

1 - VARIÉTÉS

1.1. LE PAVE AU C.M. OU EN SIXIEME

par Roger CREPIN, Limoges

Ce qui suit peut paraître rigide, parce que l'on écrit la relation de faits vécus dans une classe sans pouvoir souligner la vie de la classe, les communications entre enfants, le rôle d'animateur du maître qui saisit l'occasion, lorsqu'un fait semble compris par la majorité des enfants, pour affirmer une synthèse, une généralisation.

Une boîte de craie est posée sur une table et les enfants ont envie de s'exprimer sur cet objet. Les observations faites ne seront jamais gratuites, mais seront le départ de la découverte d'une notion. Parmi ces observations citons :

- observations à orientation topologique : des bâtons de craie aux notions d'intérieur et d'extérieur, et à la notion abstraite de frontière (boîte ouverte, fermée, ...) ;
- observations à orientation vers les relations d'incidence : six faces, positions relatives des faces, forme des faces, frontière des faces, ...

Les dessins en perspective de la boîte vue de l'extérieur seront nombreux et divers avec vision d'une seule face, de deux faces, de trois faces et comparaison des visions en perspective de diverses faces (un carré devient losange, un rectangle devient parallélogramme). L'enfant vivra les visions dans trois situations :

- il se déplace autour de l'objet fixe
 - il déplace l'objet par rapport à lui
 - l'observateur et l'objet en mouvement ;
- observations modélisantes : comparaison d'objets de la même classe.
 - visions de l'extérieur de solides pleins :
 - pièces de bois (à l'occasion de la visite d'un atelier de menuiserie ou de charpente), observation de l'action de l'artisan

qui veut contrôler une surface plane,

- parpaing, briques,
- livre.

L'expression des observations utilise un vocabulaire technique, par exemple pour le livre : tête, queue, tranche, dos, plats ou pour la brique : base, hauteur, faces, ...

- *vision de l'intérieur* :

- salle de classe

- observations d'objets faisant apparaître le modèle : pavé.

Les enfants observent tous les objets à trois dimensions de la classe et découvrent que la frontière de la table d'écolier a pour modèle le pavé. Il en va de même de la chaise, du tabouret. Les enfants enveloppent l'aspect matériel d'un objet dans une frontière modèle : pavé ;

- observations à orientation-mesure. Les comparaisons ont fait apparaître des variations dans les dimensions. Comment découper des tasseaux dans une latte de bois ? Comment est construit un mur de brique (dénombrement) ? ... L'aboutissement est la découverte de l'usage de l'empilement des cubes pour construire un pavé et le dénombrement donne la mesure dans le cas favorable de cubes de même format ;

- observations à orientation - déplacements dans l'espace.

Translation suivant une arête, découverte de l'isométrie des faces opposées. Construction par symétrie-plan d'un pavé droit.

Agrandissement et réduction, maquettes, plans à l'échelle.

- etc.

Cet usage de la "méthode spiralaire"* dégage un certain nombre de qualités du pavé :

- solide limité par six faces,
- deux faces consécutives ont en commun une arête, trois arêtes concourent à chaque sommet. Le solide a six faces, douze arêtes, huit sommets,
- deux faces opposées sont superposables par glissement,
- les faces sont des parallélogrammes,
- pour le pavé droit : à chaque sommet les arêtes sont deux à deux perpendiculaires ;

* Cf. tome 1, page 69.

ainsi qu'un certain nombre de qualités du parallélogramme :

- surface limitée par quatre côtés (surface à quatre sommets),

- deux côtés opposés sont superposables par glissement (translation),

- les côtés déterminent deux directions de droites dans le plan,

- pour les parallélogrammes particuliers : le rectangle (et carré) a ses côtés perpendiculaires ou le losange (et carré) a ses diagonales perpendiculaires,

ainsi que des propriétés du segment de droite et de la droite dans le plan ou l'espace.

Conséquences :

(A) *Travaux manuels éducatifs*

Réalisation de pavés droits ou obliques par les élèves

α) Solide plein : réalisation associée à une visite d'atelier (menuiserie, charpente, ...) pour réfléchir aux actions des artisans et à l'utilisation des machines-outils, tant pour le travail du bois que du fer (ou de la matière plastique).

Exercices :

- scier des pavés droits dans une barre de bois, de fer (usage de l'équerre) et tracer des parallèles (trusquin, pointe à tracer, ...). Est-il facile de réaliser à la main deux traits de scie parallèles ?

- construire un pavé avec de la pâte à modeler que l'on façonne en la plaquant sur une surface plane ou en la coupant ;
- couper une pomme de terre (!) ...

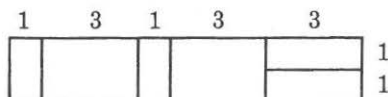
β) Solide limité par des plaques rectangulaires :

Exercices :

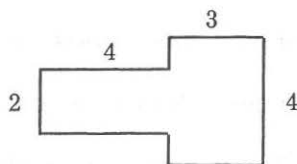
- scier un tube de section rectangulaire ;
- tracés et découpages de plaques de carton (tracés associés au dessin géométrique sur feuille blanche ou sur quadrillage régulier), assemblage des plaques avec le scotch ;

- du développement du pavé à sa réalisation : recherche du minimum pour le découpage et l'utilisation du scotch.

Proposer aux enfants des projets dont certains ne permettent pas de construire le pavé sans découpage supplémentaire, par exemple :



Proposer aux enfants des patrons et faire rechercher sans mesurer les pliages à faire, par exemple :



γ) Solide limité par des barres, des tiges de “meccano”, des pailles, du fil de fer (construction de la charpente du pavé).

Comment découper les tiges dans une tige donnée ? Nombre de tiges de même longueur.

Pour les sommets : soudures (ou pâte à modeler).

Les sommets avec les tiges de “meccano” sont matérialisés par des vis et écrous.

Les enfants jouent bien avec les pailles (arêtes) et la pâte à modeler (sommets).

Cette construction avec la pâte à modeler permet de faire varier les angles et d'aller du pavé droit au pavé oblique et inversement, du parallélogramme au rectangle et inversement ou du cube au pavé oblique, du carré au losange et inversement.

Constat d'une première différence entre le parallélisme (qui se conserve) et l'orthogonalité (qui ne conserve pas dans ces déformations).

δ) Solide limité par des crochets fixés convenablement.

Réalisation : piquer des aiguilles dans une pomme de terre (ou de la pâte à modeler) de façon que les huit chas représentent les sommets du pavé.

Exercices à partir de δ :

— A l'aide du fil retrouver le solide γ .

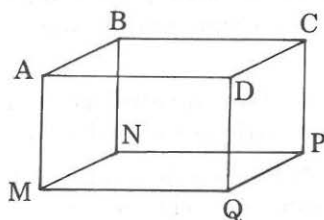
— A l'aide de papier et de scotch retrouver le solide β .

Il suffit de considérer β comme une boîte que l'on remplit de sable pour avoir le solide α .

α , β , γ , δ représentent quatre points de vue d'un même solide géométrique. La donnée d'un de ces points de vue suffit pour déterminer les trois autres. Si l'on veut éliminer l'aspect matériel au profit de l'idée de modèle mathématique, il suffit d'envisager le pavé du point de vue de l'octuplet (A, B, C, D, M, N, P, Q).

(B) *Déplacements de plans dans l'espace et réalisations technologiques* (à partir des travaux manuels)

Dans un pavé les faces parallèles deux à deux sont superposables par translation.



$$t_{\overrightarrow{AB}} : (A, D, Q, M) \mapsto (B, C, P, N), [AM] \mapsto [BN] \dots$$

$$t_{\overrightarrow{AD}} : (A, B, N, M) \mapsto (D, C, P, Q), [AM] \mapsto [DQ] \dots$$

$$t_{\overrightarrow{AM}} : (A, B, C, D) \mapsto (M, N, P, Q), [AB] \mapsto [MN] \dots$$

Réalisation matérielle possible avec les solides β ou γ , faire glisser à l'intérieur un parallélogramme.

Réalisation possible avec les solides α , β , γ , faire glisser un manchon à l'extérieur.

L'octuplet précédent devient un couple de quadruplets. Le même pavé a plusieurs écritures :

$$((A, B, C, D), (M, N, P, Q)), ((A, B, N, M), (D, C, P, Q)), \\ ((A, D, Q, M), (B, C, P, N)), \dots$$

Extensions :

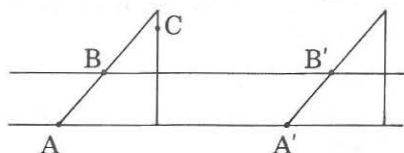
- translation dans l'espace,
- translation dans le plan.

Retrouver ici la construction des solides β et γ .

(C) *Dessin géométrique*

a) Tracé des parallèles avec la règle et l'équerre. Tracé lié à la translation :

$$t_{\overrightarrow{AA'}} : B \mapsto B'$$



(BB') parallèle à (AA') passant par B.

(A, B, B', A') est un parallélogramme.

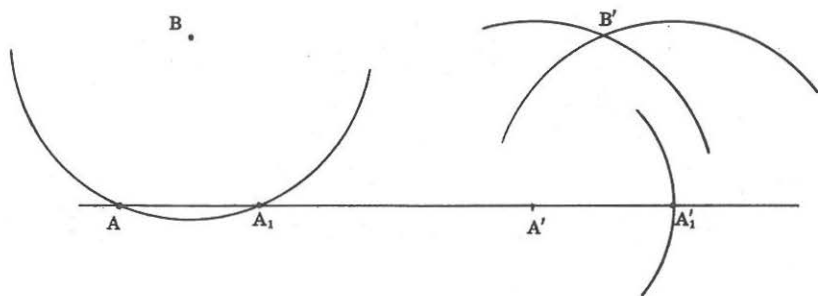
L'équerre glisse sur la règle située sur (AA') . Le côté de l'équerre n'a pas d'importance (trois possibilités de glissement).

Tracé de perpendiculaire avec la règle et l'équerre. Par C, mener la perpendiculaire à (AA') . Faire découvrir par des glissements adaptés que la construction peut se faire même si le point C est tel que $d(C, (AA'))$ est plus grande que chacun des côtés de l'équerre.

b) Reconstitution d'un quadrillage à partir de la maille (A, B, B', A') par des translations successives selon deux directions.

c) Tracé de parallèles avec le compas utilisant le fait que la translation est une isométrie dans le plan métrique. Exemple : tracer la droite passant par B et parallèle à (AA') .

N.B. — On retrouve aussi que la perpendiculaire en B à (AA') est la médiatrice de $[AA_1]$ (tracé classique).



$$BA_1 = BA ; \overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{AA_1} ; A'B' = A_1'B' = AB ; BB' \parallel AA' .$$

(D) Mesures

1. Mesure des volumes.

a) Construction d'un volume à partir d'un volume unité (par translation dans trois directions : paver une surface et empiler des pavés plats). Nombre de volumes-unité.

b) Construction d'un pavé droit avec des cubes équivalents.

c) Rechercher à empiler des cubes équivalents dans un pavé droit. (Découvrir l'encadrement de la mesure)

Cet exercice peut se faire avec les solides β, γ, δ .

d) Tracer sur un solide α des quadrillages par faces qui construisent comme en b) (dessin géométrique).

2. Mesure des surfaces.

a) Construction d'une surface à partir d'une surface unité par glissement plan dans deux directions (celles des côtés). Nombre de volumes-unité.

b) Construction d'un rectangle avec des carrés équivalents. Nombre de carrés.

c) Chercher à carreler un rectangle quelconque avec des carrés équivalents (Découvrir l'encadrement de la mesure).

d) Recherche de l'aire d'une surface quelconque tracée sur papier quadrillé.

e) Etablir pour un pavé droit une relation entre volume et mesure de la surface d'une face.

Formule : $V = B \times h$

B mesure la surface d'une face,

h est le nombre de couches (utilisation des empilements), l'unité de surface et l'épaisseur de la couche sont des "unités concordantes".

3. Mesure des longueurs.

a) Construction d'un segment à partir d'un segment de longueur unité (côté d'un carré par exemple).

b) Encadrement d'une longueur.

c) Etablir pour un rectangle une relation entre la mesure de la surface et les longueurs des côtés.

Formule : $S = a \times b$

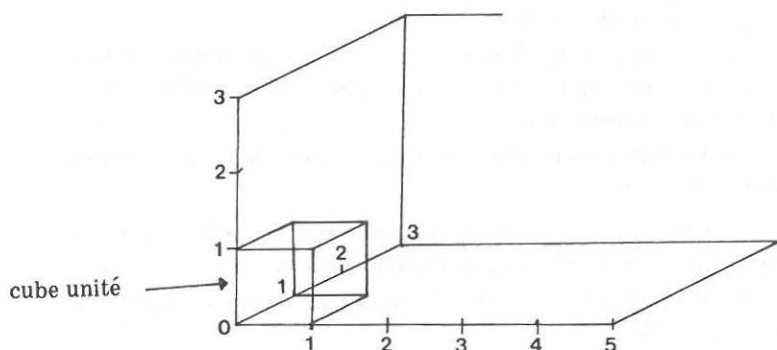
a et b mesurent les côtés avec la même unité.

d) Etablir pour un pavé droit une relation entre le volume et la mesure des arêtes.

Formules : $V = a \times b \times c$

et dans $V = B \times h$ constater que suivant le cas la mesure B est égale à ab, bc ou ac et que la mesure h est respectivement c, a ou b.

Pour mesurer V, B, h, S, il suffit de graduer trois arêtes du pavé droit comme ci-après.



De nombreuses applications numériques suivront avec les naturels ou les décimaux.

(E) *Dessin d'art*

Penser à Vasarelli.

On pourrait continuer longtemps encore sur le thème du pavé.

1.2. TRIANGLE EQUILATERAL ET TRILLAGES

par une équipe de l'I.R.E.M. de Toulon

Une équipe du stage premier cycle de Toulon (74-75) s'est proposé de rechercher dans la littérature disponible des situations exploitables et d'aboutir si possible à des textes, non certes définitifs, mais suffisamment travaillés pour être présentés ainsi à nos élèves.

Sur le thème "*triangle équilatéral - hexagone régulier*", nous avons observé qu'on pouvait d'abord :

- en sixième, utiliser la fiche 21 des "Problèmes série verte" (O.C.D.L.)
- en sixième ou cinquième, utiliser la fiche 22/2 des fiches d'accompagnement de D. Barlier (et autres) (Hachette, collection 65/43, classe de sixième).

On aurait intérêt à pousser la recherche du paragraphe 2 de ce document :

- en étudiant les codages des déplacements menant de A à B (en variant le choix de (A, B)) ;

- en cherchant les règles qui permettent sur l'écriture de reconnaître de tels déplacements ;

- en définissant des déplacements équivalents (d équivalent à d' si, quel que soit le noeud de départ, d et d' définissent le même noeud d'arrivée).

Si le principe de la variabilité des situations étudiées (diversité d'habillage et diversité de contenu) est important, et s'il est certain qu'une situation ne doit pas lasser, il reste qu'on risquerait de ne récolter que du vent en multipliant les situations au détriment d'un travail approfondi.

Le document en question souffre probablement d'avoir été conçu non pour un travail de groupe mais pour un travail individuel dirigé en 50 minutes.

D'où l'idée d'écrire pour les classes de cinquième et quatrième des fiches prolongeant celles-ci : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Ce sont ces fiches que nous vous présentons.

D'abord quelques commentaires sur chacune.

[1] Le trillage s'engendre lui-même ... mais quelle en est la "cellule génératrice" ? On a là un problème assez ouvert et pourtant bien à la portée des élèves de cinquième travaillant en groupes de trois ; le groupe apporte :

- l'autocritique ramenant au respect de la règle "connaître au moins deux points" ceux qui l'oublient ;
- l'initiative et le courage de reprendre la recherche plus méthodiquement.

[2] — Mais comment commencer ?

- a) on peut faire feu de tout bois,
- b) ou faire appel à un duo célèbre !

— Et puis si on construit c'est pour utiliser.

[3] "On n'a pas besoin d'un trillage — régulier ou non — pour faire étudier symétrie centrale et translation ! C'est artificiel !".

“Bien sûr ; mais on peut aussi penser qu’une petite théorie des translations est plus facile lorsque ce mot renvoie à l’intériorisation d’actions diversifiées : interprétation sur un quadrillage d’une famille d’applications de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$, composition de symétries ponctuelles, glissements. Or, pour ne pas privilégier un aspect, il faut un matériel qui permette de travailler assez rapidement : le trillage permet, sans abuser du quadrillage, d’éviter les trop longs tracés du papier uni”.

“Et si un autre thème (pavage du plan) est abordé, il fera apparaître le trillage non régulier. Et tant mieux si nos apprentis géomètres se demandent, devant une activité, si l’un peut remplacer l’autre”.

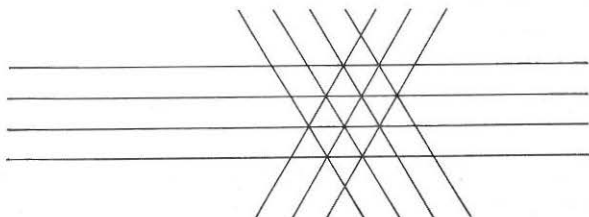
[4] Ce peut être un travail à la maison, plus tard, au moment où il déclenchera peut-être la question “mais est-ce que nous pouvons prouver que ... ?”.

[5] C’est un petit pot-pourri (aires, observation, distance). On peut remarquer que nous nous exprimons dans le langage de l’enfant, appelant “distance” $v(x,y)$ qui n’en est pas une. Chacun reste libre de décider, lors de la synthèse que ce travail appelle, de préciser ou non que les mathématiciens réservent ce terme à une “bonne” distance, symétrique.

La distance p , c’est la taxi-distance de Papy, transposée au trillage non orienté. On peut donc poursuivre (cinquième ou troisième) avec l’étude des ensembles liés à toute distance (cercle, médiatrice, segment) en s’inspirant des documents qui existent pour le quadrillage [NICO 5 Taximétrie (Papy) ; NICO 17 Taximétrie à cinq ans (C. Randour) ; R.T.S. Atelier de pédagogie : document d’accompagnement de l’émission “Taxidistance”].

[6] Pas d’âge minimum requis.

FICHE [1]



1°) Peux-tu poursuivre la construction du trillage avec la règle et le crayon ? (On peut tracer une droite si on connaît *au moins deux* de ses points). Donne à chaque nouvelle droite un numéro dans l'ordre 1, 2, 3 ...

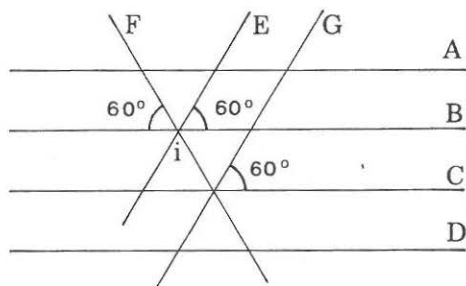
2°) Reprends la figure de départ et efface une droite : peux-tu alors poursuivre la construction ?

3°) Quelle est la figure de départ contenant *le moins* de droites qui permet de poursuivre la construction du trillage ?

FICHE [2]

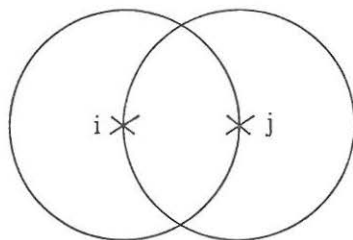
1°) Veux-tu apprendre à commencer un trillage ? Voici deux procédés :

a)



1. Les droites parallèles *équidistantes* A, B, C, D, sont décalquées sur un quadrillage.
2. Les droites E et F sont placées avec le rapporteur, le choix du noeud initial i étant indifférent.
3. Tu places encore G avec le rapporteur et tu peux alors poursuivre avec la règle seule.

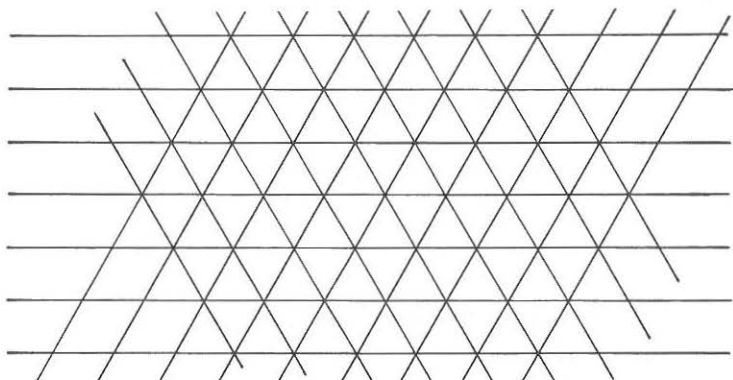
b)



1. Tu choisis deux points i, j .
2. Tu traces : le cercle de centre i qui passe par j
le cercle de centre j qui passe par i .
3. Il y a maintenant 4 points qui permettent de tracer 6 droites :
trace seulement les 5 droites qui déterminent deux triangles équilatéraux.
Ces 5 droites et les 2 cercles déterminent points d'intersection qui, à leur tour, déterminent de nouvelles droites qui

2°) Cherche les *polyèdres* dont le patron peut être découpé dans un trillage.

FICHE 3



1°) Rappelle la définition de la symétrie *centrale* ou demande-la ; illustre-la.

2°) Choisis deux noeuds sur le réseau, O_1 et O_2 :

— place un point A (un noeud aussi) ; trouve son symétrique pour O_1 — A' — puis le symétrique de A' pour O_2 — A'' — ; recommence avec d'autres points $B, C, D, \dots$ jusqu'à ce que tu aies tous les couples (x, x'') dont l'extrémité n'est pas hors de ta feuille.

— que peut-on dire des couples de points (x, x'') , c'est-à-dire (A, A'') , (B, B'') ... ?

— observe les quadrilatères $(x x'' y'' y)$, c'est-à-dire obtenus en traçant les quatre segments $[x x'']$, $[x'' y'']$, $[y'' y]$, $[y x]$ pour tout choix de $\{x, y\}$; un nom convient à tous : lequel ?

3°) Propose un codage des déplacements sur le réseau ;
donne alors :

— les codages de quelques-uns des plus courts chemins de O_1 à O_2 ;

— les codages de quelques-uns des plus courts chemins de A à A'' , de B à B'' , etc...

Observe .

— ayant choisi un noeud x , peux-tu trouver x'' sans utiliser les symétries pour O_1 et O_2 ?

Retenir

Sur le trillage infini, l'ensemble des couples (x, x'') est le graphe d'une application appelée *translation*.

FICHE [4]

Composition de symétries centrales

• Nous noterons S_{0_1} la symétrie de centre O_1 .

• Sur un trillage, ou sur un quadrillage, choisis 3 noeuds O_1, O_2, O_3 ; x désignant un noeud quelconque, on cherchera $x' = S_{0_1}(x)$ puis $x'' = S_{0_2}(x')$

puis $\overline{x} = S_{0_3}(x'') = S_{0_3}[S_{0_2}(S_{0_1}(x))]$

ou $\overline{x} = S_{0_3} \circ S_{0_2} \circ S_{0_1}(x)$.

Cherche les couples $(x, \overline{x})$ pour le plus grand nombre possible de noeuds $A, B, C, D, \dots$ etc.

Remarque : x peut aussi être pris en O_1 , en O_2 , en O_3 !

Conclusions pour $S_{0_3} \circ S_{0_2} \circ S_{0_1}$?

• Simplifions : notons 1, 2, 3 ... les centres des symétries, $S_1, S_2 \dots$ les symétries correspondantes.

— Etudier les applications $S_1 \circ S_3 \circ S_2, S_2 \circ S_1 \circ S_3, S_1 \circ S_2 \circ S_3, S_2 \circ S_3 \circ S_1, S_3 \circ S_1 \circ S_2$.

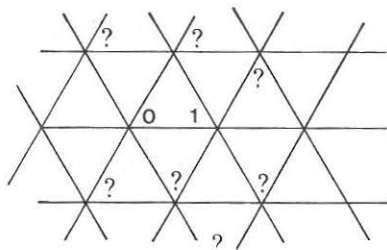
— Etudier l'application $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

— Etudier l'application $S_5 \circ S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

.....

FICHE 5

● Est-il possible d'attribuer à chaque noeud d'un trillage un des chiffres 0, 1, 2 de façon que les trois noeuds de toute maille du réseau portent trois chiffres différents ?



● Si a est l'aire d'une maille, comment sont codés les triangles d'aires $4a$, $9a$, $16a$, etc... ?

● Observer le réseau R_0 dont les noeuds sont les points codés 0.

Observer le réseau R_1 dont les noeuds sont les points codés 1.

Comparer l'aire d'une maille du trillage et celle d'une maille du réseau R_0 .

● Une ville a pour réseau de rues un trillage. Toutes les rues sont à sens unique, avec la règle :

on peut aller de 0 à 1, de 1 à 2, de 2 à 0.

Examiner la situation :

— du point de vue de la circulation : peut-on aller de n'importe quel point à n'importe quel point ?

— du point de vue de l'aménagement des carrefours.

● Pour tout couple (x,y) de noeuds on peut noter $p(x,y)$ la distance parcourue par un piéton pour se rendre de x à y , $v(x,y)$, la distance parcourue par une voiture pour se rendre de x à y .

— Comparer les 4 nombres $p(x,y)$, $p(y,x)$, $v(x,y)$, $v(y,x)$.

— Quand a-t-on :

$v(x,y) = p(x,y)$? $v(x,y) > p(x,y)$? $v(x,y) < p(x,y)$?

FICHE [6]

I. Le rouge et le noir (d'après STEINHAUS, "100 problèmes").

Sur un trillage est-il possible d'affecter à chacun des noeuds l'une des couleurs "rouge" ou "noir" de façon que pour chacune des mailles les règles suivantes soient respectées :

* si deux sommets de la maille ont la même couleur alors le troisième sommet est rouge ;

** si les couleurs de deux sommets sont différentes alors le troisième sommet est noir ?

II. Comparaisons du nombre de noeuds rouges et du nombre de noeuds noirs. Observons :

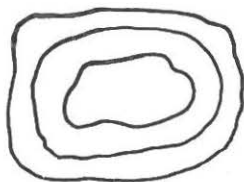
1°) sur une droite quelconque du dessin on observe la répétition périodique "rouge, noir, noir, rouge, noir, noir, ..." : donc il y a deux fois plus de noirs que de rouges ;

2°) un noeud rouge est le centre d'un hexagone dont les six sommets sont noirs : donc il y a six fois plus de noirs que de rouges ;

3°) de chaque noeud noir partent six segments dont trois conduisent à des noeuds rouges et trois à des noeuds noirs : donc il y a autant de noeuds noirs que de rouges !

Compare ces trois raisonnements et dis lequel te paraît juste.

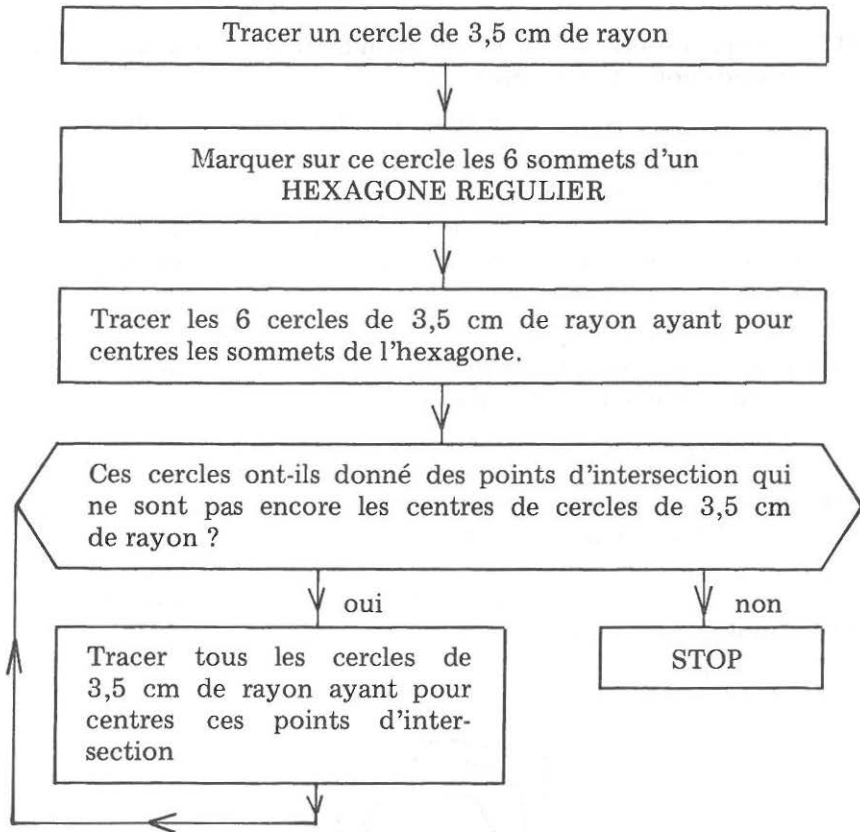
III. Un peu de statistique. Sur un trillage aussi grand que possible (mais à petites mailles) trace des lignes fermées ne passant par aucun des noeuds et limitant des surfaces d'aires croissantes $S_0, S_1, S_2, \dots$. Compare, pour chaque surface, le nombre de noeuds noirs et le nombre de noeuds rouges.



ANNEXE

Magdeleine MOTTE, qui nous communique ce travail d'équipe, nous adresse également sur ce thème ce texte qu'elle a utilisé en cinquième comme devoir à la maison, après lecture en classe.

La construction de l'hexagone régulier a été vue plus tôt dans l'année dans un devoir proposant un dénombrement de chemins dans une ville de plan hexagonal.



B/ Imaginer un pavage utilisant uniquement des segments joignant deux points distants de 3,5 cm et le réaliser à l'encre noire.

(Plusieurs solutions)

Au verso, nommer exactement les polygones utilisés.

1.3. TECHNOLOGIE ET MATHEMATIQUES

A. APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE A L'ESSAI DE DURETE VICKERS

Principe de l'essai

Données technologiques

Le pénétrateur est une pyramide à base carrée dont l'angle au sommet est 136° . Ce pénétrateur, soumis à l'action d'une force F (en kgf), laisse une empreinte dans le matériau à essayer. Après l'essai, on mesure la diagonale — d — de la base carrée de l'empreinte pyramidale.

Remarques : pour plus de précision, on mesure les deux diagonales de l'empreinte et l'on fait la moyenne :

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

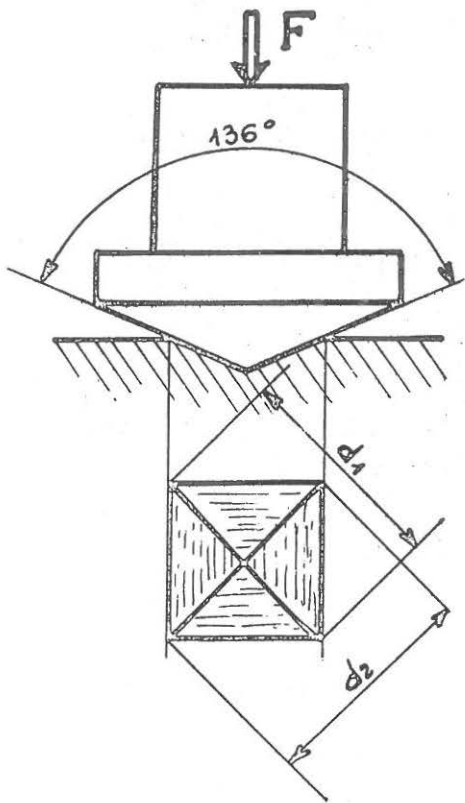
A titre de renseignement d : [0,15 ; 0,55 mm] selon la dureté.

La dureté (HV) est définie par le rapport $\frac{F}{S}$, où

F est la force exercée sur le pénétrateur (en kgf) et pouvant prendre une des valeurs suivantes :

5 — 10 — 20 — 30 — 50 — 80 — 100 ,

et où S est l'aire latérale de l'empreinte (en mm^2) qui sera fonction de d .



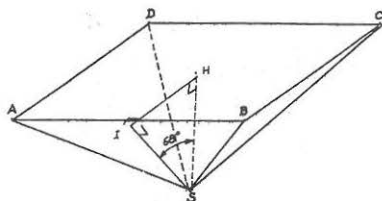
Problème posé

Trouver la formule de l'aire de l'empreinte permettant de calculer la dureté du matériau.

$AC = d$ (diagonale du carré ABCD)

$$AB = \frac{d\sqrt{2}}{2} ; HI = \frac{AB}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{4}$$

$$SI = \frac{HI}{\sin 68^\circ} = \frac{d\sqrt{2}}{4 \sin 68^\circ}$$



Aire latérale de l'empreinte :

$$S = 4 \times \frac{AB \times SI}{2} = 2 AB \times SI$$

$$S = 2 \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{d\sqrt{2}}{4 \sin 68^\circ} \right) = 2 \left(\frac{d^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{8 \sin 68^\circ} \right) = 2 \left(\frac{2 d^2}{8 \sin 68^\circ} \right)$$

soit $S = \frac{d^2}{2 \sin 68^\circ}$ avec $\sin 68^\circ = 0,927$

$$S = \frac{d^2}{1,854}$$

$$HV = \frac{F}{S} \quad \text{ou} \quad \frac{1,854 F}{d^2}$$

Publication IREM de Rouen
Groupe C.E.T. du Havre

*
* * *

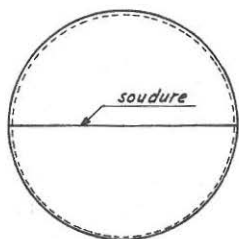
B. LA TRIGONOMETRIE APPLIQUEE A LA PROFESSION DES METAUX EN FEUILLES

Problème Technique I

Confection d'un flotteur de forme sphérique en aluminium.

Données Techniques

Pour obtenir un faible poids pour un grand volume, la pièce sera exécutée en deux éléments demi-sphériques à partir d'un disque de tôle (flan capable) qui seront ensuite assemblés.



Nous considérons, pendant les opérations de formage, que l'épaisseur reste constante, et que la matière est bien homogène.

Problème mathématique

Déterminer le rayon du flan capable à l'exécution d'un élément.

Calcul mathématique

Nous pouvons dire que la surface de la demi-sphère est égale à la surface du flan.

R : rayon de la sphère

r : rayon du flan

$$2 \pi R^2 = \pi r^2$$

$$r^2 = 2R^2$$

$$r = R\sqrt{2}$$

Solution graphique

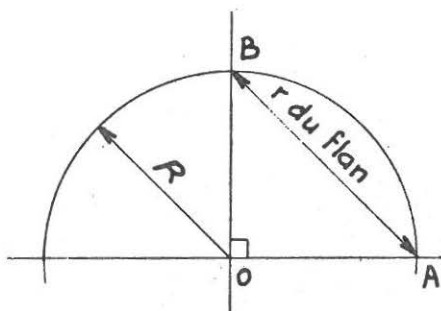
On vérifie que dans le triangle rectangle OAB

$$R^2 + R^2 = r^2$$

$$2R^2 = r^2$$

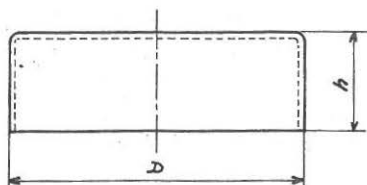
$$r = R\sqrt{2}$$

(théorème de Pythagore).



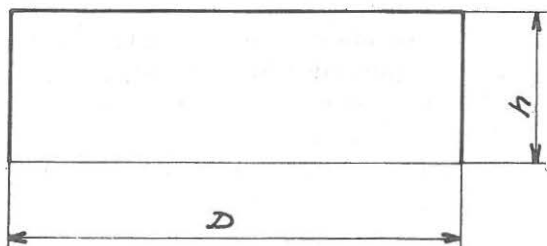
Problème technique II

Soit à confectionner des couvercles de boîtes cylindriques par emboutissage. A cet effet, il est nécessaire de calculer le rayon du flan nécessaire à la confection d'un couvercle.



Pour simplification de calcul nous négligeons l'épaisseur et le rayon de pliage.

Calcul mathématique



La surface du flan est égale à la surface totale de la pièce.
Soit D le diamètre du couvercle
 h la hauteur du couvercle
 r le rayon du flan.

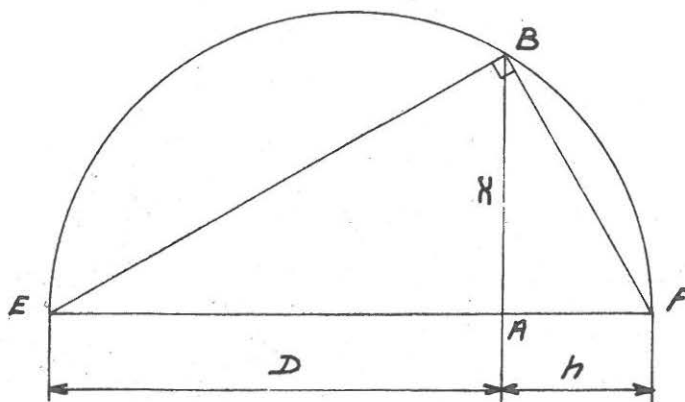
$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (D \times \pi \times h)$$

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{D^2}{4} + Dh\right)$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4} + Dh = \frac{D^2 + 4Dh}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + 4Dh}}{2}$$

Solution graphique

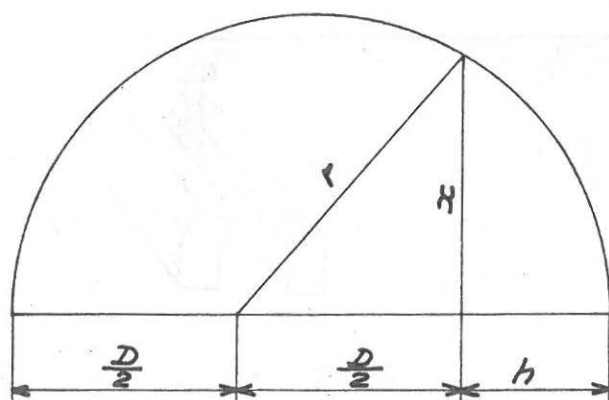


$$AB^2 = EA \times AF$$

$$\text{si } AB = x$$

$$x^2 = D \times h$$

$$x = \sqrt{Dh}$$



$$r^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + x^2$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4} + Dh$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + 4Dh}}{2}$$

Publication IREM de Rouen
Groupe CET du Havre

*
* *

C. UN THEME EN TRIGONOMETRIE - TECHNOLOGIE

par Gérard CONVERSET

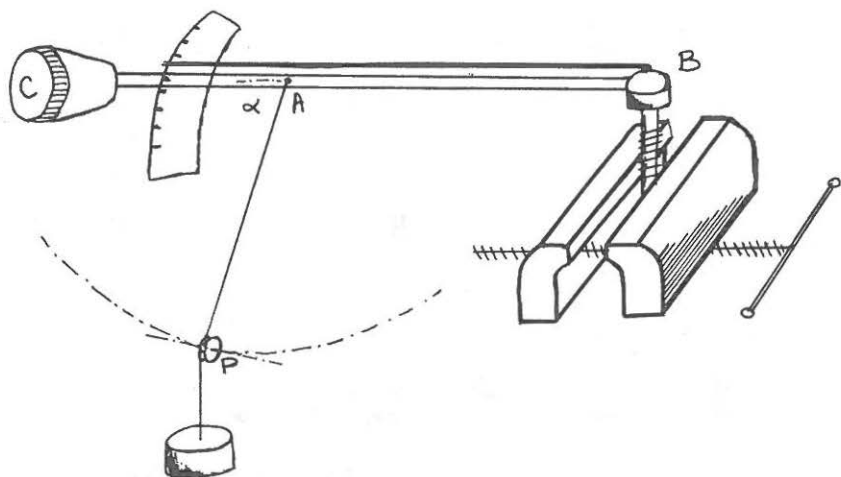
Dans le programme de troisième de Technologie, figure au chapitre "Mécanique" l'étude des rotations, de leur transmission, de leur guidage au travers d'objets facilement observables.

On est amené ainsi à étudier la limitation du freinage par frottement (rondelle ou surépaisseur qui amène les surfaces en contact le plus près possible de l'axe) et le rôle de la longueur du bras de manivelle (réduction de l'effort pour un résultat donné).

Cette étude, au départ basée sur l'observation et l'analyse de l'objet, débouche tout naturellement sur le moment d'une force.

En quatrième, la notion avait été vue de façon diffuse en étudiant les balances à bras égaux et inégaux et le pèse-lettres. En troisième, on peut isoler le phénomène qui nous intéresse, et en profiter pour en faire, suivant sa place dans la répartition annuelle, une leçon d'initiation à la Trigonométrie ou une séance interdisciplinaire Mathématique-Technologie plus complète.

J'avais réalisé le montage suivant :



Un boulon est solidement fixé sur un étau et serré à l'aide d'une clé.

Avec une clé dynamométrique, on mesure le couple de serrage. On maintient fixe la force exercée et le point d'application de celle-ci (Une masse est suspendue à un fil, qui passe sur une poulie P et vient s'accrocher en A au bras de la clé).

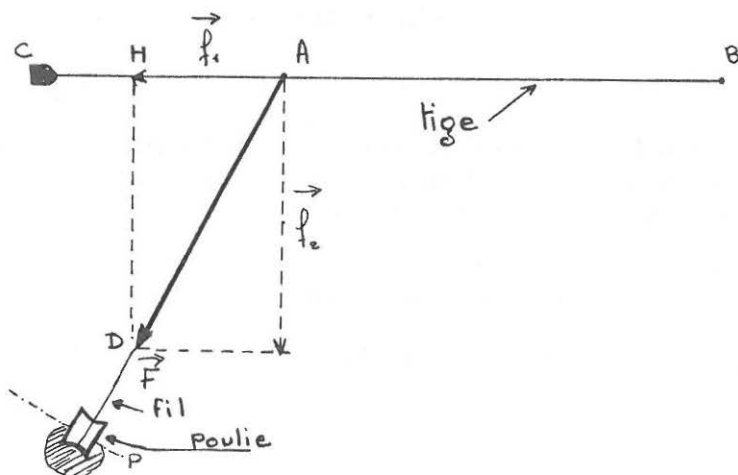
En déplaçant la poulie, qui est simplement tenue à la main, on modifie la valeur de l'écart angulaire CAP. Un rapporteur, tenu par un élève, indique de 0 à 180° cette valeur. La clé se déforme, et un cadran se déplaçant devant un index indique le couple de serrage.

Sur du papier millimétré, on reporte en abscisse $e(\text{CAP})$ de 10° en 10°, en ordonnée le couple indiqué. On obtient une demi-période qu'il est facile de compléter en choisissant un sens pour le couple et en mettant la poulie de l'autre côté (Attention que le boulon ne se desserre pas).

Une fois en possession de cette courbe, on voit facilement où se situent les couples maximum et on illustre ce résultat en se reportant à l'exemple des clés à molette, du pédalier de la bicyclette, etc...

On voit qu'il y a la double influence de la distance à l'axe de rotation et de "quelque chose" qui a rapport avec l'angle d'incidence de la force.

Une étude théorique facile, même en début de troisième, permet de dégager ou d'illustrer la notion de sinus :



La force $\vec{F}$, constante puisque c'est le poids du corps suspendu, se décompose en $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$.

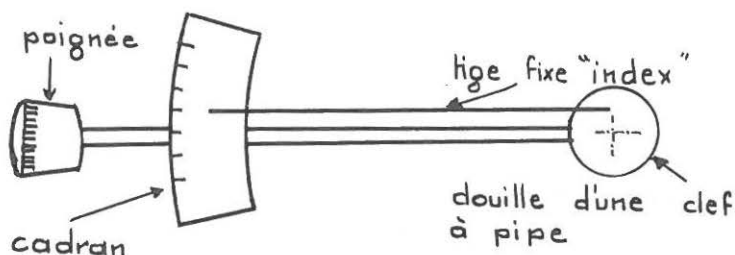
$\vec{f}_1$ n'a aucune influence sur la rotation.

$$\|\vec{f}_2\| = HD$$

$$\sin \alpha = \frac{HD}{AD} \Rightarrow HD = AD \sin \alpha = k \sin \alpha$$

$\vec{f}_2$ sera d'autant plus grande que α sera plus proche de 90° .

Nota — La clé dynamométrique que j'ai utilisée (marque Facom) a été prêtée par l'atelier du CES, mais il est très facile d'en faire une avec une clé ordinaire et deux morceaux de baguette sur le schéma suivant :

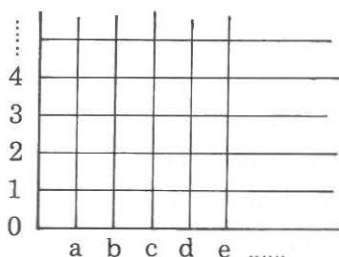


1.4. UN THEME MARITIME

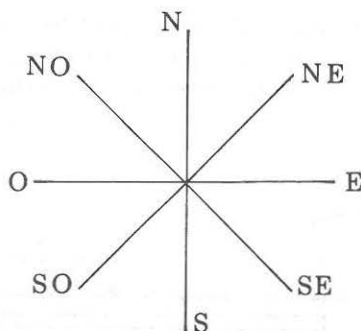
par François CARNET et Joël LEROY (I.R.E.M. de Caen)

L'ORIENTATION POLAIRE EN MARINE pour une approche de : Repérage, Direction, Sens, Secteurs angulaires, Vecteurs, Classes d'équivalence, Arcs, Mille marin, Noeud.

LA ROSE DES VENTS. Dessiner le polygone dont les sommets ont les coordonnées cartésiennes suivantes dans le repère ci-dessous : (h, 13), (i, 10), (l, 12), (j, 9), (m, 8), (j, 7), (l, 4), (i, 6), (h, 3), (g, 6), (d, 4), (f, 7), (c, 8), (f, 9), (d, 12), (g, 10).



C'est une rose des vents. La colorier. Placer N, NE, E, SE, ...
A l'aide de la règle et du compas tracer une rose des vents simplifiée :



VENT — COURANT — CAP — MILLE — NOEUD

On dit d'un vent du Nord qu'il *vient du Nord*. D'un courant de Nord, qu'il *porte au Nord*. D'un navire dont le cap est au Nord, qu'il *se dirige vers le Nord*.

Voici les représentations :

VENT DU NORD (en noeuds)

10 Nd, 20 Nd, 30 Nd,... 50 Nd...



COURANT DE NORD

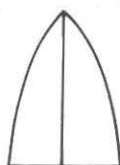
DE 2 Nd

1 cm par
noeud



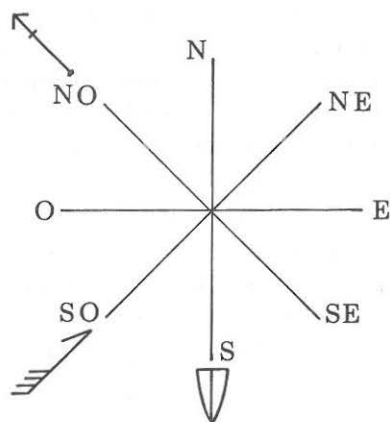
Ct Nord
2 Nd

CAP AU NORD



EXERCICE N° 1 : En vous aidant de la rose des vents et des schémas ci-dessus, placer a) un vent de SO de 40 Nd ; un courant de NO de 1,5 Nd ; un navire dont le cap est au Sud.

Remarque : Une réponse sera celle de la figure ci-contre. Une meilleure réponse est celle où l'élève se passe de la rose des vents. Introduire alors la notion de classe d'équivalence et d'un représentant de la classe et faire l'exercice n° 2.



EXERCICE N° 2 : Sur une carte simplifiée de la Baie de Seine un navire se situe au Nord de Ouistreham, à l'ouest du Havre. Il fait route au NE. Le vent de 50 noeuds est au SE. Le courant d'Ouest est de 4,5 Noeuds. Représenter le navire, le vent, le courant. (On appelle "point" l'endroit où se situe le navire. Y placer le navire)

EXERCICE N° 3 : Rappeler les notions de coordonnées géographiques : latitude, longitude. Pour garder un système de mesure cohérent on choisit le mille marin comme unité de longueur. Le mille marin est l'arc terrestre correspondant à une minute d'angle au centre. Exprimer le mille marin en kilomètres.

$$40\,000 : 360 = \dots\dots\dots \text{ arc correspondant à } 1^\circ .$$

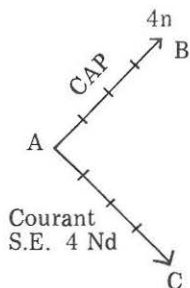
$$\dots\dots\dots : 60 = \dots\dots\dots \text{ arc correspondant à } 1^\circ \text{ ou mille marin.}$$

On appelle *NOEUD* l'unité de vitesse. Un noeud = 1 mille/h. Le "FRANCE" filait 35 noeuds. Donner cette vitesse en km/h.

EXERCICE N° 4 : a) Un navire situé au point $\left\{ \begin{array}{l} L = 49^\circ 30' N \\ G = 1^\circ 15' O \end{array} \right.$ parcourt un chemin estimé à 7 milles vers le Nord. Donner son point après ce parcours R $\left\{ \begin{array}{l} L = 49^\circ 37' N \\ G = 1^\circ 15' O \end{array} \right.$.

b) Un navire situé au point $\left\{ \begin{array}{l} L = 49^\circ 37' N \\ G = 1^\circ 15' O \end{array} \right.$ se déplace vers l'ouest et parcourt 10 milles. Sachant qu'un parallèle n'est pas un grand cercle de la sphère terrestre, le navire aura parcouru une distance dont la mesure de l'arc en minutes terrestres est supérieure à celle donnée en mille. La raisonement du a) n'est plus valable. Les marins utilisent des tables.

EXERCICE N° 5. Un navire situé au point A est soumis à un courant de SE de 4 noeuds et son cap est au NE. Son moteur lui donne une vitesse surface de 4 noeuds. Où se trouvera le navire au bout d'une heure ? en B ? en C ?



1.5. LE PAPIER PEINT

par Daniel CARRIOT, O.P.C. Clermont, D. BOISNARD et M. Th. LE CAM, O.P.C. Vannes

Ce document est le résultat d'un travail collectif mené dans le cadre de la recherche OPC. Le thème du "Papier peint" suffisamment connu et développé permettait d'obtenir un large consensus quant aux objectifs mathématiques poursuivis. Danièle Boissard dans une classe de Troisième, Marie-Thérèse Le Cam dans une classe de Cinquième, Daniel Carriot dans une classe de Sixième ont donc conduit une expérimentation et c'est une synthèse de leurs comptes rendus que je présente ici.

I. La phase d'observation du papier peint

1. En classe de Sixième elle a duré 4 heures.

Les élèves sont invités à reconstituer un lé de papier peint préalablement découpé en rectangles. Ils procèdent par essais successifs (échec — réussite) et l'on ne note pas chez eux de tentatives méthodiques. Un autre exercice consiste à remettre aux enfants divers échantillons de papier peint sans aucune directive et de recueillir les différentes observations. Il peut leur être demandé de boucher un trou dans un échantillon, à partir d'un motif existant. On s'efforcera de leur faire dégager le déplacement à effectuer.

L'observation est facilitée et prolongée par des exercices de dessins et de mesurages. La répétition de formes (carré, triangle rectangle isocèle, rectangle) ayant été reconnue, il est utile chez de jeunes élèves de les faire dessiner en vraie grandeur. On peut aussi leur demander de dessiner sur une feuille 21×27 l'échantillon qu'ils possèdent à l'échelle $1/2$, la consigne étant d'occuper toute la feuille 21×27 . Ainsi sont-ils conduits à prolonger le motif qu'ils ont sous les yeux. On notera à ce propos combien nous nous sommes efforcés de réinvestir des connaissances déjà acquises (ici la proportionnalité avec la notion d'échelle) et de poursuivre à côtés d'objectifs spécifiquement mathématiques des objectifs variés (ici exécution d'une tâche technique). De tels exercices peuvent paraître très simples. Cependant nombreux sont les élèves qui perdent pied. Ceux là ne voient plus les "diagonales", la plupart travaillent "au coup par coup". Ainsi ayant à construire les 2 carrés juxtaposés de la figure n° 1, ils dessinent d'abord le carré n° 1, puis le carré n° 2 sans vue synthétique de l'ensemble.



2. *Les élèves de Troisième* connaissaient les isométries du programme avant d'observer le papier peint. Il s'agissait pour eux de mettre à profit leurs connaissances et de les appliquer en "découvrant ce qu'ils connaissaient". Des échantillons ayant été distribués, on demande aux élèves de rechercher et de définir pour chacun de ces échantillons, et dans le cas où elles apparaissent :

a) les translations en précisant une base de vecteurs et un motif élémentaire minimum associé. Il peut exister différentes solutions.

b) les symétries orthogonales en précisant les axes de symétrie et le motif élémentaire associé.

c) les symétries centrales en précisant les centres de symétrie et un motif élémentaire associé.

En faisant comparer les réponses d'un groupe à l'autre, on amène les élèves à reconnaître des données équivalentes. Lorsqu'ils reconnaissent la solution d'un autre groupe comme acceptable, ils ont fait progresser leur capacité à changer de point de vue. Ceci concourt à la satisfaction d'un objectif général non négligeable.

II. La phase d'analyse

Elle vise à mettre en évidence l'existence d'un motif élémentaire, d'un ensemble de transformations (translation, symétrie axiale, symétrie centrale) et la dépendance du motif élémentaire et de la (ou des) transformation(s) utilisée(s). Ainsi les élèves de Sixième constateront-ils que si le motif élémentaire est réduit à un triangle ils doivent utiliser le calque avec retournement (cf annexe n° 2). Ainsi encore, dans le travail réalisé en classe de Troisième (cf annexe n° 1) on demande quel est le motif élémentaire dans le cas où les seules transformations permises sont les translations. Ils constatent, bien entendu, que celui-ci est bien plus grand que celui qui correspond aux symétries centrales. Ils constatent aussi que le plus petit motif élémentaire correspond aux symétries orthogonales. Cette constatation vise à attirer l'attention sur l'idée de système de générateurs.

Mais revenons aux classes de Sixième et de Cinquième pour décrire plus en détail cette phase d'analyse. Elle se situe, me semble-t-il, à deux niveaux.

Niveau n° 1

L'enfant prend conscience des transformations, se fixe des règles de jeu, utilise le papier calque, la règle, l'équerre, le pliage, les machines du type parallélogramme articulé...) manipule, décrit en utilisant son vocabulaire et ses gestes.

Niveau n° 2

- passage à la représentation.

- l'enfant va vérifier si la règle *formulée* est pertinente ; il va être amené à comparer plusieurs règles entre elles.

1) On donne aux enfants un échantillon (assez grand) de papier peint et on leur demande quel motif élémentaire permettrait de le reconstituer. Ils disposent d'un papier calque et de tous instruments classiques. Puis ils doivent prouver leurs affirmations en exécutant effectivement les déplacements indiqués.

2) On donne un échantillon et un motif élémentaire. Ils doivent reconstituer le modèle à l'aide d'appareils articulés (machine à symétriser, machine à traduire, etc...). Quelles machines utilise-t-on ?

3) On donne un échantillon et le motif élémentaire et on demande *de citer* les transformations qui vont permettre de reconstituer le modèle. La description étant établie, on réalise les transformations indiquées pour vérifier la validité des hypothèses (utilisation du calque par exemple).

4) L'échantillon étant donné, on recherche le plus petit motif élémentaire ; non seulement les élèves de sixième ont échoué dans cet exercice, mais, le motif élémentaire leur étant apporté par le maître, plusieurs n'ont pas été capables de reconstituer l'échantillon et nous avons obtenu beaucoup de constructions fausses : les axes de symétrie à utiliser étaient les 3 côtés du triangle rectangle (cf. annexe II). Ainsi ces enfants qui ne sont pas parvenus à un modèle "implicite" ont également échoué dans l'exécution d'une tâche qui leur était restée "extérieure".

5) Inversement le point départ est maintenant le motif élémentaire. Il s'agit de composer une tapisserie.

5.1. l'élève est libre de choisir son motif élémentaire et les procédés à employer (calque, pochoir, pliage, appareils articulés, instruments de dessin habituels) pour composer son modèle.

5.2. l'élève compose une tapisserie à l'aide d'un motif élémentaire et de consignes données par l'enseignant. On notera que c'est le point de départ de l'exercice donné en classe de Troisième.

5.3. à partir du même motif qu'en 5.2. et d'une autre transformation, l'élève compose une nouvelle tapisserie qu'il pourra comparer avec celle obtenue en 5.2.. L'aboutissement à des tapisseries différentes à partir d'un même motif "choque" les élèves (même en Troisième) et leur montre la puissance de l'idée de transformation.

III. Prolongement et applications

1) *Vers des activités numériques.*

Nous avons déjà fait observer un certain nombre d'activités de mesure et de calcul. Celle que nous décrivons ici concerne les *quadrillages*.

- l'élève doit réaliser un motif et son (ses) image(s) à partir de coordonnées fournies.

- un échantillon étant proposé et un quadrillage sur calque étant fourni à l'élève, celui-ci doit lire les coordonnées de certains points du motif élémentaire et celles de leurs images. En comparant les résultats il essaiera de déterminer une "règle de jeu".

Ce travail est en relation avec un travail sur Z et sur Q .

- prolongement d'un échantillon : l'élève doit calculer les coordonnées du $n^{\text{ième}}$ point image, celui-ci n'étant pas construit sur le modèle donné.

- On donne les coordonnées du motif élémentaire et de son image et l'élève doit déterminer la (les) transformation(s) permettant de passer de l'un à l'autre. Il vérifiera ses résultats en utilisant soit les appareils articulés, soit le calque, soit le pliage, les instruments de dessin (etc.)

2 *Etude systématique de glissements et de retournements*

Dans les classes de Sixième, le travail s'est poursuivi en systématisant par une étude sur fiches (4 h) les glissements et les retournements du plan. Les 3 fiches utilisées sont celles initiale-

ment prévues pour les classes OPC de Quatrième de Clermont-Ferrand.

a) mise en évidence du glissement et du retournement, superposition d'un triangle équilatéral à lui-même, codage de cette superposition.

b) composition de glissements et de retournements

c) étude de quelques glissements "importants"

- rotation

- translation

construction d'une règle graduée.

3) *Etude de quelques pavages du plan.*

- l'hexagone régulier.

- le triangle quelconque. On obtient en particulier le pavage (fig. 2) qui fait apparaître que la somme des mesures des angles d'un triangle est 180° . A ce stade il est intéressant *de déduire* que la somme des mesures des angles aigus d'un triangle rectangle est 90° et que dans un triangle équilatéral chaque angle mesure 60° .

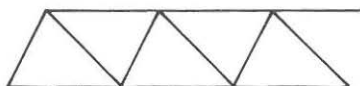


fig. 2

Ainsi apparaît un "îlot déductif" très court avec tout de même des renseignements intéressants qui pourront être réutilisés.

4) Conclusion

Il nous faut rappeler que nous proposons un enseignement par thèmes, qui sont des centres d'intérêt motivant, et que notre travail est un travail par niveaux :

a) manipulation

b) schématisation

c) formalisation

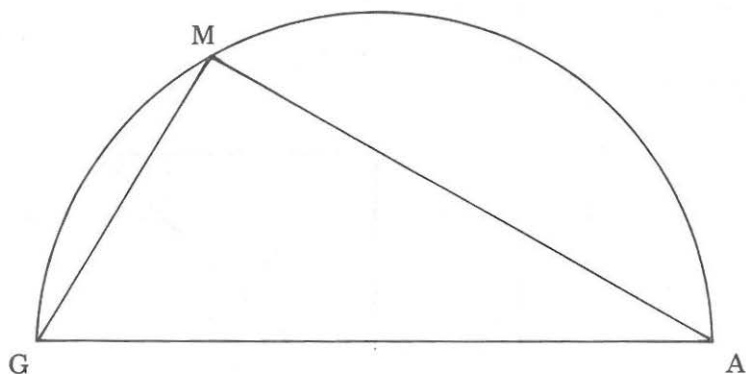
Evidemment en Sixième et en Cinquième nos ambitions sont modestes. Mais il est essentiel de ne pas s'en tenir au niveau 1.

Parallèlement, et toujours dans le cadre de notre recherche OPC, nous nous proposons de traiter la ligne "papier peint" du tableau des objectifs ; c'est cette ligne que nous fournissons maintenant, en n'ignorant pas tout ce qu'elle comporte d'incomplet et d'imperfections !

Résumé des objectifs opérationnels sur le thème "Papier peint"

Heuristique	Calculatoire	Classificatoire	Traductif	Logique	Réinvestissement	Technique	Critique	Prospectif
Recherche d'un motif élémentaire	Dessin à l'échelle 1/2	Etude comparée de déplacements.	Codage de déplacements	activités de déduction à propos des angles d'un triangle.	Notion d'échelle	Construction soignée de motifs à l'aide d'un motif élémentaire, au moyen de différentes isométries.	Pourquoi ne pave-t-on pas avec certaines figures ?	Groupe des déplacements
Puzzle	Table de composition des déplacements.	Transformations ou composées de transformations équivalentes.					Recherche d'une coquille dans une frise	
	Travaux dirigés sur quadrillage; approche ou activités sur Z, Q, D.	Classification de figures globalement invariantes.					Etude des différentes solutions proposées	

ANNEXE N° 1

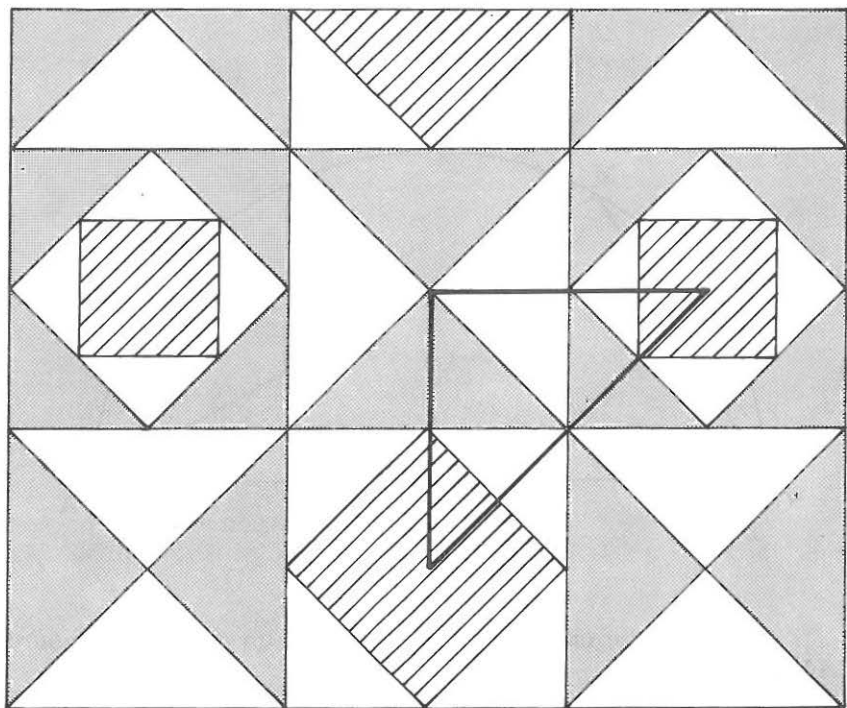


Sur la feuille ci-jointe, vous trouverez un *motif élémentaire* AMG .

- 2.1. Effectuez la symétrie orthogonale d'axe (AG) . Soit N l'image de M par cette symétrie.
- 2.2. Sur la figure obtenue, opérez la symétrie orthogonale d'axe (MG) . Soit B l'image de A et P l'image de N .
- 2.3. Effectuez maintenant la symétrie orthogonale d'axe (AP) . C est l'image de R .
- 2.4. Effectuez la symétrie orthogonale d'axe (BC) . D est l'image de A .

Puis effectuez successivement :

- 2.5. La translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $(A,B) \in \vec{u}$.
 B a pour image E et D a pour image F .
- 2.6. La translation de vecteur $\vec{v}$ tel que $(A,C) \in \vec{v}$.
 C a pour image H et F a pour image I .
- 2.7. La translation de vecteur $(-2\vec{u})$.
 A a pour image K et H a pour image L .
- 2.8. La translation de vecteur $(2\vec{v})$.
- 2.9. Complétez votre dessin pour recouvrir toute votre feuille par les méthodes qui vous semblent les plus simples.



ANNEXE N° 2

Les élèves de Sixième ont échoué dans la recherche et l'utilisation de ce motif élémentaire.

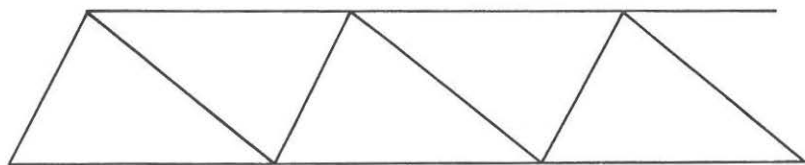


Fig. 2 — Paver le plan avec des triangles quelconques.

1.6. AFFINE OU METRIQUE ?

Extraits du n° 11 du Bulletin de Liaison des Professeurs de Mathématiques (AUDECAM, Association Universitaire pour le Développement de l'Enseignement et la Culture en Afrique et à Madagascar) et du "Petit Archimède" 37-38.

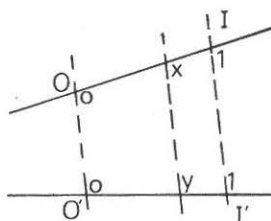
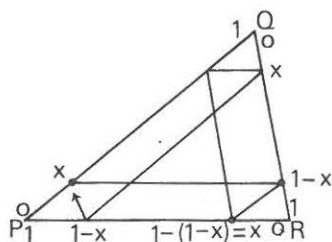
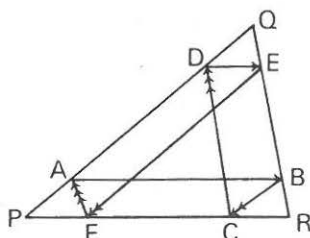
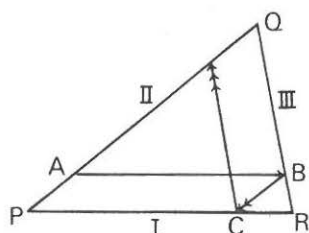
Textes d'André MYX (Lyon).

Cet article est particulièrement destiné aux élèves de quatrième, troisième et au-delà... et à tous les collègues, qui comme moi, ont parfois des doutes sur ce qui sépare

- la géométrie affine
(en un mot Thalès)
- la géométrie métrique ou euclidienne
(Pythagore pour simplifier)

Bref, rentrons dans le vif du sujet...

1. Les figures ci-dessous représentent le film d'une propriété du triangle que le lecteur connaît peut-être déjà.



Nous nous apercevons que notre ligne polygonale se ferme au bout de deux tours, en un seul si on choisit le point de départ A au milieu du côté...

- Certaines démonstrations sont très élégantes : je pense à celle qui nous fait choisir :

(P, Q) pour repère de la droite II
 (Q, R) pour repère de la droite III
 (R, P) pour repère de la droite I.

On démontre alors que le projeté de F sur II parallèlement à III est un point d'abscisse x, c'est-à-dire le point A.

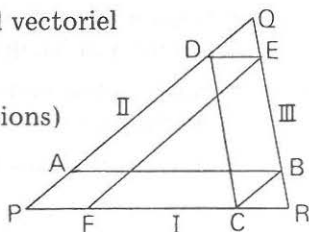
Nota bene. — Si O' est le projeté de O et I' le projeté de I, il suffit de savoir que la bijection $x \mapsto y$ est involutive (le calcul de $y = 1 - x$ est inutile !).

- Bien sûr, il est possible de choisir l'outil vectoriel (définition du parallélogramme) :

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DQ} \text{ (trois premières projections)}$$

De même

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FP}$$



Il suffit de montrer que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EQ}$ si on veut prouver que A est le projeté de F sur II parallèlement à III :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{EQ} \end{aligned}$$

- Voici enfin une démonstration pour élève de Terminale C :

N'oublions pas que les preuves les plus élégantes supposent le plus souvent une préparation laborieuse. Très rarement — je ne l'ai jamais rencontré dans un ouvrage — on fait appel à la *symétrie oblique* par rapport à d, parallèlement à PR...

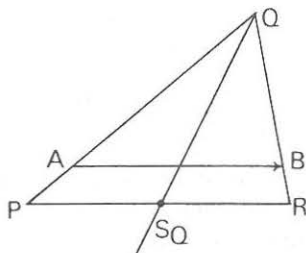
La transformation affine composée S :

$$S = S_P \circ S_R \circ S_Q \circ S_P \circ S_R \circ S_Q$$

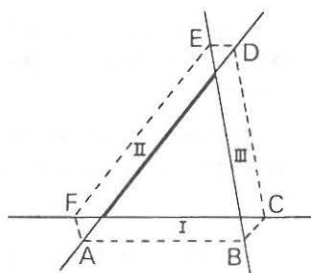
est telle que

$$S(P) = P, S(Q) = Q \text{ et } S(R) = R$$

C'est l'identité... Concluez !



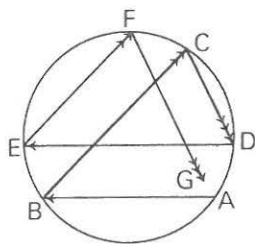
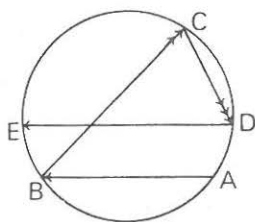
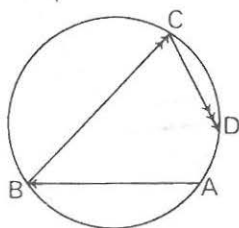
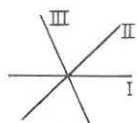
2. Nous avons l'habitude de choisir le point de départ sur le segment en trait fort sur la figure. La propriété semble moins mystérieuse si nous prenons le point de départ sur un des prolongements du côté du triangle...



3. J'en restais là lorsqu'un de mes amis (Pierre Gagnaire) me dit de recommencer le même dessin (animé) avec comme support, non pas un triangle, mais un cercle, un vrai, un qui soit tracé au compas !

Voici le mode d'emploi :

On se donne trois directions I, II et III (on pourrait dessiner un triangle) et on recommence le film des projections selon I, II, III, puis une deuxième fois si besoin est.



Tiens, tiens, cela se referme aussi !

Alors, cette propriété est-elle affine ou métrique ?

Ne répondez pas tout de suite ; attendez la fin...

Une ultime question sur ce cercle :

Où faut-il placer le point A si on veut que cela se referme en un seul tour ? Là, la démonstration semble plus compliquée que pour le triangle où il est simple de prouver que cela ne se produit que pour les milieux des côtés.

Et la démonstration de la propriété ?

Là encore, c'est affaire de symétrie et en examinant la figure achevée, nos lecteurs peuvent déjà trouver une solution — quitte à admettre une propriété bien évidente sur les arcs de cercle.

Si vous aimez le dessin, vous pouvez recommencer ces tracés avec cette fois-ci une ellipse !

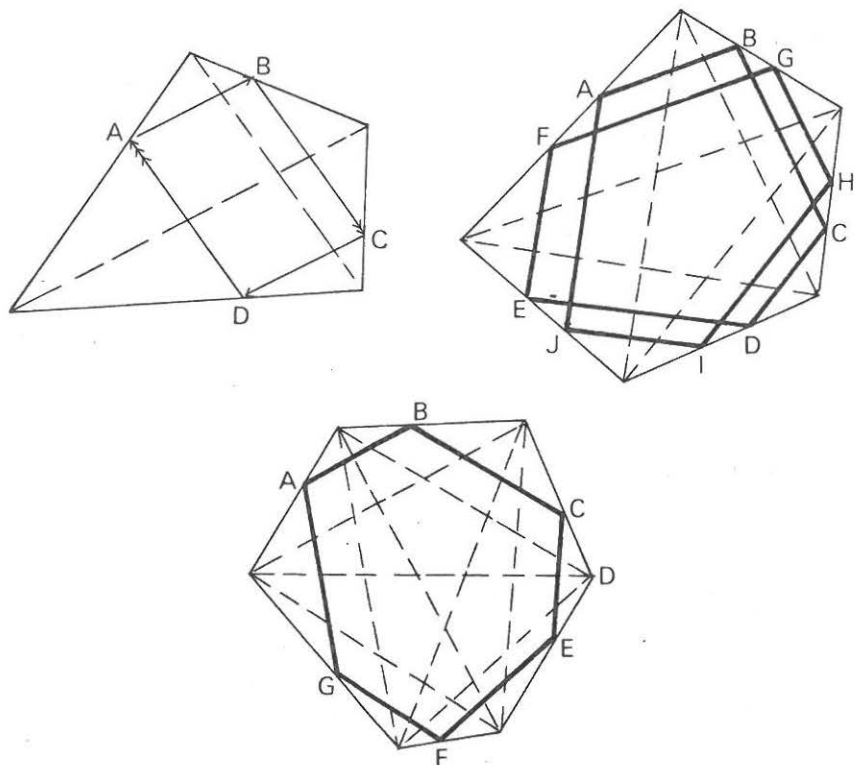
(Anciens professeurs de Math-Elem, à vos rangs !).

4. Pour terminer, nous pouvons revenir au triangle, ou plutôt aux polygones, et examiner les trois figures ci-dessous.

Qu'avons-nous voulu dessiner ?

Qu'avons-nous illustré ?

A vous de décrire ces dessins, d'en imaginer d'autres et de trouver quelques preuves bien ajustées.



1.7. SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

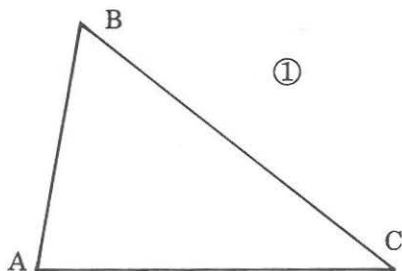
par Pierre GAGNAIRE, I.R.E.M. de Lyon

[1] Voici un triangle ABC dessiné sur du papier. Mesurons-en les angles au rapporteur. Nous trouvons, par exemple, à $0,5^\circ$ près :

$$\hat{A} = 81^\circ, \hat{B} = 61,5^\circ,$$

$$\hat{C} = 38^\circ, \text{ d'où}$$

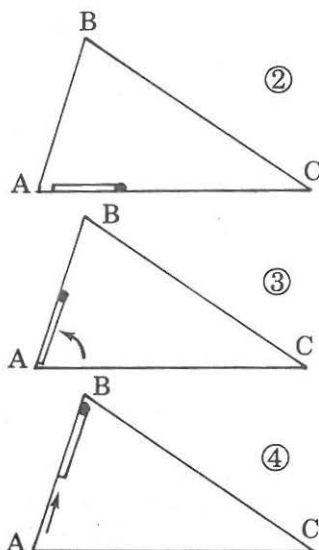
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 81^\circ + 61,5^\circ + 38^\circ = 180,5^\circ.$$



Renouvelons cette expérience avec des triangles de formes et tailles diverses : nous constatons que, dans tous les cas, la somme des angles est *voisine* de 180° . L'écart constaté entre 180° et la somme des mesures effectives des angles est-elle due à l'imprécision des expériences ?

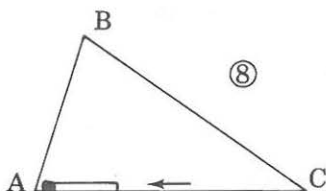
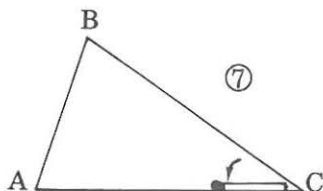
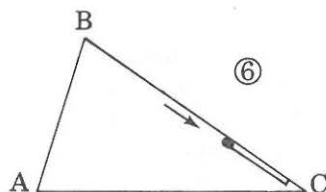
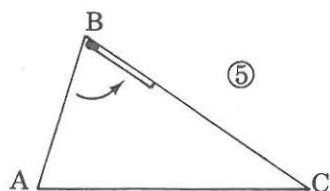
[2] Plaçons au point A une allumette comme l'indique la figure ② (l'extrémité rouge vers C), puis faisons-lui exécuter le parcours indiqué par les figures ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ; les flèches des figures ③, ⑤, ⑦, représentent des *rotations*, celles des figures ④, ⑥, ⑧ représentent des *glissements*.

Sur la figure ⑧, l'allumette est revenue au point A mais elle est dirigée en *sens contraire* de la position qu'elle avait en ②. Elle a donc fait $1/2$ tour, ou encore a tourné de 180° . Cette rotation de 180° ne peut provenir que des trois rotations décrites en ③ (d'angle $\hat{A}$), en ⑤



(d'angle $\hat{B}$), en ⑦ (d'angle $\hat{C}$)

Donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.



③ Ce qui a été décrit au paragraphe ② peut être aussi bien exécuté sur un *triangle sphérique*, à condition de remplacer l'allumette par une bande étroite de papier dont on coloriera une extrémité en rouge (cette bande s'appliquera sur la sphère parce qu'elle est flexible, alors qu'une allumette ne le peut pas).

Or, il est possible de tracer sur la sphère un triangle trirectangle, dont la somme des angles est 270° . Et pourtant, la rotation de l'"allumette" qui exécute le parcours ci-dessus décrit est toujours 180° .

Comment expliquer ce paradoxe ?

1.8. SUR LE THEME

"MEDIATRICE, ORTHOGONALITE, PARALLELISME"

par Jean GIRAUD

On sait que certaines équipes (OPC par exemple) traitent ce thème en début de Quatrième, ce qui me semble très souhaitable pour de multiples raisons. Je me propose d'analyser les conditions, avantages et conséquences de ce choix du seul point de vue d'un mathématicien qui n'a jamais enseigné dans ces classes. Il me

semble de bonne méthode de commencer par une analyse sommaire de la mathématique sous-jacente, du triple point de vue des concepts utilisés pour s'exprimer, des énoncés admis et des démonstrations qu'il est possible de faire, mais en même temps je montre à quel point cette entrée en matière permet de faire voir aisément que la "théorie" mathématique étudiée rend parfaitement compte de l'activité du dessinateur, armé de ses outils traditionnels. Le lecteur verra aussi que l'on peut très vite illustrer la *méthode* qui consiste à appliquer quelque isométrie simple à une figure pour en prouver les propriétés désirées.

§ 1. Etude mathématique

Il faut disposer de l'ensemble des nombres réels, du sous-ensemble de ceux qui sont positifs (par quoi on entend supérieurs ou égaux à 0) et de l'addition. On a rapidement besoin de diviser par 2, mais la multiplication n'est guère utilisée. L'étude des nombres réels peut donc être menée de front avec celle de cet îlot géométrique.

Pour rendre compte de l'activité du dessinateur, on imagine un ensemble P appelé plan dont les éléments sont appelés points, un ensemble $\mathcal{D}$ dont les éléments sont des parties de P que l'on appelle droites et une application $d : P \times P \longrightarrow \mathbb{R}^+$, appelée distance et qui est souvent notée $d(A,B)$, ou $|AB|$ ou même AB . Le dessinateur reporte les distances à l'aide d'un compas, il les mesure avec une règle graduée.

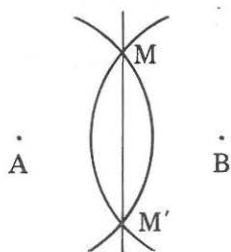
Nous admettons que deux points distincts A et B déterminent une droite D . Ils déterminent aussi le segment $[A,B]$ qui est défini par $[A,B] = \{ M \in P, d(A,M) + d(M,B) = d(A,B) \}$ et dont nous admettons qu'il est contenu dans la droite D et que, pour tout nombre réel x , avec $0 \leq x \leq d(A,B)$, il existe un unique point $M \in [A,B]$ avec $d(A,M) = x$.

En fait, il nous suffirait d'avoir défini le *milieu* de $[A,B]$ et admis son existence. On sait ce qu'est le cercle de centre O et de rayon R positif et l'on admet

- (I) Deux cercles de centres distincts et de rayons égaux et assez grands se coupent en deux points exactement.
- (II) L'ensemble des points équidistants de deux points A et B , avec $A \neq B$, est une droite appelée *médiatrice* de $[A,B]^*$.

* Je n'ai pas osé blasphémer et prendre (II) comme définition, ce qui eût évité d'introduire cet ensemble $\mathcal{D}$ qui n'est là que pour la précision du langage.

On peut donc *construire* la médiatrice D de $[A,B]$ en considérant deux cercles de centres A et B , de rayon R assez grand, leurs deux points d'intersection M et M' et la droite qui joint M et M' . On observe alors que $AMBM'$ est un *losange*, ce qui veut



dire que $AM = MB = BM' = M'A$. On dit qu'une droite D est orthogonale (ou *perpendiculaire*) à une droite D' s'il existe deux points distincts A et B de D' tels que D soit la médiatrice de $[A,B]$. La *construction* de la médiatrice montre alors que D' est perpendiculaire à D .

Elle montre aussi que les *diagonales d'un losange sont perpendiculaires*. On observe alors que, si l'on dispose quatre équerres superposables comme le suggère la figure, on trouve un losange et surtout que les huit côtés les plus courts se juxtaposent quatre à quatre sur les diagonales du dit losange. On en conclut que le dessinateur peut tracer des perpendiculaires avec une *équerre*, ce qui conduit à admettre

(III) Soit D une droite. Par tout point M , il passe une unique perpendiculaire à D ; elle coupe D en un seul point.

Proposition 1. Soit D une droite et M un point n'appartenant pas à D . Il existe un unique point M' tel que D soit la médiatrice de $[M,M']$.

Par définition, la médiatrice de $[M,M']$ est perpendiculaire à la droite MM' et passe au milieu de $[M,M']$. On trace donc la perpendiculaire à D passant par M qui coupe D en I et M' ne peut être que le point tel que I soit le milieu de $[M,M']$.

Il est séduisant de prouver plutôt la proposition en "inversant" la construction de la médiatrice. On admet alors que

(IV) Un cercle de centre donné et de rayon assez grand coupe une droite donnée en deux points exactement.

mais cela ne suffit pas tout à fait à prouver que la construction évidente aboutit à un point M' *différent* de M : pour cela on peut admettre (ce qui est laid) que si deux cercles se coupent en un seul point, celui-ci est sur la droite qui joint les centres.

Définition - On appelle *symétrique* d'un point M par rapport à une droite D

(i) le point M s'il appartient à D

(ii) le point M' tel que D soit la médiatrice de $[M, M']$ si $M \notin D$.

On appelle symétrie par rapport à D l'application $s_D : P \longrightarrow P$ qui associe à M son symétrique.

On admet que s_D conserve la distance, d'où l'on tire que l'image d'une droite perpendiculaire à D est elle-même, car c'est la médiatrice d'un couple de points de D et $s_D(s_D(M)) = M$; d'ailleurs toute droite est une médiatrice, donc son image est une droite; les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires; image d'un cercle, d'un segment ...

Remarque 1 : Si on a choisi d'admettre (IV), on en tire (III) : si $M \notin D$, la droite $Ms_D(M)$ convient; c'est la seule car on a vu que la perpendiculaire est stable par s_D . Si $M \in D$, d'après (IV) c'est le milieu d'un segment $[A, B]$ porté par D , donc la médiatrice de $[A, B]$ convient. Si D' est une autre perpendiculaire à D passant par M , la symétrie s_D conserve D et la distance (sic), donc applique A sur B et B sur A ; comme elle induit l'identité sur D' , il en résulte que D' est la médiatrice de $[A, B]$.

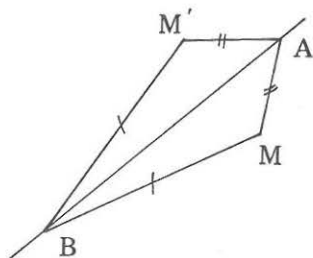
Remarque 2. Sans avoir à faire plus que contempler un losange, on voit que le pliage d'une feuille de papier ou l'image dans un miroir perpendiculaire au plan réalisent une symétrie. De même, les définitions de la médiatrice et du symétrique montrent que l'appareil ci-contre, où A et B sont assujettis à rester sur une droite fixe et où les distances

$$AM = AM'$$

et

$$BM = BM'$$

sont fixes, réalise la symétrie par rapport à la droite AB .



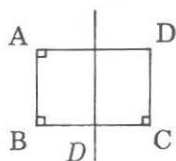
Définition. On dit que deux droites D et D' sont parallèles si $D = D'$ ou si $D \cap D' = \emptyset$.

D'après (III), si D et D' sont perpendiculaires à une même droite D'' , alors elles sont parallèles. On admet

(V) si D est parallèle à D' et perpendiculaire à D'' , alors D' est perpendiculaire à D'' .

Définition. On dit qu'un quadrilatère ABCD a un angle droit en B si les côtés AB et BC sont de longueur non nulle et portés par deux droites perpendiculaires. On dit que c'est un *rectangle* s'il a quatre angles droits.

Proposition 2. Un quadrilatère ABCD qui a trois angles droits est un rectangle. La médiatrice de [B,C] est aussi celle de [A,D] ; les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu, elles ont même longueur. Les côtés opposés ont même longueur.



En effet, si les angles en A, B et C sont droits, alors AD est parallèle à BC qui est perpendiculaire à DC, donc l'angle en D est droit. Si D est la médiatrice de [B,C], l'image de A par s_D est sur la perpendiculaire à D passant par A, qui est la droite AD, et sur l'image de la droite AB qui est la droite DC, donc $s_D(A) = D$. D'où l'on tire $AB = DC$ et $AC = BD$. De plus, BD n'est pas parallèle à D ; si l'on note O le point commun, il est fixe par s_D donc il est sur AC et $OA = OD$. La symétrie par rapport à la médiatrice de [A,B] montre que $OA = OB$, donc O est le milieu de BD et de AC.

Corollaire. Soient D et D' deux droites perpendiculaires et soit O leur point commun. Pour tout point M, on a

$$s_D(s_{D'}(M)) = s_{D'}(s_D(M))$$

et O est le milieu du segment $[M, s_D(s_{D'}(M))]$.

En effet, si M n'est ni sur D ni sur D' , les points $M, s_D(M), s_{D'}(s_D(M)), s_{D'}(M)$ forment un rectangle. Si M est sur D ou D' ...

Il est temps de s'arrêter puisque l'on change de thème ; non sans avoir noté que la matière développée jusqu'ici permet une foule d'exercices. Nous n'avons jamais utilisé l'inégalité triangulaire ; si on le regrette, s'en servir pour prouver que le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur D est le point de D le plus proche de M et pour améliorer les énoncés (I) et (IV).

§ 2. Commentaires

Pourquoi avoir choisi ces définitions vieillottes qui sentent la règle et le compas au lieu d'admettre tout de go l'existence de la symétrie droite ? Parce que cette présentation permet plusieurs niveaux de lecture : on peut se contenter de savoir reconnaître

quelques figures simples : losange, deux droites perpendiculaires à une même troisième, une médiatrice, un rectangle. On peut aussi être un peu plus dynamique et les construire avec les instruments de dessin. On peut aussi, si l'on maîtrise le concept de bijection du plan sur lui-même que j'ai utilisé librement, étudier l'image d'une figure par une symétrie (ou plusieurs), ce que fait le texte ; on peut enfin oublier tout cela et énoncer que le composé de deux symétries par rapport à des droites perpendiculaires est la symétrie par rapport à leur point d'intersection, ce que le dernier corollaire n'a pas osé faire en ces termes. A ce stade, on voit bien que l'énoncé est affranchi de la figure et concerne le groupe des isométries. Je crois très souhaitable que le maître ait la possibilité d'ajuster le niveau d'expression aux possibilités des élèves et il dispose d'une gamme très large avec le point de vue présenté ici. Par ailleurs, il faut bien reconnaître que pliage et papier calque ne sont pas les instruments de dessin les plus commodes et il me paraît très important de donner des énoncés constructifs, ou, si l'on préfère, de ne donner un énoncé d'existence que comme résumé d'un procédé de construction, l'unicité devenant une question naturelle (resp. oiseuse) s'il y a plusieurs procédés de construction (resp. un seul qui soit naturel). Il me semble aussi que le pari annoncé de bien faire voir que l'on rend compte de l'activité du dessinateur est assez facile à tenir, sans qu'on soit obligé de s'en tenir à ce point de vue étroit, ce qui serait néfaste (cf. remarque 2).

Pourquoi placer ce thème si tôt ? Il prolonge directement les acquis des classes antérieures. Contrairement à la géométrie affine, il ne nécessite que très peu de savoir sur les nombres réels ; d'ailleurs la nature exacte des nombres que l'on manipule peut être laissée dans l'ombre sans aucun inconvénient. On n'utilise pas la notion d'axe ou de droite graduée (un peu lourde peut-être à mettre en place) sauf en catimini pour dire qu'un segment a un milieu ou encore dans la première preuve de la proposition 1, mais l'axiome (IV) et le compas nous tirent alors d'affaire. Surtout ce thème permet d'emblée beaucoup d'exercices. Enfin, pourquoi pas ? puisqu'il ne déflorent guère la géométrie affine (parallélogramme, translations, Thalès).

Je voudrais revenir sur le problème d'adéquation au réel. Dans un film très intéressant sur la symétrie droite (IREM de Vannes), on voit des élèves étudier l'appareil figuré plus haut et croire qu'il réalise une symétrie oblique. Sans doute guidés par leur

maître, ils construisent l'image d'une figure par cette transformation et constatent avec stupéfaction que l'appareil, même en forçant un peu, refuse de leur donner raison. Il y a là, comme dit Pérol, une activité qui porte sa propre sanction; le maître n'a pas besoin de dire aux élèves qu'ils ont tort (ou raison). J'y vois plus : la preuve qu'il ne faut pas supprimer la manipulation en Quatrième, voire en Troisième. En effet, voilà une situation merveilleuse dont il serait bien triste de ne pas tirer parti : par définition de la médiatrice, la transformation réalisée par cet appareil se caractérise par le fait que la droite fixe est la médiatrice de M et de son transformé. Certes, les droites portant un point M et son transformé M' sont toutes parallèles, certes les milieux des segments $[M, M']$ sont sur la droite fixe, ce qu'ont vu ces élèves, mais en outre MM' est perpendiculaire à la droite fixe, ce qu'ils n'ont pas vu. Bien entendu, avec les définitions adoptées ici, ce ne serait qu'une tautologie si l'on n'avait pris soin de faire voir que la perpendicularité se vérifie avec l'équerre et qu'avec cette condition supplémentaire, tout rentre dans l'ordre. Un énoncé mathématique n'est pas gratuit : s'il est vrai, la réalité s'y plie, s'il est faux, elle se rebiffe.

Toujours sur le même sujet, un point essentiel. L'appareil en question, ou tout autre, ne définira jamais qu'une isométrie entre deux morceaux de plan. Or le mathématicien ose considérer des plans qui sont "infinis dans toutes les directions", même s'il se refuse (de nos jours) à écrire pareille horreur. Alors où est l'adéquation au réel ? En ceci bien sûr qu'une isométrie plane est caractérisée par l'image de trois points non alignés, ce qui résulte de (I). Plus modestement, dans le cas présent, l'expérience montre que l'appareil réalise une isométrie, la structure de l'appareil montre que c'est la restriction à une partie du plan de la symétrie par rapport à la droite fixe, transformation que le mathématicien sait définir sans peine dans le plan tout entier. Il me semble que les élèves ont tendance à se poser ce genre de question. Puisque l'on a une réponse à leur proposer, qui en outre est la bonne, pourquoi ne pas tenter de le faire ? Si l'on est optimiste, on peut espérer qu'ils comprendront que peu importe si les êtres mathématiques (comme une droite prolongée indéfiniment) existent ou non, le fait est qu'ils sont soumis aux contraintes exactement nécessaires pour que le raisonnement fait sur eux soit en accord avec le domaine expérimental dont la théorie étudiée est supposée rendre compte. Il y a là un objectif culturel (si ce mot a un sens) aussi

important que la connaissance de tel ou tel théorème. Mais on ne l'atteindra pas par un cours de philosophie, encore qu'un cours de philosophie soit bien utile pour l'explicitier mieux que je ne l'ai fait. Mais pas avant d'avoir parcouru, modestement mais avec toute la rigueur possible, l'orbite complète de la démarche scientifique : étude d'un domaine expérimental bien cerné, modèle mathématique simple, mais riche et précis, dont on teste l'adéquation au fur et à mesure de son élaboration, retour au domaine expérimental qui se trouve simplifié, organisé, éclairé. Encore faut-il que le processus de mathématisation ne soit pas trop difficile à manipuler et que les embûches en soient reconnues de longue date. Il me semble que c'est le cas de la géométrie, et j'ai seulement voulu montrer sur un exemple restreint qu'on peut l'enseigner à la fois comme une théorie mathématique et une science expérimentale.

1.9. LE DODECAEDRE ET LE NOMBRE D'OR

par le Père GASPARD

Les anciens de ma génération connaissent les polyèdres réguliers (1) et (2). Les plus jeunes ne peuvent pas manquer de faire connaissance avec eux bientôt. En effet, nombreuses sont les publications récentes (3) et (4) qui présentent agréablement ces beaux objets et leur environnement de bijoux. Ils constituent un thème riche, exploitable à tous les niveaux de notre enseignement en liaison avec le travail manuel, l'éducation artistique ou d'autres disciplines.

Délaissant le cube et ses dérivés — l'octaèdre et le tétraèdre, dont l'exploitation, quoique riche, est plus élémentaire et serait utilisable dès le premier cycle —, je voudrais évoquer un peu ici quelques éléments du dodécaèdre.

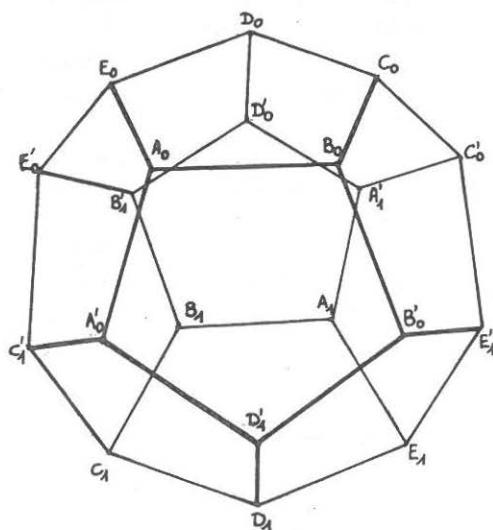
Le dodécaèdre régulier

12 faces qui sont des pentagones réguliers congrus (superposables).

Combien de sommets ?

Combien d'arêtes ?

Le croquis ci-dessous montre sommairement mes notations.



On peut facilement montrer (éventuellement à des degrés de rigueur divers), l'existence de trois sphères concentriques :

- une sphère circonscrite à laquelle tous les sommets appartiennent (rayon R)
- une sphère tangente à toutes les faces (rayon r)
- une sphère tangente à toutes les arêtes (rayon ρ).

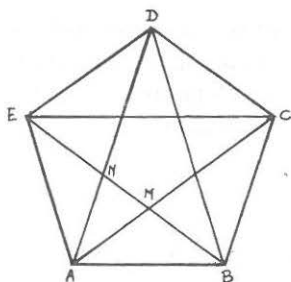
Il est intéressant d'exprimer en fonction de l'une d'entre elles les nombreuses dimensions intéressantes : arête $2a$, R , r , ρ , rayons des cercles circonscrits et inscrits aux faces R et r et les caractéristiques du dièdre.

Nous avons intérêt à commencer notre étude par celle du pentagone régulier.

Le pentagone régulier

Démontrez donc d'abord que M divise la diagonale BE en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire que

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{BM}}$$



Une fois établis les parallélismes cotés-diagonales, c'est un exercice de géométrie affine.

En déduire que le rapport $\frac{BE}{CD}$ est la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire le célèbre nombre d'or :

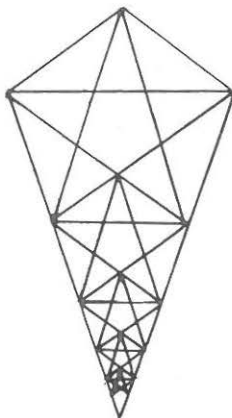
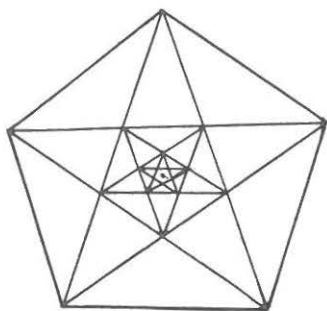
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$$

$$CD = 2a ; BE = 2a \Phi ; \frac{ME}{BM} = \Phi \text{ d'où } BM = 2a \Phi^{-1}$$

$$\frac{BM}{MN} = \frac{CM}{MA} = \Phi \text{ d'où } MN = 2a \Phi^{-2} .$$

Le petit pentagone central dont MN est un côté est homothétique de ABCDE dans le rapport $-\Phi^{-2}$.

Si vous aimez les belles figures rythmées, voici pour amorcer votre imagination :



Nous pouvons maintenant exprimer divers éléments géométriques intéressants de cette figure en fonction de $AB = 2a$. Pour obtenir des expressions élégantes, il est bon d'avoir quelques notions sur la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci

C'est la suite définie par récurrence par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Remarquons que la relation de récurrence permet d'étendre la suite dans les deux sens.

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, \dots$$

$$u_{-1} = 1, u_{-2} = -1, u_{-3} = 2, u_{-4} = -3, \dots$$

Il est bien connu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi$

Exprimez les puissances de $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ à l'aide de la suite de Fibonacci.

$$\Phi^1 = \Phi = u_0 + u_1 \Phi$$

$$\Phi^2 = 1 + \Phi = u_1 + u_2 \Phi$$

$$\Phi^3 = \Phi + \Phi^2 = 1 + 2\Phi = u_2 + u_3 \Phi$$

$$\Phi^4 = \Phi + 2\Phi^2 = 2 + 3\Phi = u_3 + u_4 \Phi$$

Démontrez que $\Phi^n = u_{n-1} + u_n \Phi$ pour $n \in \mathbb{N}_*$.

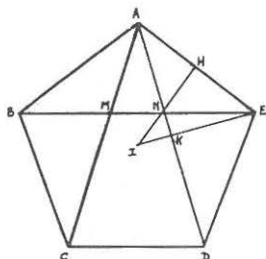
Démontrez aussi la formule pour $n \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte une expression de Φ^n sous la forme

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n \sqrt{5}) \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}.$$

La suite de Fibonacci est aussi une mine d'exercices et de sujets de réflexion à divers niveaux, mais ce n'est pas mon sujet et les quelques remarques ci-dessus me suffiront.

Retour au pentagone



Calculons les rayons des cercles intéressants. Soit I le centre du pentagone. Soit H le milieu d'un côté et K celui d'une diagonale. Le cercle circonscrit au pentagone a pour rayon IA. Le cercle inscrit dans le pentagone a pour rayon IH. Le cercle inscrit dans le pentagone étoilé (et dans le petit pentagone central) a pour rayon IK.

Pythagore donne :

$$IH^2 = IA^2 - a^2 \quad (1)$$

$$IK^2 = IA^2 - a^2 \Phi^2 \quad (2)$$

D'autre part, l'homothétie mise en évidence plus haut donne :

$$IH = IK \Phi^2 \quad (3)$$

De ces trois égalités, nous déduisons :

$$IK^2 = a^2 \frac{\Phi^2 - 1}{\Phi^4 - 1} = \frac{a^2}{\Phi^2 + 1} = \frac{a^2}{2 + \Phi} = \frac{a^2 (3 - \Phi)}{5}$$

$$IH^2 = \frac{a^2}{2 + \Phi} \cdot \Phi^4 = a^2 \frac{2 + 3\Phi}{2 + \Phi} = \frac{a^2 (3 + 4\Phi)}{5}$$

$$IA^2 = a^2 \left(1 + \frac{2 + 3\Phi}{2 + \Phi} \right) = 4a^2 \frac{1 + \Phi}{2 + \Phi} = \frac{4a^2 (2 + \Phi)}{5}$$

Rien n'empêche de calculer, à titre d'exercice scolaire, le carré du rayon du cercle circonscrit au petit pentagone central et aussi NH^2 , KE^2 , CH^2 , etc....

Mais là encore, nous nous écartons de notre ligne directrice. Calculons pourtant la distance entre un côté et la diagonale qui lui est parallèle.

$$d^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{\Phi^2} = a^2 \frac{3 + 4\Phi}{1 + \Phi} = a^2 (2 + \Phi)$$

Le dodécaèdre et le cube

Considérons deux faces adjacentes.

$$\overrightarrow{EC} = \Phi \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{A'_0 B'_0} = \Phi \overrightarrow{AB}$$

d'où $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{A'_0 B'_0}$

$ECB'_0 A'_0$ est un parallélogramme.

$$|EC| = 2a\Phi = |A'_0 E|$$

car ce sont des diagonales de pentagones superposables.

Donc $ECB'_0 A'_0$ est un losange.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'_0} \cdot \overrightarrow{AB} = (2a)^2 \cos 108^\circ$$

d'où

$$\overrightarrow{EA'_0} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AA'_0}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$\overrightarrow{EA'_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc perpendiculaire à $\overrightarrow{EC}$ et le quadrilatère $ECB'_0 A'_0$ est un carré.

Le lecteur trouvera alors les raisons qui font que $E, C, B'_0, A'_0, A'_1, B'_1, C'_1, E_1$ sont les sommets d'un cube dont les notations choisies appartiennent les sommets opposés.

Ce cube a une arête et une seule dans chaque face de notre dodécaèdre. Voyez (4), page 39.

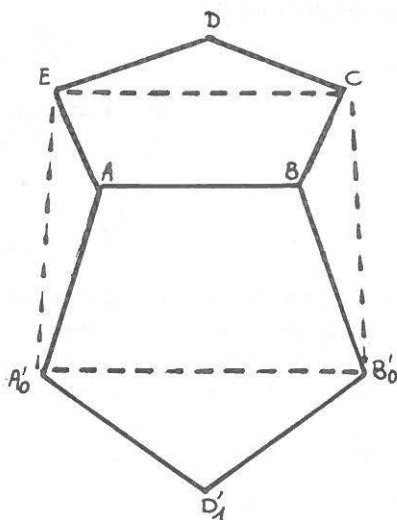
Un cube analogue peut être construit sur chaque diagonale de l'une des faces du dodécaèdre. Ces cinq cubes constituent par leur imbrication une très belle figure.

Voyez (4), page 42.

Calcul des rayons des sphères intéressantes.

Si $2a$ est la mesure du côté du dodécaèdre, $2a\Phi$ est celle du côté du cube et la diagonale du cube mesure $2a\Phi\sqrt{3}$.

Le rayon de la sphère circonscrite au dodécaèdre (et au cube) est $R = a\Phi\sqrt{3}$. Pythagore donne alors tous les autres rayons intéressants :



Enfin

Chacun peut trouver des prolongements plus ou moins savants, étudier les nombres de la forme :

$$a\Phi + b \quad \text{ou} \quad \frac{a\Phi + b}{c\Phi + d} \quad \text{ou autre chose.}$$

Ou réaliser un dodécaèdre avec la technologie qui est de son domaine en chaudronnerie ou en mécanique générale ou en menuiserie.

Pour réaliser des objets tels que les 5 cubes imbriqués mentionnés plus haut, il peut être utile de représenter le dodécaèdre en géométrie de Monge dans l'une ou l'autre des positions qui donnent à quelque élément de symétrie une position remarquable. C'est un exercice qui, sans mettre en jeu des connaissances de haut niveau, est fort intéressant.

Amusement ? Je le pensais il y a quelques mois, jusqu'au jour où un petit industriel de notre région fit appel à notre Département de Mathématiques pour construire, en métal plein, un dodécaèdre dont la sphère circonscrite avait un rayon imposé. Il avait reçu commande de cet objet d'une firme de traitement de minerai pour laquelle il avait l'habitude de travailler. C'est en cherchant à lui rendre service que j'ai obtenu pour les côtés les belles expressions qui m'ont incité à écrire ces quelques pages.

BIBLIOGRAPHIE

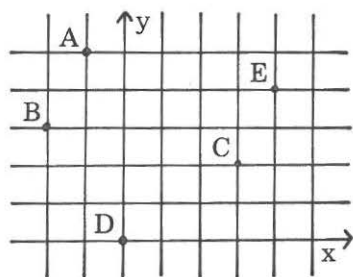
- (1) ROUCHE et COMBEROUSSE, Traité de géométrie (Deuxième partie)
- (2) J. HADAMARD, Leçons de géométrie élémentaire - II Géométrie de l'espace. Pages 419 à 451.
- (3) WENNINGER J. MAGNUS, Polyedron Models — Nombreuses photos.
- (4) A. HOLDEN, Formes, espace et symétries
CEDIC Collection "Les distracts" N° 2 - 200 pages - Nombreuses photos.
- (5) J.L. LOCHER, Le Monde de M.C. Escher - Gravures - N° 81, 157, 177, 178.
- (6) C. MATILA GHYKA, Essai sur le rythme NRF 1938.
- (7) N. VOROBIEV, Caractères de divisibilité - Suite de Fibonacci - Editions MIR, traduit du Russe.
- (8) Marius CLEYET-MICHAUD, Le Nombre d'or - Collection Que sais-je ?
- (9) Garth E. RUNION, The Golden Section 150 pages.
- (10) MOURLEVAT G. "Le Nombre d'or à Notre-Dame du Port" Bulletin de l'A.P.M.
49ème année, N° 275-276, pages 291-323
- (11) I.R.E.M. de Clermont, Le Nombre d'or, Film 8 mm
- (12) I.R.E.M. de Clermont, Le Nombre d'or, Film sonore 16 mm.

1.10. QUELQUES EXERCICES DE RECHERCHE

[Extrait de : LES CAHIERS DU GROUPE DU CLAIN, I.R.E.M. de Poitiers]

CINQ POINTS AU HASARD !

On donne dans $Z \times Z$ cinq points distincts. Montrer qu'il existe un segment dont les extrémités sont deux de ces points et dont le milieu appartient à $Z \times Z$.



Eliminatoire 1^o degré — Olympiades Polonaises.

Pour des petits élèves (décoder le message). On a un quadrillage. Marque cinq points comme tu veux sur ce quadrillage. On peut tracer des segments en joignant les points deux à deux. Ces segments ont chacun un milieu. Trouve un segment (ou plusieurs) dont le milieu est un des points du quadrillage.

Pour des élèves ayant l'habitude d'utiliser un plan repéré :

Choisir un repère, trouver les coordonnées des points A, B, C, D, E. Comment déterminer les coordonnées du milieu d'un segment ?

Par exemple I milieu de AB

$$x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_1 = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Chercher un segment (ou plusieurs) dont le milieu est un des points du quadrillage.

Pour ces deux exercices les élèves trouveront au moins un segment pour leur dessin.

Démonstration : le point I milieu d'un segment MN est à un coin du carreau si et seulement si $x_M + x_N$ et $y_M + y_N$ sont tous les deux pairs, c'est-à-dire si x_M et x_N ont même parité et si y_M et y_N ont même parité (condition (1)).

Abscisse Ordonnée	Paire	Impaire
	Paire	D, E
Paire	D, E	C
Impaire	B	A

Considérons le diagramme de Carroll ci-contre.

On va y placer le nom des sommets ; par exemple, si x_c impair et y_c pair, on marque C dans la case supérieure droite.

Il est clair que chacune des 5 lettres A, B, C, D, E pourra être placée dans une (et une seule) case.

Si deux lettres sont dans une même case, par exemple D et E, la condition (1) est évidemment remplie. Donc le milieu de DE est un coin de carreau : DE répond à la question.

On peut ainsi trouver tous les segments répondant à la question.

Montrons qu'il en existe toujours au moins *UN* :

En effet, si cela n'était, il n'y aurait pas 2 lettres dans une même case. Or il y a 4 cases et 5 lettres.

Donc il y a *au moins* une case contenant deux lettres : il y a donc au moins un segment.

Exercice annexe :

1) Faire un dessin correspondant au cas où tous les *segments* ont des milieux appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Même question pour *un seul segment*

3) Même question avec *deux segments*

4) Même question avec *trois segments*

5) Même question avec *quatre segments*

6) Même question avec *six segments*

7) Le problème est-il possible pour 5 segments ? 7 segments ? 8 segments ? 9 segments ?

Remarque : le triangle de Pascal peut être utile.

CERCLES ET QUADRILLAGE

Sources : Olympiades suédoises 1961 à 1968 (document SMF).

Quelle est la circonférence du plus grand cercle que l'on peut tracer dans les carrés noirs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté ?

Idée de la démonstration

1) Un cercle peut être tracé dans un carreau. Le rayon maximum est alors 2 cm (fig. 1).

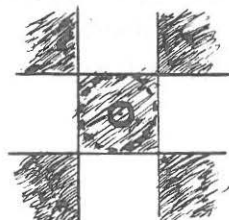


fig. 1 $R_0 \leq 2$

2) Si un cercle est tracé sur plus d'un carreau, il passe nécessairement (fig. 2) par les coins de carreaux (intersection du quadrillage).

Par suite, il doit (aux translations et symétries près) soit passer par deux coins de carreaux consécutifs, soit passer par deux coins de carreaux en diagonale.

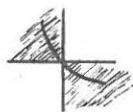


fig. 2

2-1) Le cercle passe par 2 coins de carreaux consécutifs, soit A et B : son centre est sur Δ médiatrice de AB; le cercle peut passer soit par C (à une symétrie près), son centre est alors I et son rayon $R_1 = 2\sqrt{2}$ (fig. 3), soit par D, mais alors on est ramené au cas suivant.

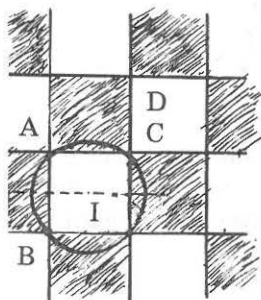


fig. 3 $R_1 = 2\sqrt{2}$

2-2) Le cercle passe par 2 coins de carreaux A et D

en diagonale (fig. 4). Il ne peut passer par E, donc il passe (à une symétrie près) par B. Son centre est alors sur la médiatrice de AB d'une part, sur celle de AD d'autre part, donc en J. Le calcul du rayon A J est immédiat :

$$AJ^2 = JH^2 + HA^2 = 40$$

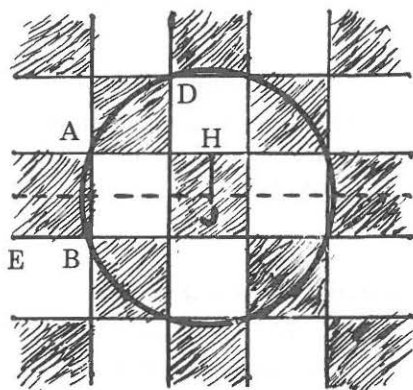
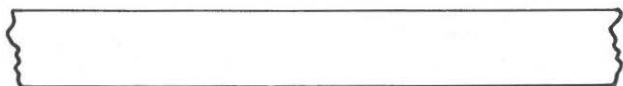


fig. 4 $R_2 = 2\sqrt{10}$

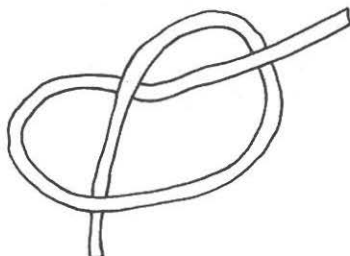
3) *En résumé* : le plus grand cercle correspond au cas de la figure 4, son rayon étant $2\sqrt{10}$.

CONSTRUCTION SANS COMPAS D'UN PENTAGONE REGULIER ET NOEUD DE SERVIETTE

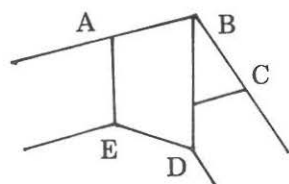
1) Prendre une bande de papier (bords parallèles).



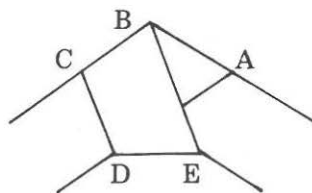
Faire avec cette bande un noeud "ordinaire" (comme on ferait avec une ficelle).



On obtient vu d'un côté



Vu de l'autre côté



En supposant le pliage très bien fait, le pentagone A B C D E est régulier.

2) Que se passe-t-il pour un noeud de serviette ?

COLORONS LA SPHERE

On peint une partie de la surface d'une sphère.

L'aire de cette partie est inférieure aux $\frac{7}{15}$ de l'aire de la sphère.

Montrer qu'il existe 2 points diamétralement opposés non peints.

Raisonnons par l'absurde.

Si tout diamètre admet au moins une extrémité peinte, alors la surface symétrique de la surface non peinte par rapport au centre de la sphère est une surface peinte.

L'aire de réunion de ces deux surfaces symétriques est donc supérieure ou égale à $\left(\frac{8}{15} + \frac{8}{15}\right)$ de l'aire de la sphère.

Ce qui est absurde.

PPMC, CHEMINEMENT SUR UN QUADRILLAGE, ET ORGANIGRAMME

Dans ce problème les nombres utilisés sont tous des naturels.

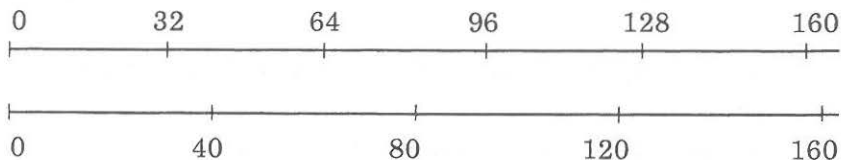
Soient deux naturels A et B. Chercher le plus petit naturel M multiple de A et de B. On supposera $A \leq B$.

1) *Les méthodes traditionnelles* (décomposition en facteurs premiers de A et B ...) conduisent au PPMC et au PGDC.

Rappelons que si M est le PPMC de A et B et m le PGDC de A et B, alors $m.M = A.B$.

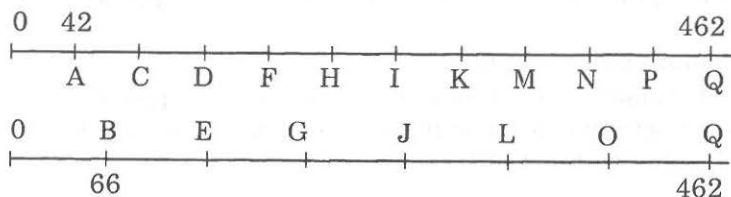
2) Une méthode simple

a) Soient les nombres 32 et 40.



Les multiples de 32 étant 32, 64, 96, 128, 160, 192, ... ceux de 40 étant 40, 80, 120, 160, 200, ..., une méthode simple serait d'“avancer prudemment” en passant par les points 32, 40, 64 ... sans aller “trop vite” et surtout sans aller “trop loin” ; ainsi à l'étape 160 on pourrait constater que 160 est multiple de 32 et de 40 et c'est bien le plus petit multiple commun à 32 et 40.

b) Re commençons avec les nombres 42 et 66.



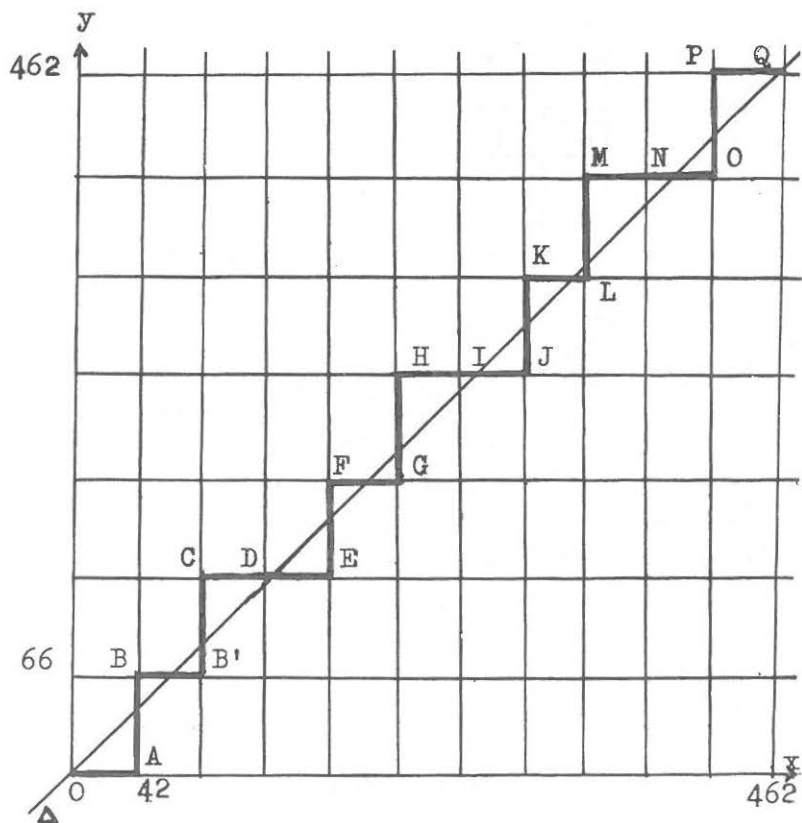
La même “avance prudente” nous conduit à 462, PPMC de 42 et 66.

c) Il est intéressant de voir dans les deux cas précédents la progression de la marche.

3) Une visualisation dans le plan

a) On peut sur du papier millimétré représenter la progression.

Prenons par exemple 42 et 66. Imaginons un quadrillage (voir schéma). Le PPMC, 462, correspondra à la première intersection de la bissectrice Δ avec les “coins” du quadrillage. En abscisse : $11 \times 42 = 462$, en ordonnée : $7 \times 62 = 462$.



b) Il est facile de prouver que cette construction est valable dans le cas général.

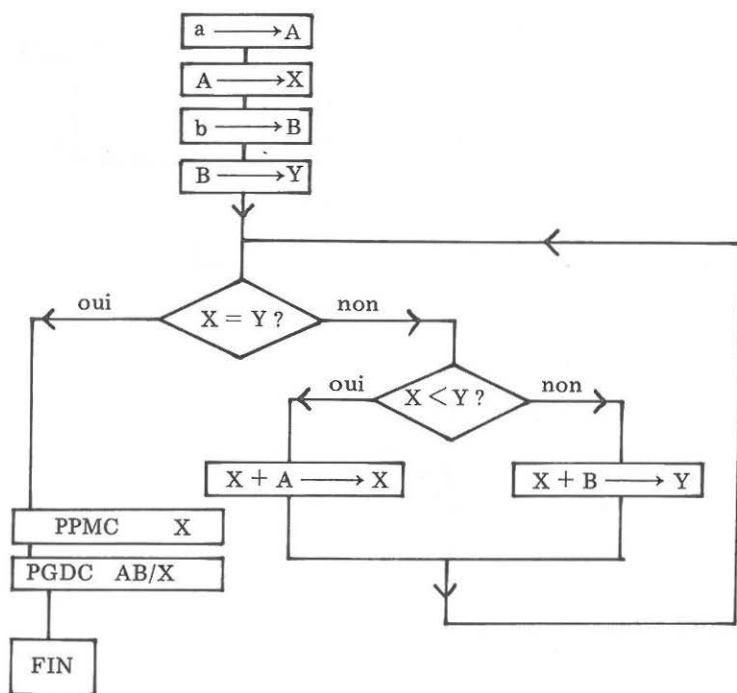
Il reste à trouver le cheminement "le plus efficace". C'est celui qui consiste à ne pas aller "trop vite" ni "trop loin", c'est-à-dire à rester le "plus près possible" de la droite Δ tout en avançant soit horizontalement par pas de 42 (respectivement A), soit verticalement par pas de 66 (respectivement B).

On obtient ainsi un *cheminement sur le quadrillage* illustrant dans le plan la méthode simple utilisée précédemment en 2 b).

4) Organigramme

Voici l'organigramme permettant éventuellement de programmer la méthode précédente.

Soient a et b les nombres dont on cherche le PPMC.
 $a \leq b$.



Organigramme

Explications pour l'organigramme

A, B, C, Y sont des registres.

$a \rightarrow A$: on envoie le nombre a dans le registre A.

$A \rightarrow X$: le contenu de X devient égal au contenu de A. A conserve son contenu.

$X = Y ?$: test sur les contenus de X et Y.

$X < Y ?$: test sur les contenus de X et Y.

$X + A \rightarrow X$: X se charge du contenu qu'il avait augmenté du contenu de A.

$X + B \rightarrow X$: idem avec B.

5) Remarques

a) On peut faire des rapprochements de la méthode 2) avec la technique du vernier d'un pied à coulisse.

b) On peut chercher des "alignements" de sommets de cheminement sur le schéma.

c) Pour le PPMC de trois nombres, la construction exigerait l'espace à trois dimensions, donc elle est graphiquement peu réalisable.

d) On peut essayer de visualiser une méthode de recherche du PGDC.

LES PROBABILITES PAR L'IMAGE

On casse un spaghetti en 3 morceaux au hasard ^{*1}. Probabilité pour qu'avec les 3 morceaux on puisse faire un triangle (vrai ou aplati).

Soit x, y, z les longueurs respectives des 3 morceaux ; la longueur du spaghetti est prise pour unité : $x + y + z = 1$.

Pour qu'on puisse former un triangle, il faut et il suffit que

$$(1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

Prenons un triangle équilatéral ABC de hauteur unité et pour tout point M du plan, soit x sa "distance" (affectée d'un signe) à BC, y sa "distance" à CA, z "sa distance" à AB : pour chacune des droites supports des côtés du triangle, le demi-plan positif est celui qui contient le triangle. Dans ces conditions, la surface délimitée par le triangle, frontière comprise, est l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z = 1 \quad *2$$

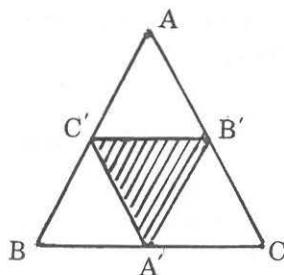
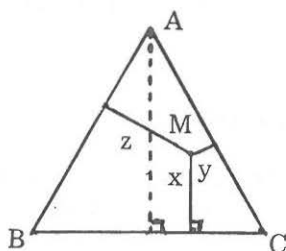
Tout spaghetti idéal cassé en 3 est représenté de façon bi-univoque par un point de l'intérieur du triangle. Dire qu'on le casse au hasard, c'est dire que la probabilité de tomber dans un domaine ^{*3} donné de l'intérieur du triangle est proportionnelle à l'aire de ce domaine, quelle que soit sa forme et sa position.

*1 N.D.L.R. : Cela signifie que les points de rupture A et B sont tous deux choisis au hasard et non pas que l'on casse d'abord en deux, puis que l'un des deux morceaux est à son tour fragmenté. — La probabilité serait différente —.

*2 Exercice : (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques de M par rapport à ABC.

*3 On n'envisagera, bien sûr, que des domaines quarrables; il est inutile de soulever cette question. Pour les frontières on remarquera seulement qu'un point ou une ligne ont une aire nulle.

On voit facilement que le domaine où sont vérifiées les conditions (1) est le triangle $A'B'C'$, d'où la probabilité cherchée : $\frac{1}{4}$, puisque la probabilité totale, soit 1, correspond à l'aire du triangle ABC.



$B'C'$ a pour équation $x = \frac{1}{2}$, ou $y + z = \frac{1}{2}$, ou $x = y + z$; il faut donc $x \leq \frac{1}{2}$ et par symétrie $y \leq \frac{1}{2}$, $z \leq \frac{1}{2}$.

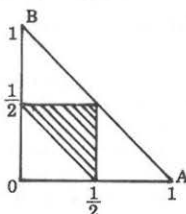
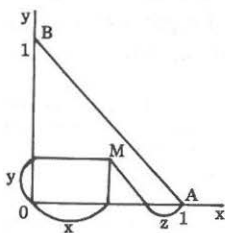
Autre solution (en coordonnées cartésiennes et non plus triangulaires)

x, y, z représentent toujours les longueurs respectives des 3 morceaux de spaghetti. On doit avoir, pour pouvoir former un triangle,

$$(2) \quad \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \\ |x - y| \leq z \leq x + y \end{cases}$$

Il n'y a en fait que 2 variables, par exemple x et y .

Tout spaghetti cassé en 3 peut être représenté de façon bi-univoque par un point de la surface du triangle OAB.



On déduit de (2) :

$$z \leq \frac{1}{2}, \quad x + y \geq \frac{1}{2}, \quad \text{puis } x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y \leq \frac{1}{2}.$$

La région qui convient est donc la surface hachurée et on voit que la probabilité est $\frac{1}{4}$.

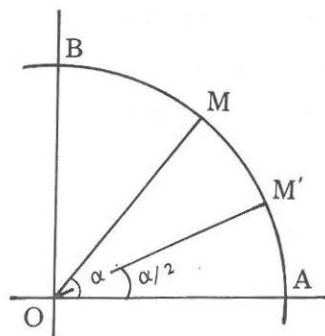
1.11. UTILISATION DE PROCÉDES RECURSIFS POUR LE CALCUL DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES

par l'I.R.E.M. de Bordeaux

Ce texte est extrait d'un important fascicule de l'I.R.E.M. de Bordeaux : Notions élémentaires d'informatique - 4ème fascicule - Février-Mars 1977, par G. Noël, J. Bastier, D. Deycard, et les élèves du Lycée Montaigne.*

CALCUL DE $\cos \alpha$

NOTE : Le paragraphe ci-dessous est destiné à être utilisé par des élèves de seconde (ou de fin de troisième). Les élèves de première ayant étudié la trigonométrie pourront utiliser des formules vues en cours.



On considère un cercle trigonométrique limité au quart de cercle $\widehat{AB}$ (voir la figure ci-contre).

On rappelle que le cercle trigonométrique est l'ensemble des points d'un plan rapporté à un repère orthonormé dont les coordonnées x et y vérifient la relation :

$$x^2 + y^2 = 1$$

On donne sur $\widehat{AB}$ le point M tel que l'angle $(\vec{OA}, \vec{OM})$ soit égal

* Une synthèse plus explicite de ces travaux sera publiée prochainement (éd. Techniques et Vulgarisation) sous le titre "Mathématiques et calculatrice de poche"

à α . On désignera par x et y les coordonnées de M et on posera $\frac{y}{x} = t$.

On désigne par M' le milieu de l'arc $\widehat{AM}$ du cercle et par x' et y' les coordonnées de M' . On posera $t' = \frac{y'}{x'}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha & y &= \sin \alpha & t &= \operatorname{tg} \alpha \\ x' &= \cos \frac{\alpha}{2} & y' &= \sin \frac{\alpha}{2} & t' &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

1°) Calculer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M (on pourra remarquer que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux et que $\|\overrightarrow{OM'}\| = 1$).

On trouvera :

$$x' = \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x)}} = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \quad y' = \frac{y}{\sqrt{2(1+x)}}$$

2°) Exprimer x en fonction de x' seul. On obtient :

$$x = 2x'^2 - 1$$

Donc : $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

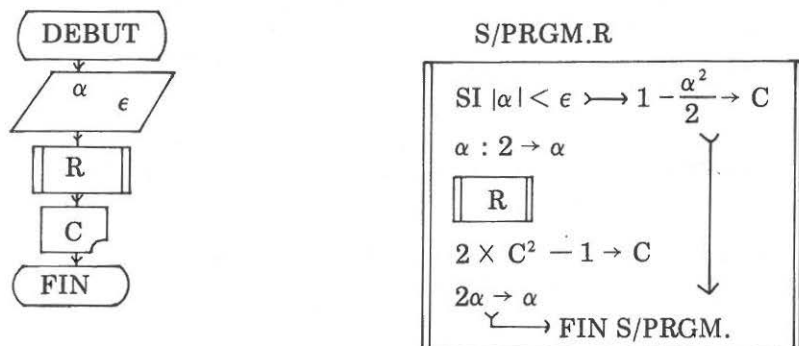
Nous savons que si α exprimé en radians est "petit" on a $\cos \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Les élèves de troisième et de seconde pourront admettre ce résultat en se contentant de le vérifier sur une calculatrice de poche.

On pourra donc écrire les formules de récursivité :

$$\cos \alpha : \text{Si } \alpha \simeq 0 \text{ alors } 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\text{Sinon } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

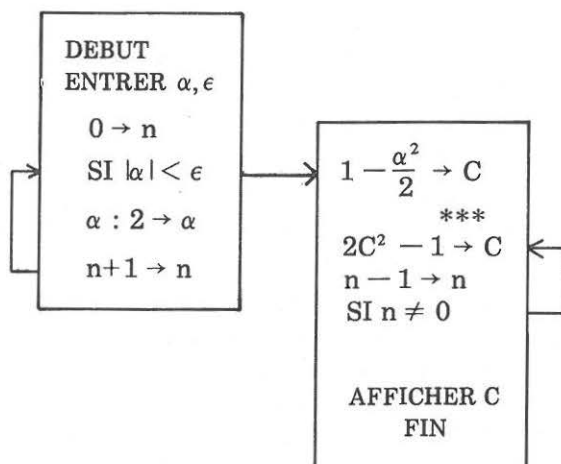
On en déduit l'organigramme :



Note : α représente l'incertitude désirée (voir remarque 1).

Nous simplifions l'organigramme en utilisant les principes vus au chapitre 15. On obtient le tracé ci-dessous :

L'organigramme ci-contre peut se programmer sur HP 25 ou sur SR 56.



Remarque 1 : Précision du résultat obtenu.

Il ne faut pas croire qu'il soit possible de choisir α aussi petit que l'on veut. Si l'on observe le premier contenu de C (il suffit pour cela de prévoir un arrêt supplémentaire à l'endroit marqué *** dans l'organigramme ci-dessus) on constate qu'il est bien entendu voisin de 1 (en fait 0,999.....).

Par exemple pour $\alpha = 1$:

- Si $\epsilon = 10^{-3}$ on lit sur une SR 56 : 0,999 999 523 2 soit quatre chiffres "significatifs" (en pratique un peu plus dans le cas de la SR 56 car la calculatrice n'affiche pas tous les chiffres). On retrouve cette précision dans le résultat : 0,5403013... au lieu de 0,5403023059...
- Si l'on prend $\epsilon = 10^{-4}$ on obtient pour le premier contenu de C : 0,999 999 998 1. Il n'y a plus que deux chiffres "significatifs". Le résultat sera moins précis : 0,540 334.
- Si l'on prend $\epsilon = 10^{-5}$ on obtient pour le premier contenu de C : 1 !!! Il n'y a plus aucune précision. Le résultat final serait : 0,527...

Le choix de ϵ résulte donc d'un compromis :

- Trop petit, le nombre de boucles est trop faible.
- Trop grand, on perd également de la précision.

Dans l'exemple ci-dessus c'est une valeur voisine de 10^{-3} qui donnera le meilleur résultat.

Remarque 2 : L'algorithme ci-dessus peut se programmer sur HP 25; la précision sera un peu moins bonne du fait que la HP 25 calcule avec 10 chiffres significatifs alors que la SR 56 calcule avec 13 chiffres.

Remarque 3 : Ce procédé de calcul n'est pas très économique car il faut travailler avec 13 chiffres significatifs pour obtenir cinq à six chiffres exacts sur le résultat.

Si l'on désire davantage de précision on pourra calculer d'abord $\sin \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$ et en déduire $\cos \alpha$. Nous verrons en effet qu'il est possible d'obtenir la tangente ou le sinus avec une grande précision (voir exercices n° 18.1 A et 18.8 A page 230). On verra également à la page 229 un autre procédé permettant un calcul direct du cosinus avec une grande précision.

CALCUL DE a^x

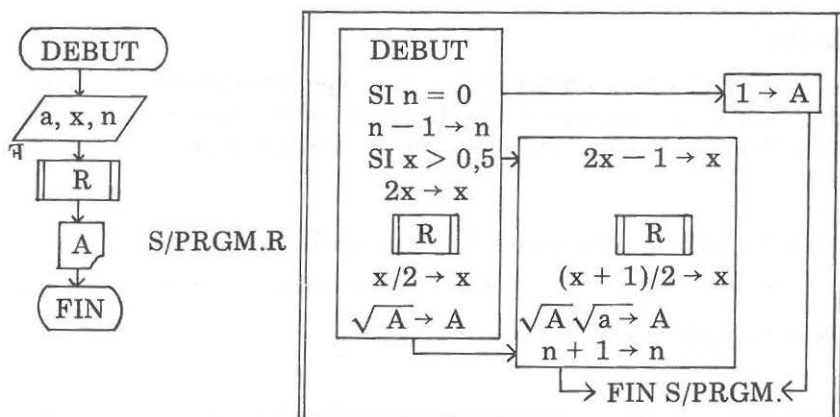
On suppose $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $x \in [0 ; 1]$.

On utilise les formules de récursivité que le lecteur démontrera aisément :

$$a^x : \quad \text{Si } x > 0,5 \quad \text{alors } \sqrt{a} \sqrt{a^{2x-1}}$$

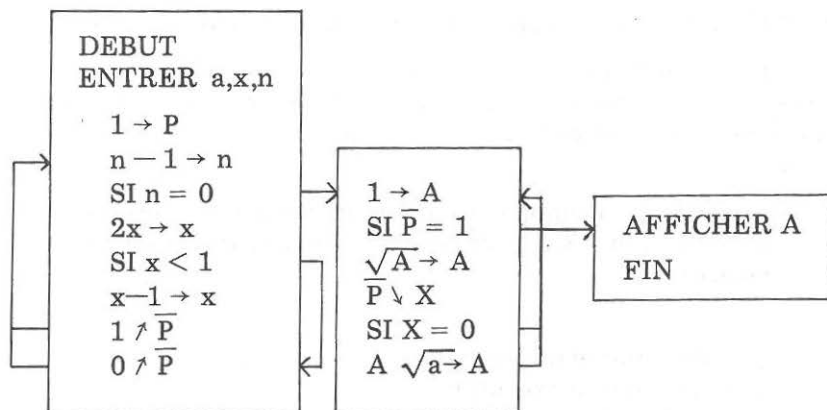
$$\text{Sinon } \sqrt{a^{2x}}$$

On en déduit l'organigramme :



Note : n désigne le nombre d'itérations désirées.

L'organigramme ci-dessus peut être simplifié en utilisant les principes exposés au chapitre 15 :



Note : Cet organigramme peut se programmer sur HP 25 ou SR 56.

On peut même se passer de la pile $\overline{P}$ du fait que la multiplication est commutative... Voir § suivant.

EXERCICES

NOTE

Pour chaque exercice rechercher expérimentalement la valeur de ϵ (ou de n) donnant le résultat le plus précis (pour une calculatrice donnée) et voir dans quelle mesure il dépend de x .

18.1 A : (HP 25) Reprendre l'exemple de la page 225.

1°) Exprimer y en fonction de y' seul. En déduire une formule exprimant $\sin \alpha$ en fonction de $\sin \frac{\alpha}{2}$.

2°) Sachant que si α exprimé en radians est "petit" alors $\sin \alpha \simeq \alpha$, déduire alors du 1°) des formules de récursivité permettant le calcul de $\sin \alpha$.

3°) Programmer la calculatrice. Montrer que l'on peut obtenir $\sin \alpha$ avec 10 chiffres significatifs (contrairement à ce que l'on avait obtenu pour le cosinus). Expliquez pourquoi.

18.2 C : (HP 25) Exprimer $\sin \alpha$ en fonction seulement de $\sin \frac{\alpha}{3}$.

En remarquant de plus que si α exprimé en radians est "petit" alors $\sin \alpha \simeq \alpha$, trouver des formules de récursivité permettant le calcul de $\sin \alpha$ et programmer la calculatrice.

18.3 C : (HP 25) Comparer les programmes obtenus aux exercices n° 18.1 A et 18.2 C au point de vue (pour une même calculatrice):

- 1°) du nombre d'instructions
- 2°) du temps d'exécution
- 3°) de la précision des résultats.

1.12. CONVERGENCE ET TABLETTE DE CHOCOLAT

Dans son livre "JEUX AVEC L'INFINI" (Editions du Seuil), ROSZA PETER nous offre très joliment une tablette de chocolat.

Problème :

"... Imaginons que chaque tablette de chocolat d'une certaine marque contienne un coupon et que, contre présentation de 10 coupons, on puisse obtenir gratuitement une nouvelle tablette de chocolat. Que vaut exactement une tablette de chocolat avec son coupon ?"

Eléments de réponse :

- N'oublions pas le coupon : il induit des dixièmes de dixièmes en cascade !

Voyez vous-même, et la tablette de chocolat avec son coupon vaut :

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \text{ de tablette de chocolat.}$$

- Quand vous détiendrez 9 coupons, allez chez l'épicier et faites-vous avancer une tablette de chocolat ... : vous la paierez aussi-tôt, en coupons !

Conclusion : "... donc la valeur d'un coupon est $\frac{1}{9}$ de tablette de chocolat et la valeur d'une tablette de chocolat avec son coupon est de $1 + \frac{1}{9}$ tablette de chocolat.

Donc, la somme infinie :

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

vaut très exactement $1 + \frac{1}{9}$, de la façon la plus concrète puisque consommable."

NDLR. On pourra comparer cette méthode comestible avec celles du chapitre "Géométrie naturelle". [7ème partie, 1.13].

1.13. GEOMETRIE "NATURELLE"

par Henri BAREIL

La géométrie élémentaire française est pauvre : elle ne connaît que cercles, triangles et parallélogrammes. (Ne parlons guère des figures de l'espace qui semblent n'exister que pour fournir des situations de géométrie plane)

On lui opposera volontiers la géométrie élémentaire italienne telle qu'elle apparaît, éblouissante, à travers Emma Castelnuovo. Les participants des journées A.P.M.E.P. 1977 le savent bien, après avoir admiré l'exposition de LIMOGES. De même les lecteurs de son livre "Matematica nella realta" (Editeur Boringhieri). [Cet ouvrage, traduit en français par José MARIA, doit paraître prochainement aux éditions O.C.D.L.]

Cette géométrie conquiert vraiment l'espace ainsi que les solides que l'architecture moderne nous y propose.

Mais déjà, en géométrie plane, quelle variété !

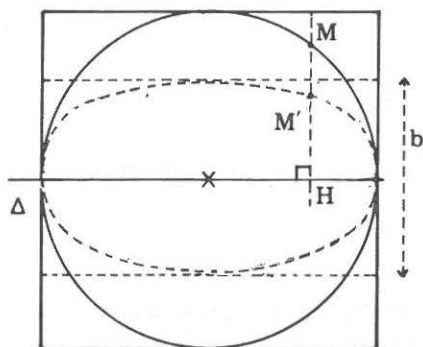
Je prendrai trois exemples : ellipse, Pythagore, cycloïde (extraits du livre d'Emma Castelnuovo, avec son aimable auto-risation).

VARIATIONS SUR L'ELLIPSE !

On connaît les diverses façons élémentaires d'obtenir une ellipse.

Mais son aire ? Est-elle rapidement accessible ?

Inscrivons un cercle dans un carré de côté a .



Aire du carré : a^2

Aire du disque : πa^2

Aire du disque :

(Aire du carré) $\times \pi$

Une affinité orthogonale d'axe Δ ($M \mapsto M'$ tel que $\overline{HM'} = \lambda \overline{HM}$, λ constant) transforme :

— le carré en un rectangle de dimensions a et b .

(Dès lors $\lambda = \frac{b}{a}$).

— le cercle en une ellipse dont les axes mesurent a et b.

Des considérations de géométrie très élémentaire induisent la conservation du rapport des aires.

Donc aire de l'ellipse = (aire du rectangle) $\times \pi$
 $= \pi a b$

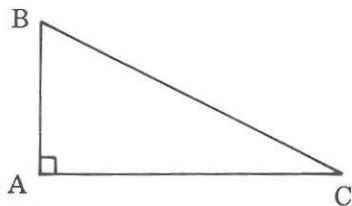
● Ceci s'étend à l'ellipsoïde, à partir d'une sphère inscrite dans un cube.

Soit a, b, c les mesures des axes de l'ellipsoïde, donc les dimensions du parallélépipède rectangle associé.

$$\text{Alors} \quad \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{8 R^3} = \frac{\text{Vol. ellipsoïde}}{2a \times 2b \times 2c}$$

$$\text{D'où} \quad V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

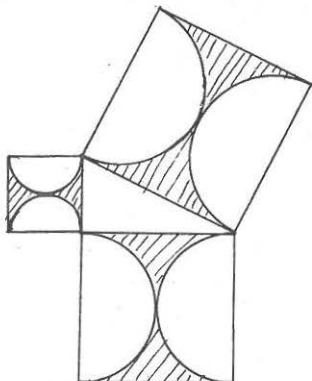
VARIATIONS SUR PYTHAGORE :



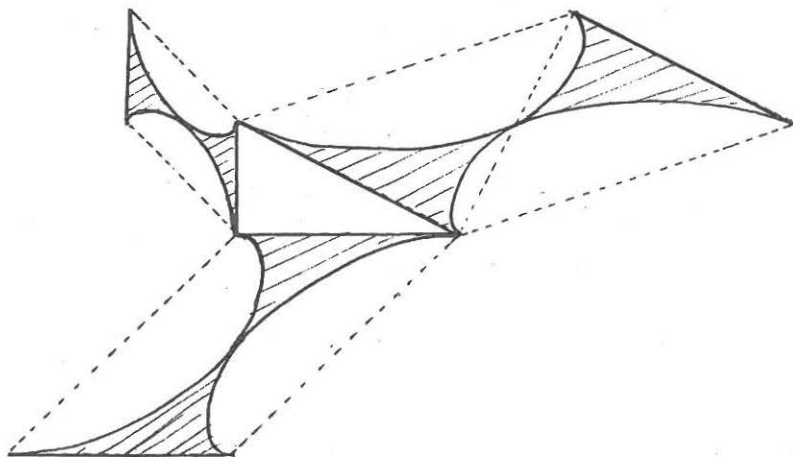
La forme de la relation, en raison des carrés, induit des applications aux aires.

Par exemple avec des carrés (resp. des triangles équilatéraux, resp. des demi-cercles, ... etc...) construits sur les côtés.

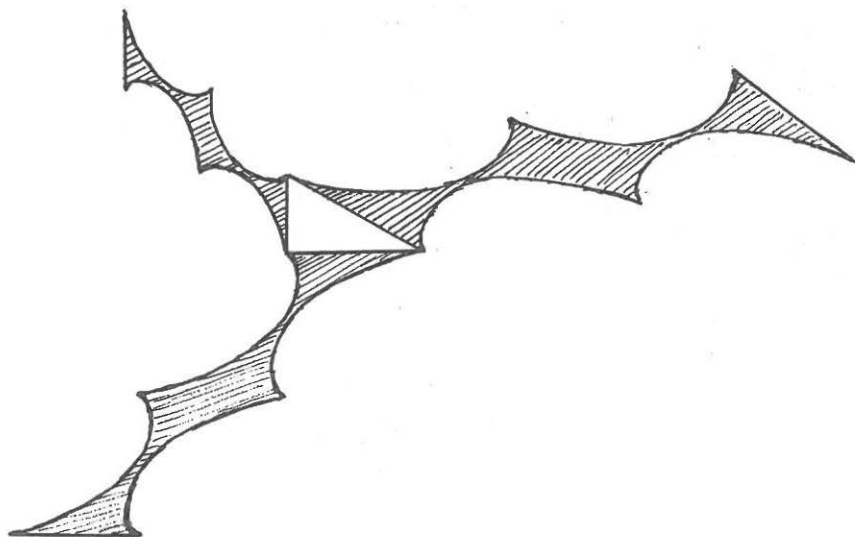
Par exemple :



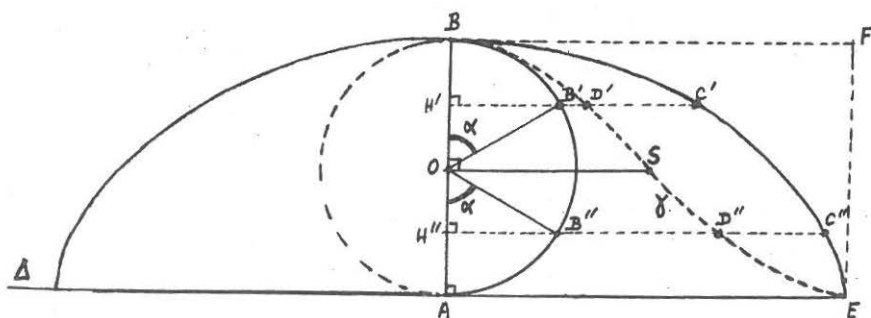
ou par déformation perspective :



D'où cette petite merveille de "peinture moderne" (essayez avec des couleurs, des entrelacs de ces motifs,...)



VARIATIONS SUR LA CYCLOÏDE



Le cercle roulant sur Δ sans glisser, B engendre une cycloïde.
La figure ci-dessus donne une arche de cette cycloïde.

$$AE = \pi R$$

Pour chaque valeur de α , le déplacement de B est le composé d'une rotation autour de O suivie d'une translation.

Il s'ensuit que $B''C'' + B'C' = AE$ (1)

Associions à chaque C' le point D' tel que $H'D' = B'C'$.

Soit la courbe BSE obtenue, que nous appellerons γ .

S est centre de symétrie [Utiliser (1)] du rectangle AEFB et de la courbe BSE (γ).

$$\begin{aligned} \text{D'où : aire BAESB (en suivant la courbe } \gamma) &= \frac{1}{2} (\pi R \times 2R) \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Des considérations de géométrie très élémentaires permettent d'induire que l'aire comprise entre le demi-cercle BB'A et l'arc de cycloïde BE est égale à l'aire ci-dessus.

D'où l'aire de l'arche de cycloïde : $3\pi R^2$.

Par ailleurs, indépendamment du livre d'Emma Castelnuovo, voici quelques autres remarques :

UTILISATION DES AIRES :

Nous savons tous faire visualiser (dans le cas de nombres positifs) $m(ab)$, ou $m(a+b)$, ou $(a+b)(c+d)$, ou $(a+b)^2$, ... à l'aide d'aires de rectangles.

Mais il y a d'autres utilisations des aires.

① Par exemple, en utilisant la formule donnant l'aire du triangle, et le fait que si une droite coupe un segment $[AB]$ en son milieu elle est équidistante de A et de B, on établit facilement par les aires (ô horreur pour une propriété affine ?) l'existence et la situation du point de concours des médianes d'un triangle.

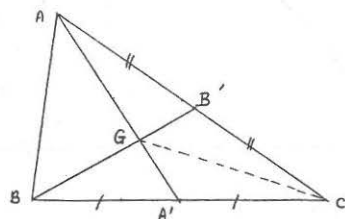
Soit S l'aire du triangle ABC.

Il vient successivement :

$$\text{aire ABG} = \text{aire BCG}$$

$$\text{aire ABG} = \text{aire ACG}$$

$$\text{D'où aire ABG} = \frac{1}{3} S$$



$$\text{D'autre part, aire BA'G} = \frac{1}{2} \text{aire BGC}$$

$$= \frac{1}{6} S$$

$$\dots \text{D'où} \dots GA = 2GA'$$

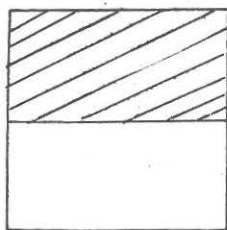
etc.

2 CALCULS NUMERIQUES :

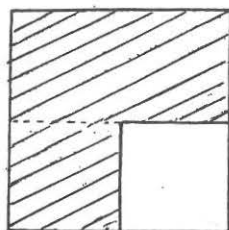
Les aires permettent de visualiser des sommes du type $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$ à nombre infini de termes tous déduits du précédent de la même façon, avec $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

$$\text{Prenons d'abord } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

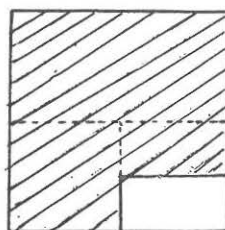
A partir du carré d'aire unité on peut avoir successivement :



(1)



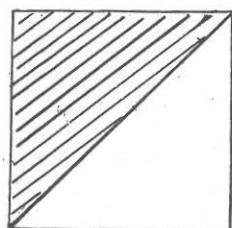
(2)



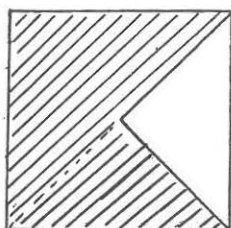
(3)

Notons que (2) nous ramène "à un carré blanc" comme dans la situation d'origine.

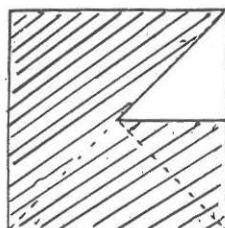
● Ou :



(4)



(2)



(3)

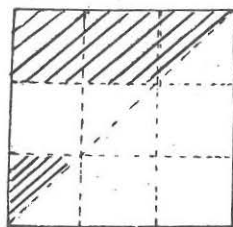
Ici (3) nous redonne (1).

De l'une ou l'autre façon on peut concevoir que la somme cherchée est égale à 1.

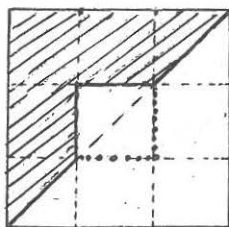
● Ceci est-il généralisable à d'autres valeurs de n ?

Difficilement, (sauf si l'on s'inspire du résultat !)

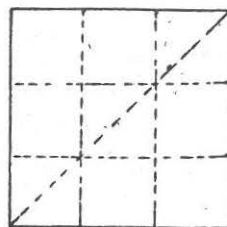
Ainsi pour $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ on peut envisager ce qui suit :



(1)



(2)



(3)

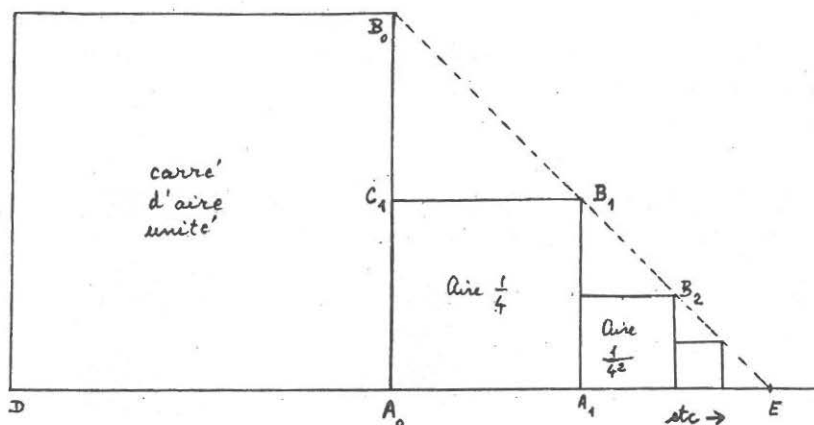
(2) redonne, pour le carré central, la situation initiale. D'où

●● Cette méthode met en évidence des périodes. Ce n'est pas d'un intérêt négligeable.

Mais ce n'est pas toujours facile.

Au contraire la méthode suivante est très facilement applicable quel que soit l'entier n ($\neq 0$, $\neq 1$) considéré :

Dessins successifs, cas $n = 4$:



Ici chaque carré est toujours situé de la même façon par rapport au précédent.

Ceci permet d'induire (ou de "démontrer", selon les classes) l'alignement des B_i et d'en déduire la position de E.

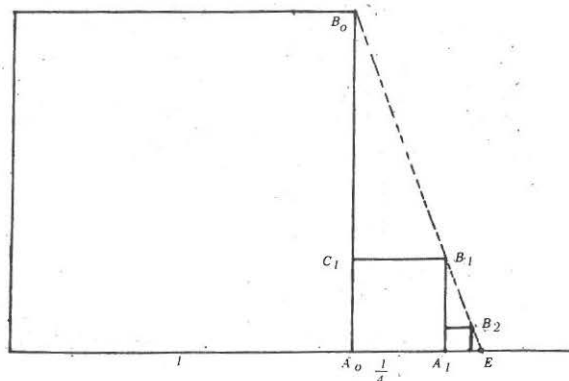
Or chaque carré occupe une certaine fraction, toujours la même, de l'aire du trapèze rectangle associé ($A_0 A_1 B_1 B_0$ pour le carré $A_0 A_1 B_1 C_1$, ...)

La somme des aires des carrés successifs représente donc cette fraction-là de l'aire du triangle $A_0 E B_0$.

Sur notre exemple on obtient $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ soit $\frac{1}{3}$.

- Une autre méthode, aussi générale, et fondée sur le même principe, fait bâtir des carrés successifs dont les côtés sont les termes de la somme envisagée.

Ainsi, pour $n = 4$.



C'est alors $A_0 E$ qui donne la somme cherchée.

Cette méthode présente un autre intérêt : mener à bien une étude visualisée sur la droite $A_0 A_1$ en étendant le problème au plan.

N'est-il pas aussi des problèmes du plan faciles à traiter avec un petit tour dans l'espace ?

- Il ne s'agit pas de monopoliser la géométrie ou son enseignement pour des activités de cet ordre, mais d'en profiter, à l'occasion, pour développer les qualités d'invention, de création, d'imagination, et étendre le champ du possible.

Sur ce, bonne chance pour une géométrie sans frontières !