4 - QUELQUES THÈMES DE GÉOMÉTRIE POUR LE PREMIER CYCLE

P. GAGNAIRE, IREM de LYON

L'avant-projet de programme de mathématiques du 12 février 1977 (*) pour les classes de quatrième et troisième présente à mon avis un inconvénient majeur en ce qui concerne la géométrie. Comme dans les programmes actuellement en vigueur, l'aspect affine et l'aspect métrique de la géométrie plane sont artificiellement séparés, celui-ci (agrémenté de "compléments") étant rejeté en troisième, et celui-là étant abordé dès la quatrième.

Cette séparation est évidemment contradictoire avec la première phrase de cet avant-projet, phrase qui ne peut qu'emporter l'adhésion de chacun :

" L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation ; celles-ci requièrent, en particulier, l'usage des instruments de dessin".

Comment l'usage des instruments de dessin pourrait-il *ne déboucher que sur l'aspect affine* de la géométrie plane ? Est-il, au demeurant, souhaitable de faire croire aux élèves que le plan, c'est un "truc" affine sur lequel se greffe, comme par accident, un "machin" métrique dont on n'a pas le droit de se servir avant la classe de troisième ? Est-ce un bon apprentissage du raisonnement que de commencer à interdire certaines formes de celui-ci ? Enfin, le compas (comme traceur de cercles) ne serait-il plus un instrument de dessin ?

Que les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons puissent être classées en deux grands domaines (affine d'une part, métrique de l'autre), c'est une bien belle chose pour qui connaît ces propriétés et les domine suffisamment pour s'en servir. Mais les élèves qui sortent du premier cycle n'en sont pas tous là.

On ne peut axiomatiser qu'un ensemble de connaissances sûrement acquises. Le premier cycle doit avoir pour but de faire acquérir ces connaissances. Bien sûr, chaque fois que faire se peut, on montrera que de certaines d'entre elles peuvent être déduites

(*) Voir le Bulletin de l'APMEP n° 308, pages 308 et suivantes.

d'autres, mais cela est vrai aussi bien pour les propriétés métriques que pour les propriétés affines, et celles-ci ne sont pas nécessairement plus évidentes que celles-là.

CLOPEAU a prononcé un jour une phrase qui m'a frappé :

"La géométrie du premier cycle, ce n'est ni une géométrie affine ni une géométrie métrique ; c'est une géométrie de construction".

De même, je dirai que l'espace matériel n'est ni affine ni métrique. Il est simplement construit (et on peut le re-construire, pour l'étudier) de manière que les propriétés de l'une et de l'autre sorte y fassent bon ménage. Mais on aura bien le temps de voir plus tard qu'elles ne sont pas de la même sorte !

Avant d'entrer dans le vif du sujet, voici encore quelques critiques formulées contre "la lettre" du programme (mais, la mathématique étant une construction essentiellement formelle, *la lettre* se confond vite avec *l'esprit* !).

"... Le plan est un ensemble de points". Ce n'est pas du tout évident pour nos élèves, pour lesquels la notion de *point* reste assez vague même après la troisième. Alors *un ensemble d'objets mal déterminés*, pensez voir ! Et, de plus, il s'agit d'un ensemble infini, non discret, non dénombrable, dense, ... enfin un ensemble dont les propriétés rompent avec celles des exemples d'ensembles étudiés jusqu'alors. Si bien que la question : "Les points d'un plan forment-ils un ensemble ?" n'est pas, à ce niveau, dénuée de sens. La phrase du programme n'apporte aucune information nouvelle à l'élève. Surtout qu'elle est ainsi "précisée" : "Il contient au moins trois points." ! Chacun sait qu'il est difficile de faire admettre aux enfants que l'ensemble des points du plan ne se limite pas à ceux qui sont explicitement marqués sur telle ou telle figure. La "précision" ci-dessus peut l'inciter à croire qu'on peut compter les points du plan (puisqu'il y en a au moins *trois*) !

La même remarque vaut pour "Toute droite est une partie propre du plan et contient au moins deux points".

Il est vrai que de ces deux axiomes et de l'axiome d'Euclide qui les suit immédiatement dans l'avant-projet, on peut déduire que le plan contient un quatrième point distinct de chacun des trois premiers ! Mais est-ce ainsi qu'on peut persuader qui que ce soit de la puissance du raisonnement mathématique ?

Un peu plus loin, on lit :

"Le quadruplet (A,B,C,D) est un parallélogramme si et seulement si... ". Mais un parallélogramme n'a jamais été un quadruplet ! Tout au plus un quadruplet peut-il servir à *désigner* un parallélogramme. Mais alors ce quadruplet est le *nom* du parallélogramme (et non le parallélogramme lui-même). Il y a un ensemble de règles pour former les noms des objets qu'ils désignent. Cet ensemble de règles s'appelle l'orthographe. Un nom (comme tout mot) est formé de *lettres*. Tout autre signe (ici, les virgules et les parenthèses) est à exclure du nom. L'orthographe géométrique est à ce point simple que si on connaît les noms des sommets, des côtés et des diagonales d'un parallélogramme, on sait former *un* nom (et même *tous les* noms) pour ce parallélogramme. Mais il ne faut pas confondre le nom et l'objet ! Ainsi, ABCD et BADC sont deux noms *différents* pour désigner le *même* parallélogramme. Mal écrit, cela donne : "(A,B,C,D) et (B,A,C,D) sont deux quadruplets *différents* qui désignent le *même* parallélogramme". C'est bien qu'un quadruplet *n'est pas* un parallélogramme !

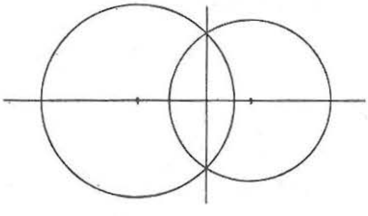
Mais laissons là ces peccadilles et voyons les thèmes dont parle le titre de cet article. Il est possible que certains d'entre eux soient à cheval sur plusieurs noyaux mais l'essentiel n'est-il pas que sur ces thèmes les élèves puissent exercer leur activité ? Ce n'est qu'alors que les noyaux pourront être mis en évidence.

J'ai choisi cinq titres de paragraphe :

- Variations sur une figure simple
- Les quadrilatères et leurs symétries
- Le théorème de Pythagore
- Les vecteurs
- Trigonométrie

Vous voyez que certains de ces titres sentent le noyau autant que le thème ! En fait, tout dépend de la manière de les aborder.

4.1. VARIATIONS SUR UNE FIGURE SIMPLE



Le *dessin* ci-dessus n'est pas encore une *figure*... il lui manque une *légende*... et une légende, ça se raconte !

"FIGURE... *Math.* Représentation par le dessin de lignes, de surfaces ou de volumes." (Petit Larousse 1966, p. 433).

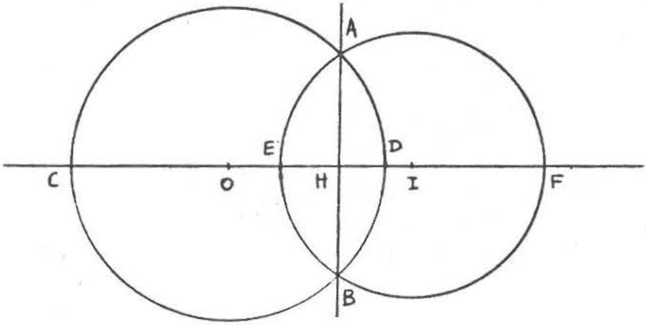
Une figure, c'est un dessin qui représente, qui *figure* quelque chose ("FIGURER v.t. Représenter par la peinture, la sculpture, le dessin, etc.." ibidem). Ce dessin ne commencera à devenir une figure que lorsqu'on l'aura *raconté*, ou mieux, fait raconter par les élèves. C'est le stade d'observation auquel fait allusion l'avant-projet de programme.

Faisons donc décrire ce dessin par les élèves, et à cette occasion, recensons le vocabulaire nécessaire à cette description. La nécessité de la désignation de chaque *point intéressant* (*) par une lettre apparaîtra tôt ou tard au cours de cette description.

Comment s'assurer que l'une des descriptions données est *bonne* ? En ce qu'elle dit *tout* ce que l'on peut voir sur le dessin ? Ou en ce qu'elle dit *juste le nécessaire* pour le reproduire ? Cela peut donner lieu à discussion et les élèves peuvent fort bien décider que celle qui dit *tout* est meilleure que l'autre. N'empêche qu'au cours de cette discussion on aura mis en évidence qu'il *suffit* que la distance des centres soit 3,5, l'un des rayons 2,5 et l'autre 3 pour que la distance des points communs aux deux cercles soit 4,2 (à 0,1 près). Ainsi, certaines connaissances peuvent être déduites d'autres connaissances, ne serait-ce qu'au moyen d'un dessin bien fait. Que ces nouvelles connaissances ne soient qu'approximatives (ce qui satisfait d'ailleurs nombre de techniciens, voire d'ingénieurs) doit encourager à travailler plus soigneusement et aussi à chercher d'autres moyens plus sûrs que le simple dessin. Chaque lecteur aura reconnu ici une amorce pour le thème n° 3 mais il n'en est pas de même, bien sûr, pour l'élève de quatrième qui n'entend que trop souvent la réponse : "Vous verrez cela plus tard !".

(*) Et non pas de chaque point ! Les *points intéressants* (ou *remarquables*) qui interviennent dans un dessin pour en faire une figure sont toujours en nombre fini. Leur intérêt est d'ailleurs très divers selon qu'ils peuvent servir à reproduire la figure ou qu'ils sont retrouvés comme résultat de cette reproduction .

Revenons à notre figure, sur laquelle nous mettons des lettres.



"Variations sur une figure", cela ne peut être mieux réalisé qu'en "faisant varier" le dessin.

Il s'agit de deux *cercles* de *rayons* donnés dont les *centres* sont à une *distance* donnée.

L'unité de longueur étant choisie une fois pour toutes (la changer ne serait que compliquer l'étude inutilement), obtient-on des dessins différents du précédent si on change la distance des centres et les rayons ? Certes, les figures sont toutes différentes mais on peut toutes les classer en tenant compte de certaines *ressemblances*. Ce classement va d'ailleurs nous permettre de préciser ces ressemblances. Par exemple, on arrive à coup sûr à l'énoncé suivant, qui implique l'inégalité triangulaire :

"Selon que le plus grand des trois nombres : distance des centres, premier rayon, second rayon est

- strictement inférieur
- égal
- strictement supérieur

à la somme des deux autres, les deux cercles ont respectivement

- deux
- un
- zéro

points communs"

Une analyse plus fine des ressemblances mènera à distinguer le cas des cercles extérieurs l'un à l'autre ou des cercles dont l'un est intérieur à l'autre. L'ordre relatif des points O,I,C,D,E,F,H peut aussi faire un objet d'étude ; le point H peut ne pas exister, ni même, d'ailleurs, la droite des centres si O = I .

Le cas où les cercles sont tangents est délicat à examiner. Combien y a-t-il alors de points communs ? Etrange question, direz-vous ! Cela se voit-il donc si bien sur la figure ? Supposez qu'on vous demande de dessiner deux cercles dont les centres sont distants de 3 cm et dont les rayons sont respectivement 5 cm et 8 cm. Supposez, de plus, que vous fassiez une erreur d'un demi-millimètre dans l'ouverture de votre compas si bien que les deux cercles n'auront pas un seul mais deux points communs. A quelle distance chacun d'eux sera-t-il de la ligne des centres ? *Vous* pouvez calculer cette distance par le théorème de Pythagore, pas vos élèves de quatrième. Quoi ! Vous êtes surpris du résultat ? Alors ne soyez pas étonné si la question n'est pas aussi évidente pour les enfants. Mais maintenant, répondez sincèrement à la question:

> "Peut-on prétendre faire comprendre ce qu'est l'inégalité triangulaire aux enfants sans les avoir fait chercher *expérimentalement*, sur ces questions de dessin ? "

Mais cela ne figure pas dans le programme, ni dans l'avant-projet !

"Variations sur une figure", cela peut aussi se réaliser en variant les manières d'attaquer sa reproduction.

Par exemple, on peut demander de la reproduire à partir des points A et B *imposés*. On débouche alors sur la construction du point D et du point I, laquelle met en oeuvre des cercles qui ne figurent pas explicitement sur le dessin donné (et il n'est pas sûr du tout que les enfants éprouvent la nécessité de les tracer !) On peut ensuite demander de tracer d'autres cercles passant par A et B : où sont leurs centres ? On débouche ainsi sur la *médiatrice* des points A et B, et sur la *perpendicularité*.

On peut encore demander de reproduire la figure à partir de la donnée du point A et de la droite des centres, avec ou sans la connaissance des rayons (dans ce dernier cas, il s'agit seulement de reproduire une figure *qui ressemble* à la figure donnée). On débouche ainsi sur la *symétrie* autour d'une droite. La construction du symétrique B de A autour de la droite des centres, au moyen de deux cercles centrés sur cette droite, présente un intérêt certain : quels que soient les centres choisis, les cercles se recoupent toujours en B. Il ne s'agit pas de *démontrer* ce fait ; mais observer que l'on ne fait que mettre en évidence une propriété déjà vue lors de l'étude de la médiatrice contribue à tisser ces *liens logiques* qui, plus tard, feront la trame d'une véritable théorie.

L'étude de la symétrie autour d'une droite est ainsi amorcée. Ce n'est pas ici le lieu d'insister sur l'intérêt considérable de cette "transformation géométrique". Il en sera d'ailleurs question dans le paragraphe ② . Mais il est important de mettre en évidence quelques faits :

- la distance de deux points est la même que celle de leurs symétriques,
- si trois points sont alignés, alors leurs symétriques aussi.

Ces deux faits sont aussi *évidents* l'un que l'autre, c'est-à-dire que l'expérience nous les montre pareillement l'un et l'autre. Que le second puisse être déduit du premier, moyennant l'inégalité triangulaire (stricte) énoncée précédemment (et aussi le fait que si M est sur le *segment* AB alors la distance de A à B est la somme de la distance de A à M et la distance de M à B), cela peut faire l'objet d'un raisonnement, certes. Mais le principal intérêt de ce raisonnement sera de faire manipuler, et par cela consolider, un énoncé précédemment établi, et non pas acquérir une connaissance nouvelle à partir d'une ancienne !

Remarque — La symétrie autour d'une droite est un exemple (fondamental) d'*isométrie du plan*. On pourrait la définir comme l'isométrie distincte de l'identité conservant deux points distincts. On peut se demander si, étant donnés deux points distincts d'une surface (autre qu'un plan), il existe une isométrie de cette surface, distincte de l'identité et conservant ces points. Encore la réponse dépend-elle de la manière dont on a défini une distance sur la surface considérée. Par exemple, pour un cône, la réponse est "non" si les distances sont reportées au compas et "oui" si les distances sont reportées au moyen d'une bande de papier enroulée sur le cône, à condition, toutefois, de ne pas "aller trop loin" dans ce dernier cas. Le fait que, dans le plan, la "distance du compas" soit *la même* que la "distance de la bande de papier" distingue le plan des autres surfaces ; il en résulte que celles-ci se comportent différemment de celui-là du point de vue de l'existence des isométries ayant certaines propriétés. Il n'est pas question de faire une théorie de ces choses en quatrième mais quelques expériences *physiques* qui auraient pour objet de comparer ce qui se passe sur un cylindre, ou un cône, selon qu'on y adopte la "distance de la bande de papier" ou la "distance du compas" contribueraient bien mieux à répondre à la question "Qu'est-ce qu'un plan ?" que des phrases telles que "Le plan est un ensemble de points. Il contient au moins trois points".

4.2. LES QUADRILATERES ET LEURS SYMETRIES

Et d'abord, qu'est-ce qu'un quadrilatère ?

Si un élève vous répond que c'est "une espèce de carré", réprimandez-le pour la forme (c'est bien le cas de le dire !) mais consolez-vous en pensant qu'il aurait pu vous dire : "c'est un quadruplet" ! En vérité, j'exagère, et j'ose espérer que nul élève n'aura été à ce point déformé !

Dans un quadrilatère, il y a quatre sommets ; quatre côtés, deux diagonales et, le plus souvent, un centre. Ce qui nous fait six segments et cinq points. Il est d'usage de faire jouer un rôle à part au cinquième point (le centre) et de *définir* le quadrilatère par ses sommets.

Puisqu'en cinquième il a été question d'ensembles et de parties d'un ensemble, il est peut-être bon de revoir ces notions à propos de l'ensemble des quatre sommets d'un quadrilatère.

Soit $\{A,B,C,D\}$ cet ensemble. Choisissons deux de ses éléments : ce sont des *points* qui sont donc les extrémités d'un *segment*. Combien de segments détermine-t-on avec les éléments de l'ensemble ? Autant qu'il y a de paires dans l'ensemble des parties :

$$\{A,B\}\ ,\ \{A,C\}\ ,\ \{A,D\}\ ,\ \{B,C\}\ ,\ \{B,D\}\ ,\ \{C,D\}\ .$$

Certaines de ces parties peuvent être mises en *circuit fermé*. Par exemple :

$$\{A,B\} \qquad \{B,C\} \qquad \{C,A\}$$

mais, pour cet exemple, la lettre D n'est pas utilisée.

Quels sont tous les circuits fermés qui utilisent *toutes* les lettres ?

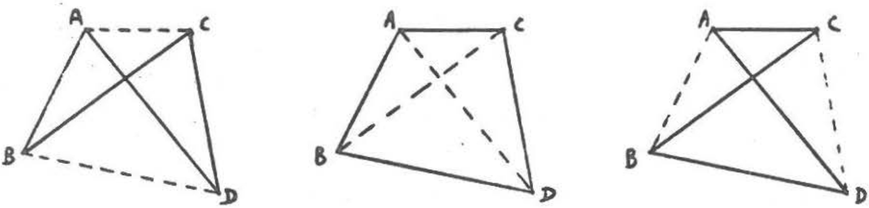
On en trouve trois :

$$\{A,B\},\{B,C\},\{C,D\},\{D,A\}\ ;\ \{A,B\},\{B,D\},\{D,C\},\{C,A\}\ ;\ \{A,C\},\{C,B\},\{B,D\},\{D,A\}$$

Ces circuits comportent tous *quatre* paires et laissent de côté chacun *deux* paires sans points communs, respectivement :

$$\{A,C\}\ \text{et}\ \{B,D\}\ ;\ \{B,C\}\ \text{et}\ \{A,D\}\ ;\ \{A,B\}\ \text{et}\ \{C,D\}$$

Les quatre paires d'un circuit correspondent aux *côtés* d'un quadrilatère qui admet pour sommets les points A,B,C,D ; les deux paires laissées de côté à ses *diagonales*. Ainsi, avec quatre points donnés pris pour sommets, on peut former *trois* quadrilatères différents. C'est ce que représente la *figure* suivante où les côtés sont en trait plein et les diagonales en trait interrompu.



Le classement des six segments en côtés et diagonales permet de distinguer deux sortes de positions relatives pour deux sommets : ils sont soit *consécutifs* s'ils sont extrémités d'un même côté, soit *opposés*, s'ils sont extrémités d'une même diagonale. Nous sommes maintenant en mesure de donner la règle d'écriture d'*un* nom pour un quadrilatère :

on écrit d'abord le nom d'un sommet
puis le nom d'un sommet consécutif au premier
puis le nom du sommet opposé au premier
puis le nom du sommet opposé au deuxième.

Voilà, c'est l'usage qui veut cela. En Poldavie (*), l'usage est différent : on nomme un quadrilatère en juxtaposant les noms de ses deux diagonales. Ainsi, les noms français des trois quadrilatères dessinés sont respectivement :

ABCD ABDC ACBD

(il y a d'autres noms possibles, cherchez-les !) alors que les noms poldèves sont respectivement :

ACBD ADBC ABCD

(Les géomètres poldèves prétendent, non sans raison, que les diagonales sont au moins aussi importantes que les côtés et que leur notation les met mieux en évidence, alors que la nôtre, disent-ils, ne met même pas en évidence tous les côtés : l'un d'eux est toujours escamoté !).

(*) Voir les Oeuvres complètes de Marcel Aymé pour plus de renseignements sur cet admirable pays à qui nous devons tant.

J'ai dit plus haut qu'un quadrilatère comporte *le plus souvent* un centre. Ce point est le point commun aux diagonales si ce point existe (*Remarque* : d'autres points que le point commun des diagonales peuvent être appelés "centre". Par exemple le centre de gravité ou le centre du cercle circonscrit ou du cercle inscrit, s'il en existe...). Ce n'est le cas que pour le quadrilatère ABDC (notation française) dessiné ci-dessus. Bien sûr, pour les quadrilatères ABCD et ACBD, on peut bien *prolonger* les diagonales jusqu'à ce que les *droites* obtenues se coupent mais on peut juger bizarre un "centre" situé à *l'extérieur* d'une figure (c'est d'ailleurs parfois le cas pour le centre du cercle circonscrit quand il y en a un).

Ici se pose une question d'existence de point commun à deux segments ou à deux droites. Cela peut donner lieu à un travail de recherche *expérimentale* :

Peut-on tracer un quadrilatère dont deux côtés quelconques ne se coupent pas *et* dont les diagonales ne se coupent pas ?

La réponse est "oui" et on découvre, incidemment, des propriétés telles que :

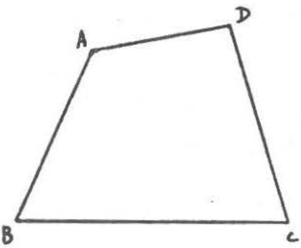
> "Si aucun segment parmi ceux qui joignent deux des quatre points A,B,C,D n'en coupe un autre, alors trois segments (et trois seulement) sont coupés par les prolongements des trois autres."
>
> "Si deux des segments joignant quatre points A,B,C,D se coupent, alors aucun segment n'est coupé par le prolongement d'un autre".

De telles recherches mettent en évidence des propriétés *topologiques* de la droite et du plan, et peuvent mener à l'énoncé de l'axiome de Pasch :

> Si une droite qui ne passe par aucun sommet d'un triangle coupe un côté de ce triangle, alors elle coupe un autre côté de ce triangle.

Ces propriétés sont tout à fait laissées dans l'ombre par le programme actuel et par l'avant-projet du 12 février 1977. Elles contribuent pour le moins autant que les "relations d'incidence" entre droites à distinguer le plan du cylindre, par exemple, et il est regrettable, à mon avis, qu'elles ne soient pas jugées dignes de faire partie du "bagage culturel" de l'honnête homme de la fin du vingtième siècle.

Mais revenons à notre quadrilatère. En voici un, *convexe*, mais dépourvu de symétrie :

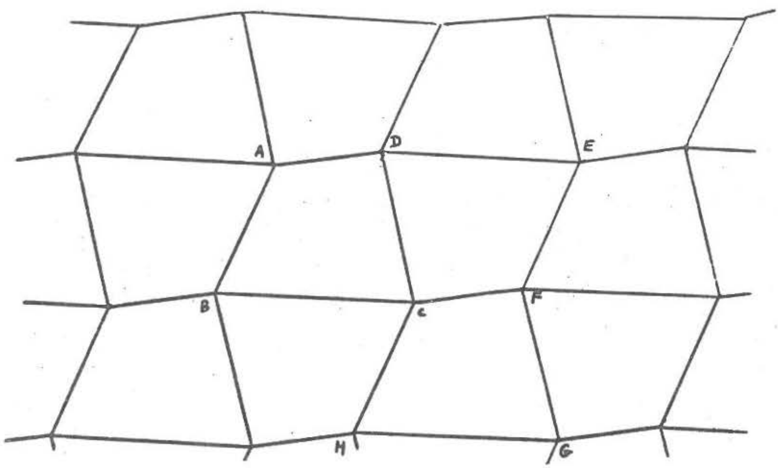


Dans le but (non déclaré, mais bien naturel, c'est-à-dire digne d'un matheux) de faire apparaître la symétrie là où elle n'est pas (*), posons la question :

"Peut-on paver le plan avec un tel quadrilatère ? "

Il s'agit, comme chacun sait, de recouvrir le plan entièrement avec des quadrilatères de même forme et de même taille que celui-ci, deux quadrilatères différents ne se chevauchant pas.

Quelques essais mènent à la solution que voici :



Sur ce pavage, comment passe-t-on du quadrilatère ABCD au quadrilatère voisin CDEF ? de CDEF à CFGH ?

Le coloriage des coins du quadrilatère mobile découpé dans du papier qui aura servi à dessiner le quadrillage rendra bien des services pour répondre à ces questions. Par exemple, après avoir mis le quadrilatère mobile sur ABCD, colorions en rouge le sommet qui est sur A, en vert le sommet qui est sur B, en noir le sommet qui est sur C, en jaune le sommet qui est sur D.

(*) Soyez sûr que c'est dans ce but que la notion de groupe fut inventée !

Cette position peut être ainsi représentée :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

On peut aussi obtenir les positions :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ F & E & D & C \end{pmatrix} \quad (2) \qquad\qquad \begin{pmatrix} r & v & n & j \\ C & H & G & F \end{pmatrix} \quad (3)$$

mais non celle-ci :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ E & F & C & D \end{pmatrix}$$

Le changement de position se traduit ainsi :

le coin qui était sur A est venu sur F
le coin qui était sur B est venu sur E
le coin qui était sur C est venu sur D
le coin qui était sur D est venu sur C

ou, plus schématiquement :

$$\begin{aligned} A &\longmapsto F \\ B &\longmapsto E \\ C &\longmapsto D \\ D &\longmapsto C \end{aligned}$$

Choisissons maintenant un point M du segment AB, par exemple, et marquons-le en marron sur le quadrilatère mobile en position (1), puis plaçons le quadrilatère en position (2). Où vient le point marron ? Sur un point du segment EF, bien sûr. Appelons P ce point :

$$M \longmapsto P$$

N'y a-t-il pas un point qui est le même que son image dans le changement de position (1) → (2) du quadrilatère mobile ?

Que peut-on dire de ce point I pour les couples (A,F), (B,E), (C,D), (D,C), (M,P) ?

On met ainsi en évidence la *symétrie* autour du point I, *milieu* commun des points de chacun des couples que l'on vient de citer.

Passons maintenant de la position (2) à la position (3) :

$$\begin{aligned} C &\longmapsto F \\ D &\longmapsto G \\ E &\longmapsto H \\ F &\longmapsto C \end{aligned}$$

Quel est alors le point égal à son image ?

Composons maintenant les changements de position (1) → (2) puis (2) → (3). Y a-t-il encore un point égal à son image ?

La *translation* est ainsi abordée autrement que par les droites parallèles. Les translations sont ici engendrées par les symétries-points, de même que, plus loin, les symétries-points seront engendrées par les symétries-droites.

Les droites parallèles apparaissent ici : par exemple BC et DE, BC et HG, CD et FG, ... Le fait essentiel, pour ces parallèles, c'est d'être symétriques l'une de l'autre autour d'un certain point. On peut déduire de là qu'elles n'ont aucun point commun, mais cette *propriété* mérite-t-elle vraiment d'être prise comme définition ? La question sera reprise au paragraphe 4 .

Donc, la symétrie peut apparaître là où elle semblait d'abord ne pas exister. Mais là où elle est déjà,comme, par exemple, dans le rectangle, le losange, le carré, que de découvertes son observation peut provoquer !

Les enfants sont naturellement attirés par les quadrilatères riches en symétries et si vous leur demandez d'en dessiner un, la plupart d'entre eux va dessiner un rectangle. Ce fait est naturellement favorisé par le quadrillage de leur cahier et la forme de la feuille sur laquelle ils dessinent, même si elle est blanche.

La découverte des symétries du rectangle, du losange et du carré nécessite un matériel peu important mais qu'il importe de bien utiliser. Par exemple, on voit dans beaucoup d'ouvrages, par ailleurs sérieux, un rectangle mobile en carton qui se balade sur un rectangle fixe dont les sommets sont désignés par les mêmes lettres. Comme, de plus, l'auteur utilise encore ces mêmes lettres pour désigner les axes de symétrie ("la diagonale AC", "la médiatrice du côté AB"), la confusion ne tarde pas à s'installer, surtout quand le rectangle devient un carré. Le même nom peut alors désigner deux axes de symétrie différents selon que l'on considère la "figure fixe" ou la "figure mobile". C'est pour éviter cet inconvénient que je recommande dans GEOMETRIE autour d'un CARRE (*) de tremper chaque coin du carré dans un pot de peinture de couleur différente des autres. Les sommets du carré mobile sont ainsi repérés par des *couleurs*, ceux du carré fixe par des *lettres*. Le carré mobile apparaît alors comme un *opérateur* qui

(*) Editions CEDIC.

permet de mettre en évidence certaines *applications dans l'ensemble des sommets du carré fixe.* Une fois le carré mobile disparu, il reste les applications mises en évidence, sur lesquelles on peut travailler mathématiquement.

Il n'est pas question, dans cet article, de recopier la première partie de l'ouvrage cité et qui traite précisément du groupe des isométries du carré, lequel contient comme sous-groupes les groupes d'isométries de tous les autres quadrilatères.

Lors de l'étude de ces symétries, une foule de propriétés apparaît : les diagonales du rectangle ont même longueur, celles du losange sont perpendiculaires, les côtés consécutifs du rectangle sont perpendiculaires, ceux du losange ont même longueur, etc... Contrairement à une idée largement répandue, il est aussi intéressant, *même du point de vue du raisonnement logique*, de progresser de la situation la plus particulière (celle du carré) vers la situation la plus générale (celle du quadrilatère "quelconque", via le parallélogramme) que dans le sens contraire. En effet, pour les enfants auxquels le carré est plus familier que le quadrilatère quelconque, les propriétés ne sont pas mieux mises en évidence que lorsqu'elles disparaissent. Un quadrilatère dont les diagonales ne sont ni de même longueur, ni de même milieu, ni perpendiculaires est un quadrilatère sur lequel ils ignorent tout, donc sur lequel ils ont l'impression qu'il y a quelque chose à apprendre.

De ce point de vue, on peut poser la question suivante : si on *supprime* telle ou telle propriété du carré, peut-on en même temps *conserver* telle ou telle autre ?

On est ainsi conduit à chercher quelles propriétés, parmi celles du carré, entraînent quelles autres. Cela donne lieu à la mise en évidence de contre-exemples (un quadrilatère peut-il avoir des diagonales perpendiculaires sans avoir des côtés consécutifs de même longueur ?) et provoque des démonstrations (un quadrilatère peut-il avoir tous ses côtés de même longueur sans avoir ses diagonales perpendiculaires ?). On est véritablement dans l'apprentissage, par sa mise en oeuvre, du raisonnement logique.

Parmi les résultats importants auxquels peut mener une telle activité, retenons ceux-ci qui interviendront dans les paragraphes suivants :

> Si les diagonales d'un *parallélogramme* ont même longueur, alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires et réciproquement.

Si les côtés consécutifs d'un *parallélogramme* ont même longueur, alors ses diagonales sont perpendiculaires et réciproquement.

Le seul quadrilatère invariant par *quart de tour* est le carré.

Le mot *parallélogramme* apparaît pour la première fois dans ce paragraphe. Il s'agit, comme l'indiquent le programme actuel et l'avant-projet du 12 février 1977, d'un quadrilatère muni d'un centre de symétrie. Ce quadrilatère sera rencontré à nouveau au paragraphe 4, aussi ne nous étendrons-nous pas davantage ici à son sujet. Le *quart de tour* est une isométrie, distincte de sa réciproque, par laquelle chaque sommet du quadrilatère a pour image un sommet consécutif. Il est remarquable que le quart de tour *n'engendre pas* le groupe des isométries du carré, bien que le carré soit le seul quadrilatère invariant par quart de tour.

Signalons, pour terminer, que les isométries des quadrilatères sont toutes, ou bien des symétries-droites, ou bien engendrées par des symétries droites. Il y a là un cas particulier d'un fait plus général : toutes les isométries du plan sont engendrées par les symétries-droites. L'étude des isométries du carré peut servir de point de départ à celles des polygones réguliers et, d'une manière plus générale, à l'étude des rotations comme composées d'un nombre *pair* de symétries-droites (de même que les translations sont des composées d'un nombre *pair* de symétries-points).

4.3. LE THEOREME DE PYTHAGORE

Dans *Mathématiques et Mathématiciens* de P. Dedron et J. Itard, on peut lire, page 26 :

> "Inutile de dire après cela que notre *théorème de Thalès* ne doit rien au vieux philosophe. D'ailleurs, ce théorème sur la proportionnalité des segments que des parallèles découpent sur deux sécantes est loin d'avoir la vénérable antiquité du Théorème de Pythagore. Il est accepté des Egyptiens et des Babyloniens, mais non comme une proposition qui a besoin de preuve : simplement comme une évidence, ainsi d'ailleurs que toutes les notions de similitude. Le Théorème de Pythagore au contraire n'est pas évident, et a nécessité *une découverte*".

Et les auteurs consacrent un chapitre entier (le chapitre XV) à ce glorieux énoncé.

L'intérêt d'un théorème n'est pas dans sa démonstration mais dans son efficacité. Celle du théorème de Pythagore est telle, dans le domaine du calcul des longueurs, que l'élève qui l'utilise pour la première fois éprouve vraiment l'impression d'avoir (enfin !) appris quelque chose.

Avant, il ne peut connaître la diagonale d'un rectangle de longueur et de largeur données qu'au moyen d'un dessin bien fait, et encore approximativement (ce n'est déjà pas si mal !).

Après, il est en mesure de *calculer* la longueur de cette diagonale avec toute la précision qu'il veut (et c'est encore mieux !).

Seulement, voilà : *le théorème de Pythagore n'est pas évident.* Si "démontrer" veut dire "rendre évidente une chose qui ne l'est pas", alors voilà l'exemple type d'un énoncé nécessitant démonstration .

Dans un recueil de fiches bien connu, à l'usage des élèves de troisième, on présente deux dessins comportant des points donnés par leurs couples de coordonnées relativement à un repère (O, I, J) :

$$B(3\,;4) \qquad C(3\,;-4) \qquad D(0\,;3) \qquad E(4\,;0)$$

Les deux dessins diffèrent en ce que, sur le premier, OI et OJ sont deux segments perpendiculaires et de même longueur, alors que sur le second, les segments OI et OJ ne sont pas perpendiculaires, quoiqu'ils aient encore même longueur (ils auraient pu être de longueurs différentes ...). On demande alors à l'élève de constater sur le dessin n° 1 que si on associe à chaque vecteur le radical de la somme des carrés de ses composantes, on obtient ainsi la distance des points d'un couple qui le représente ; on lui demande de constater en outre que cela n'est pas vrai sur le dessin n° 2. Ensuite de quoi, on érige en Axiome l'énoncé suivant :

"$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère *orthonormé* du plan.
A et B étant deux points quelconques du plan,
X et Y étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j})$,

$$d(A,B) = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ ."}$$

Sept fiches plus loin, après avoir entre-temps introduit le produit scalaire, l'auteur énonce et "démontre" le Théorème de Pythagore, énoncé cette fois-ci dans sa forme classique (*).

(*) C'est-à-dire qu'il "démontre" un énoncé *exactement équivalent* à celui qu'il a pris précédemment pour axiome. Le raisonnement déductif, ainsi présenté, n'apparaît alors que comme l'art de manier du vent !

Une telle présentation n'est à mon avis qu'une *caricature* de raisonnement démonstratif. Elle ne rattache pas un fait nouveau à des faits précédemment connus par les élèves qui se demanderont toujours qui a eu le premier l'idée (et comment ?) d'extraire la racine carrée de la somme des carrés des composantes. Cela tient vraiment de la magie, de la révélation, du droit divin ...

D'autant plus que le seul exemple donné pour motiver le fameux axiome est celui du triangle 3 ; 4 ; 5 . Or on aurait aussi bien pu énoncer, sur ce *seul* exemple :

> "$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
> A et B étant deux points quelconques du plan,
> X et Y étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j})$,
> $$d(A,B) = |XY| - |X| - |Y| \text{ .''}$$

En effet, $5 = 3 \times 4 - 3 - 4$.

L'"axiome de la différence du produit et de la somme" n'est-il pas aussi "évident" que celui "du radical de la somme des carrés" ?

Bien sûr, les Babyloniens ne connaissaient pas de démonstration du théorème de Pythagore, et il a fallu attendre Euclide pour voir établie la proposition selon laquelle

> "le carré [construit] sur le côté opposé à l'angle droit est égal [à la somme des] aux carrés [construits] sur les côtés qui contiennent l'angle droit".

Chez Euclide, par "carré", il faut entendre "aire du carré" et la démonstration qu'il donne consiste effectivement à découper le carré construit sur l'hypoténuse et les carrés construits sur les côtés de l'angle droit en triangles dont on montre qu'ils sont équivalents (i.e. qu'ils ont même aire) à certains autres dont la mise en évidence révèle surtout l'astuce du grand géomètre : ces triangles qui vont par paires de triangles isométriques ont chacun un angle *obtus* et, pour y penser, il fallait certes s'appeler Euclide ...

Bref, la démonstration d'Euclide n'apporterait peut-être pas grand chose à nos élèves mais elle a au moins le mérite, sur la pseudo-démonstration précédemment citée, de rattacher un énoncé non évident à des connaissances antérieures : celles relatives à l'aire d'un triangle.

Bien sûr, on objectera que, de nos jours, les connaissances des élèves sur les aires sont mal assurées et qu'on ne peut les prendre pour base d'un raisonnement déductif. Voire ! Je réponds que cette objection n'est qu'un mauvais motif et qu'il y a là une occasion pour rendre *opératoires* les connaissances sur les aires. D'autre part, il y a des démonstrations plus simples que celle d'Euclide, et on peut présenter les choses progressivement (donc assez tôt, comme le souhaite André Revuz). Voici un exemple de telle présentation.

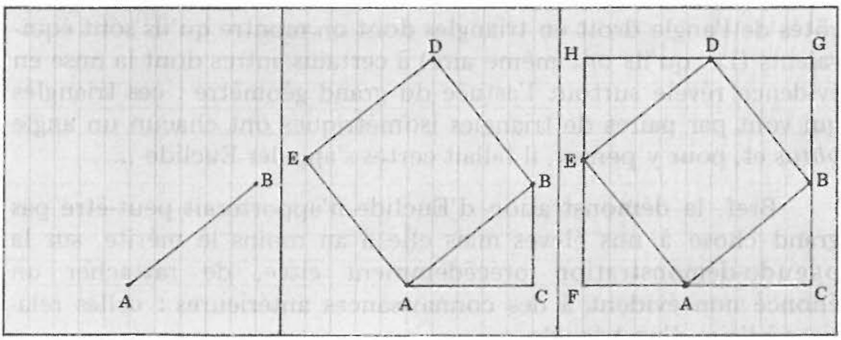
Les élèves ont à leur disposition du papier quadrillé. Le papier millimétré est bien connu, mais le papier 5×5 est sans doute aussi intéressant dans son emploi.

Voici donc deux points A et B marqués sur un quadrillage. Pour les repérer l'un par rapport à l'autre, nous dirons simplement que B est à 5 carreaux à droite et à 4 carreaux au-dessus de A. La question est de connaître la longueur du segment AB. Ce n'est pas facile ! Transformons-la un peu. Ne peut-on pas connaître l'aire du carré dont le côté est AB ? Au moins peut-on construire ce carré. Comment sont situés ses sommets autres que A et B ? Pour les curieux qui voudraient voir démontré que ABDE est vraiment un carré, signalons qu'il est invariant par l'un des quarts de tour conservant le carré CGHF.

L'aire de ce dernier carré est facile à connaître : c'est $9 \times 9 = 81$. Pour trouver celle de ABDE, il suffit d'enlever l'aire des quatre triangles ABC, BGD, DHE, EFA ; soit l'aire de deux rectangles 4×5. D'où :

$$\text{aire (ABDE)} = 81 - 2 \times (4 \times 5) = 41 .$$

La mesure de AB est donc le nombre dont le carré est 41.



Notons au passage que c'est seulement à la suite de telles activités que la notation $\sqrt{41}$ et la recherche d'encadrements de ce nombre sont motivées (sans qu'il soit besoin de construire le "corps des réels" dont on oublie trop souvent l'origine du nom — ce sont tout simplement les nombres qui nous sont imposés par la réalité !).

Quelques exercices du même genre, *avec des données numériques*, font manipuler les idées qui, une fois mises en forme, donneront une *véritable démonstration* (*).

Soit ABC un triangle rectangle dont on connaît les côtés de l'angle droit AC et BC (les mesures de ces longueurs seront désignées par AC et BC). A partir de ce triangle, on peut reconstituer les carrés CGHF et ABDE. Alors :

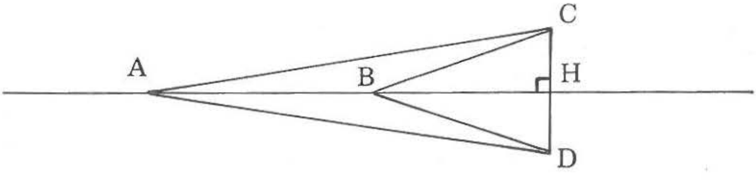
$$\begin{aligned} \text{aire (ABDE)} &= (AC + BC)^2 - 2\, AC \times BC \\ AB^2 &= AC^2 + 2\, AC \times BC + BC^2 - 2\, AC \times BC \\ AB^2 &= AC^2 + BC^2 \,. \end{aligned}$$

Et, au passage, on *utilise* $(a + b)^2$ autrement que dans un exercice dont le seul but est de *faire utiliser* (sic !) $(a + b)^2$.

Comme application du Théorème de Pythagore, donnons la réponse à une question posée au paragraphe 1 :

> Les centres de deux cercles sont distants de 3 cm. Le rayon du premier est 5 cm, celui du deuxième est 7,95 cm (il devrait être 8 cm, mais le dessinateur s'est trompé d'un demi-millimètre). A quelle distance de la droite des centres se trouve chacun des points communs ?

Désignons par y cette distance, par x la distance BH, H désignant le milieu des deux points C et D, communs aux deux cercles de centres respectifs A et B.



(*) Au sens, indiqué ci-dessus, où "démontrer" signifie "rendre évidente une chose qui ne l'est pas" ou encore "rattacher un fait nouveau à des connaissances antérieures".

Les triangles AHC et BHC étant restangles en H (la *perpendicularité* des droites AB et CD est une vieille connaissance : elle date du paragraphe 4.1. !), on peut leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$(3 + x)^2 + y^2 = 7{,}95^2$$
$$x^2 + y^2 = 5^2$$

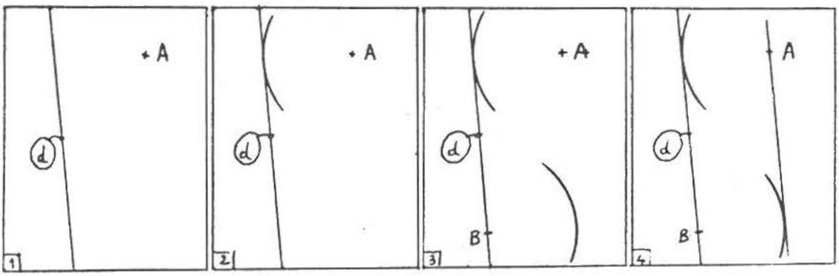
Un calcul facile donne alors :

$$6\,x = 7{,}95^2 - 34$$
$$x \approx 4{,}867$$
$$\text{d'où} \quad y \approx 1{,}145$$

Ainsi, une erreur "minime" de 0,5 mm se trouve amplifiée par le dessin en un écart de plus de 2 cm entre les points C et D qui eussent dû être confondus si le dessinateur ne s'était pas trompé !

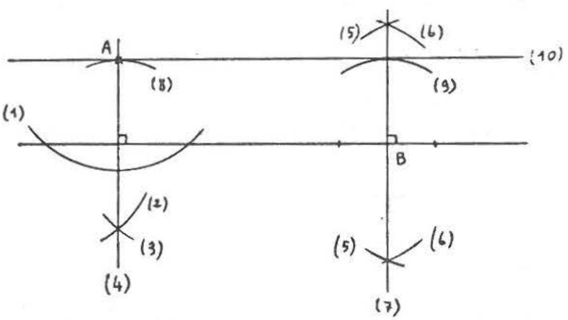
Ce rôle d'*amplificateur d'erreur* joué par le dessin présente un intérêt pratique dans certains tracés, utilisés notamment par les chaudronniers. Par exemple, pour tracer par un point donné A la parallèle à une droite donnée d , ils utilisent le procédé suivant que nombre de professeurs de mathématiques jugent proprement abominable :

> ils piquent leur compas sur A et tracent le cercle de centre A tangent à la droite d ; puis, sans changer l'ouverture du compas, ils le piquent en un point B de d , le plus loin possible du point de contact du cercle et de la droite, et tracent le cercle de centre B (et de même rayon que le précédent) ; enfin, ils tracent à l'aide d'un réglet et d'une pointe traçante "la" tangente (*) du point A à ce dernier cercle.



(*) Les guillemets sont mis pour faire plaisir aux rigoristes qui feront remarquer qu'il existe *deux* tangentes de A au cercle de centre B. On ne m'a jamais signalé le cas d'un chaudronnier qui se serait trompé de tangente !

J'entends d'ici les cris d'horreur de certains : "Mais les points de contact *ne sont pas déterminés* ! On n'a *pas le droit* d'opérer ainsi ! ". Voilà les grands mots lâchés. Mais regardons-y de plus près. Pour le but poursuivi, c'est-à-dire le tracé d'une droite dont tous les points sont à la même distance de d que le point A, la "détermination" du point de contact n'est pas essentielle ; par contre une grande précision dans le report des distances est requise. Or, que se passe-t-il s'il y a erreur : ou bien il y a un "jour" entre le cercle et la droite qui devrait lui être tangente et ce "jour" est facile à détecter, donc à éviter, ou bien le cercle "mord" sur la droite, mais alors la profondeur de cette "morsure" est considérablement amplifiée par sa largeur et, là encore, l'erreur est détectable, donc évitable. En fait, il y a encore deux causes d'erreurs : le compas est-il bien piqué au point A d'abord puis en un point B de la droite d ensuite (et non pas un peu à côté) ? Mais ces deux dernières causes d'erreurs ne sont pas propres à ce type de tracé et interviennent dans tout autre. Par exemple, dans celui que résume le dessin suivant où la chronologie est indiquée par des numéros croissants dans l'ordre des opérations à effectuer. Le plus grand numéro est 10 : c'est précisément le nombre de sources d'erreurs dans un tracé jugé plus correct que le précédent par beaucoup de lecteurs de cet article (et qui n'en comporte que 4).



Au lieu de vitupérer un procédé pratique qui corrige lui-même les erreurs de l'opérateur, ne serait-il pas plus sage de l'accepter comme donné (humblement !) et d'expliquer mathématiquement (ici au moyen du théorème de Pythagore) pourquoi ce procédé est bon ? Bien sûr, une telle attitude suppose une certaine *ouverture* d'idées ; elle suppose aussi que le professeur aura le *temps* de se livrer, dans sa classe, à des *ouvertures* sur des situations non proprement mathématiques et de montrer ainsi que la mathématique peut servir ... ailleurs qu'en mathématiques. Quand cessera-t-on de ne mathématiser rien d'autre que la mathématique ? C'est en cela, en effet, que consiste l'axiomatisation et nos élèves en sont bien loin : qu'on les mette d'abord en condition de mathématiser la réalité !

4.4. LES VECTEURS

Le principal intérêt des vecteurs, c'est que leur ensemble est structuré de manière telle que l'on peut calculer sur eux *presque* comme sur les nombres. C'est d'ailleurs, en gros, ce qui constitue la *définition* des espaces vectoriels.

Cette structure est tellement simple pour qui la connaît que celui-ci se pose aussitôt la question "mais pourquoi ne pas y avoir pensé plus tôt ? pourquoi n'est-ce pas Euclide l'inventeur des vecteurs ? ". Bien sûr, j'exagère : nos élèves de troisième connaissent les vecteurs mais ignorent les oeuvres d'Euclide et ne peuvent donc pas se poser une telle question. Ou, plutôt, ils connaissent une espèce de mélange dans lequel la notion de vecteur est fondée sur celle de parallélisme de droites (voir les fameux "axiomes d'incidence" de l'actuel programme et les "propriétés d'incidence", qui leur sont identiques, de l'avant-projet du 12 février 1977), lesquelles droites seront définies plus tard (sic) au moyen des vecteurs ! La vicieuse circularité d'une telle présentation compromet sûrement toute possibilité ultérieure de vue d'ensemble et de jugement sain sur la géométrie et sur son évolution historique. A ce sujet, il serait intéressant que l'avant-projet soit soumis, pour critique, à quelques groupes de recherche ayant pour préoccupation l'épistémologie.

Que le grand Euclide (et nombre de ses successeurs) n'ait pas pensé aux vecteurs, cela montre que ceux-ci ne sont pas si naturels qu'on veut bien le dire.

Admettons qu'à la suite de nombreuses activités expérimentales, les élèves finissent par admettre que l'espace est un ensemble de points (*). Peut-on définir "naturellement" dans cet ensemble une loi de composition qui en fasse un groupe ? La réponse est *non* parce que, dans tout groupe, il y a un élément qui joue un rôle spécial, c'est l'élément neutre, alors que dans l'espace, tout point

(*) Cette hypothèse suppose, bien sûr, que la première leçon de géométrie de sixième ne commence pas ainsi : "L'espace est un ensemble de points" comme je l'ai encore malheureusement constaté récemment dans certains des "nouveaux" manuels plus ou moins allégés que nos élèves auront désormais "gratuitement" sous les yeux.

joue le même rôle que tout autre. L'espace est *homogène*. Y définir une structure de groupe détruit *ipso facto* cette homogénéité en forçant à distinguer un point particulier : l'*origine* de l'espace.

Les ensembles numériques sont "naturellement" pourvus de cet élément particulier : 0 pour la structure ($\mathbf{R}$, +) et 1 pour la structure ($\mathbf{R}_*$, ×) qui sont des groupes. Mais l'espace n'est pas pourvu "naturellement" d'une origine, il faut la créer de toutes pièces (et, au besoin, en changer) *artificiellement*.

Une autre manière de procéder consiste à fabriquer de toutes pièces un groupe qui opèrera sur l'ensemble des points de l'espace. Ce groupe est celui des *translations*. Mais là encore, il y a *création artificielle* et c'est sans doute dans le fait que la structure de groupe ne peut être introduite en géométrie que d'une façon *artificielle* qu'il faut voir la cause de l'apparition tardive des vecteurs.

Mais, préalablement à cette construction (et nous sommes bien ici dans le cas d'une *construction* nécessaire puisque l'espace n'est pas muni *naturellement* d'une structure de groupe), ne serait-il pas bon de sensibiliser les élèves à l'étude d'une *loi de composition* dans l'espace ? Cette loi serait une loi *naturelle*, et il ne faut pas chercher bien loin pour en trouver une : c'est la loi qui à tout couple de points associe le *milieu* de ces points.

Il va sans dire qu'*on ne définira pas* le milieu de deux points, attendu que les enfants savent parfaitement ce que c'est. Par contre, la recherche de procédés permettant de marquer le milieu de deux points est instructive, de même que ceux qui permettent de marquer le symétrique d'un point autour d'un autre. Ces procédés mettent tous plus ou moins en oeuvre les notions de *segment de droite* et de *distance*. Je crois que cela ne suffit pas pour faire dépendre la notion de milieu de celles de *droite* et de *parallélisme* (au sens où deux droites parallèles sont deux droites non sécantes d'un même plan) comme le suggèrent les propriétés M_2 et M_4 de l'avant-projet de programme du 12 février 1977.

Mon idée est de fonder les vecteurs sur le milieu. Faire dépendre celui-ci de la *droite* et du *parallélisme* pour, plus tard, définir (sic !) ces notions vectoriellement serait tomber dans le cercle vicieux ci-dessus dénoncé. Et je n'en ai pas l'intention. Aussi ai-je inventé (*) un instrument que tout élève peut construire (presque) gratuitement en quelques minutes de la manière suivante :

(*) Invention non brevetée et non commercialisable.
Toute reproduction largement autorisée !

- à partir d'un point situé au bord d'une feuille blanche, tracer à main levée une ligne (pas trop tordue) ;
- "graduer" grossièrement cette ligne, à main levée encore, en traçant des traits transversaux qu'on numérote 1, 2, 3, ... des deux côtés de la ligne, à partir du bord de la feuille ; chaque trait porte le même numéro au-dessus et au-dessous de la ligne, les chiffres étant placés tête-bêche ;
- "affiner" cette "graduation" en marquant des traits transversaux plus courts dans les intervalles déterminés précédemment ;
- découper la feuille en suivant la ligne tracée au début ;
- coller *bord à bord* les deux parties de la feuille de manière que la ligne "graduée" ainsi obtenue ne présente aucune discontinuité ;
- marquer 0 au point de jonction des deux parties de la "ligne graduée".

A cause de sa forme, cet instrument est appelé "moustache". C'est ainsi que mes élèves l'ont baptisé lorsque je le leur présentai pour la première fois en 1966 au Lycée Municipal Mixte de Charlieu (Loire).

Son mode d'emploi est absolument évident et les plus exigeants ne manquent pas d'être étonnés de la précision des résultats obtenus, précision remarquable devant l'apparente grossièreté de la fabrication de l'instrument. Cette précision est due au fait que le marquage du milieu de deux points à la moustache nécessite *une seule* opération, alors qu'il en faut *quatre* si on construit le milieu par la médiatrice.

Le milieu étant ainsi "désolidarisé" de la droite et de la distance, pour ne plus être que le point donné par la moustache, la question de la découverte de ses propriétés fondamentales n'est pas dépourvue d'intérêt, ne serait-ce que par le biais de la "vérification" de la moustache.

On arrive ainsi aux cinq énoncés suivants qui, issus de l'expérience et servant plus tard à démontrer d'autres propriétés, sont dignes de s'appeler *axiomes* (ce n'est qu'après avoir donné quelques exemples de démonstrations basées sur eux qu'on les appellera ainsi) :

M 1 Pour tout couple de points (A,B), il y a un point M et un seul qui est leur milieu. On note $M = A * B$.

M 2 Quel que soit le point A, $A * A = A$.

M 3 Quels que soient les points A et B, $A * B = B * A$.

M 4 Quels que soient les points A et M, il y a un point B et un seul tel que $A * B = M$. B est le symétrique de A autour de M.

M 5 Quels que soient les points A,B,C,D,
$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D)$.

Les quatre premiers axiomes sont immédiats, le cinquième nécessite une petite mise en scène qu'on peut proposer sous forme du petit problème suivant :

Marquer quatre points A,B,C,D et choisir deux de ces points. Marquer le milieu de ces deux points puis le milieu des deux autres et, enfin, le milieu des deux milieux. Recommencer en choisissant différemment les deux premiers points. Qu'observe-t-on ?

Le résultat est d'ailleurs valable si les quatre points A,B,C,D ne sont pas situés dans le même plan, et il y a là un thème intéressant de travaux manuels.

A partir du moment où on fera des démonstrations, certains seront tentés de prouver M 5 à partir des quatre autres axiomes car il n'est pas aussi évident que ces derniers. Pour couper court à ces tentatives, on peut exhiber le modèle fini ci-après dans lequel l'ensemble $\{A,B,C,D,E,F,G\}$, contenant sept éléments, est muni de la loi de composition donnée par la table ci-dessous.

*	A	B	C	D	E	F	G
A	A	C	B	F	G	D	E
B	C	B	A	E	D	G	F
C	B	A	C	G	F	E	D
D	F	E	G	D	B	A	C
E	G	D	F	B	E	C	A
F	D	G	E	A	C	F	B
G	E	F	D	C	A	B	G

Il est immédiat de contrôler que les axiomes M 1 M 2 M 3 M 4 sont vérifiés par cette loi. Par contre M 5 ne l'est pas. En effet :

$$(A * B) * (D * G) = C * C = C$$
$$(A * D) * (B * G) = F * F = F$$

donc

$$(A * B) * (D * G) \neq (A * D) * (B * G)$$

Cela prouve que l'axiome M 5 n'est pas déductible des quatre autres : il en est *indépendant*.

Pour en finir avec ces questions qui touchent à un niveau théorique assez élevé, on peut se demander si les axiomes M 1 , M 2 , M 3 , M 4 , M 5 ne sont pas mutuellement *contradictoires*. L'existence du modèle $\{A,B,C\}$ muni de la loi donnée par la table ci-contre montre que ces axiomes forment un système *consistant* : M 1 M 2 M 3 M 4 sont immédiatement contrôlables ; pour ce qui est de M 5 , il suffit de contrôler l'égalité

*	A	B	C
A	A	C	B
B	C	B	A
C	B	A	C

$$(A * A) * (B * C) = (A * B) * (A * C)$$

compte tenu du fait que A,B,C jouent le même rôle et de la commutativité de la loi * ; on trouve A = A.

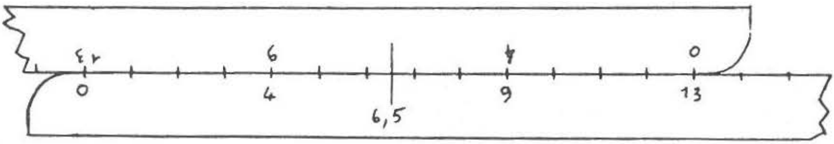
La loi-milieu est à l'espace ce que la moyenne arithmétique est à R ou la moyenne géométrique à R_*^+ . Ces trois lois de composition vérifient les cinq axiomes précédents. Mais, généralement, la moyenne arithmétique des réels est définie à partir de l'addition et la moyenne géométrique à partir de la multiplication. Renversant cette situation, on peut se demander s'il n'est pas possible de "définir" l'addition des réels à partir de la moyenne arithmétique et la multiplication des réels strictement positifs à partir de la moyenne géométrique.

Pour farfelue que puisse paraître cette question, il n'en reste pas moins vrai que c'est à un problème de ce type qu'on est confronté pour définir une *loi de groupe* dans l'espace.

Appelons "symétriques autour de c" deux réels a et b dont la moyenne arithmétique (resp. géométrique) est c . Ainsi, 4 et 9 sont symétriques autour de 6,5 (resp. 6). *La somme* (resp. le produit) *de deux réels* (resp. strictement positifs) peut être définie *comme le symétrique de 0* (resp . 1) *autour de leur moyenne arithmétique* (resp. géométrique).

Cela peut être concrétisé par des manipulations telles que celle-ci :

Prenons deux règles graduées et plaçons-les de manière que, par exemple, le 4 de l'une coïncide avec le 9 de l'autre *et réciproquement* (cela nécessite le pivotement de l'une des règles) ; quel est le point marqué par le même réel sur l'une et l'autre règle et quel est ce réel ? (le point est le *milieu* des points marqués 4 et 9 et le réel est la *moyenne arithmétique* de 4 et 9) ; comment est marqué sur l'une des règles le point marqué 0 sur l'autre ? (il est marqué 13, c'est-à-dire 4 + 9).



Le fait que pour passer d'une règle à l'autre il soit nécessaire d'effectuer un *demi-tour* autour du point marqué 6,5 montre clairement que 9 + 4 est le symétrique de 0 autour de la moyenne arithmétique de 9 et 4. Remarquons qu'une graduation *logarithmique* de la règle mène à une représentation analogue de la multiplication (pour une telle graduation, il suffit, par exemple, de marquer 1, 2, 4, 8, 16, ... les points naguère marqués 0, 1, 2, 3, 4, ... respectivement ; une telle graduation serait d'ailleurs plus justement appelée *exponentielle*).

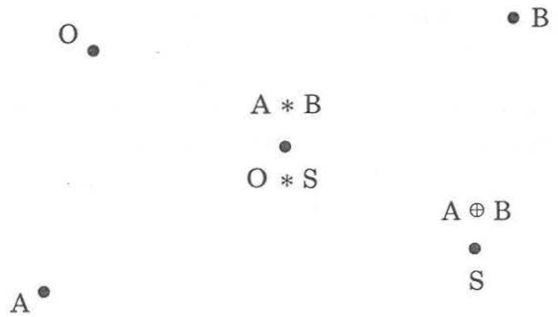
Dès lors, il est loisible de définir dans l'espace une loi de groupe :

1°) On fait choix d'une origine O, *une fois pour toutes* (je ne sache pas qu'il eût été jamais question de "changement de zéro" dans **R** !).

2°) La somme (d'origine O) de deux points est le symétrique de l'origine autour de leur milieu.

Notons $A \oplus B$ la somme (d'origine O) des deux points A et B (vous remarquez que le signe $\oplus$ rappelle + (addition) et O (origine choisie)). La définition se traduit donc ainsi :

$$\boxed{A \oplus B = S \quad \text{signifie} \quad A * B = O * S}$$



On reconnaît alors une configuration bien connue : le quadrilatère O B S A est un parallélogramme.

Ainsi définie, *l'addition d'origine* O est bien une loi de groupe dans l'espace. D'abord il est bien évident, d'après les axiomes M 1 et M 4, que, quels que soient A et B, $A \oplus B$ désigne un point et un seul. Ensuite, il est immédiat que O est neutre pour cette loi et que tout point admet pour elle un point symétrique. La commutativité ne fait aucun doute ; il ne reste plus qu'à établir l'associativité. Celle-ci donne lieu à un joli dessin. Soit donc trois points A,B,C et soit $S = A \oplus B$, $T = S \oplus C$, $U = B \oplus C$, $V = A \oplus U$. Pour tenter de démontrer l'associativité de la loi $\oplus$, on ne peut guère qu'appliquer M 5 aux quatre points donnés O,A,B,C. Voici ce que cela donne :

$$\begin{gathered}(O * A) * (B * C) = (O * C) * (A * B)\\ (O * A) * (O * U) = (O * C) * (O * S)\\ (O * O) * (A * U) = (O * O) * (C * S)\\ A * U = C * S\\ O * V = O * T\\ V = T\end{gathered}$$

(la justification de chaque étape est laissée au lecteur).

Or, $V = A \oplus U = A \oplus (B \oplus C)$ et $T = S \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$

donc, quels que soient les points A,B,C, on a bien démontré

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

c'est-à-dire qu'on a bien établi l'associativité de l'addition d'origine O.

Ainsi se trouve construite dans l'espace une loi de groupe à partir d'une loi "homogène" (i.e. pour laquelle aucun élément ne joue un rôle privilégié), à savoir la loi-milieu. Remarquez que cette loi homogène *n'est pas associative*, contrairement à la loi de groupe. Or, vous savez que l'associativité est à la base de tous les calculs classiques ; les raisonnements algébriques qui ne la mettent pas en jeu, au moins implicitement, sont assez rares.

Ce qui précède montre qu'on aurait pu construire une autre algèbre que celle dans laquelle l'associativité exerce son impérialisme, la propriété tenant lieu d'associativité étant celle qui est exprimée par l'axiome M 5.

Mais nous voici nettement au-dessus du niveau du premier cycle, quoique à propos de choses très simples regardées assez simplement. Revenons à nos vecteurs.

Pour munir un ensemble d'une structure vectorielle, il faut définir sur celui-ci une loi de *groupe* (voilà qui est fait et *nos vecteurs sont les points de l'espace*) et aussi une *loi externe* dont l'ensemble d'opérateurs est pourvu d'une structure de *corps*. Si l'ensemble d'opérateurs est seulement muni d'une structure d'*anneau*, alors l'espace considéré est muni d'une structure plus générale : celle de *module*.

Or, dans le cas présent, il va nous être facile de munir l'ensemble des points de l'espace d'une structure de module sur l'anneau des nombres *dyadiques* dont l'ensemble sera ici désigné par D. Il n'est pas question, dans cet exposé, de *fonder en détail* la théorie de ce D - module. Tout au plus l'amorcerai-je par la définition de la multiplication (d'origine O) des points par les nombres dyadiques. Cette multiplication sera symbolisée par $\otimes$. Le produit (d'origine O) par le nombre dyadique α du point A est un point désigné par $\alpha \otimes A$.

On commence par poser, *par définition* :

$0 \otimes A = O$ (*) ; $1 \otimes A = A$; $2 \otimes A = A \oplus A$;
$3 \otimes A = A \oplus A \oplus A$; ...

et, pour tout naturel n, $n \otimes A$ est la somme (d'origine O) contenant n termes dont chacun est A.
Ensuite, on pose que $(-1) \otimes A$ est le point symétrique de A pour la loi $\oplus$; on note $-A$ ce point.
Enfin, puisque l'équation d'inconnue X :

$$X \oplus X = A$$

(*) Lire : "Zéro $\otimes$ A = origine de l'espace". Il est remarquable que le zéro des nombres et l'origine de l'espace soient couramment désignés par des symboles de même forme sans que la confusion qui en résulte produise d'autres fautes.

qui équivaut à $2 \otimes X = A$ ou encore à $X * X = O * A$ a une solution et une seule (à savoir $O * A$), on pose, par définition, que $\frac{1}{2} \otimes A$ est cette solution, si bien que (par analogie avec ce qui se passe pour les nombres)

$$\frac{1}{2} \otimes A = X \qquad \text{équivaut à} \qquad A = 2 \otimes X\,.$$

On arrive ainsi à définir le produit par $\frac{5}{2}, -\frac{9}{16}, \ldots, \frac{n}{2^p}$ (d'origine O) d'un point quelconque ($n \in Z$, $p \in N$).

La *démonstration* de ce que la loi externe ainsi définie définit bien sur l'espace une structure de Z-module utilise la récurrence et il n'est pas question de l'imposer à nos élèves du premier cycle.

Plus intéressant est de leur faire observer sur de nombreux exemples que si on connaît les points $\alpha \otimes A$ et $\beta \otimes A$, le point $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \otimes A$ s'obtient en marquant leur milieu : la correspondance moyenne $\longleftrightarrow$ milieu se trouve ainsi consolidée. Il est aussi intéressant de leur faire construire, à partir de deux points donnés A et B, des points M tels que

$$M = (1 - \alpha) \otimes A \oplus \alpha \otimes B$$

et de leur faire observer la position mutuelle de ces points. Pour cela, on choisit d dyadique et toutes les constructions se font à la moustache. Le résultat est assez surprenant.

Voilà donc construite la structure de D-module. Comment parvenir, à partir de là, à la structure de R-vectoriel ? Autrement dit, comment définir le produit (d'origine O) d'un point par un réel ?

Même dans le premier cycle, on peut donner aux élèves une idée de cette définition. Cette idée sera du même ordre que celle qu'ils ont des réels :

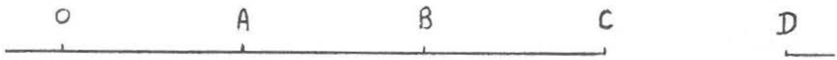
> *un réel, c'est un nombre qu'on peut encadrer par des dyadiques* (ou, ce qui est équivalent, par des décimaux).

Remarquons tout de suite que certains décimaux (3,7 par exemple) *ne sont pas* dyadiques et ne peuvent être qu'approchés par une suite illimitée de dyadiques.

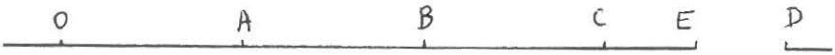
Posons donc le problème de trouver le produit (d'origine O) du point A par le réel 3,7, A étant un point donné.

O A B C D

Sur le dessin, on a marqué les points O, A, puis $B = 2 \otimes A$, $C = 3 \otimes A$, $D = 4 \otimes A$. Comme 3,7 est compris *entre* 3 et 4, on va chercher le point $3{,}7 \otimes A$ *entre* les points C et D. Pour porter sur le dessin la suite des opérations, nous allons utiliser la convention suivante : nous marquons au crayon, sur les cahiers, ou à la craie, au tableau, l'ensemble des points où n'est sûrement pas le point $3{,}7 \otimes A$, en nous limitant aux points alignés avec O et A (*).



Continuons : 3,7 est compris entre 3,5 et 4, donc $3{,}7 \otimes A$ est entre les points D et E, E étant le point $3{,}5 \otimes A$:



L'étau se resserre ! Ses mâchoires sont deux fois moins éloignées que précédemment.
Continuons. A cet effet, on calcule à chaque étape la *moyenne* des bornes du précédent encadrement et on compare 3,7 à cette moyenne ; puis on trace le segment sur lequel le point $3{,}7 \otimes A$ n'est sûrement pas. Cela donne lieu à un exercice de calcul numérique et de *disposition* de ce calcul numérique. Autant dire que c'est un véritable exercice de *programmation*.

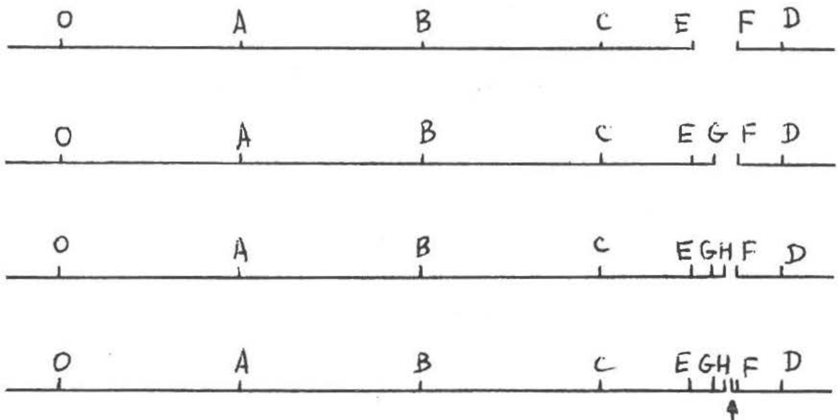
Voici les calculs et, plus loin, "les" dessins (les guillemets indiquent qu'en réalité il y a *un seul* dessin, construit par étapes mais il fallait bien le répéter chaque fois pour en montrer l'évolution). Le calcul est mené simultanément avec le tracé du dessin, jusqu'à ce que celui-ci ne permette plus de marquer de point nouveau, faute de visibilité.

$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$	$3 \leqslant 3{,}7 \leqslant 4$	Points C et D

(*) Pour le moment, "$3{,}7 \otimes A$ est sur le segment C D" n'est qu'un *pari*. La suite des opérations justifiera ce pari : les dessins suivants sont assez éloquents.

m 3,5	$3{,}5 \leqslant 3{,}7 \leqslant 4$	Point E = C $*$ D
+ 4		
7,5		
m 3,75	$3{,}5 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point F = E $*$ D
+ 3,5		
7,25		
m 3,625	$3{,}625 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point G = E $*$ F
+ 3,75		
7,375		
m 3,6875	$3{,}6875 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point H = G $*$ F
+ 3,75		
7,4375		
m 3,71875	$3{,}6875 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}71875$	Point I = H $*$ F

(la lettre m indique que l'on prend la *moitié* du nombre précédent).



Lorsqu'on décide d'arrêter le dessin commence la discussion.

Le point 3,7 ⊗ A semble bien être *coincé* entre H et I : la longueur du segment H I ne dépasse guère l'épaisseur d'un trait. *Mais* les calculs peuvent être poursuivis sans fin puisque 3,7 n'est pas un dyadique. Et le point 3,7 ⊗ A n'est pas plus *coincé* entre H et I qu'il ne l'était entre E et F ! Certains élèves, ne s'avouant pas vaincus, vont même jusqu'à faire un *agrandissement* du segment

H I, sur toute la largeur de la feuille et recommencent ainsi trois ou quatre fois.

Les deux conclusions de la discussion sont :

1°) Par ce procédé, jamais le point $3{,}7 \otimes A$ ne sera *mathématiquement* atteint.

2°) Mais ce procédé permet d'*approcher* le point $3{,}7 \otimes A$ d'aussi près que l'on veut. On se déclare *matériellement* satisfait dès qu'il est approché de moins que l'épaisseur d'un trait.

Le procédé que je viens de décrire vaut aussi bien pour un réel non décimal, tel que π ou $\sqrt{2}$. Or, j'ai très rarement vu expliquer comment on multiplie un vecteur par un réel autrement que par des phrases du genre : "on mesure le segment OA et on multiplie sa longueur par 3,14".

En fait, je tiens pour indispensables des exercices du type ci-dessus si on veut faire *toucher du doigt* ce qu'est un *nombre réel*, sous ses *deux aspects* :

comment le mathématicien le définit,
comment le physicien l'utilise.

De plus, le concept de *droite* se trouve mathématiquement éclairé : si $A \neq O$, si $M = x \otimes A$ et si le réel x est encadré par les dyadiques n et p, alors le point M est sur le segment dont les extrémités sont les points $n \otimes A$ et $p \otimes A$.

Réciproquement, soit M un point de la droite OA. En construisant les points P_n tels que $P_n = n \otimes A$ $(n \in Z)$, on arrive à trouver deux entiers k et $k+1$ tels que M soit sur le segment $P_k P_{k+1}$. C'est l'*axiome d'Archimède* qui l'affirme. Soit Q le milieu de ce segment ; alors M est sur l'un des segments $P_k Q$ ou $Q P_{k+1}$ (sur les deux si $M = Q$). En prenant le milieu du segment sur lequel M se trouve, on arrive à le *coincer* de plus en plus près, donc on détermine ainsi, par encadrements dyadiques de plus en plus serrés, un réel x tel que $M = x \otimes A$.

Au contraire, un point K situé hors de la droite OA ne peut être approché de cette façon car la distance de K à un "point dyadique" (ni même à un "point tout court") de la droite OA ne peut descendre en dessous d'une certaine limite.

Il importe de souligner que ce sont les *propriétés topologiques* de l'espace, sous leur aspect métrique, qui interviennent ici explicitement. Or ces propriétés sont actuellement négligées par les programmes. Je ne dis pas qu'il faut en faire la théorie dans le premier cycle, mais il convient de ne pas les laisser dans l'ombre, et encore moins de les cacher (honteusement !) lorsqu'elles se présentent à nous.

Mais là encore, il faut en avoir le temps ...

De toute façon, ayons clairement conscience que l'introduction de l'ensemble des réels en géométrie y provoque *ipso facto* l'irruption de sa structure topologique aussi bien que de sa structure algébrique. En ce sens, l'actuelle "*séparation affine-métrique*", perpétuée par l'*avant-projet du 12 février 1977*, constitue une véritable escroquerie.

La *droite* OA étant ainsi définie comme l'ensemble des points M pour chacun desquels il y a un réel x tel que

$$M = x \otimes A ,$$

voyons comment le *plan* peut être approché.

O, I, J sont trois points non alignés (nul besoin d'imposer aux élèves l'énoncé d'un axiome pour les persuader de l'existence de tels points).

Traçons les droites OI et OJ. Elles ont en commun le *seul* point O (si elles en avaient un deuxième, soit K, distinct de C, alors chacune d'elles serait identique à la droite OK, comme on peut le *démontrer* à partir de la définition des droites OI, OJ et OK).

Marquons maintenant un point M sur la feuille puis cherchons, à l'aide de la moustache, un point Q sur OI et un point R sur OJ dont M soit le milieu. Dans tous les cas, notre recherche est couronnée de succès. On peut même prouver que si les droites OI et OJ sont perpendiculaires, alors les points Q et R sont sur le cercle de centre M passant par O ; dans ce cas, la distance à O de chacun des points Q et R est inférieure au double de la distance des points O et M.

Nous admettrons le résultat de notre expérience à titre d'axiome :

M 6	Quel que soit le point M du plan passant par les trois points non alignés O, I, J, il y a un point Q sur la droite OI et un point R sur la droite OJ tels que $M = Q * R$.

Chacun des points Q et R est d'ailleurs unique. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on trouverait deux autres points Q' et R' remplissant les mêmes conditions et, par suite, les droites QQ' et RR', qui ne sont autres que OI et OJ respectivement, seraient symétriques autour de M. Or, dans l'étude de la symétrie-point, on aura eu soin de prouver que deux droites symétriques ne peuvent pas être sécantes (ce qui est immédiat), ce qui n'est pas le cas pour les droites OI et OJ.

L'axiome M 6 nous mène tout droit aux notions de *repère* du plan et de *coordonnées* d'un point du plan relativement à un repère.

Soit P un point du plan passant par O, I, J. Marquons le point $M = O * P$ puis les points Q et R, respectivement sur OI et OJ, tels que $M = Q * R$.

Dans ces conditions, $P = Q \oplus R$.
Or il y a un réel x tel que $Q = x \otimes I$ et un réel y tel que $R = y \otimes J$. Il en résulte :

$$P = (x \otimes I) \oplus (y \otimes J) .$$

> Pour tout point P du plan passant par les trois points non alignés O, I, J, il y a un couple (x, y) de réels tels que
> $$P = (x \otimes I) \oplus (y \otimes J)$$

L'unicité du couple de points (Q, R) entraîne celle du couple (x, y).

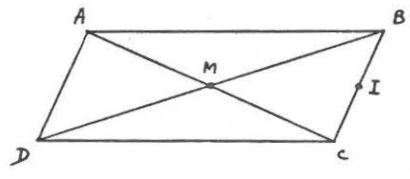
Les coordonnées d'un point sont ainsi obtenues sans référence à la notion de parallélisme au sens où deux droites parallèles sont définies comme deux droites non sécantes contenues dans un même plan. Cette définition *négative* du parallélisme ne peut, pour devenir utilisable, que s'appuyer sur le Postulat d'Euclide, lequel nous demande d'admettre ce qui se passe (ou plutôt ne se passe pas) à l'infini dans le but de démontrer ce qui se passe sous nos yeux. C'est certainement en réaction contre cette attitude quelque peu antiscientifique que des générations de chercheurs se sont échinés sur le problème de la démonstration du fameux Postulat. Une attitude scientifique eût consisté, au contraire, à chercher à prévoir ce qui se passerait hors du champ de nos activités dessinatoires, si toutefois les lois que nous avons découvertes dans les limites de ce champ sont encore valables hors de ces limites. Cette recherche eût incité, à son tour, à imaginer des expériences nouvelles "à grande échelle" qui viendraient confirmer ou infirmer ces lois, et par là, perfectionner notre connaissance de l'espace qui nous entoure. Galilée, Newton et Einstein sont, entre autres, des témoins de cette attitude scientifique.

Je ferme cette "parenthèse philosophique" pour revenir aux coordonnées d'un point.

Il importe de remarquer que le *choix de l'origine joue un rôle considérable dans tout ce qui précède.* En particulier, la définition donnée pour une droite ne vaut que si cette droite passe par l'origine. C'est la rançon de l'instauration de la structure de groupe dans l'espace : les droites n'y jouent plus le même rôle selon qu'elles passent ou non par l'origine. Ce fait est particulièrement gênant si on veut, par exemple. obtenir l'équation d'une droite ; la démonstration qu'on est amenée à faire est beaucoup plus difficile à admettre que le résultat auquel elle mène, qui est relativement simple. Aussi vais-je maintenant exposer le second point de vue auquel il a été fait allusion au début de ce paragraphe ; de ce point de vue, on laisse intact l'espace et on construit un groupe qui y opère : le groupe des *translations*.

Les translations ont déjà été rencontrées au paragraphe 2 comme composées de symétries-points et nul ne s'étonnera de les voir définies à partir du concept de milieu.

Commençons par une étude préalable du parallélogramme, qui est, comme le suggère l'avant-projet du 12 février 1977, un quadrilatère muni d'un centre de symétrie. Soit A B C D ce parallélogramme, M le milieu commun de ses diagonales AC et BD, I le milieu des points B et C.



Désignons par S_M et S_I les symétries de centre M et I respectivement.

$$A \xmapsto{S_M} C \xmapsto{S_I} B$$

$$D \xmapsto{S_M} B \xmapsto{S_I} C$$

Il y a donc une *translation* (i.e. une application composée de deux symétries-points) par laquelle deux sommets consécutifs d'un parallélogramme ont pour images respectives les deux autres sommets, chaque sommet et son image étant consécutifs.

D'une manière imagée, si on dessine deux *flèches* telles que :

les deux points de départ
les deux points d'arrivée
les extrémités de la première
les extrémités de la seconde

soient respectivement deux sommets consécutifs d'un parallélogramme, alors ces deux flèches appartiennent au schéma sagittal d'une même translation.

Une question se pose alors, quoiqu'elle puisse paraître quelque peu artificielle à nos élèves :

> Si la flèche $A \longrightarrow B$ représente une même translation qu'une flèche $C \longrightarrow D$ et si la flèche $C \longrightarrow D$ représente une même translation qu'une flèche $E \longrightarrow F$, est-on sûr que la première représente la même translation que la dernière ?

Les axiomes du milieu permettent de le démontrer, et très simplement.

Notons " .... r ...." la relation "... représente une même translation que ...".

Vu ce qui précède,

$$A \longrightarrow B \quad r \quad C \longrightarrow D \quad \text{donc} \quad A*D = C*B$$
$$C \longrightarrow D \quad r \quad E \longrightarrow F \quad \text{donc} \quad C*F = E*D$$

En composant membre à membre, par la loi-milieu, ces égalités, on obtient

$$(A * D) * (C * F) = (C * B) * (E * D)$$

Les points C et D figurent de part et d'autre du signe = mais non les autres points. Regroupons-les dans une même parenthèse, grâce à l'axiome M5 :

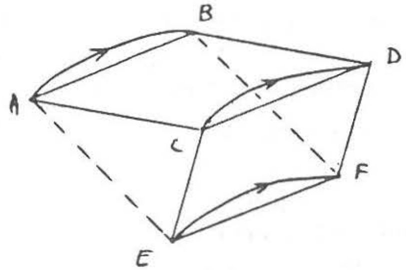
$$(C * D) * (A * F) = (C * D) * (E * B)$$

d'où, d'après M4,

$$A * F = E * B$$

ce qui entraîne

$$A \longrightarrow B \quad r \quad E \longrightarrow F$$



Au passage, on démontre que si deux parallélogrammes ont deux sommets consécutifs communs alors les quatre autres sommets sont les sommets d'un nouveau parallélogramme.

La figure précédente mérite encore notre attention car elle permet de montrer que si les flèches B ⟶ D et A ⟶ C représentent la même translation et si les flèches D ⟶ F et C ⟶ E représentent la même translation (distincte ou non de la première), alors B ⟶ F et A ⟶ E représentent la même translation. Or celle-ci n'est autre que l'application composée des deux premières translations.

Il devient alors très facile de montrer que les translations de l'espace (éventuellement limité au plan) forment un groupe et je n'insisterai pas là-dessus dans cet exposé.

La structure de D - module se définit sur l'ensemble des translations d'une manière analogue à ce qui fut fait naguère pour l'espace. Le gros avantage de la deuxième présentation sur la première c'est que l'on n'est plus tributaire du choix d'une origine ; l'espace garde son homogénéité. De plus, l'addition des translations étant définie comme leur composition, on est en possession de l'inestimable relation

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

dans laquelle $\overrightarrow{AB}$ désigne la translation admettant la flèche A ⟶ B dans son schéma sagittal. (*)

Le produit par 2 de la translation $\overrightarrow{AB}$ est évidemment défini par

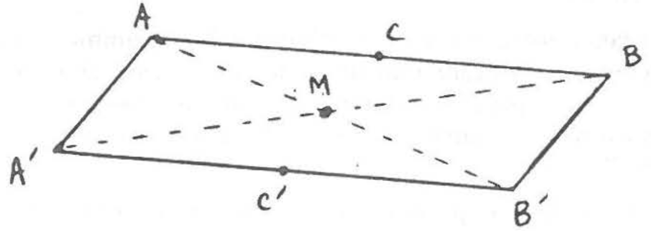
$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$$

(*) Voilà de la mathématique "moderne" ! Malgré sa simplicité, il a fallu attendre le 19e siècle pour que cette relation soit mise en évidence par Michel Chasles. Vous remarquerez que le signe + n'est plus entouré de la lettre O : l'origine n'intervient plus.

Pour le produit par $\frac{1}{2}$, on pense immédiatement à

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \qquad \text{signifie} \qquad C = A * B$$

à condition, toutefois, de prouver que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $C = A * B$ et $C' = A' * B'$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



Cela revient à prouver que les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme forment avec deux sommets consécutifs de celui-ci un nouveau parallélogramme. Or, de $C = A * B$ et $C' = A' * B'$, on déduit $C * C' = (A * B) * (A' * B')$ ce qui, d'après M5, donne $C * C' = (A * B') * (A' * B) = M * M = M$ en désignant par M le centre du parallélogramme $A\,B\,B'\,A'$. Il en résulte que $A\,C\;B'\,C'$ est un parallélogramme, donc aussi $ACC'A'$ puisque $B'C'A'C'$ en est encore un (c'est le "théorème de composition des parallélogrammes" qui joue son rôle ici).

Revenons un instant sur l'addition pour signaler que la somme de deux translations donne lieu à deux dessins intéressants :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$ équivaut à $A * S = B * C$

Le second dessin n'est pas sans rappeler la définition de la loi $\oplus$ dans l'espace, sauf que maintenant l'origine commune des flèches représentant les deux translations est arbitraire, ce qui donne une grande souplesse à la seconde approche (celle des translations) relativement à la première (celle de la loi $\oplus$ dans l'espace) tout en permettant de la retrouver.

De plus, la flèche C $\longrightarrow$ B représente la translation $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$:

> "Si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme portent des flèches représentant chacune une translation, alors les diagonales de ce parallélogramme portent des flèches dont l'une représente la somme et l'autre la différence de ces translations".

Cette remarque jouera son rôle lorsqu'il sera question du *produit scalaire* de deux translations.

En effet, définissons le produit scalaire de deux translations comme une réel obéissant aux propriétés suivantes (*) :

1°) Si la distance de A à B est égale à 1, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$

2°) $(x\,\overrightarrow{AB}) \cdot (y\,\overrightarrow{CD}) = xy\,(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})$

3°) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

4°) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF})$

Il apparaît alors que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ est le carré de la distance de A à B et que

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Dire que les *droites* AB et AC sont perpendiculaires, équivaut à dire que le parallélogramme A B S C est un rectangle, donc que AS et BC ont même longueur.

Dans ces conditions, on dit que les translations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *orthogonales*. Ce qui précède montre alors que :

"$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonales" *équivaut à* "$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$"

(*) **Comme le produit scalaire est une *invention tout à fait artificielle*, on peut bien le créer comme on veut, sauf de manière contradictoire. Le fait que le modèle physique se prête à merveille à cette invention prouvera, après coup, qu'il n'y a nulle contradiction dans les propriétés choisies.**

L'introduction du repérage dans le plan se fait de la même façon que dans le point de vue précédemment exposé, à quelques changements de notations près. On a toutefois une notion supplémentaire : celle de *composantes* pour une translation, relativement au repère donné ; de plus, la définition de la droite passant par les points distincts A et B ne dépend plus du choix d'une origine (droite AB = $\{ M \mid \exists\ x, x \in \mathbf{R}$ et $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} \}$).

L'expression analytique du produit scalaire lorsque le repère est *orthonormé* est très facile à trouver et à retenir :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = x\,x' + y\,y'$$

Cette expression fournit immédiatement les composantes (x', y') d'une translation $\overrightarrow{A'B'}$ orthogonale à une translation $\overrightarrow{AB}$ de composantes (x, y) données : il suffit de prendre $x' = y$ et $y' = -x$.

De cela découle facilement l'équation d'une droite, *toujours pour un repère orthonormé.*

La droite AB est en effet l'ensemble des points M tels que les translations $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient orthogonales. Désignons par (x, y), (a, b), (m, p) respectivement les coordonnées de M, les composantes de $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de A. Alors :

$$(x - m)\,b - (y - p)\,a = 0$$

d'où l'équation de la droite :

$$bx - ay = c$$

c étant un réel qui dépend uniquement de A et B.

J'entends d'ici les rigoristes m'accuser de mélanger les points de vue métrique et affine ! En effet, l'équation trouvée est valable non seulement pour un repère orthonormé mais pour un repère quelconque, l'orthogonalité n'a rien à faire ici.

Je réponds : eh bien tant mieux ! j'ai peut- être utilisé un marteau-pilon pour ouvrir une noix ; mais que de fois n'ai-je pas vu, à l'inverse, utiliser un cure-dent pour tenter d'ouvrir un coffre-fort ! Au reste, une bonne figure en perspective cavalière (voilà bien un "dessin raisonné" donc digne de s'appeler figure !) aura tôt fait de montrer aux enfants que l'équation d'une droite est valable aussi pour un repère oblique, et d'une manière bien plus efficace qu'une démonstration directe, du genre de celles qu'on fait aujourd'hui "pour suivre le programme" (*directe* signifie ici que l'équation de la droite est obtenue au moyen de la seule structure affine du plan, sans l'"intermédiaire" métrique que constitue le produit scalaire ; gageons que nos élèves ne la trouvent pas si directe que cela !).

Je n'ai pas l'intention, dans cet article que certains trouveront déjà beaucoup trop long, de développer davantage les quelques idées que je viens de jeter quelque peu en vrac sur le papier. Je serais satisfait si elles ont provoqué autre chose que l'indifférence du lecteur, même si c'est une certaine hostilité.

Mais pour terminer ce paragraphe j'aimerais insister sur un point. L'introduction des *vecteurs* en géométrie, soit par la loi $\oplus$ dans l'espace, soit par les translations (les vecteurs étant tantôt les points, tantôt les translations) permet de *calculer* sur des dessins et, par le fait, d'y trouver des résultats cachés. Par exemple, pour prouver que les points de coordonnées respectives, (0, 0), (13, 8), (21, 13) ne sont pas alignés, un dessin sur papier quadrillé ne suffit pas, seul le calcul est efficace. Or ce calcul est basé sur des *règles* qui sont en réalité les axiomes des espaces vectoriels euclidiens. Ces règles nous sont suggérées par des expériences que nous pouvons effectuer *à distance finie*, c'est-à-dire à l'échelle du dessin sur une feuille de papier. Une fois obtenue l'équation d'une droite (et, je le répète, sans référence au vieux Postulat d'Euclide qui intéresse l'"infiniment grand" mais plutôt à des postulats concernant la "structure fine" de **R**, c'est-à-dire, en quelque sorte, l'"infiniment petit"), on peut *démontrer* que par un point donné il ne passe qu'une droite située dans le même plan qu'une droite donnée et ne la rencontrant pas. Ce résultat paraîtra d'un intérêt assez mince à ceux qui ont coutume de l'imposer à leurs élèves, à titre d'axiome, dans leur leçon inaugurale de quatrième. Mais il rejoint les "préoccupations philosophiques" évoquées dans une parenthèse antérieure qui se trouve ainsi ouverte à nouveau.

L'un des buts assignés à l'enseignement de la géométrie est la prise de possession par l'enfant des propriétés de l'espace qui l'entoure (et dont il fait partie). Cette prise de possession ne peut se faire convenablement que par des *expériences à son échelle*, c'est-à-dire à distance finie. Ensuite se pose la question "et si je vais plus loin, si je prolonge ces droites jusqu'à l'infini ?" La réponse est que *si* les lois découvertes à notre échelle sont aussi valables à celles de l'univers, *alors* il se passe ce que vous savez. Le *si* est essentiel car aucune théorie mathématique ne peut nous dire quelles sont les propriétés de l'espace à l'échelle de l'univers.

Seule l'*expérience* peut nous renseigner et ses résultats sont tels qu'ils doivent nous incliner à la modestie : la notion de droite, pas plus que celle de parallélisme, ne peut être étendue à l'échelle de l'univers. Force est alors de reconnaître que l'attitude qui consiste à faire dépendre ce qui se passe sous nos yeux de "vérités révélées" concernant l'inacessible n'est pas raisonnable et qu'elle est même antiscientifique, puisque ces prétendues "vérités révélées" sont fausses dès qu'on atteint les dimensions du système solaire. Or cette attitude est précisément celle qui consiste à mettre à la base de l'enseignement de la géométrie affine de quatrième les "propriétés d'incidence" des droites. Qu'à l'époque d'Euclide on se soit permis, faute de mieux et non sans réticence (*), de demander de bien vouloir admettre les dites "vérités révélées", passe encore, mais au siècle d'Einstein !...

4.5. TRIGONOMETRIE

Ce qui fait la difficulté actuelle de l'enseignement de la trigonométrie, ce n'est ni le sinus, ni le cosinus, ni la tangente ni la cotangente. Non ! *C'est l'angle*, tout simplement.

Qu'est-ce qu'un angle ?

Peut-on enseigner quelques rudiments de trigonométrie sans avoir au préalable *fait le fondement* de cette notion, ce qui correspond à tenter d'injecter (non surjectivement, hélas !) dans sa classe les onze fiches qui forment les rubriques "angle" et "phase" du dictionnaire de l'APM ? (Ah ! j'allais oublier les six fiches qui constituent les rubriques "rotation" et "secteur").

Depuis qu'une grande discussion a eu lieu à propos des *angles* qui-ne-sont-pas-du-tout-ce-que-vous-pensez, l'imbroglio n'a fait que croître et embellir et le légitime effroi qui s'empare de tout honnête professeur à la seule vue de ce mot explique en grande partie le fait que la trigonométrie soit abordée le plus tard possible dans la plupart des classes :

(*) Voir Dedron et Itard, Mathématiques et Mathématiciens, p. 60 : "*Proposition 29* [...] *Il est fait appel ici, pour la première fois, à la Demande 5, au Postulat d'Euclide. On peut remarquer que, par l'utilisation aussi tardive que possible de son postulat, Euclide peut être salué comme le premier géomètre "non-euclidien".*" C'est vraiment qu'il ne pouvait pas faire autrement ! Mais si Euclide avait adopté comme définition des parallèles autre chose que la vacuité de leur intersection (qui n'est après tout qu'une propriété secondaire) la face de la géométrie se fût peut-être trouvée changée : par exemple, droites symétriques autour d'un point.

"Comment l'enseignerai-je à mes élèves ? Je ne sais plus ce que c'est ! ".

Or de quoi s'agit-il dans le premier cycle ?

La trigonométrie c'est, étymologiquement, la mesure des triangles, c'est-à-dire de leurs angles et de leurs côtés, et, par suite, l'étude des relations qui lient ces différentes mesures.

Par exemple, je fais de la trigonométrie, certes rudimentaire, lorsque sur le terrain je mesure la distance de deux points A et B puis les angles que fait AB respectivement avec les rayons visuels issus de A et B en direction d'une certaine tour C et que je reporte ensuite ces données, à échelle réduite pour AB, sur un papier afin d'y mesurer, à la même échelle, les distances AC et BC.

L'avant-projet de programme pour la classe de troisième du 12 février 1977 contient la phrase suivante :

"On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée".

Cela signifie-t-il qu'on doit admettre que les élèves connaissent cette existence et cette unicité ? Je crois que non, ne serait-ce que par précaution. Mais alors il faudra bien, d'une manière ou d'une autre, leur expliquer ce que c'est, plutôt que de leur dire "Vous savez bien que..." et risquer qu'ils ne le sachent pas.

J'ai toujours trouvé, *et à tous les niveaux*, des élèves (et même des adultes) *allergiques au rapporteur*. Dessinez un angle au tableau, soigneusement, à la règle, et demandez à un enfant de venir le mesurer à l'aide du rapporteur. Bien souvent, et même s'il vient de voir un camarade opérer correctement, il aura, avec son rapporteur en mains, l'air d'une poule qui a trouvé un couteau ! Par contre, il en est d'autres qui savent faire avant même qu'on leur ait montré (l'inventeur du rapporteur devait être de ceux-ci !).

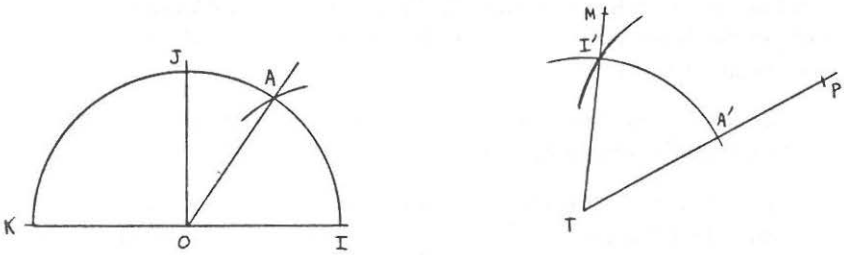
La *comparaison* de deux angles au moyen d'un tracé au compas semble poser moins de problèmes, de même que la construction d'un angle de même ouverture qu'un angle donné.

A la lumière de ces réflexions, la question de la mesure des angles peut être revue et traitée de la manière suivante qui consiste, finalement, à construire un *rapporteur fixe* sur lequel seront reportés les angles à mesurer. Du même coup, on va introduire le *demi-cercle trigonométrique*.

Voici donc un angle $\widehat{MTP}$ et un demi-cercle de centre O et de rayon 1. L'une des extrémités I du diamètre KI et le point J du demi-cercle tel que OI et OJ soient perpendiculaires formeront avec O le repère orthonormé (O, I, J).

Construisons le point A tel que l'angle $\widehat{IOA}$ ait même ouverture que l'angle $\widehat{MTP}$. Cela signifie qu'il y a une isométrie (voir paragraphe ②) qui applique l'angle $\widehat{MTP}$ sur $\widehat{IOA}$.

En particulier, il y a, sur les côtés de l'angle $\widehat{MTP}$, deux points I' et A' tels que TI' = OI, TA' = OA, I'A' = IA, d'où le tracé que résume la figure ci-après :



Pour connaître la mesure de l'angle $\widehat{MTP}$, qui est la même, à cause de l'isométrie, que celle de $\widehat{IOA}$, nous allons *graduer* le demi-cercle. Cela veut dire que nous allons faire correspondre à chacun de ses points un réel tel que le réel correspondant à un point *équidistant* de deux autres soit la *moyenne arithmétique* des réels correspondant à ces deux autres points. On reconnaît là un procédé qui a déjà été utilisé au paragraphe ④ pour le repérage d'un point sur une droite. Il s'agit ici de repérer le point A sur le demi-cercle trigonométrique. Il est d'usage de faire correspondre le réel 0 au point I et un réel p strictement positif au point K (*). Selon que la graduation est faite en tours, demi-tours, quadrants, sextants, degrés, grades, radians, millièmes, p désigne respectivement 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 180 ; 200 ; π ; 3200.

Au point J correspond le réel $\frac{p}{2}$ puisque J est équidistant de I et K. Supposons que A soit *sur l'arc* IJ (et c'est une notion *topologique* qui intervient ici, ne le cachons pas). Le réel α qui lui

(*) Il est piquant de constater que les rapporteurs du commerce sont gradués à l'envers de cet usage ou comportent deux graduations de sens opposés dans lesquelles les étourdis s'empêtrent immanquablement !

correspond est compris entre 0 et $\frac{p}{2}$.

La médiatrice des points I et J coupe le demi-cercle en un point A_1 (et *un seul*) qui est équidistant de I et J. A ce point A_1 correspond donc le réel $\frac{p}{4}$. Supposons, comme cela semble être le cas sur le dessin, que A soit sur l'arc $A_1 J$. Le réel α est alors compris entre $\frac{p}{4}$ et $\frac{p}{2}$.

Le procédé doit être continué jusqu'à ce que le dessin ne permette pas d'aller plus loin et une discussion doit en résulter. Il vaut la peine de prendre le temps de fortifier ainsi la connaissance des réels et de leurs liens avec la réalité (relisez cette phrase, si sa fin vous paraît drôle).

Le réel α est ainsi encadré, d'aussi près que faire se peut, par des dyadiques (encore eux !).

Il est d'usage de désigner un angle par le réel α suivi du symbole de l'"unité" qui a servi à graduer le demi-cercle : ainsi, on parle d'un angle de 37°, de 41 gr, de $\frac{\pi}{6}$ rd. Dans la suite, conformément à un abus de langage universellement admis, je désignerai par α l'angle $\widehat{IOA}$ aussi bien que sa mesure, élidant ainsi le symbole de l'unité. Ainsi, l'écriture $\cos \alpha$ désignera $\cos \widehat{IOA}$ et devrait, selon le cas, être mieux orthographiée $\cos \alpha^\circ$ ou $\cos \alpha$ gr ou $\cos \alpha$ rd , ... selon l'unité choisie.

Par contre, pour des mesures *explicitement chiffrées*, l'indication de l'unité reste indispensable : cos 37 est ambigu puisque cos 37° n'est pas le même réel que cos 37 gr.

Indiquons, pour en finir avec la mesure des angles, qu'il est encore un moyen pour trouver celle-ci : supposons qu'on connaisse les réels correspondant à deux points A et B du demi-cercle ; alors la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à la valeur absolue de la différence de ces deux réels.

Maintenant que voici établie la mesure des angles, la définition des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente est immédiate :

Angle — Point du demi-cercle trigonométrique — Coordonnées

$$\begin{tikzcd} & & \cos\alpha \\ \alpha \arrow[r] & A \arrow[ur, "\text{abscisse}"] \arrow[dr, "\text{ordonnée}"'] & \\ & & \sin\alpha \end{tikzcd}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad\qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

La recherche des sinus, cosinus, tangente et cotangente des "angles remarquables" que sont 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 180°, donne lieu à des remarques bien connues qui, une fois démontrées d'une manière générale sans aucune difficulté, mènent aux formules :

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

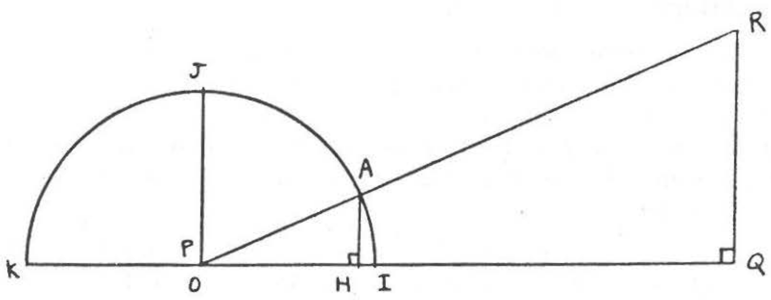
$\text{tg}\,(90° - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$; $\text{cotg}\,(90° - \alpha) = \text{tg}\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\text{tg}\,(180° - \alpha) = \text{tg}\,\alpha$; $\text{cotg}\,(180° - \alpha) = -\,\text{cotg}\,\alpha$

Ces formules permettent l'usage des tables, lesquelles donnent, on le sait, les cosinus, sinus, tangente et cotangente des angles compris entre 0° et 45° (et, accessoirement, de 45° à 90° au moyen d'un artifice qui fait tromper plus d'un élève).

Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, par l'étude desquelles se termine l'avant-projet de programme du 12 février 1977, s'effectuent alors très simplement.

Soit PQR un triangle rectangle en Q. Rapportons le plan à un repère (O, I, J) choisi le plus convenablement possible. A cet effet, O sera en P, I sera sur la droite PQ et J sera tel que l'ordonnée de R soit positive.



Le demi-cercle de diamètre KI passant par J coupe PR en A dont le projeté orthogonal sur OI est H.

Tous les réels qui interviennent dans cette étude sont positifs, ce qui dispense des notations telles que $\overline{OH}$ que nous n'avons d'ailleurs jamais utilisées dans cet exposé.

Désignons par p, q, r les longueurs respectives des côtés QR, RP et PQ du triangle PQR.

$$\overrightarrow{PR} = q\,\overrightarrow{PA}$$

puisque les points P,A,R sont alignés et que PA a pour longueur 1.

Or $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA}$

$$\overrightarrow{PR} = r\,\overrightarrow{OI} + p\,\overrightarrow{OJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PA} = \cos\alpha\,\overrightarrow{OI} + \sin\alpha\,\overrightarrow{OJ}$$

d'où $r\,\overrightarrow{OI} + p\,\overrightarrow{OJ} = q\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{OI} + \sin\alpha\,\overrightarrow{OJ})$

L'unicité du couple de composantes de $\overrightarrow{PR}$ relativement au repère (O, I, J) entraîne alors

$$r = q\cos\alpha \quad \text{et} \quad p = q\sin\alpha$$

d'où l'on tire

$$p = r\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{et} \quad r = p\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

En particulier, si Q est en I, r = 1 et QR = tg α . Comme, dans ce cas, la droite QR est tangente en I au demi-cercle, on a l'origine de l'appellation "tangente".

4.6. REPARTITION DE CES THEMES

Et maintenant, me direz-vous, comment répartir ces thèmes en quatrième et en troisième ?

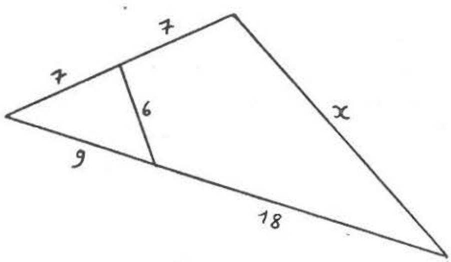
La réponse peut se discuter, d'autant plus que certains d'entre eux sont assez vastes pour être divisés en sous-thèmes dont certains peuvent être abordés dès la quatrième et les autres, plus abstraits, devraient être réservés à la troisième. Il en est ainsi du quatrième, les vecteurs, que je n'ai pas développé ici complètement, d'ailleurs.

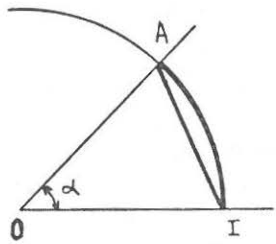
Je dois signaler que des expériences menées par les équipes OPC ont porté sur l'enseignement du théorème de Pythagore en quatrième. Je suis d'accord avec cette tentative et placerais volontiers dans la même classe les thèmes numéros (1) et (2), l'étude plus approfondie du parallélogramme débouchant, à la fin de cette classe, sur le groupe additif des translations.

La troisième serait alors consacrée au reste de l'étude vectorielle (y compris le produit scalaire) et à la trigonométrie qui, peut-être, pourrait être moins étriquée qu'actuellement, justement à cause du produit scalaire.

Pour terminer, un exercice :

Montrer comment le produit scalaire permet de calculer la longueur x dans le dessin de gauche et de prouver (dessin de droite) que $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ est une bonne approximation de $\cos \alpha$ rd (l'erreur est inférieure à 1 % pour tous les angles compris entre 0° et 37°).





Lyon, le 29 avril 1977