ les points d'intersection respectifs de D et D′ avec le cercle, situés d'un même côté de (AA′).

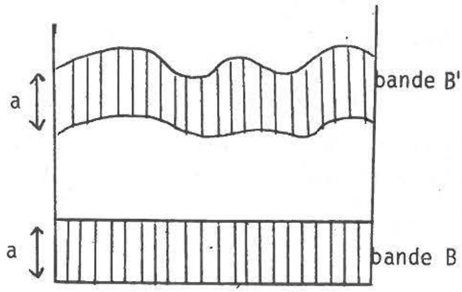
1) I est le milieu de [BB′]. Que penses-tu des directions des droites (OI), (AB) et (A′B′) par rapport à celle de (BB′) ? Prouve ton affirmation.

2) E est le symétrique de A par rapport à B. Calcule $d(E,A')$ en fonction de r.

(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

---

④ Les bandes B et B′ ont-elles les mêmes aires ? Pourquoi ?



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

IV — Sujets d'étude où les objectifs sont mêlés mais permettent le découpage en problèmes indépendants à objectifs plus précis.

① La partie A est de type "manipulation" alors que la partie B relève du type "problème".

P est un plan et Δ une droite donnée de ce plan.

k est un réel non nul.

M est un point quelconque de P et H le projeté orthogonal de M sur Δ.

On définit une application f de P dans P en donnant pour image à M le point M′ tel que $\overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$.

A Fais une figure dans chacun des cas suivants :

1) $k = -1{,}6$ et $M \notin \Delta$. Remarque la disposition des points H, M et M'.

2) $k = 2$ et $M \in \Delta$.

3) $k = 1$ et $M \notin \Delta$. Que dire de f dans ce cas ?

4) $k = -1$ et $M \notin \Delta$. Que dire de f dans ce cas ?

Soit maintenant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan P tel que $(O, \vec{i})$ est un repère de Δ .

B Dans cette partie, $k = -1{,}5$.

1 - (x,y) étant les coordonnées de M, calcule les coordonnées de M'.

2 - Quel est l'ensemble des points M tels que M = M' ?

3 - M décrit la droite D d'équation $y = 2x - 3$. Quel est l'ensemble des points M' ?

4 - Généralise à une droite D d'équation $y = ax + b$, b réel, k étant quelconque.

(Proposé par l'équipe OPC — TOULOUSE)

---

② Voici encore deux problèmes "mixtes" proposés par l'*équipe OPC — Clermont-Ferrand.*

L'unité choisie est le cm.

A) *Construis*, en vraie grandeur, avec la règle et le compas, la figure suivante :

Un triangle ABC de 6 cm de côté ; le point D, *de la droite AB*, situé à 3 cm de A et tel que A soit *entre* B et D ; le point E, symétrique de D par rapport à (AC), le point F symétrique de B par rapport à (AC).

B) *Démontre que :*

a) les droites DE et BF sont parallèles
b) la droite EF passe par A.

C) *Démontre que* la figure ABCF est un losange.

D) On désigne par H le point d'intersection des droites (AC) et (BF). *Calcule* les distances AH et BH (pour cette dernière distance, on donnera la valeur *exacte*, puis la valeur approchée à 1 mm près par défaut).

E) On désigne par G le point d'intersection des droites (AC) et (ED). *Calcule* la distance AG.

③

1°) *Dessine* un triangle ABC rectangle en A. Construis la projection orthogonale H de A sur (BC), puis les symétriques M et N de H par rapport à (AB) et (AC). On désigne par K le point d'intersection de (AB) et (MH), par L le point d'intersection de (AC) et (NH).

2°) *Démontre* que ALHK est un rectangle. Qu'en résulte-t-il pour le triangle MNH ?

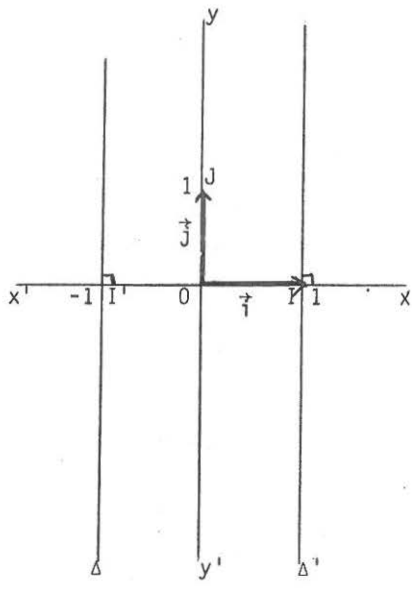
3°) *Démontre* que le cercle de centre A et de rayon AH passe par M et N.
Que représente ce cercle pour le triangle MNH ?
En déduire que A est le milieu du segment [MN] .

4°) *Démontre* que les droites (BM) et (CN) sont perpendiculaires à (MN).

(*Proposé par l'équipe OPC — CLERMONT-FERRAND*)

④ *Sujets d'étude de type didactique*

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère Δ et Δ' (voir figure ci-contre).



1°) Détermine une équation de Δ et une équation de Δ' en utilisant les informations données par le dessin.

2°) Trace la droite D d'équation $2x+y = 0$ et la droite D' d'équation $x-2y = 0$. D coupe Δ en M et D' coupe Δ' en N. Calcule les coordonnées des points M et N.

3°) Calcule les coordonnées du milieu G de (M,N) puis les coordonnées du point P tel que (O.M,P,N) soit un parallélogramme. Démontre que (O,M,P,N) est un rectangle.

4°) Reproduis la figure ci-contre, trace une droite D quelconque passant par O et la perpendiculaire D' à D au point O.

D coupe Δ en M, D' coupe Δ' en N.

Prouve que le milieu G de (M,N) est élément de la droite (y'y) et que le point P sommet du rectangle (O,M,P,N) est toujours situé sur (y'y).

5°) Dans le cas où l'ordonnée de M est $\frac{3}{4}$, calcule d(O,M).

En utilisant la table de trigonométrie, donne la mesure à 1 degré près de l'angle $\widehat{I'OM}$.

6°) Détermine alors les coordonnées du point N.

(Proposé par l'équipe OPC — NIORT)

2.4. EXTRAITS D'UNE FICHE-ELEVE REDIGEE ET COMMENTEE PAR L'EQUIPE OPC — VANNES :

A PROPOS DE LA TRANSLATION

Il nous paraît difficile, voire impossible, de rattacher directement l'idée de vecteur à une notion concrète. C'est pourquoi, malgré l'absence du mot TRANSLATION dans les projets de programme, nous maintenons l'étude de la translation, non pour elle-même, mais à titre d'instrument pour parvenir au vecteur et comme moyen d'action sur les figures.

Nous aurions aimé pourvoir comparer le niveau d'acquisition du concept de vecteur chez des élèves qui auraient fait un apprentissage pour les uns à l'aide de la translation et pour les autres, à l'aide des classes d'équivalence. Mais ceci reste à faire. Ainsi saurait-on mieux si le dynamisme des transformations favorise, comme on le croit, la compréhension.

La fiche élève qui suit comporte six parties dont certaines peuvent être menées de front, par exemple :

On peut commencer par motivation (I) et travaux pratiques (III), puis poursuivre avec schématisation (II), exercices graphiques (IV) et étude théorique (V) tout en traitant l'aspect numérique (VI) ce qui permet de faire des calculs pendant toute la durée de l'étude de ce thème.

I — Eléments de motivation (à l'intention du professeur)
II — Schématisation. Représentation
III — Travaux pratiques
IV — Mathématisation et exercices graphiques
V — Translation et vecteur (étude théorique)
VI — Aspect numérique de la translation.

On suppose connus : Le parallélisme. La projection.
Le bipoint. La symétrie centrale.
Le parallélogramme.

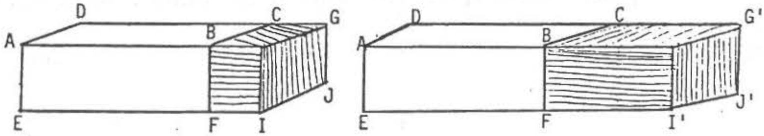
I - **Eléments de motivation** au niveau de l'observation d'objets dans lesquels interviennent des glissements.

- Fenêtres ou portes coulissantes
- Ascenseurs - Monte-charges
- Tapis roulants dans les aéroports
- Toboggan - Escalator

— Targette - Pied à coulisse - Tiroirs
— Boîte d'allumettes - Paquets de cigarettes, etc...

Donner l'idée de glissement en disant qu'on ne s'occupe pas de la trajectoire, seulement de l'état initial et de l'état final.

Schématiser la boîte d'allumettes par son état initial et son état final.



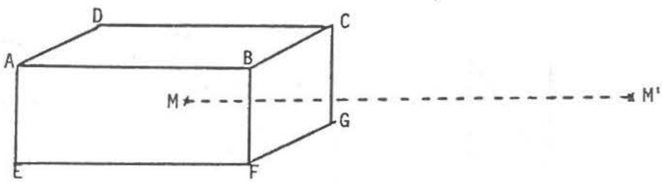
Etat initial Etat final

Donner l'idée d'application entre 2 points du même objet.

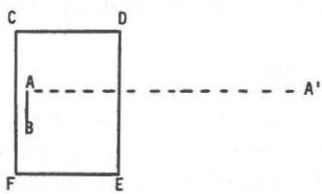
II - Représentation — Schématisation

2.1. Le schéma ABCDEFG représente une boîte d'allumettes.
M est un point dessiné sur la boîte.
Après glissement, le point M vient en M'.

Dessine la nouvelle position de la boîte, A'B'C'D'E'F'G', après le glissement.



2.2. Regarde une fenêtre ou une porte coulissante. Agis sur la poignée d'un de ces objets. Remarque le mouvement de l'objet tout entier... Puis complète le schéma ci-dessous en dessinant la position finale de la vitre connaissant sa position initiale et la position finale d'un de ses points.



Donner d'autres exercices de ce genre en variant la direction de translation, la longueur, en donnant l'objet image au lieu de l'objet antécédent, en introduisant des cas où l'objet et l'image auront une intersection non vide.

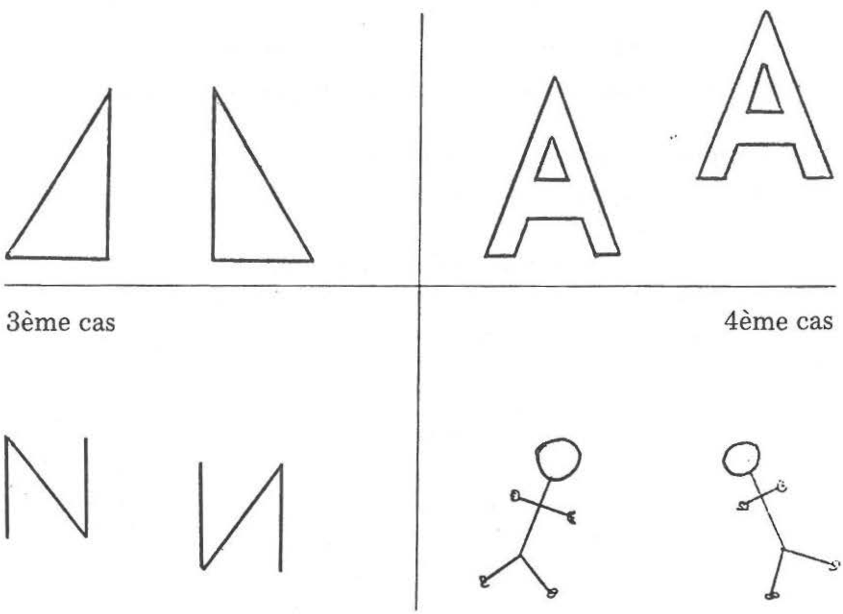
2.10. Dans chaque exemple suivant, la figure a changé de place. Dans quels cas y-a-t-il glissement de la figure ?

1er cas

2ème cas

3ème cas

4ème cas



En particulier, le cas n° 4 doit conduire à une discussion qui permettra de préciser ce que l'on appellera *translation*. L'idée de glissement étant trop vague et ambiguë, on adopte un vocabulaire plus précis et on se donne des règles pour en parler et agir avec.

III - Travaux pratiques

Réalise un montage T et fais la fiche d'observations générales et entoure, parmi les conclusions suivantes, celles qui correspondent aux effets de la machine T représentée page 245.

La machine T donne d'une figure, une image :

de même forme
de forme différente
ayant une position renversée par rapport à la figure elle-même
ayant une position non renversée
de même grandeur
de grandeur différente

Complète les phrases suivantes :

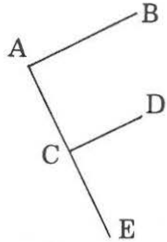
Certaines droites sont confondues avec leur image, ce sont celles qui .....
L'image d'une droite est une droite de .... direction
L'image d'un cercle est un cercle et la droite qui passe par les centres ...

Parmi les propositions suivantes, hachure les fausses, entoure, à l'aide d'un crayon feutre rouge, les vraies :

Tout point est confondu avec son image
Aucun point n'est confondu avec son image
Certains cercles sont confondus avec leur image
Aucun cercle n'est confondu avec son image

Manipulation n° 1

Colle la figure 1 ci-contre sur la feuille. Repasse-la avec la pointe verte. Avec la pointe rouge, dessine son image A'B'C'D'E'.



Joins alors chaque point à son image (A à A' ; B à B' ; etc...)
Quelles remarques fais-tu ?
Compare avec les tiges du montage. Joins les points d'attache.
Si nous appelons R l'ensemble des points rouges et V l'ensemble des points verts, les bipoints (A,A'), (B,B'), ... etc., éléments de R × V obtenus à l'aide de ce montage, ont un "air de famille", une certaine ressemblance.

Manipulation n° 2

Choisis deux points quelconques U et V sur la feuille de papier.

Pose la pointe verte sur le point U. Si la pointe rouge coïncide avec V, nous dirons que le bipoint (U, V) appartient à la famille, que l'on note $\overrightarrow{OO'}$, déterminée par le montage T et ses points d'attache O et O'. Si la pointe rouge ne coïncide pas avec V, le bipoint (U, V) n'appartient pas à cette famille.

Les bipoints (A,A'), (B,B') ... etc. déterminés dans la manipulation n° 1 sont éléments de cette famille. On dit qu'ils représentent le même vecteur : $\overrightarrow{OO'}$.

Choisis comme nouveaux points d'attache A et A'. Peux-tu obtenir (B,B'), (C,C') ... à partir de ces nouveaux points d'attache ? Que penses-tu de la famille (O,O') et de la famille (A,A') ?

Suivent d'autres manipulations, chacune ayant un objectif précis parmi les suivants :

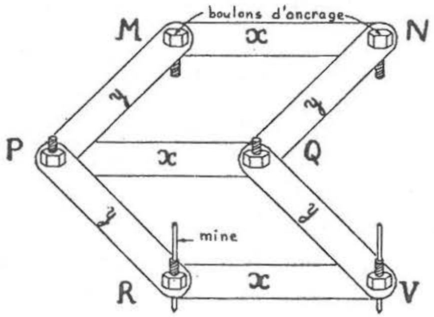
- *s'il existe une translation T telle que* $A \xmapsto{T} A'$
$B \xmapsto{T} B'$

alors

il existe une translation T' telle que $A \xmapsto{T'} B$
$A' \xmapsto{T'} B'$

- *la composée de deux translations est une translation et l'on peut déterminer son vecteur à partir des deux premiers.*
- *la composition des translations est commutative.*

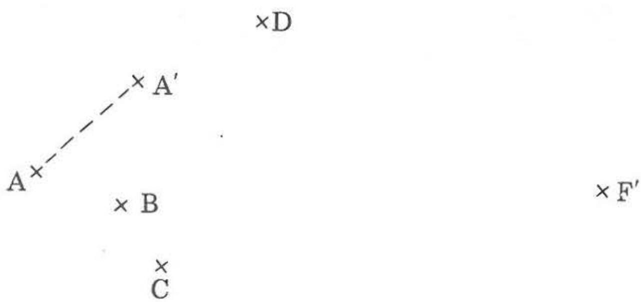
Schéma du montage de la machine T



La machine T se compose de 3 barres de longueur x et 4 barres de longueur y articulées comme indiqué sur le schéma. La barre reliant les boulons d'ancrage M et N peut être supprimée à condition que les trous où sont placés M et N aient même écartement que PQ et RV. R et V peuvent être permutés. En pratique, prendre y = 12 .

IV - Mathématisation

4.1. Lors de l'un des glissements dont on a parlé précédemment (il a pu être obtenu avec la machine T). le point A représenté ci-dessous a eu pour image A' .



Sur le schéma, place les images des points : B et C et D. Choisis deux autres points E et G et place leurs images. Trouve F antécédent de F' .

Joins chaque point à son image par des pointillés. Que remarques-tu ?

Les bipoints (A,A') ; (B,B') ; (C,C') ; (D,D'), etc.... ont un air de famille. Essaie de définir la ressemblance en comparant les droites (AA') et (BB') ainsi que les droites (AB) et (A'B').

Le bipoint (A,C) appartient-il à la famille ? Explique ta réponse.

Donne deux autres bipoints n'appartenant pas à la famille.

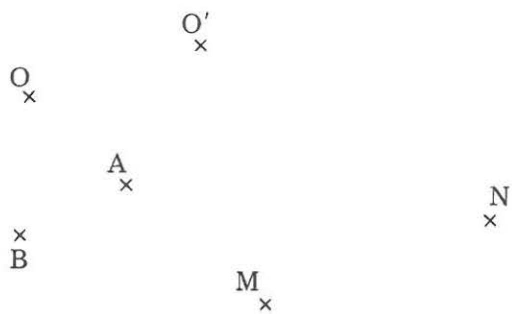
4.2. *Définition de la translation*

> (M,N) est un bipoint du plan.
>
> On appelle *translation associée au bipoint (M,N)* l'application du plan dans le plan qui à chaque point S fait correspondre le point R tel que MNRS soit un parallélogramme.

4.3. *Exercices graphiques.*

Nous donnons à réaliser aux enfants une grande quantité d'exercices graphiques du type des quelques suivants car ceux-ci peuvent être faits dans leur majorité à la maison. La vérification en classe en est très aisée. Ces exercices nous semblent permettre l'assimilation de la notion de translation même chez ceux de nos élèves qui ne pourront pas accéder au niveau de la validation dans le temps imparti à la classe. C'est pourquoi on cherche à ne pas bloquer les élèves à ce niveau en n'exigeant pas sans cesse une justification explicite de leurs actes intuitifs, spontanés ou réfléchis.

① t est la translation associée au bipoint (O,O'). Construis les images A', B', M', N' des points A, B, M, N.



② t est la translation associée au bipoint (E,F). Construis les images I′, J′, K′ des points I, J, K.

③ t est la translation associée au bipoint (O,O′). Construis les antécédents C, D, L, P des points C′, D′, L′, P′.

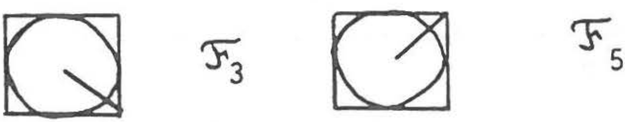
④ a)

Les plaques $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ se correspondent-elles par des translations ? Si oui, lesquelles ?

b)

Même question pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.

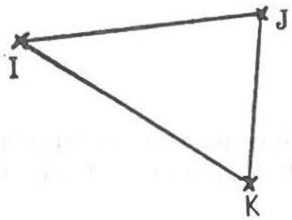
c)



Puis pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_5$.

⑤ Construis l'image du triangle IJK ci-dessous

1°) dans la translation associée à (I,J)
2°) dans la translation associée à (J,K).

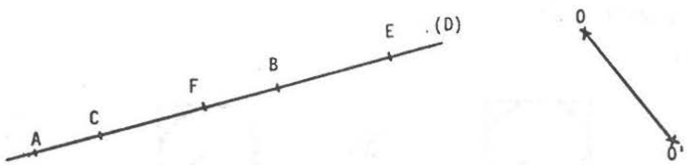


⑥ Choisis un bipoint (O,O′) et trace A′ image de A par la translation associée à (O,O′), A étant un point quelconque du plan.

Prends un point M dans le plan. Place les images de M par la translation associée à (O,O′) puis par la translation associée à (A,A′).

Que constates-tu ?

⑦ Construis les images A′, B′, C′, E′ et F′ des points A, B, C, E et F par la translation associée à (O,O′).

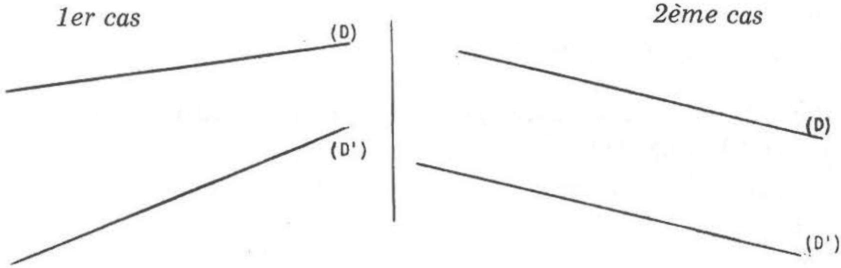


Vérifie que les points A′, B′, C′, E′ et F′ appartiennent à la même droite (D′).

Compare les directions des droites (D) et (D′).

Même exercice dans le cas où les droites (D) et (OO′) ont la même direction.

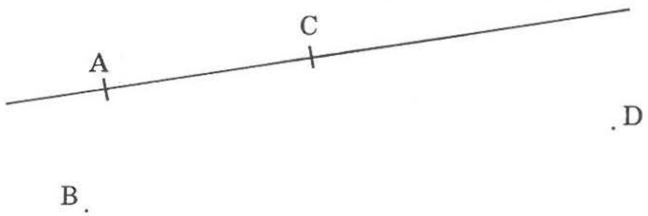
⑧ Vérifie, dans les deux cas, si (D′) est l'image de (D) par une translation.



A quelles conditions (D′) est-elle l'image de (D) par une translation ?

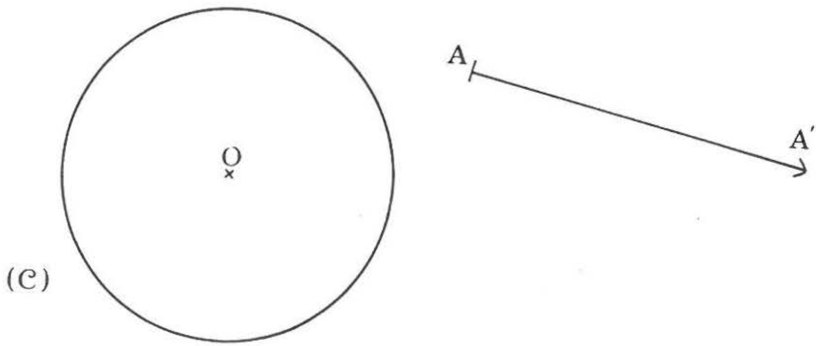
⑨. 1) Construis Δ' image de Δ dans la translation associée à (A,B).

2) Construis Δ'' image de Δ dans la translation associée à (C,D).



3) Trouve d'autres bipoints tels que Δ' soit l'image de Δ dans la translation associée à ces bipoints.

⑩ Construis les images d'une dizaine de points du cercle ($\mathcal{C}$) par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.



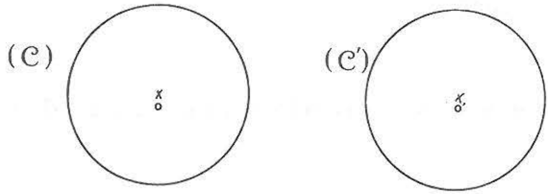
Que remarques-tu ?

Où est l'image du centre O ?

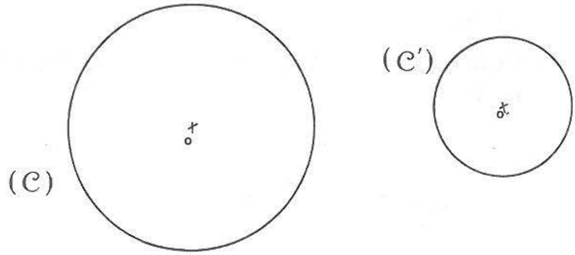
(11) Vérifie dans les deux cas s'il existe une translation telle que (C′) soit l'image de (C).

Quand la translation existe, donne un bipoint associé.

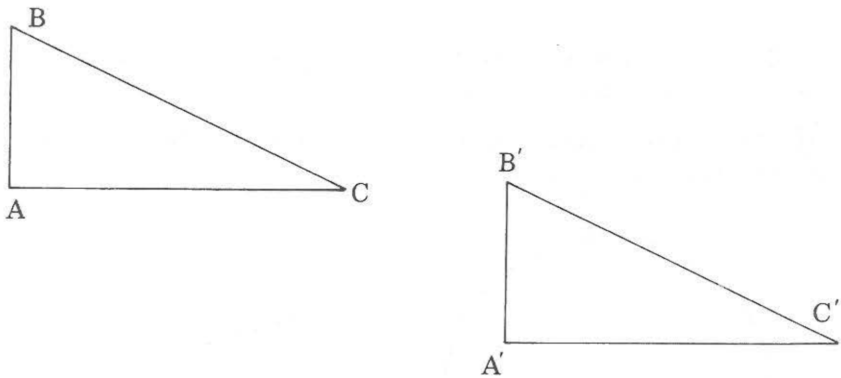
1er cas



2ème cas



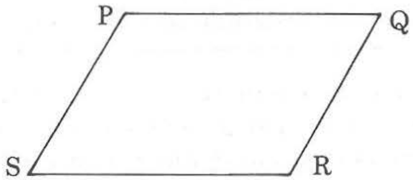
(12) ABC et A′B′C′ sont deux triangles.



a) Les figures ABC et A′B′C′ se correspondent-elles par translation ? Si oui définis-en une.

b) En partant du triangle ABC et en faisant deux translations successives, on peut arriver sur A′B′C′. Définis deux translations qui amènent à ce résultat.

(13) PQRS est un parallélogramme.



Construis :

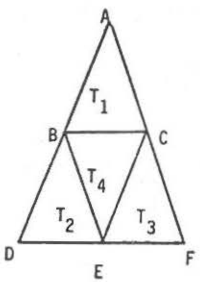
a) en rouge l'image de PQRS par la translation associée à (S,R)

b) en vert l'image de la figure rouge par la translation associée à (Q,R)

c) l'image de la figure verte par la translation associée à (R,P).

d) Que remarques-tu ?

(14) T_1, T_2, T_3, T_4 sont les quatre triangles dessinés.

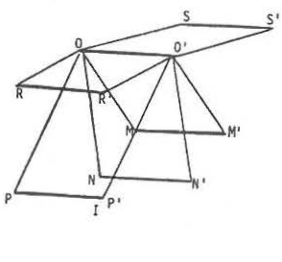


Peux-tu trouver une translation, et si oui définis-la, qui transforme :

a)	T_1 en T_2	b)	T_2 en T_1
c)	T_2 en T_3	d)	T_3 en T_2
e)	T_4 en T_1	f)	T_1 en T_4
g)	T_1 en T_3	h)	T_3 en T_1

V - **Translation et vecteur** (étude théorique)

Relation d'équipollence



Les bipoints (O, O'), (S, S'), (R, R'),(M,M'), (N,N') et (P,P') ont été obtenus par une translation. Peut-on savoir laquelle ?

Définition

> On dit que (M,M′) est équipollent à (O,O′) lorsque M′ est l'image de M par la translation associée à (O,O′).

Suit un développement comportant exercices d'exposition, définitions, théorèmes et exercices didactiques amenant à opérer sur les vecteurs en se référant au sens donné par ce qui précède (*).

VI - Aspect numérique de la translation

Exercice 1.

Lors d'un examen, une épreuve à option obligatoire donne lieu à une note et les points obtenus sont décomptés de la manière suivante :

— si un candidat obtient pour cette épreuve une note supérieure à la moyenne, on ajoute à son total les points excédant cette moyenne. Exemple : Martine a obtenu 13/20. On ajoutera trois points à son total.

— si un candidat obtient une note inférieure à la moyenne, on soustrait de son total le nombre des points qui lui manquent pour atteindre sa moyenne.

Compléter le tableau suivant où x est supérieur à 10 et y est positif.

Note obtenue à 1 épreuve à option	13	17,5	8	10			5		x	
Nombre de points portés au total	+ 3				10	0		5		y

Exercice 2.

1°) Pour obtenir l'heure de la pleine mer au port de Vannes, il faut ajouter approximativement 2 h 02 mn aux heures de pleines mers de Port-Navalo.

(*) La fiche, dans son intégralité, est à la disposition du lecteur intéressé ; la demander à l'IREM de Rennes.

(Port situé à l'entrée du Golfe du Morbihan).

Complète le tableau suivant :

Pleines mers

Jours	P — N	Vannes
13 J	4. 11	
14 V	4. 37	
15 S	5. 03	
16 D	5. 29	
17 L	5. 57	
18 Ma	6. 29	
19 Me	7. 06	

x désignant l'heure de la pleine mer à Port-Navalo et y l'heure de la pleine mer correspondante à Vannes, quelle relation lie x et y ?

On notera $y = f(x)$.

2°) Pour avoir l'heure des pleines mers de Pennboch, il faut retrancher approximativement 18 minutes aux heures de pleines mers de Vannes.

Complète le tableau ci-dessous.

Heures de pleines mers

Jours	VANNES	PENNBOCH
13 J	6. 13	
14 V	6. 39	
15 S	7. 05	
16 D	7. 31	
17 L	7. 59	
18 Ma	8. 31	
19 Me	9. 08	

y désignant l'heure de la pleine mer à Vannes et p l'heure de la pleine mer correspondante à Pennboch, quelle relation lie y et p ?

On notera p = g(y).

3°) Exprime g o f — est-elle de la même famille que f et g ?

4°) Exprime f^{-1} — est-elle de la famille de f ?
Définis f^{-1} o f.

5°) Exprime g^{-1} — est-elle de la famille de g ?
Définis g^{-1} o g.

6°) Définis f^{-1} o g^{-1} et compare avec g o f .

Généralisation

Les relations rencontrées dans les exemples précédents sont des applications du type :

$$\left|\begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ \\ x \longmapsto x + a \end{array}\right.$$

On les appelle des **TRANSLATIONS.**

La relation identique est une translation. La définir.

Si **D** est l'ensemble des décimaux, soit :

$$h \left|\begin{array}{l} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ x \longmapsto x + a \end{array}\right. \qquad k \left|\begin{array}{l} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ y \longmapsto y + b \end{array}\right.$$

Définir k o h :

La composée de deux translations est une translation.

Définir h^{-1} et calculer h^{-1} o h. Conclure.

Chaque translation admet une translation réciproque.

Exercice 3.

Le professeur a fait noter dans un tableau les tailles de chacun des 40 enfants de la classe. Il a ensuite regroupé les enfants en sous-classes en identifiant les tailles d'enfants de la même sous-classe au centre de l'intervalle associé, comme l'indique le tableau ci-dessous, à compléter.

Sous-classes	Centre de la sous-classe	Effectif de la sous-classe	Tailles réduites	Tailles centrées
[140 cm-145cm[	142,5 cm	3	0	−15
[145 cm-150cm[	——	6	5	−10
[150cm-155cm[	——	9	10	− 5
[155 cm-160cm[	——	12	15	0
[160cm-165cm[	——	5	20	5
[165cm-170cm[	——	4	25	10
[170cm-175cm[	——	1	30	15

Ainsi, par exemple, 9 élèves ont une taille comprise entre 1,50 cm et 1,55 cm (exclu) et on considérera leur taille ramenée à 152,5 cm.

1°) Quelle est la moyenne M des tailles des enfants ainsi répartis en sous-classes ? Attention, 142,5 doit être affecté du coefficient 3, etc...*On dit que M est la moyenne pondérée des centres de sous-classes.*

2°) Sur chaque centre x de sous-classe, effectuez le changement : $x \xmapsto{f} x - 142{,}5$. On obtient une liste de 7 décimaux représentant des tailles "réduites".

Quelle est la moyenne M', avec les mêmes effectifs, de ces tailles "réduites" ?

Effectuez sur M' le changement $M' \xmapsto{f^{-1}} M''$. Que remarquez-vous ?

3°) Effectuez cette fois sur la liste des premières tailles le changement : $x \xmapsto{g} x - 157{,}5$ et calculez la nouvelle moyenne de ces nouvelles tailles "réduites". Effectuez ensuite sur cette moyenne le changement $x \xmapsto{g^{-1}} g^{-1}(x)$; que remarquez-vous ? Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4.

En France, l'Institut national de la statistique et des Etudes économiques* est chargé de l'observation de variations générales de prix.

On utilise, à cet effet, des nombres indices plus simplement appelés indices (souviens-toi des populations).

Le but de l'exercice suivant est de déterminer l'indice d'ensemble des prix des produits manufacturés à la consommation familiale en province en 1964 (base 100 en 1959).

L'indice d'ensemble à calculer est la moyenne pondérée des indices annuels des groupes d'articles.

ARTICLES	Pondération	Indices annuels
Cuisine, chauffage, ménage....	2	141,4
Mobilier, literie.....................	2	152,8
Produits d'entretien, toilette papeterie	2	121,8
Outillage, électricité, jardinage ...	2	142,9
Lingerie, bonneterie, mercerie	4	111,0
Habillement	6	128,2
Chaussures	2	118,0

L'indice cherché s'obtient en divisant la somme des indices pondérés par la somme des coefficients.

Exercice 5.

Plus généralement, voici une liste de nombres et des coefficients qui leur sont associés :

nombres	x	y	z	t
coefficients	a	b	c	d

* Source I.N.S.E.E.

a) Calcule la moyenne pondérée M de (x,y,z,t).

b) Effectue sur chaque nombre le changement :

$$x \xmapsto{f} x - k$$

Calcule la moyenne pondérée M′ des images de x,y,z et t . Puis effectue sur M′ la transformation :

$$M' \xmapsto{f^{-1}} M''$$

Qu'obtiens-tu ?

Exercice 6.

Soient un quadrillage et $\mathcal{N}$ l'ensemble des noeuds.

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathcal{N}$ par :

$M \in \mathcal{N} \quad N \in \mathcal{N} \quad M \; \mathcal{R} \; N$ si et seulement si $M \xmapsto{(2,-6)} N$

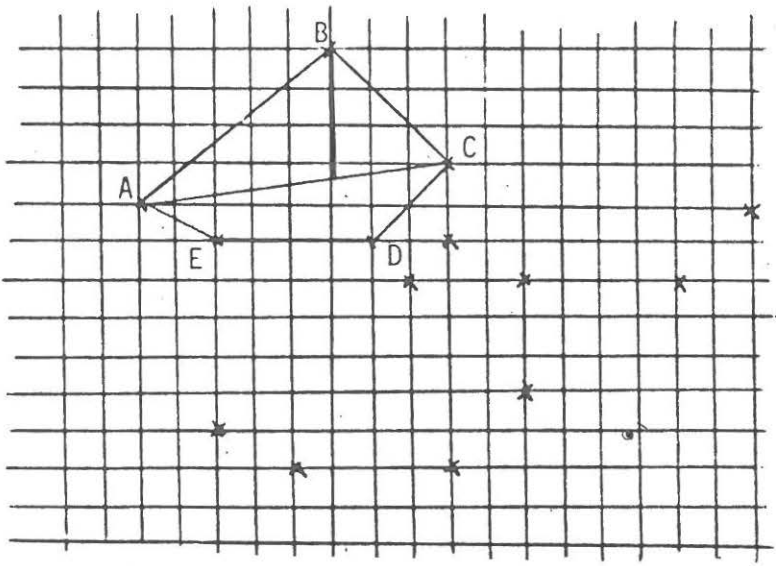
Donne les images A′, B′, C′, D′, E′ des noeuds A,B,C,D,E.

Chaque noeud a-t-il une image par $\mathcal{R}$?

Chaque noeud a-t-il un antécédent par $\mathcal{R}$?

$\mathcal{R}$ est-elle une application ?

$\mathcal{R}$ est-elle une bijection ?



Nous noterons cette relation t(+2, − 6).

Donne les images A'', B'', C'', D'', E'' de A', B', C', D', E' par la relation t(+6, +5).

Peux-tu trouver d'autres relations du même type dans l'ensemble des noeuds ?

Toutes les relations de ce type seront appelées **TRANSLATIONS.**

Exercice 7. Quadrillages — Applications

7.1. Sur un quadrillage codé, place les points dont les coordonnées sont les suivantes et joins-les (en vert) dans cet ordre.

(−2, 0)
(−4, 1)
(−4, −1)
(−6, −1)
(−5, −3)
(−4, −1)
(−3, −3)
(−2, −1)
(−4, −1)
(−2, 0)

7.2. Trouve l'image de chacun des couples précédents par la relation :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ \\ (x,y) \longmapsto (x+5,\ y+3) \end{array} \right.$$

puis place, sur le même quadrillage les points représentant ces nouveaux couples en les joignant (en rouge) dans le même ordre.

7.3. Trouve l'image de chacun des couples obtenus à la question 7.2 par la relation :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ \\ (t,u) \longmapsto (t+3,\ u-5) \end{array} \right.$$

puis place sur le même quadrillage que précédemment les points représentant les nouveaux couples en les joignant (en noir).

7.4. Par quelle relation h ces nouveaux couples auraient-ils pu être obtenus à partir de couples données à la question 7.1 ?

Cette relation est-elle du même type que les précédentes ?

7.5. *Image d'un ensemble de couples*

Soit $d_0 = \{(1,0), (4,1), (7,2), (-2,-1), (-5,-2), (-8,-3)\}$.

1°) Les termes x et y des couples de d_0 sont liés par une relation du type : $y = a_0 x + b_0$. Trouve a_0 et b_0 .

2°) Soit $D_0 = \{(x,y) \in Z^2 \ / \ y = a_0 x + b_0\}$.
Quelle est l'image D_1 de D_0 par l'application k :

$$(x,y) \longmapsto (x + 1, y + 2) ?$$

Quelle est l'image D_2 de D_0 par l'application l :

$$(x,y) \longmapsto (x + 2, y - 3) ?$$

3°) Par quelle application D_1 aura-t-elle pour image D_2 ? L'exprimer en fonction de k et de l .

(D'après Victor Hugo)

Combien de postulats, combien de théorèmes,
Qui ont franchi le front d'une tête trop pleine,
Dans ce morne néant se sont évanouis !.
Combien ont disparu, dure et triste fortune,
Par un regard sans fond, sous une tête brune,
Dans l'aveugle océan à jamais enfouis.
....
Où sont les radicaux sombrés dans les mémoires ?
O symboles, oubliés dans de profonds tiroirs.
Equations, redoutées des mômes à genoux,
Nous vous les répétions, patients et résignés,
Et c'est ce qui nous fait ces voix désespérées
Que nous avons le soir quand nous rentrons chez nous....

Marie-Thérèse Patalani