

3 - GÉOMÉTRIE NATURISTE

A mon Ami Henri Bareil

“Jamais la nature ne nous trompe ; c’est toujours nous qui nous trompons”.

J.-J. Rousseau (*Emile*, III)

“Le mot de nature est un de ces mots dont on se sert d’autant plus souvent que ceux qui les entendent ou qui les prononcent y attachent plus rarement une idée précise”.

Condorcet

Mettons-nous à la place d’un élève de Sixième ou de Quatrième. “Pourquoi faut-il que j’étudie la géométrie ? ” Ecartons la réponse “Parce que c’est au programme”, nous risquerions qu’il nous demande “Pourquoi est-ce au programme ? ” et nous serions bien embarrassés pour lui répondre (“Le Ministre en a ainsi décidé” ne le satisfera guère et l’amènera à penser que nous faisons de la politique en classe !).

J’écarte aussi bien la docte explication : “Depuis que Platon écrivit au fronton de son Académie *Nul n’entre ici s’il n’est géomètre*, la géométrie est devenue un modèle de théorie mathématique. Autrement dit, à partir d’un nombre fini d’axiomes bien choisis, c’est-à-dire de propositions supposées vraies et non contradictoires, on peut en déduire une infinité d’autres en suivant les règles d’une rigoureuse logique. Il existe donc plusieurs géométries selon le choix des axiomes initiaux, les règles de la logique étant les mêmes dans tous les cas. Ces divers choix possibles entraînent des querelles entre mathématiciens ; X, Y et Z ont chacun leurs propositions. Nous adopterons le système proposé par Y parce que celui de X est réfuté par Z et que celui de Z est condamné à la fois par X et Y alors que celui de Y n’est réfuté par personne, Y ayant

pris la précaution d'avertir que ses contradicteurs ne pourraient être que des imbéciles." Et j'espère que les élèves seraient d'accord avec moi pour refuser les arguments d'autorité ou les arguments terroristes, à mettre les uns et les autres dans le même sac.

Je propose donc à l'élève de découvrir par lui-même s'il doit ou s'il ne doit pas étudier la géométrie. Par lui-même, non sans mon aide car je ne désespère pas d'enseigner, mais persuadé plus encore que l'élève trouvera mille et une raisons, pas seulement d'étudier, mais d'aimer les considérations géométriques.

Conviction dont il faut que je dise un mot ; elle est fondée sur des réflexions simplistes : nous vivons dans un espace presque euclidien, nos maisons suggèrent les notions de parallélisme, d'orthogonalité, d'orientation, les journaux parlent de voyages vers la Lune ou Mars, des photos de monuments célèbres, des grandes Pyramides au port de Tancarville, suggèrent des formes intéressantes et la queue du paon qui fait la roue pose des problèmes. Dans quelle géométrie précisément ? Au début, peut-être même longtemps, nous n'en saurons rien. Ne pas se précipiter dans l'axiomatique de X, de Y ou de Z, enrichir notre expérience de l'espace jusqu'au jour où nous désirerons organiser nos connaissances de façon systématique.

Ce qui, pour l'instant, nous fait courir un sérieux reproche : confiance excessive à l'intuition. C'est vrai, mais il faut savoir affronter certains risques, apprendre à tomber pour acquérir enfin la marche la plus alerte et la plus assurée.

PREMIER ESSAI : COMMENT MESURER DE GRANDES DISTANCES ?

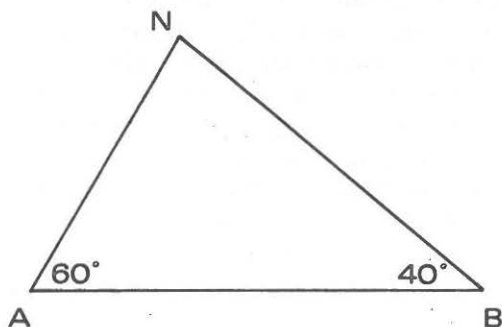
Comment mesurer la distance de la Terre à la Lune ? Comment apprécier la distance d'un navire qui apparaît à l'horizon ? Quelle est la vitesse de la lumière ? Questions qu'un individu conscient comme un élève de Sixième ou de Quatrième peut se poser en 1978. Voici le schéma d'une recherche historico-scientifique pour l'aider à y répondre.

1.1. La hauteur de la grande Pyramide

Alain disait "Thalès a reconnu que si la hauteur de l'homme est égale à l'ombre de l'homme, alors la hauteur de la pyramide est égale à celle de son ombre". Plus généralement, nous comparons

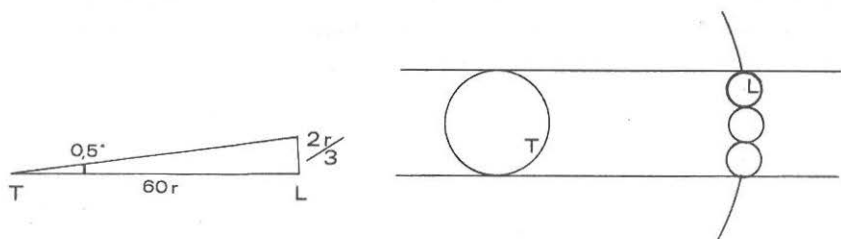
la longueur de l'ombre d'un bâton à la hauteur du bâton supposé planté verticalement. L'expérience mérite d'être tentée, elle n'est pas sans difficultés pratiques. Le résultat est un ordre de grandeur vérifiable, par exemple, avec la hauteur d'une maison comparée à son ombre.

Thalès savait aussi apprécier la distance d'un navire par deux visées à partir des extrémités A et B d'une base terrestre facile à mesurer. Sur le papier on réalise une "maquette" à l'échelle du millième par exemple. Nous reviendrons plus loin sur la question passionnante des maquettes.



1.2. Aristarque et la Lune

Aristarque de Samos (vers — 250) pense que la Lune reçoit la lumière du Soleil et la réfléchit. Pendant une éclipse, la Lune disparaît (plus ou moins complètement) en passant dans l'ombre portée de la Terre. Pour Aristarque, le Soleil est "très loin" ; il assimile donc l'ombre de la Terre (qu'il suppose sphérique comme les autres corps célestes) à un cylindre de révolution. D'après la durée maximale d'une éclipse de Lune (trois heures de notre temps), le diamètre de la Lune serait donc le tiers de celui de la Terre ; en effet, en une heure, la Lune avance sur son orbite d'un angle égal à son diamètre apparent. Il ne reste plus qu'à mesurer le diamètre apparent de la Lune. Aristarque partit d'abord de la valeur 2° , grossièrement fausse, puis il rectifia en $0^\circ,5$. Notons qu'avec cette valeur on retrouve la durée approximative d'une période lunaire ; $360/0,5 = 720$ heures = 30 jours au lieu de 27,3 pour la période sidérale de la Lune. Il ne reste plus qu'à construire un triangle avec un côté de longueur $2r/3$ (r rayon de la Terre) et l'angle opposé de $0^\circ,5$; alors le côté TL mesure $60 r$. C'est un très bon résultat, la distance de la Terre à la Lune varie entre 56 et 64 rayons terrestres.



Cette mesure appelle de nombreuses remarques.

1°) L'ombre portée de la Terre n'est pas un cylindre mais un cône (distance moyenne de la Terre au sommet du cône : 217 r). Cependant, à la précision dont disposait Aristarque, il n'y avait aucun inconvénient à adopter cette simplification. Et puis comment aurait-il pu connaître la longueur du cône d'ombre sans connaître le rayon du Soleil et la distance du Soleil ? Voir plus loin 1.3.

2°) Le fait que la Lune avance sur son orbite d'un diamètre de Lune en une heure est une donnée observable : à la jumelle, on observe l'occultation équatoriale d'une étoile par la Lune. Un exercice recommandé aux amateurs.

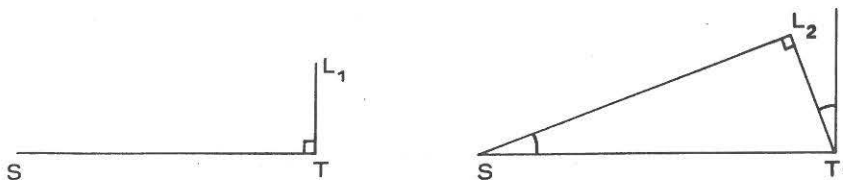
3°) En fait, le rayon de la Lune n'est pas $0,33 r$ mais $0,27 r$. Les tables donnent $\text{tg } 0^\circ,5 = 0,009$ et $0,54/0,009 = 60$. Ainsi que l'a écrit un grand mathématicien, "les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables : 1°) les astronomes ; 2°) les arpenteurs ; 3°) les auteurs de manuels de trigonométrie." J'ajouterai 4°) aux apprentis géomètres à qui il n'est pas mauvais de savoir lire une table construite par les auteurs visés au 3°.

4°) Traduisons pour finir le très bon résultat trouvé par Aristarque : $r = 6\,370 \text{ km}$; $60 r \simeq 380\,000 \text{ km}$; la lumière et les signaux radioélectriques mettent un peu plus d'une seconde à nous parvenir à partir des installations lunaires déposées par les missions Apollo.

1.3. Aristarque et le Soleil

Les anciens Grecs ont eu une foule d'idées géniales et n'ont pas tout réussi. En voici un exemple avec la distance du Soleil. Aristarque savait distinguer comme vous et moi la Lune en quadrature orientale et la Lune en "premier quartier". De L_1 (qua-

drature orientale) à L_2 (premier quartier), Aristarque évaluait l'arc décrit par la Lune à 3° ; il en déduisait, par la construction d'un triangle rectangle ayant en S un angle de 3°



distance $ST = 19$ distance TL : nous écrivions ;

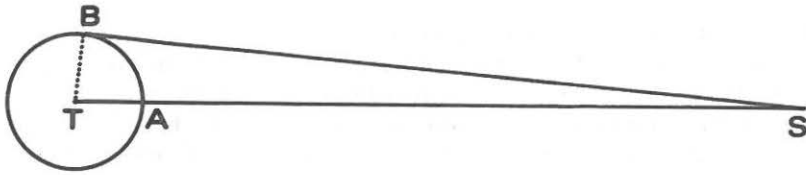
$$\text{distance } ST = \frac{60 r}{\sin 3^\circ} \text{ soit environ } 1100 r.$$

Ce qui appelle encore de nombreuses remarques.

1°) Aristarque avait noté, d'une lunaison à l'autre, des variations de l'angle qu'il évaluait en moyenne à 3° ; il en déduisait que la distance du Soleil variait entre 1080 r et 1200 r. Que ce soit la Terre qui soit mobile autour du Soleil ou le Soleil autour de la Terre, l'orbite ne paraissant pas pouvoir être autre que circulaire (personne avant Kepler n'osa penser autrement), il fallait imaginer l'astre "fixe" *excentré*. Constatation faite par Aristarque quatre cent ans avant Ptolémée, cent ans avant Hipparque.

2°) Archimède, de vingt ans le cadet d'Aristarque, sut mesurer le diamètre apparent du Soleil, soit $0^\circ,5$. Alors, des distances mesurées par Aristarque, on déduit le diamètre du Soleil, entre 5 et 6 fois celui de la Terre. Ce qui faisait pencher Aristarque vers la solution du mouvement de la Terre autour du Soleil, de la boule la plus petite autour de la plus grosse.

3°) Les résultats précédents sont malheureusement fondés sur la valeur de l'arc $L_1 L_2$ très difficile à mesurer avec précision : quand on observe la Lune en L_2 elle n'est plus en L_1 . Au lieu de 3° il aurait fallu lire $10'$. L'idée d'Aristarque était donc ingénieuse mais sa mise en pratique fut, pour nous, décevante. Le progrès dans la mesure de la distance du soleil est venu bien plus tard de la considération de la *parallaxe du Soleil*, l'angle sous lequel, du centre du Soleil, on verrait le rayon de la Terre, soit ω . Pour

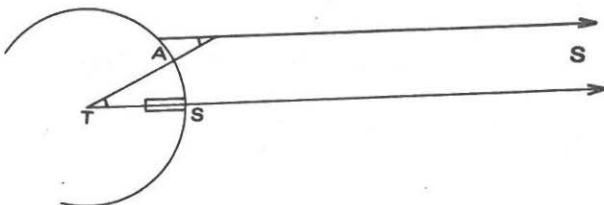


l'évaluer, il suffit, en principe, de mesurer l'angle des directions AS et BS du centre du Soleil observé à partir des points A et B (pour A le Soleil est au zénith, pour B il est à l'horizon). Les astronomes ont imaginé diverses méthodes pour résoudre au mieux les difficultés techniques de la mesure, méthodes qui sortent du cadre de cet article. Notons seulement une brève histoire des progrès dans les résultats : Copernic et Tycho Brahé admettaient encore une valeur de 3' pour la parallaxe du Soleil, soit vingt fois trop ; c'est à Cassini, en 1672 (donc peu avant le succès des méditations de Newton) qu'on doit la première évaluation correcte 9'' (valeur adoptée actuellement : 8'',8).

Proposons pour finir le calcul suivant : 8'',8 soit environ 0,000 043 radian et $d(S,T) = \frac{r}{0,000\ 043}$ environ 23 400 r ou $1,5 \times 10^8$ km, une donnée, l'unité astronomique (u - a), qui pourrait faire partie du bagage de l'honnête homme du XXème siècle. Avec un diamètre apparent de $0^\circ,5$, à cette distance de 23 400 r, le rayon du Soleil est 109 fois celui de la Terre. Encore plus grosse, la boule solaire, que ne le pensait Aristarque.

1.4. Eratosthène et la Terre

Revenons à la belle époque d'Archimède (— 250). Son ami et correspondant Eratosthène est conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, riche en cartes de la basse et haute Egypte. Il y relève que Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie sont sensiblement sur le même méridien. Il sait que, au solstice d'été, le Soleil culmine au zénith de Syène ; la preuve, les puits les plus profonds y sont alors éclairés jusqu'au fond. Eratosthène pense alors



que s'il mesure, ce même jour à midi, l'ombre d'un gnomon à Alexandrie, il en déduira la mesure de l'arc de méridien entre Syène et Alexandrie, soit un cinquantième de circonférence. Sur les relevés topographiques qui sont une des richesses de sa bibliothèque, il évalue la distance de Syène à Alexandrie à 5 000 stades. Ce qui donne, pour la circonférence entière, 250 000 stades.

Mesure justement célèbre. Si elle a été perfectionnée techniquement (en particulier par la triangulation pour la mesure de la longueur de l'arc de méridien), le principe de toutes les mesures géodésiques reste celui d'Eratosthène. Le résultat obtenu était également très satisfaisant ; en adoptant pour le stade la valeur 157 m, on trouve pour le périmètre 38 250 km et pour le rayon de la Terre 6 100 km (au lieu de la valeur adoptée actuellement 6 370 km).

Les perfectionnements techniques adviendront au XVII^{ème} siècle avec la triangulation (imaginée par Snellius) et la mesure de la méridienne de France entre Amiens et Juvisy par Picard en 1667 : 57 057 toises par degré de méridien ; avec 1,95 m pour cette toise, on trouve 40 032 km pour le périmètre et 6 370 km pour le rayon de la Terre, bonne estimation qui fut appréciée et utilisée par Newton.

Rappelons enfin que l'ouvrage de Clairaut, *Théorie sur la figure de la Terre*, date de 1743 et donne pour la première fois une approximation de l'aplatissement du géoïde 1/180 (l'ellipsoïde de Hayford, 1907, donne 1/300).

1.5. Römer et la vitesse de la lumière.

Ces remarques nous ont fait passer d'une belle époque à une autre, de celle d'Archimède à celle de Newton ; l'histoire des sciences connaît des lents cheminements mais aussi des périodes fastes où beaucoup de problèmes réputés difficiles deviennent "faciles", comme dans l'histoire des sociétés. Picard, étant allé au Danemark vérifier quelques mesures sur l'emplacement d'Uraniborg, le château de Tycho Brahé, avait embauché sur place un aide, Olaus Römer, qui revint en France avec lui et participa aux premiers travaux du tout neuf Observatoire de Paris.

Là, Cassini confia au jeune astronome le soin de suivre les phénomènes des satellites de Jupiter, éclipses, occultations, passages. On savait déjà que le premier satellite, Io, un peu plus gros que la Lune, était à une distance relativement faible de Jupiter : 5,9 rayons de la planète. Il en résulte qu'à chaque révo-

lution autour de Jupiter, Io traverse le cône d'ombre de Jupiter, il y a éclipse de Io. Connaissant la période de révolution de Jupiter autour du Soleil, $T = 11 \text{ ans } 314,84 \text{ jours}$ et celle de Io autour de Jupiter $T' = 1,769 \text{ jour}$, Römer pouvait en déduire que l'éclipse de Io se reproduirait tous les t jours, t donné par la formule

$$1/t = 1/T' - 1/T$$

qu'il est intéressant de faire établir (ça vaut bien les motos qui font la course sur une piste).

L'observation confirmait assez bien le résultat du calcul, tout au moins pendant une courte période, c'est-à-dire pendant que la distance de Jupiter à la Terre (à l'observateur) variait peu. Par contre, si on comparait les observations faites alors que Jupiter est proche de son opposition (la distance Jupiter-Terre est minimum, environ $4,2 \text{ u} - a$) avec les observations faites alors que Jupiter est proche de sa conjonction (distance JT maximum, environ $6,2 \text{ u} - a$), les éclipses de Io semblaient dans ce deuxième cas se produire en retard de 16,5 minutes environ sur les dates calculées à partir des observations faites lorsque Jupiter est en opposition.

Römer, ayant constaté le retard, l'expliqua : les éclipses se produisent régulièrement mais le retard constaté est dû à la plus grande distance que doit parcourir la lumière qui nous informe du phénomène. La lumière a, comme il disait, "une propagation progressive", et non comme d'autres le pensaient une propagation instantanée ; la vitesse de la lumière est alors facile à évaluer :

$$2 \text{ u} - a \simeq 300.10^6 \text{ km} ; 16,5 \text{ mn} \simeq 10^3 \text{ s} \text{ soit } c = 300\,000 \text{ km/s.}$$

Une plaque, à la porte de l'Observatoire de Paris, rappelle que cette première mesure, due à Römer, fut obtenue en 1676.

Pour ne pas trop allonger cette note, je signale seulement quelques exercices sur le même thème. 1°) Comment les données précédentes permettent-elles de calculer une valeur moyenne de la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil ? 2°) Comment la connaissance de cette vitesse et celle de la vitesse de la lumière permet d'expliquer le phénomène de l'aberration de la lumière (expliquée par Bradley en 1728) ? Enfin, autre remarque, les mesures de distances ont débouché sur des questions simples de mécanique et des allusions à quelques faits historiques n'ont pas été évitées, au contraire.

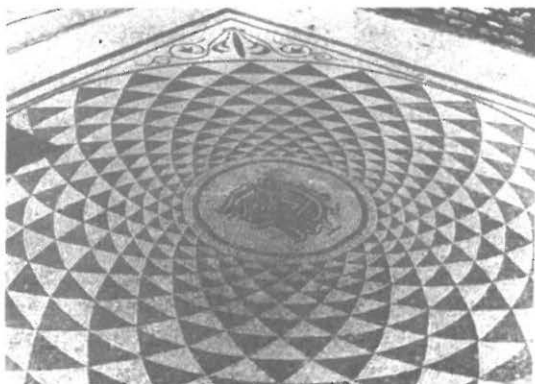
DEUXIEME ESSAI : FORMES, REPETITIONS, DEFORMATIONS

Deux images s'opposent ou se complètent. Dans son *Mysterium Cosmographicum* (Tübingen 1596), Kepler représente un ingénieux système de six sphères concentriques, chacun des cinq polyèdres platoniciens étant inscrit dans une des sphères et circonscrit à celle du dessous. Il y voit un modèle du système solaire, le Soleil au centre, les orbites des six planètes placées sur les six sphères. Chef-d'oeuvre d'organisation mathématique du monde, image d'harmonie. En contraste, une photographie moderne de la nébuleuse d'Orion suggère l'idée du chaos dans lequel on ne saurait trouver de ligne directrice, de schéma d'organisation. A première vue tout au moins, car en cherchant un peu, tout s'ordonne selon certaines lois, même le désordre "brownien".

D'où l'idée de chercher, dans la nature ou dans l'art, des formes, des idées géométriques.

2.1. Des formes dans la nature.

Observons, manipulons, mesurons ; ouvrons l'oeil et touchons du doigt. Cette "étoile de mer", cet oursin, ces fleurs à quatre ou cinq pétales... A ceux qui admirent l'ingéniosité du laitier qui livre son précieux liquide dans des "berlingots" faciles à fabriquer et à empiler, proposons l'observation d'un épi de blé : comment les grains sont-ils serrés les uns contre les autres ? En est-il de même dans un épi de seigle ou d'orge ? L'arrangement des graines de tournesol suggère la disposition en spirale que reproduisent certaines mosaïques romaines (à Ostia Antica, par exemple) ou la coupole de la Chapelle d'Anet (due à l'architecte Philibert Delorme, 1550).

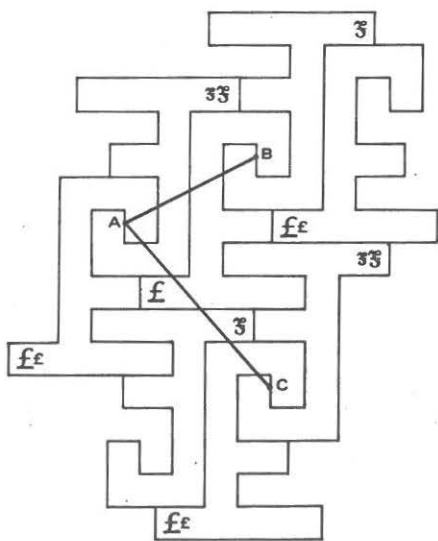


Les jets d'eau des fontaines tracent des arcs de parabole ; on retrouve cette courbe sur les photos du pont de Tancarville (ou de tout autre pont suspendu). Des ellipses se dessinent lorsqu'avec une lampe-torche on éclaire un mur ou un plancher. Quant à l'ovale des jardiniers, nous en reparlerons plus loin.

Cette très brève énumération n'épuise pas un sujet inépuisable par définition.

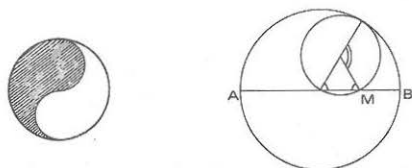
2.2. Formes dans l'art

A partir des formes dans la nature, l'artiste, l'architecte, l'ingénieur ont imaginé des formes belles et simples. Exemple, tous les pavages. Le Corbusier disait : "La preuve première d'existence, c'est d'occuper l'espace". A partir d'une stylisation du L barré de la livre sterling, un écolier anglais a proposé le dessin qui a servi de couverture au n° 73 (décembre 1975) de *Mathematics Teaching* et que je reproduis partiellement :



Le cercle tangent intérieurement à un cercle de rayon double propose maints motifs. Le symbole taoïste Tai Khi Tou oppose deux principes contradictoires, le Yin et le Yang (vous avez le droit de penser le bien et le mal ou le vrai et le faux). Dans un tout autre domaine, voyez l'engrenage de La Hire (1640-1718) qui participa à la mesure de la méridienne de France sous la direction de Picard : le petit cercle roulant sans glisser à l'intérieur du

grand cercle, un point M fixe sur le petit cercle décrit d'un mouvement rectiligne oscillatoire un diamètre AB du grand cercle : transformation d'un mouvement de rotation en un mouvement rectiligne (un semblable montage existe dans l'astrobale impersonnel de Danjon, les roues étant non dentées, le contact avec frottement évitant le "jeu"). Pour La Hire, et pour nos élèves, c'est un des plus simples exemples d'engrenages épi ou hypocycloïdaux.

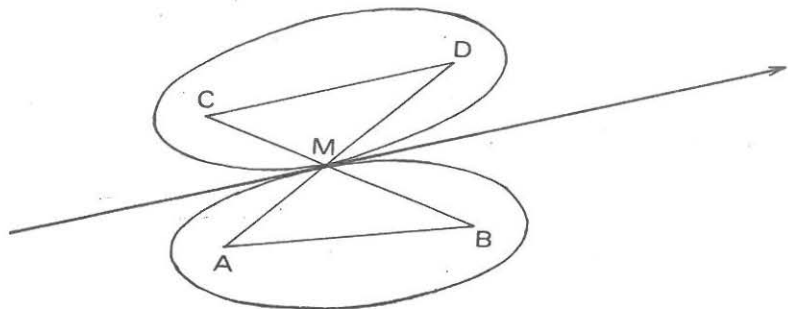


Autre exercice : retrouver tous les arcs de cercle dans la composition du tableau de Michel-Ange, *La Sainte Famille*.

2.3. La symétrie

Il suffit de regarder nos deux mains pour saisir, c'est bien le mot, l'importance de la symétrie dans notre vie. On peut même se demander : comment se fait-il qu'il y ait dans le corps humain certaines dissymétries, des organes uniques, coeur, estomac, foie, qui échappent à la symétrie ?

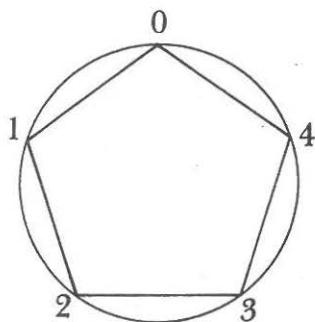
Le "quadrilatère croisé" formé par quatre tiges articulées deux à deux de même longueur, $d(A,B) = d(C,D)$ et $d(A,D) = d(B,C)$, nous ramène à l'ovale des jardiniers. AD et BC se coupent en M tel que $d(M,A) + d(M,B) = d(M,C) + d(M,D) = d(A,D)$. On réalise facilement un modèle en carton : deux ellipses symétriques par rapport à la tangente commune en M roulent sans glisser l'une sur l'autre ; derrière les deux plaques elliptiques, les deux tiges AD et BC ne sont pas visibles ; le modèle fonctionne bien à la surprise de ceux qui ne l'ont jamais vu.



L'expérience des deux bougies symétriques par rapport à une plaque de verre mérite d'être présentée : une seule bougie est allumée, celle qui est du côté des spectateurs, les deux paraissent l'être. Le présentateur met son doigt sur la bougie non allumée, il supporte facilement l'ardeur de l'image de la flamme. On peut alors évoquer la loi de Descartes et en illustrer l'application dans le billard : deux réflexions successives sur les bords orthogonaux et la boule roule dans la direction du lancer initial mais dans le sens opposé. Le système se généralise avec trois réflexions successives sur les faces deux à deux orthogonales d'un prisme à réflexion totale : le prisme a été placé sur la Lune par une des missions Apollo ; un rayon laser est dirigé sur lui, le rayon réfléchi est reçu avec un retard sur l'émission qui permet de mesurer, avec une précision dépassant celle de toutes les mesures précédentes (y compris celle d'Aristarque !), la distance de la Terre à la Lune.

2.4. Polygones réguliers.

Prenons l'exemple du pentagone régulier convexe, dessiné sur la feuille de papier et marqué 0, 1, 2, 3, 4, à ses sommets (dans le sens direct). Découpons une plaque de carton, noire sur une face, rouge de l'autre et dont les sommets marqués ABCDE sur la face noire viennent s'appliquer exactement sur 0, 1, 2, 3, 4. Puis étudions toutes les façons d'appliquer la plaque de carton sur "l'empreinte" ; on finira par trouver les cinq rotations qui ne changent pas la couleur de la plaque et qu'on notera r^0, r^1, r^2, r^3, r^4 et les cinq symétries d'axes J_0, J_1, J_2, J_3, J_4 toutes repérées sur l'empreinte et notée s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 , qui, elles, changent la couleur.



Composer r^2 et s_3 : on fait tourner la plaque de $2/5$ de tour, ABCDE qui étaient en 01234 viennent en 23401 et la plaque n'a pas changé de couleur. Ensuite on effectue s_3 , c'est-à-dire qu'on retourne la plaque (changement de couleur), le point qui se trouve en 3, c'est-à-dire B, restant fixe ; alors ABCDE se trouvent en 43210. Conclusion, il y a eu changement de couleur, le point situé en 2 restant fixe, ce que réalise la symétrie s_2 . Ce que nous notons

$$s_3 \circ r^2 = s_2$$

avec nos notations ésotériques. Nous amorçons ainsi la construction de la table du groupe d'ordre dix du pentagone ; travail un peu compliqué mais réalisable en équipes et le résultat est intéressant. Avec le triangle équilatéral, c'est vraiment trop simple ; avec le polygone à 32 côtés, celui qu'on retrouve dans la rose des vents, c'est dommage mais quand même un peu lassant....

Ici, le sous-groupe des rotations du pentagone est immédiatement visible ; on reconnaît un groupe isomorphe au groupe additif des classes résiduelles d'entiers modulo 5. L'étude du corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est alors une fantaisie qu'on se permettra, d'autant que la table de multiplication de la classe 2 donne la liste 02413 des sommets du pentagone étoilé.

Notre collègue G.W. Wilson (Bedford Field Middle School à Leeds) a eu l'idée d'associer les sommets d'un polygone régulier bien choisi aux décimales récurrentes de l'inverse d'un naturel premier. Par exemple, l'inverse de 17 a une suite de décimales de période 16 ; on marque ces seize décimales aux sommets d'un polygone régulier à seize sommets :

$$1/17 = 0,\dot{0}58\ 823\ 529\ 411\ 764\ \dot{7}\ \dots$$

Les multiples de $1/17$ auront aussi des suites périodiques de décimales qui seront les mêmes que pour $1/17$ mais qui ne commenceront pas par 0 ; exemples :

$$2/17 = 0,\dot{1}17\ 647\ 058\ 823\ 529\ \dot{4}\ \dots$$

$$3/17 = 0,\dot{1}76\ 470\ 588\ 235\ 294\ \dot{1}\ \dots$$

et on peut repérer sur le cercle où commence chacune des seize suites périodiques.

Objection à ce qui précède : nous nous écartons de la géométrie "naturiste" annoncée pour déboucher sur des calculs et des propriétés pas évidentes du tout. Mais j'ai prévenu en commençant que je n'hésiterais pas à courir de grands risques, à tomber

parfois. Je veux acquérir une expérience aussi riche que possible de faits mathématiques et la géométrie n'est pas plus isolée dans la mathématique que le Parthénon sur l'Acropole.

2.5. Répétitions.

Reprenons l'exemple de la couverture du n° 73 de *Mathematics Teaching* (fig. 7). Comment le plan est-il occupé ? A partir d'un des motifs, comment obtenir n'importe quel autre ? On découvre les deux translations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, la symétrie s de centre A . Pour transformer le motif initial (qui porte la lettre A) en tout autre motif du plan, ou bien on fait la symétrie s puis une translation $x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ avec x et y entiers, ou bien cette translation seule sans symétrie préalable.

On trouvera d'autres exemples dans des papiers peints. Mais à qui serait fatigué de ces exemples un peu simples, on proposera d'analyser dans le même esprit certaines compositions du peintre hollandais Escher ; par exemple ses cavaliers, ceux d'une première file "horizontale" allant de gauche à droite qui s'emboîtent exactement dans les cavaliers d'une autre file, au-dessous ou au-dessus de la première mais allant, eux, de droite à gauche.

Escher nous propose aussi des compositions plus savantes où se composent des homothéties et des rotations. T.J. Fletcher nous avait fait, à Marly en 1968, une belle conférence qui inspire les remarques précédentes.

2.6. Maquettes

Quels sont nos élèves qui n'ont pas construit des maquettes d'avion ? Une question leur est venue : les ailes en bois de balsa conviennent pour ces maquettes, pas pour les vrais avions ; pourquoi ? Voici un petit calcul très significatif : la construction de la Tour Eiffel a utilisé 9 000 tonnes d'acier ; quel serait le poids d'une maquette de 15 cm de haut et de même métal ? La réponse 1,125 g surprend ; les vilaines maquettes moulées vendues aux touristes sont bien plus lourdes ; la structure de la Tour Eiffel est remarquable par sa légèreté.

Ce calcul fait bien comprendre les différences morphologiques comme celle de la patte d'éléphant et de la patte de moustique ; avec des pattes aussi fines que celles du moustique, l'éléphant s'enfoncerait dans le sol. Rappelons-nous la mode, désastreuse pour les planchers, des talons aiguilles, même si les élégantes qui les portaient étaient autrement légères que l'éléphant !

Il n'est pas mauvais de mettre en garde contre certaines difficultés. Observons une goutte d'eau en équilibre sur une glace horizontale bien sèche ; essayons d'en évaluer le volume. Pourrions-nous maintenir en équilibre, sur le même plan, un volume double, triple, ... ? Pourquoi y a-t-il une limite ? La réponse n'est pas du programme de physique des classes secondaires mais on peut y voir l'amorce des problèmes difficiles de la théorie des maquettes. Une visite au Laboratoire d'hydraulique de Chatou avait passionné des élèves de Terminale C. Et puis, géométrie et physique peuvent-elles s'ignorer ?

TROISIEME ESSAI : GEOMETRIE ANIMEE

A dessein, je reprends le titre de la série des films réalisés par J.-L. Nicolet et qui se trouvent à la disposition des collègues à la Cinémathèque de l'Enseignement Public. L'auteur, notre regretté collègue enseignant à Lausanne, a précisé ses intentions dans l'article "Intuition mathématique et dessins animés" qui se trouve dans l'ouvrage collectif *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* réalisé par Caleb Gattegno en 1958 (édition Delachaux et Niestlé). Peut-être ces intentions sont-elles bien résumées par la citation liminaire ; Archimède écrit à son ami Eratosthène :

"Te sachant grand admirateur des recherches mathématiques, j'ai cru devoir te communiquer les particularités d'une certaine méthode que tu pourras utiliser pour *découvrir* par le moyen de la mécanique certaines vérités mathématiques... Souvent, en effet, j'ai *découvert* par la mécanique des propositions que j'ai ensuite *démontrées* par la géométrie, la méthode en question ne constituant pas une démonstration véritable, car il est plus facile, une fois acquise par cette méthode une certaine connaissance des questions, d'en trouver ensuite la démonstration que si l'on cherchait celle-ci sans aucune notion préalable".

Ces films de Nicolet sont d'une remarquable sobriété : pas de titre, pas de son, pas de lettres ; seulement des figures animées, toutes nues, toutes simples, étonnamment *éloquentes*. Au spectateur attentif d'en suivre l'enchaînement ; incidemment, l'analyse de ces scénarios très courts participe à une bonne formation cinématographique (pour qui voit dans le cinéma autre chose qu'une salle où on suce des chocolats glacés). Un exemple : sur l'écran apparaissent deux cercles concentriques ; un troisième

cercle se déplace pour devenir tangent extérieurement au plus petit des deux premiers ; son rayon diminue pour qu'il devienne tangent intérieurement au grand ; alors ce petit cercle bitangent à la couronne se déplace en conservant ses contacts ; au second tour, son centre décrit un cercle concentrique aux deux premiers. Des élèves de treize ans qui n'avaient jamais vu de films mathématiques étaient intéressés par cette brève projection (entre deux et trois minutes). Après une seconde projection, les élèves peuvent faire une assez bonne description du film par séquences successives : il faut savoir regarder. Puis cela suggère des remarques ; justement parce que le film est muet il donne envie de parler à qui, d'habitude, ne dit rien : "Cela fait penser à un roulement à billes" "Oui, mais il faudrait calculer les dimensions pour qu'un nombre entier de billes tienne dans la couronne". "Et alors, les points de contact des billes entre elles ne seront pas sur le cercle décrit par les centres des billes". Enfin un autre jeune spectateur m'a fait remarquer qu'il y a d'autres cercles bitangents à la couronne. J'étais comblé par cette avalanche de remarques.

Comme l'a très bien dit un autre élève "ça ne démontre rien". Non, ça montre, ça suggère des problèmes. Films qui font parler, qui font penser. Nicolet était un pédagogue.

Les films de T.J. Fletcher sont plus riches et partant plus difficiles. Même si le délicieux *La ronde carrée* (obligeamment prêté par l'Ambassade du Canada) nous propose sur la musique des "square dances" écossaises une fantaisie pleine d'imagination avec des carrés en couleurs. Deux autres films de Fletcher, *Four points conics* et *Four lines conics*, sont de niveau élevé, à faire beaucoup rêver des élèves de Spéciales si ceux-ci pouvaient encore rêver.

Nicolet, Fletcher, des pionniers du cinéma géométrique. Nous ne sommes qu'à l'aube de l'utilisation du cinéma dans l'enseignement. Je connais des classes qui ont utilisé les ressources des tables traçantes pour étudier des familles de courbes comme celles que l'on construit plus ou moins adroitement à la main, le calcul venant au secours du dessinateur.

*
* *

D'AUTRES ESSAIS

Il y a certainement bien d'autres voies possibles pour ouvrir le goût à la géométrie. J'espère que les exemples cités auront rassuré les mathématiciens justement épris de rigueur. Aussi dépouillée qu'elle soit d'un système d'axiomes qui rend la géométrie correctement habillée mathématiquement présentable, la "naturiste" n'est donc pas là pour remplacer la vraie. Non, pour mettre en appétit. Et puis aussi pour illustrer un principe énoncé par le grand Herschel "Observer est un art qui doit s'apprendre", comme disait si bien en anglais cet Allemand qui connaissait la musique.

(Figures par Gilles Walusinski)

Gilbert Walusinski

CELEBRATION

Là-bas dans les espaces infinis de l'affine,
Par-delà l'horizon de tous les plans stellaires,
La danse des vecteurs qu'un réel illumine,
Clôt la célébration de leur produit scalaire.

Marie-Thérèse Patalani