GÉOMÉTRIE
AU
PREMIER CYCLE
TOME II

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 22

SOMMAIRE

GEOMETRIE TOME II

SEPTIEME PARTIE :

NOYAUX-THEMES

AVERTISSEMENT GÉNÉRAL POUR CE TOME II

Ce tome II est constitué, pour l'essentiel, selon le sommaire annoncé dans le tome I. Cependant divers articles, promis par leurs auteurs potentiels, n'ont pu être obtenus alors que d'autres textes ont été proposés et, pour compenser, retenus.

Cet ouvrage est donné à l'impression alors que l'on bataille encore à propos de la rédaction des nouveaux programmes de Quatrième-Troisième qui devraient pourtant être bientôt appliqués. Les Bulletins A.P.M.E.P. 311, 312, 313 (de même que les suivants sans doute) consacrent beaucoup de place aux nouveaux projets ainsi qu'à leur critique. Je me permets d'insister sur le texte de base A.P.M.E.P. paru dans les Bulletins 311 et 312. Quels que soient les programmes finalement adoptés, il nous appartiendra de les vivre dans l'esprit défini par ce texte.

Ce tome II, et le tome I, devraient y aider.

Les deux conjointement : ils constituent un tout, ... en attendant la suite qu'ils espèrent : un enseignement de la géométrie où puissent s'impliquer essentiellement non pas les belles théories mathématiques, mais nos élèves avec leurs acquis, leur imagination, leur besoin de créer, leur capacité à y réussir.

Henri BAREIL
le 22 mars 1978

Deux parallèles s'aimaient, ... hélas !

ou

ODE A EUCLIDE

Elles s'aiment en silence
Depuis mille ans déjà.
Leur union, ô distance,
Jamais ne se fera.

Marie-Thérèse Patalani

5ème partie

MATÉRIELS

1 - DE DEUX CHOSES LUNE, L'AUTRE C'EST LE SOLEIL*

par Christiane ZEHREN, C.R.D.P. de Nice.

Tel professeur confie essentiellement les élèves à leur livre (ou fiches). Tel autre adore les livres-élèves vierges de tout regard [... Parfois il dicte ou "fait prendre" un cours venu tout droit d'un autre manuel...].

C'est — dit-on — affaire de tempérament : on s'entend ou non avec tel livre. On préfère ou non se mettre en scène soi-même, ... etc.

Dans le premier cas, croit-on que le livre peut être le Maître Jacques de l'enseignement ?

Dans tels autres, cet enseignement joué par le Professeur réalise-t-il vraiment "l'éducation" des élèves ?... D'ailleurs comment le ressentent-ils ? [Cf. Annexe : Texte de Claude DUNETON].

... *Il faudrait connaître les apports spécifiques privilégiés du texte écrit, du film, de l'enseignement oral,... etc.* , et les mesurer à l'aune des fonctions prescrites par un enseignement des mathématiques soucieux de tous les élèves (Il ne s'agit plus alors de la trilogie : exposer, interroger, noter).

Essayons-nous à cette lucidité :

A. QUELQUES FONCTIONS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES dans le premier cycle.

1° Fonctions d'ordre psychologique :

— motiver
— inquiéter ou sécuriser, selon les élèves et selon les moments
— déculpabiliser vis-à-vis des tâtonnements ou des échecs
— dédramatiser par un minimum d'humour et en invitant à ne pas se prendre trop au sérieux

* Citation de Jacques PREVERT — PAROLES.

— provoquer au plaisir, celui de consommation (réussite, utilité, accès au savoir et au pouvoir scientifique, ...), plaisir de création (plaisir de chercher, plaisir de gratuité, plaisir esthétique, goût de liberté, ...).

2° Fonctions d'ordre didactique pour comportements et capacités :

— présenter, ou faire collecter, des situations convergentes

— apprendre à y définir des problèmes ou des objets de recherche

— veiller à l'amélioration d'un certain nombre de comportements ou de capacités des élèves (touchant, par exemple, à l'organisation, au raisonnement, à l'esprit critique, à l'expression, au réinvestissement, ..., à la rédaction et à l'expression).

• Ceci inclut qu'il soit donné à l'élève des instruments de tous ordres "lui permettant de découvrir par lui-même des solutions et de progresser par lui-même dans des recherches personnelles" (STRENG).

• En ce sens, il s'agirait d'abord de développer parallèlement l'art d'observer et de conjecturer et le souci de mettre en question les conjectures.

• Il faudrait ensuite s'essayer à évaluer les progrès (ou non) dans les comportements et les capacités.

3° Fonctions d'ordre didactique pour les connaissances :

— veiller à l'acquisition de connaissances, ce qui implique questionnement ou évaluation, avec ou sans "auto-"

— fournir les moyens de localiser et de corriger des oublis ou des erreurs, toujours avec ou sans "auto-".

B. AGENTS DE CET ENSEIGNEMENT — EN GEOMETRIE PREMIER CYCLE —

1° Moyens matériels :

— **"Le bouquin"**, celui de l'élève (livre classique, ou fiches, ou polycopiés du professeur, ... voire cahier de l'élève s'il est constitué en manuel).

— **La bibliothèque de classe (en mathématiques)**
Manuels de divers auteurs, ... documents ...

— **Divers autres moyens spécifiques :**

— **films** (Cf., ci-après, Marie-Claire DAUVISIS)

— **rétro-projecteur** (Cf., plus loin, Henri PLANCHON et Michèle DEZANS)

— **tables traçantes** (Cf., plus loin, texte des IREMS de NANCY et POITIERS).

— **matériel de dessin** (translateur, pantographe, etc...)

— **autres matériels** (Cf. "fil à couper le beurre",... voir plus loin).

2° **Intervenants humains :**

— **L'élève lui-même, pour lui-même :**

C'est le sens de tous les "auto-" (auto-information, auto-contrôle, auto-correction, auto-questionnement, ...).

Encore faut-il qu'on lui en laisse la liberté ou qu'on l'y décide, et qu'on lui en donne les moyens, d'abord quant à sa formation... et celle de ses maîtres !

— **Les équipes d'élèves :**

Ce qui se produit quand les élèves s'aident, s'interrogent, s'expliquent mutuellement, quand un groupe d'élèves organise une recherche, un travail, et en contrôle le déroulement.

— **L'équipe des maîtres de la classe**

Méthodes et comportements se retrouvent d'une discipline à l'autre... Ainsi l'aptitude à travailler en groupe, ou l'art de conjecturer, s'apprennent ou se pratiquent aussi bien en français qu'en mathématiques. Encore faut-il le mettre en évidence et conjuguer les actions.

— **Le maître lui-même**

Certes !

— **Les "clandestins"**

Parents, répétiteurs, ... dont le rôle est parfois capital. Que feraient, sans eux, les classes de quatrième et troisième des quartiers bourgeois ?

... Mais rêvons d'une école qui s'en passerait sans dommage et n'en parlons plus.

3° Spécificité ?

Certains de ces agents sont-ils plus qualifiés que d'autres pour telle fonction d'enseignement ? ... Essayez, ami lecteur, d'en juger ...

C. REPARTIR LES TACHES

L'idéal serait la prise en charge de l'élève par lui-même, tous les autres agents se mobilisant ou mobilisés en ce sens.

Mais une telle prise en charge suppose une longue éducation et une pratique quasi-constante en toutes disciplines. Les deux ne se rencontrent pas souvent.

Le maître va donc généralement jouer un rôle prépondérant, voire exclusif, pour :

— préciser les fonctions d'enseignement et les traduire en objectifs opérationnels (= traductibles en actes d'enseignement),
— analyser les moyens à sa disposition (dont lui-même !) ; cf., plus loin, analyse des manuels.
— procéder ainsi au choix des moyens, selon les élèves, les moments, ou les objectifs, et les mettre en oeuvre.

(Sans doute en viendra-t-il à varier les moyens, en veillant à les imbriquer et à les conjuguer étroitement, ayant retenu chaque fois le plus adéquat.)

Peut-être n'y a-t-il pas, pour un enseignant, de tâche plus importante : elle conditionne tout. Mais où est la formation correspondante ?

Les textes qui suivent se proposent d'y aider. Puissent les IREMS s'en préoccuper également !

ANNEXE

Extraits de Claude DUNETON :

"[*Autrefois, ... les enseignants*] *dictaient leurs cours avec sérénité, selon le principe des vases communicants. Peu importait qu'ils aient en face d'eux vingt, trente, ou cinquante élèves. Ils auraient pu en avoir deux cents, en forçant un tout petit peu la voix...*

l'important en matière de pédagogie c'était le silence, la discipline jusqu'aux derniers rangs".

....

"Personnellement j'ai toujours mieux appris dans les livres qu'en écoutant un bonhomme raconter des choses. Surtout en certains domaines. J'ai besoin de réfléchir, de rêver, de m'inventer ma façon de comprendre, me faire mes propres images, mes idéogrammes personnels. Ceux que me propose l'explicateur en personne ne me conviennent pas forcément. Souvent même sa présence me gêne pour réfléchir. Ça me distrait un prof, ça a des mains qui remuent partout, des bras, des jambes. Il fait toujours penser à autre chose qu'à ce qu'il dit. Y a son pantalon qui bouchonne — ou sa jupe, c'est encore pire — son crâne, sa mèche, sa barbe, sa bouche, sa verrue... C'est un homme quoi — ou une femme ! En plus, quand il pérore ou qu'il menace, qu'il charme, qu'il s'inquiète ... C'est difficile de bien savoir ce qu'il raconte. On est distrait. Sans blague... J'en ai eu des mômes devant moi, des petites filles en sixième tout sourire et yeux écarquillés qui suivaient mes gestes, ravies, et puis qui savaient jamais quoi répondre. "C'est que, monsieur, ça m'amuse tellement ce que vous faites que je comprends rien à ce que vous dites !" — Bien fait pour ma poire, gesticulateur !... Les petits, si on est copains, ils arrivent encore à vous dire ce qui cloche ; mais par la suite... Cause toujours !"

2 - LES MANUELS SCOLAIRES

2.1. *Nous donnons ci-après des* extraits de la grille A.P.M.E.P. d'analyse des manuels scolaires de mathématiques. *(A réclamer, si vous la souhaitez, à Henri BAREIL, IREM de Toulouse, ou 7, rue des Pivoines, 31400 Toulouse, contre 10 F)* [*gratuitement, si vous devez retourner l'analyse*].

Critères d'évaluation (La grille précise 195 questions à leur propos)

CARACTERE ENVISAGE

III.1. SOUPLESSE ET CAPACITE D'UTILISATION

1. Facilités générales d'emploi
2. Facilités et capacités d'emploi spécifiques pour les maîtres
3. Facilités et capacités d'emploi spécifiques pour les élèves

III.2. CLARTE, SIMPLICITE

1. Satisfaction pour présentation et langage
2. Clarté du raisonnement
3. Simplicité du contenu mathématique

III.3. FORCE DE CONVICTION, RIGUEUR

1. Force de conviction.
2. Rigueur

III.4. COHESION INTERNE, PROGRESSIVITE, DIVERSITE pour

— le pré-requis

— la présentation des notions

— les exercices et problèmes

III.5. APTITUDES A DEVELOPPER LA CAPACITE :

(1) — générale de travail

(2) — de recherche et d'ouverture

(3) — d'expression et de clarté

(4) — de logique, rigueur, esprit critique

(5) — d'élégance et de simplicité

(6) — de réinvestissement

(7) — d'intérêt pour l'activité mathématique

(8) — (autre, à préciser)

IV. CONFORMITE A L'IDEOLOGIE DOMINANTE

Qu'est-ce qui paraît être privilégié par ce manuel :

— la densité des connaissances ?

— la recherche, la mise en évidence et l'utilisation d'un essentiel strict ?

— l'acquisition et l'exploitation mécaniques de connaissances ?

— l'importance des approches et des explications ?

— les motivations ?

— la rigueur des constructions théoriques ?

— le développement prioritaire des capacités ?

Si oui, existe-t-il des phases (recherche, rédaction,...) ou des capacités (imaginer, savoir-décrire, savoir-prévoir, savoir-justifier,...) qui semblent pouvoir être développées prioritairement par l'usage de ce manuel ?

— une appropriation très forte des modes d'activité les plus critiques ou les plus créateurs ?

Préciser ce qui semble être développé prioritairement et les modes d'activité ainsi valorisés (s'il y a lieu) :

Le manuel peut-il alors servir d'ouvrage de référence :

POUR	Pour le	
	maître	l'élève
— le vocabulaire, et les définitions ? . . .		
— les méthodes adoptées ?		
— la rigueur des raisonnements ?		
— les possibilités qu'il offre pour simplifier l'enseignement ?		
— ou pour le rendre plus dense ?		
— ou plus ouvert ?		
— la rédaction d'exercices ?		
ou de problèmes ?.		
ou de sujets d'étude ?. . .		
— la mise sur pied d'activités de recherche ?		
— (autre, à préciser) ?		

TROIS QUESTIONS-CLES

1) *Ce manuel peut-il inciter les maîtres :*
   — *à remettre* fréquemment *en question* leurs objectifs, leur enseignement et leur pédagogie ?
   — *à diversifier* leur enseignement (contenu et méthodes) selon les sujets et selon les élèves ?

   Leur en fournit-il des moyens ? (simples et efficaces).

2) Ce manuel peut-il *aider les élèves* (ou, quels élèves ?) *à garder, à renforcer, ou à acquérir le goût des mathématiques ?*

3) Ce manuel peut-il *aider les élèves* (ou, quels élèves ?) *à être toujours plus capable d'activité, de responsabilité, de créativité ?*

ANNEXE 1 :

CLASSIFICATION DUE A L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

(Tableau extrait du "Livre du problème", Tome 1) *

Classification des énoncés

Aux diverses activités de l'élève et du professeur correspondent des énoncés dont la finalité est différente. Nous en distinguerons sept catégories, sans nous dissimuler que cette classification n'est ni exhaustive, ni non-disjonctive.

Cependant le tableau suivant nous semble fondamental :

Sigle	Catégories d'énoncés	Comportement de l'élève	Comportement du professeur
EE	*Exercices d'expositions*	Apprendre Acquérir des connaissances	Exposer incomplètement Transmettre des connaissances
P	*Problèmes*	Chercher Trouver	Susciter la curiosité Encourager la persévérance dans la recherche.
ED	*Exercices didactiques*	S'entraîner Acquérir des mécanismes	Fixer des connaissances, des aptitudes, des habitudes.
ETT	*Exécution de tâches techniques*	Prendre ses responsabilités. Mener un travail à bonne fin en prenant l'engagement de ne pas laisser subsister d'erreurs.	Inciter à la minutie, au soin Exiger un "travail bien fait".
A	*Exemples d'illustrations* *Exercices d'application*	Transférer des connaissances théoriques dans un contexte pratique.	Rattacher l'abstrait à d'autres centres d'intérêt
M	*Manipulations*	Observer Expérimenter Bricoler	Motiver les résultats d'une étude abstraite ultérieure.
T	*Tests, Sujets de compositions, d'examens, de concours*	Vérifier la valeur de ses connaissances Faire valoir ses aptitudes	Contrôler les résultats de l'enseignement sur chaque élève.

(*) Livre du Problème, I.R.E.M. de Strasbourg, Edition CEDIC, 93 avenue d'italie, Paris 13ème.

Chacune de ces catégories relève d'une pédagogie différente. Les énoncés correspondants se rédigent conformément à des principes variés, parfois opposés.

2.2. EXTRAITS DE "TAOL LAGAD" -- IREM DE BREST — N° 14, mai-juin 1977.

TRIBUNE LIBRE

Les livres scolaires.... au pilon !

Pas tous, bien sûr, mais la moitié, au moins, C'est ce qui ressort de la petite enquête (anonyme) que j'ai faite auprès de mes élèves.

Voici, globalement, les résultats portant sur 82 élèves, répartis en quatre classes (2 Premières, et 2 Terminales) :

Q : Combien de livres avez-vous ? R : 14 (en moyenne)

Q : Combien en utilisez-vous ?

— régulièrement 5

— rarement 4 } 9

— jamais 5 }

En remarquant que "rarement" signifie "presque jamais", je constate que la plupart de mes élèves (et eux le constatent avec moi) se porteraient tout aussi bien s'ils n'avaient que 5 livres au lieu de 14.

Et il n'y a pas de raison que la situation soit différente ailleurs. Quel scandale et quel gâchis !

Tout le monde se plaint, à juste titre, que les manuels scolaires pèsent lourd dans le budget d'un lycéen, mais tout ce qu'on sait faire, c'est réclamer des crédits ! Personne ne dénonce la situation qui existe en fait, et pourtant presque tout le monde sait que des tas de livres coûteux ne servent à rien (c'est-à-dire : ne sont pas utilisés) :

— les élèves, évidemment (utilisateurs)

— certains profs, ceux qui pour telle ou telle raison ne font pas référence en cours d'année au(x) manuel(s) qu'ils ont recommandés le jour de la rentrée.

— les personnes qui distribuent des piles de livres au mois de septembre ; elles doivent bien se rendre compte que certains de ces livres restent intacts.

Les seuls à ne pas savoir, ce sont sans doute les parents ; c'est pourtant eux qui payent !

Et les maths dans cette histoire ?

Sur l'usage du livre de maths (c'était d'ailleurs le sujet principal de l'enquête), j'ai posé des questions plus précises, et j'ai demandé des réponses honnêtes. J'indique qu'à la fin de chaque cours je donne le travail pour la fois suivante :

Leçon pages ...... à ..... — Exercices.....

Voici les questions et les réponses (toujours 82 élèves):

I Avez-vous un livre de math ? OUI : 75 NON : 7

II L'utilisez-vous pour apprendre les lecons ?

Régulièrement	19	
Rarement	54	63
Jamais	9	

III Refaites-vous les exercices qui y sont traités à titre d'exemples ?

Régulièrement	11	
Rarement	53	71
Jamais	18	

IV Le livre de maths ne vous sert *pratiquement* qu'à prendre les énoncés des exercices à faire.

oui 56

Ces réponses ne me surprennent pas.

J'en conclus que, pour la plupart des élèves, un recueil d'exercices suffirait. Le livre habituel ne s'impose pas.

Et je rejoins la suggestion n° 1 de MJ PLOUC'HA (TL N° 12), que j'étends à toutes les classes :

— N'est-il pas temps que l'IREM fasse une enquête sérieuse sur cette question ?

— Doit-on refuser le choix d'un livre de math ?

J.C.J BREST

3 - LE RÉTROPROJECTEUR

par Michèle DEZAN et Henri PLANCHON

Dans l'enseignement des mathématiques, c'est certainement en géométrie que l'on est le plus souvent appelé à utiliser l'image. Le rétroprojecteur dans ce domaine va pouvoir nous apporter une aide appréciable, et son utilisation va nous conduire à modifier nos attitudes, à repenser, à renouveler et à réorienter notre pédagogie.

Par sa simplicité technique, par sa facilité d'utilisation, c'est un appareil qui est à la portée de tous, jeunes et adultes, et il laisse la plus grande part de son efficacité à celui qui l'utilise.

Le rétroprojecteur permet d'obtenir, en salle claire, une image projetable soit sur un écran soit sur tableau noir, ce qui a pour avantage d'éviter au maximum de perturber le rythme de travail de la classe.

Cette image peut provenir de la projection de documents opaques ou transparents. En particulier, pour éviter d'avoir à nous couper de la classe au moment de l'exécution de tracés géométriques au tableau, il est commode d'avoir à sa disposition la figure découpée, soit opaque, soit en creux, dont l'image pourra ensuite être complétée à la main. Par exemple il est intéressant de disposer de disques et de polygones, qui pourront être placés dans le plan avec des orientations différentes, afin d'éviter un conditionnement dans leurs représentations (on voit, en effet, trop souvent, des trapèzes avec leurs bases horizontales).

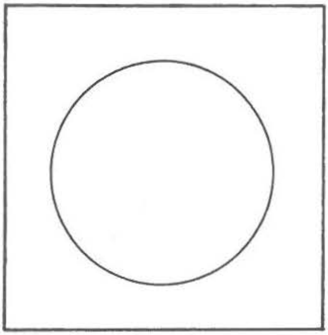
De même on peut utiliser des figures opaques pour montrer par projection leurs décompositions ou leurs transformations en de nouveaux polygones. C'est ainsi que, par exemple, un parallélogramme découpé suivant une hauteur donne un trapèze et un triangle qui, réajustés différemment, font apparaître un rectangle.

Le rétroprojecteur étant muni d'un rouleau d'acétate, celui-ci permet le tracé direct de constructions géométriques susceptibles d'être suivies et reproduites par chacun des élèves d'une classe. Ainsi l'image des instruments comme la règle et l'équerre pour dessiner des parallèles sera facilement présenté.

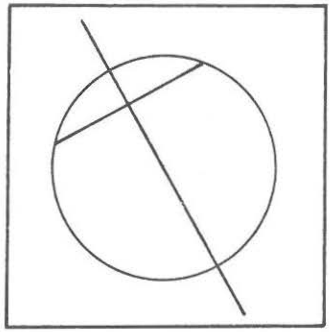
Dans le cas de figures plus complexes, il est intéressant d'avoir le dessin déjà réalisé, soit sur le rouleau, soit sur une feuille d'acétate (pas sur papier calque), afin d'éviter la répétition de certaines constructions.

On peut aussi utiliser une technique plus élaborée, celle du "transparent". Un transparent est composé de plusieurs volets fixés sur un cadre, et pouvant se rabattre dans un ordre correspondant à un certain raisonnement.

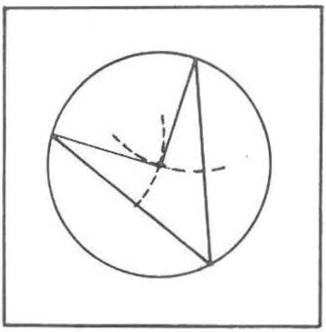
Exemple de transparent :



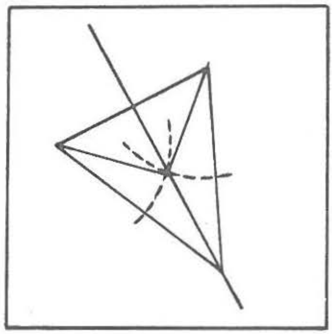
volet 1



volets 1 et 2



volets 1 et 3



volets 2 et 3

Le rétroprojecteur en géométrie apporte une aide appréciable à l'enseignant qui en l'utilisant améliore la qualité des tracés et ceci avec un gain de temps appréciable.

4 - GÉOMÉTRIE EN QUATRIÈME-TROISIÈME AVEC UNE TABLE TRACANTE

Présentation d'une expérimentation conduite dans les I.R.E.M. de Lorraine et de Poitiers.

La présence d'une seule machine (disponible en temps limité) dans la classe, le nombre d'élèves d'une division (25 à 35 élèves), les programmes officiels déjà lourds, nous ont contraints à fixer les objectifs suivants :

— travailler dans le cadre du programme de géométrie de Quatrième-Troisième,

— utiliser au maximum 24 heures dans l'année,
— faire agir le plus possible chaque élève,
— travailler dans des divisions complètes,
— limiter l'apprentissage de la programmation des matériels utilisés à une douzaine d'instructions.

Le matériel utilisé a été un calculateur programmable HEWLETT PACKARD modèle 10 (avec bloc math et bloc PLOTTER) et une table traçante.

I. METHODES DE TRAVAIL

Le travail demandé aux élèves est donné sur des fiches pour un travail en équipe de trois ou quatre élèves. La recherche personnelle est régulée par l'équipe et nécessite un consensus à l'intérieur du groupe. Chaque équipe est autonome. L'enseignant est ainsi disponible pour répondre à la demande de chaque équipe et faire respecter le droit d'accès à la machine pour tous.

Aucune recherche ne doit être effectuée devant la calculatrice. Chaque équipe ne doit venir auprès de la machine que si elle est libre et avec un programme écrit *précis.*

Un élève de l'équipe se charge de la frappe sous le contrôle des autres. Dès que la machine a fourni sa réponse (listing ou dessin) les membres de l'équipe retournent à leur place pour l'exploitation.

Chaque équipe de travail, travaillant à son rythme, n'a pas besoin de la table traçante au même moment. L'attente du passage en machine est ainsi réduite.

II. ASPECT INFORMATIQUE

Il n'était pas question d'enseigner la programmation ou "l'informatique", mais les élèves ont été placés dans "des situations informatiques".

- analyse de problèmes
- rédaction de programmes simples pour obtenir des dessins avec le traceur
- entrée de ces programmes au clavier
- analyse des résultats.

Les programmes fabriqués par l'enseignant sont enregistrés sur des cartes magnétiques et les élèves les utilisent suivant leurs besoins.

D'autre part, l'utilisation d'un automate, évidemment très rapide et précis dans ses réalisations, offre aux élèves l'occasion d'investigations personnelles s'appuyant sur des expérimentations nombreuses et conduites avec une grande liberté (à l'intérieur d'un cadre fixé à l'avance et dépendant de contraintes matérielles).

III. PROGRAMME

Les modules d'enseignement utilisés sont :

1. Classe de Quatrième.

Module A

La position de la plume du traceur est déterminée par ses coordonnées dans un repère fixé à l'avance et introduit en mémoire. Il est donc nécessaire d'apprendre les instructions permettant :

- l'entrée d'un couple dans deux registres (ici x et y)
- le déplacement de la plume d'un point à un autre en ligne droite, en traçant ou sans tracer
- la détermination du repère de la feuille avec le tracé des axes (avec une carte magnétique et l'entrée de quatre nombres : valeurs minimum et maximum de x et de y).

Ce module permet de familiariser les élèves avec la notion de repère et de coordonnées cartésiennes dans le plan. A la fin de ce module, ils peuvent dessiner des figures de leur choix (voir IV, 1).

Remarque : Ce module peut être utilisé seul en Sixième et en Cinquième en consacrant plus de temps à la créativité des élèves.

Module B

Apprentissage et étude de la notion de translation. Composition des translations. Milieu d'un bipoint. Parallélogramme.

Dessins de frises utilisant la composition des translations (voir IV, 2).

Remarque : On peut utiliser ce module seul, en Sixième et Cinquième : les élèves de ces classes disposeront d'un temps plus long pour imaginer et réaliser des dessins.

Module C

Apprentissage et étude de la symétrie centrale.
Construction de frises.
Composition de symétries centrales.

Module D

Exploitation des documents obtenus dans les modules précédents pour l'introduction de la notion de vecteur.

2. Classe de Troisième

Module A

Apprentissage et étude de la symétrie orthogonale. (Voir IV, 3a)

Composition de symétries orthogonales. Frises.

Module B

Isométries : mise en évidence de la notion après découverte de l'image d'un triangle par une transformation. (Voir IV, 3b)

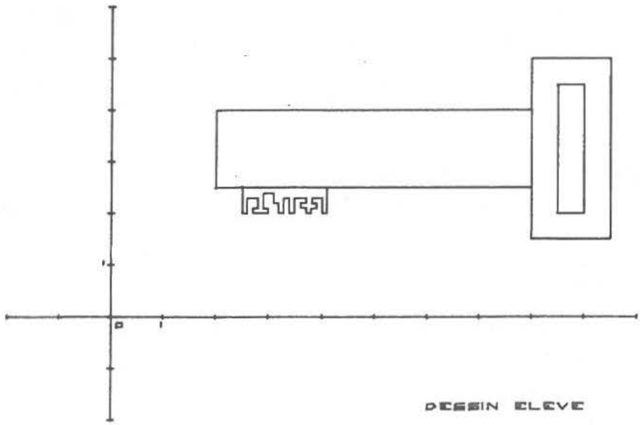
Transformations de figures par des isométries.

Composition d'isométries.

Remarque : Les modules troisième peuvent être utilisés par des élèves n'ayant pas étudié les modules quatrième. Dans ce cas il paraît souhaitable de commencer par un apprentissage très réduit de l'utilisation de la machine (instruction de passage d'une carte ; entrée d'un nombre et d'un couple) et un rappel des transformations étudiées en quatrième.

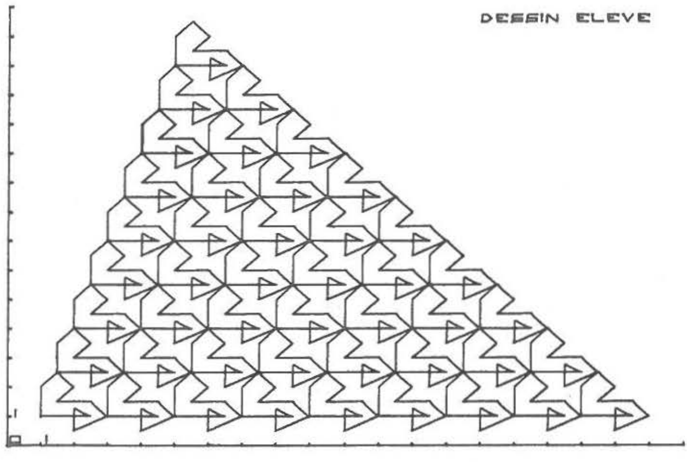
IV. EXEMPLES : FICHE DE TRAVAIL ELEVE ET DESSINS

1) Classe de Quatrième : Module A



2) Classe de Quatrième : Module B

Si un élève veut dessiner une frise à partir d'un motif simple et avec une transformation (ici des translations), il dispose d'une carte magnétique qui lui permet de faire tracer son dessin et l'image de celui-ci par la transformation choisie (il lui suffit d'entrer les coordonnées des points et le couple de la translation). L'élève choisit son motif, sa transformation, il peut modifier le repère du plan de la feuille sur laquelle il dessine, changer de transformation, etc.



3) Classe de Troisième

a) Module A

Exemples de fiches élève.

Toutes les transformations utilisées en Quatrième ou en Troisième procèdent d'un mode d'emploi identique. Il est ainsi possible de composer deux transformations différentes sans avoir à frapper une nouvelle fois les coordonnées des points du motif choisi. Les cartes magnétiques utilisées ont deux pistes. Sur une piste les coordonnées de tous les points et des images sont imprimées sur le listing afin de permettre des calculs ultérieurs. Sur l'autre piste on n'obtient pas l'impression dans le cas où l'élève veut seulement construire une frise (gain de temps).

---

(5) Généralisation et composition

a) La carte F' permet d'obtenir un repère orthonormé à partir des données

x maximum
x minimum
y minimum

Choisis ces trois nombres pour déterminer ton repère.

b) La carte S_1 permet d'obtenir l'image d'une figure par une symétrie orthogonale.

*) Choisis une figure et note :
- le nombre n de segments ($n \leqslant 10$)
- les coordonnées des sommets

*) Choisis les coefficients a, b, c d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$

*) Consulte la fiche "Mode d'emploi de S1" I et prépare ton passage à la machine.

*) Va à la machine

*) Recommence plusieurs fois avec différentes figures et droites.

c) Composition

Choisis une figure
Choisis deux droites D1 (a1 ; b1 ; c1) et D2 (a2 ; b2 ; c2)

α) Tu vas utiliser la fiche " Mode d'emploi de S1" I avec la droite D1 puis II avec D2. Prépare ton travail, puis va l'exécuter à la machine.

β) Même exercice que α) en utilisant I avec D2 et puis II avec D1.

γ) Même exercice que α) en utilisant I avec D1 puis III

δ) Reprends α) ou β) avec D1 orthogonale à D2 ou D1 parallèle à D2

Questions :

—) La composée de deux symétries orthogonales est-elle une symétrie orthogonale ? Justifie ta réponse.

—) Compare les résultats de α) et β).

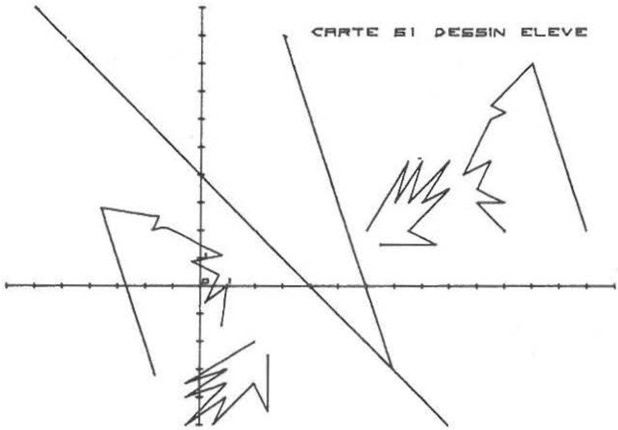
—) Que remarques-tu avec γ) ? avec δ) ?

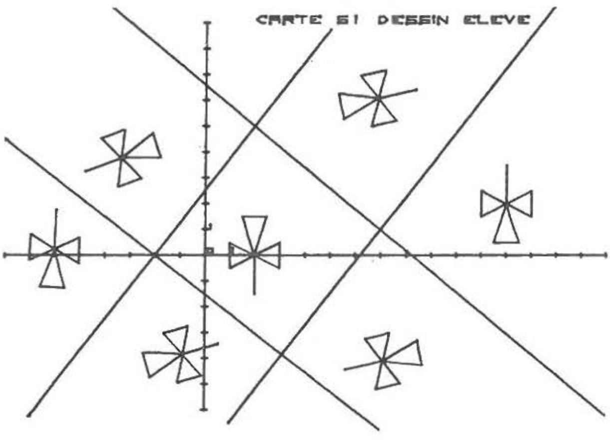
d) Imagine un «joli» dessin fabriqué à partir d'un motif et de plusieurs symétries composées.

MODE d'EMPLOI de S1

I	
(1) Passe la carte F'	
(2) Entre les trois nombres choisis →	*Pour obtenir le dessin des axes*
(3) Passe la carte S1	
(4) Entre le nombre n de segments de ton motif	
(5) Entre les coordonnées de chaque sommet	
(6) Frappe CØNTINUE →	*Pour obtenir le dessin de ton motif*
(7) Frappe GØ TØ LABEL 5 CØNTINUE	
(8) Entre les coefficients a, b, c	
(9) Frappe CØNTINUE →	*Pour obtenir le dessin de l'image du motif et de l'axe de symétrie*
II Recommence au (7) →	*Pour obtenir l'image de la dernière figure par une nouvelle symétrie orthogonale*
III Frappe CØNTINUE →	*Pour obtenir l'image de la dernière figure sans changer la symétrie orthogonale*

Exemples de dessins.





b) Module B

Pour l'étude d'exemples et de contre-exemples d'isométries, en donnant à l'ordinateur les coordonnées des sommets d'un triangle et les caractéristiques d'une transformation (rotation, translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale, homothétie, inversion ; ces transformations sont désignées par un code B_{11} ... B_{16} ; l'élève nommera celles qu'il a étudiées, les autres restant codées), l'élève obtient dans un repère orthonormé le dessin de son triangle et de l'image de celui-ci quel que soit le triangle choisi au départ. Le temps d'utilisation machine est court, mais la richesse des situations à analyser est importante.

L'utilisation de la calculatrice permet de montrer à chaque élève l'*existence* de transformations qui ne sont pas au programme de Troisième sans alourdir celui-ci. Il est alors possible de classer les transformations et de mettre en évidence la notion d'isométrie.

Les exemples et les contre-exemples ainsi obtenus doivent enrichir l'expérience de chacun et faciliter la conceptualisation et la mathématisation ultérieure indispensable.

Exemple 1 : fiches élèves B1 et Annexe : image d'un triangle par une transformation.

Image d'un triangle par différentes transformations

1. Chacune des cartes B11, B12,..., B16 permet d'obtenir l'image d'un triangle (A,B,C) que tu choisiras, par une transformation que tu vas étudier.

   Choisis l'une de ces transformations et complète le tableau correspondant (Annexe B1).

   Va à la machine.

   Passe la carte correspondant à la transformation retenue et entre tes nombres.

   Retourne à ta place.

2. Réponds aux questions suivantes sur une feuille annexe sans oublier de préciser la carte utilisée.

   (Si le dessin obtenu ne te permet pas d'y répondre, essaie de trouver pourquoi et propose une solution à ton professeur) :

   a) Reconnais les points A, B, C, A', B', C' sur le dessin et note-les.
   b) Reconnais-tu la transformation ?
   Si oui, précise ses caractéristiques.
   c) L'image du triangle est-elle un triangle ?
   d) La transformation conserve-t-elle les distances ?
   e) La transformation conserve-t-elle les écarts angulaires ?

3. Recommence avec une autre transformation.

   Tu dois passer successivement les 6 cartes et répondre à chaque fois au questionnaire précédent.

Annexe B1

B 11

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =

B 12

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =

B 13

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =
c =

B 14

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =
c =

$0 < c \leq 180$

B 15

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =
c =

$-3 \leq c \leq 3$

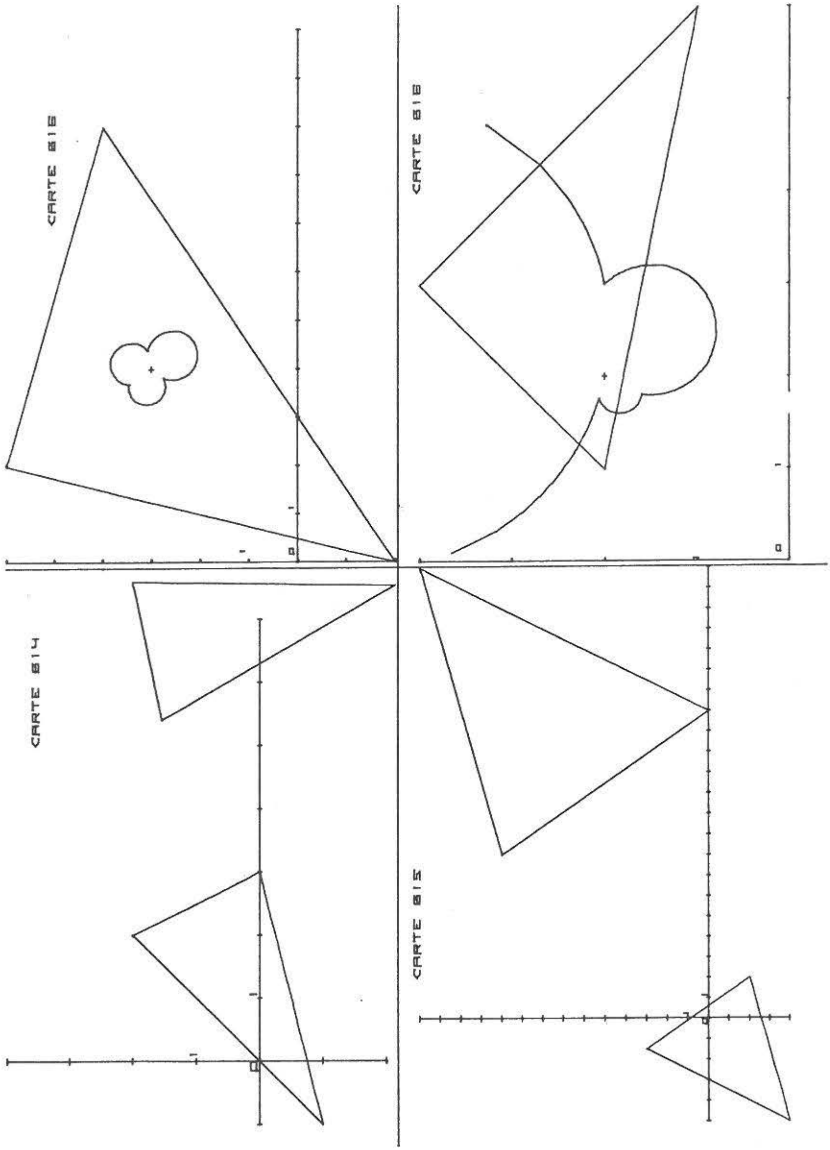
B 16

Triangle
xA =
yA =
xB =
yB =
xC =
yC =

Transformation
a =
b =
c =

$-3 \leq c \leq +3$

Exemple 2 : dessins élèves.



Après avoir obtenu l'image d'un triangle pour chaque transformation proposée, l'élève va étudier l'image d'une figure quelconque qu'il a choisie (sauf pour l'inversion). [Fiche B2 — (1)].

Après avoir reconnu les isométries [fiche B2 — (3)] il va composer deux isométries et essayer de construire un "joli dessin" utilisant la composition des transformations [fiche B2 (4) et (5)].

Exemple 3 fiche B2

---

(1) **Image d'une figure par différentes transformations.**

a) Choisis une figure formée de n segments consécutifs ($n \leq 10$) ; pour un polygone n'oublie pas de prendre comme dernier point ton point de départ.

Note les coordonnées des sommets.

b) Choisis les coefficients d'une transformation :

a et b pour les cartes B_{21} et B_{22}

a , b et c pour les cartes B_{23}, B_{24} et B_{25} .

c) Consulte la fiche «Mode d'emploi de S1» qui est la même pour chacune des cartes.

d) Choisis tes axes de façon que la figure et son image soient dessinées dans ta feuille.

e) Prépare ton passage à la machine pour la transformation choisie.

f) Va à la machine.

g) Recommence en a) jusqu'à ce que tu aies utilisé les 5 cartes.

(2) Recommence l'exercice (2) de la fiche B_1 pour les figures choisies.

(3) **Définition :**

> *Une isométrie est une bijection dans le plan qui conserve la distance : pour 2 points quelconques M et N du plan on a :*
>
> $$\begin{array}{l} M \longmapsto M' \\ N \longmapsto N' \end{array} \quad \text{avec } d(M,N) = d(M',N')$$

Question : parmi les relations étudiées dans les fiches B_1 et B_2, lesquelles sont des isométries ?

Remarque à l'intention du professeur :
Il est possible d'exploiter les figures obtenues pour retrouver par le calcul les principaux résultats concernant les isométries (orthogonalité, distance), car le listing donne les coordonnées des points et de leurs images.

(4) **Composition de deux isométries.**

a) Choisis un dessin.

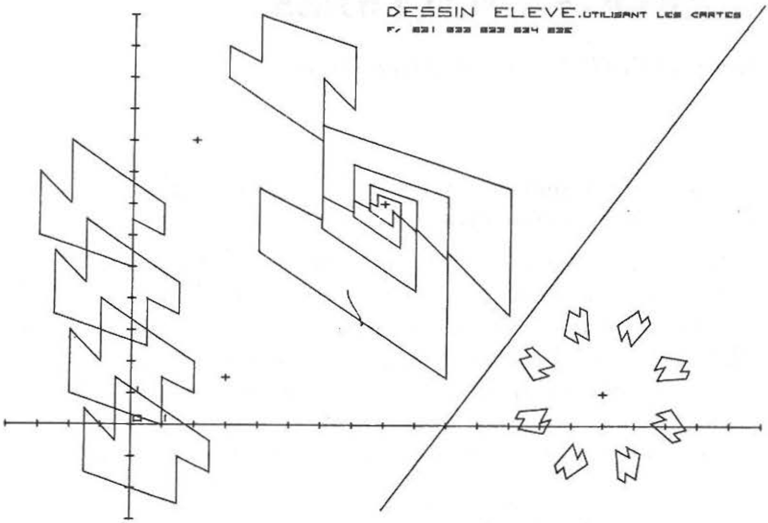
b) Choisis 2 isométries différentes pour les composer (même mode d'emploi que celui de S1 pour la première carte ; pour composer avec la deuxième isométrie, tu passes la deuxième carte et tu recommences en (6) du mode d'emploi de S1).

c) Ton dessin est-il complet ?
Si non, prépare un autre passage à la machine pour avoir un dessin complet.
Si oui, réponds aux questions suivantes :

- La composée est-elle une isométrie ? (justifie ta réponse)
- Peux-tu obtenir l'image de ton dessin par la composée en utilisant une seule des cartes $B_{21},\ldots,B_{25}$?
(Si tu as le temps, fais une vérification sur machine avec cette carte).

(5) Imagine un «joli dessin» fabriqué à partir d'un motif et en composant une ou plusieurs transformations $B_{21},\ldots,B_{25}$. (Même mode d'emploi que celui de S1 pour réitérer une transformation ; si tu changes de transformation, passe la nouvelle carte et recommence au (6) du mode d'emploi de S1).

Exemple 4 dessin



V. EVALUATION

Les modules ont été testés dans une quarantaine de classes à Poitiers, Montmorillon et dans divers CES de Lorraine.

Une évaluation a été menée en comparant les classes expérimentales et des classes témoin en 76-77 en Quatrième et 77-78 en Troisième. La collaboration du laboratoire de psychologie de l'Université de Poitiers a été précieuse.

Des tests de connaissances, des tests d'aptitude et un questionnaire ont été soumis aux élèves en début et en fin d'expérimentation.

Les résultats sont en cours d'interprétation.

VI. PUBLICATION

L'I.R.E.M. de Lorraine vient de publier une brochure sur cette expérimentation :

"Géométrie en Quatrième et Troisième avec une table traçante".

Chaque I.R.E.M. a reçu deux exemplaires. D'autres sont disponibles à l'I.R.E.M. de Lorraine.

Jeannine LEFORT, I.R.E.M. Lorraine
Michel PUYGRENIER, I.R.E.M. Poitiers

5 - CALCULATEURS PROGRAMMABLES

par Henri PONTIER, CES Bellevue, Toulouse.

Leur intérêt semble de plus en plus évident en algèbre (au sens large). Mais en géométrie * ?

Pourtant il existe en géométrie des calculs itératifs (ainsi une approche de π à l'aide de polygones réguliers dont on double indéfiniment le nombre de côtés), ou des calculs numériques fastidieux liés à des transformations de dessins un peu moins élémentaires que la translation. Ceci permet de visualiser assez vite, sans avoir besoin de tables traçantes, "comment ça a l'air de se passer" dans des transformations définies analytiquement :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{array}{l}x' = f(x,y)\\ y' = g(x,y).\end{array}$$

Il en résulte la possibilité de varier énormément, de solliciter curiosité, intérêt, art de conjecturer et esprit critique.

★

D'autre part nous voici à l'aube de l'ère des micro-processeurs programmables qui pourront être branchés sur écran de télévision (Cf. les jeux électroniques qui utilisent celui-ci). Pour l'enseignement de la géométrie cela pourra relever du gadget — et du gaspillage d'argent —. Il nous appartiendra de veiller à ce qu'il en aille autrement. De tels moyens ne seront pas à dédaigner !

* On trouvera, en 1.11 de cette 7ème partie, un exemple d'utilisation des calculateurs programmables en trigonométrie .

6 - TRANSLATEURS

par G.H. CLOPEAU, IREM d'Orléans

La donnée d'un couple (A, B) de points du plan définit une translation du plan ; le graphe de cette translation est $\overrightarrow{AB}$.

Un translateur est un appareil qui se règle sur le couple (A, B) donné — couple qu'il est commode d'appeler "*ordonnateur*" de la translation — et qui permet de construire l'image, par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'une partie — partie qu'on appelle aussi "*figure*" — du plan.

Nous distinguerons, selon "la figure" dont ils permettent d'obtenir l'image en une seule opération, trois types de translateurs :

— les translateurs élémentaires (pour un point)
— les translateurs pour une droite
— les translateurs universels (pour une figure quelconque)

Après avoir décrit ces trois types d'appareils, nous nous attacherons à leur intérêt pédagogique.

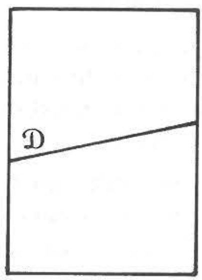
N.B. - On pourrait faire des études analogues pour symétriseurs, pantographes, inverseurs, ...

A. TRANSLATEUR ELEMENTAIRE (pour un point)

L'appareil

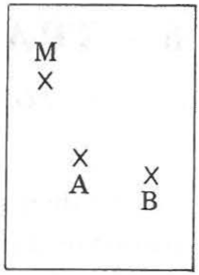
Sur le plan de la table glisse une feuille de papier calque sur laquelle une droite $\mathcal{D}$ est dessinée.

On dispose en outre d'un crayon et d'un poinçon.



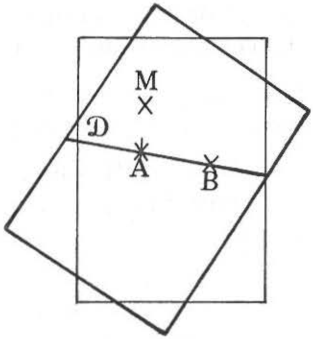
Les données

Sur le plan de la table, une feuille de papier à dessin fixée porte le dessin de l'ordonnateur (A,B), et d'un point M.



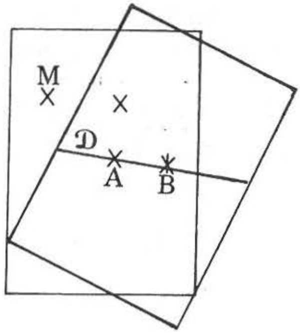
Position initiale

On a amené $\mathcal{D}$ sur (AB).
On relève sur le calque les points A et M.



Position finale

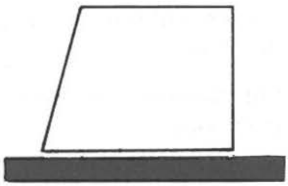
$\mathcal{D}$ est toujours sur (AB). Le relevé de A est amené sur B. Alors le relevé de M est sur M'.
On reporte M' sur le plan de la table en perçant le calque à l'aide du poinçon.



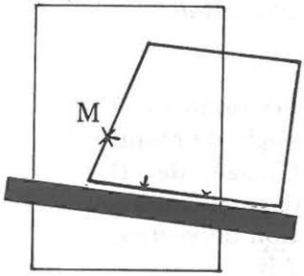
Variante :

L'appareil est constitué par une règle et une plaque rigide transparente dont un bord rectiligne peut glisser sur la règle.

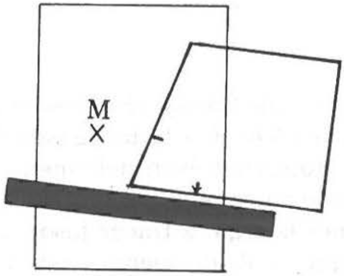
En outre, au lieu du poinçon, il faut un marqueur spécial permettant d'écrire sur la plaque (et pouvant s'effacer), ou bien des index autocollants.



Dans la position initiale, la règle est sur (AB). On fait glisser la plaque jusqu'à ce qu'un de ses bords vienne sur M. On relève alors les points A et M sur la plaque.



Dans la position finale, la règle n'a pas bougé, la plaque a glissé pour que le relevé de A vienne sur B. On peut alors reporter M′ à l'aide d'un crayon sans avoir à percer la plaque.



Remarques :

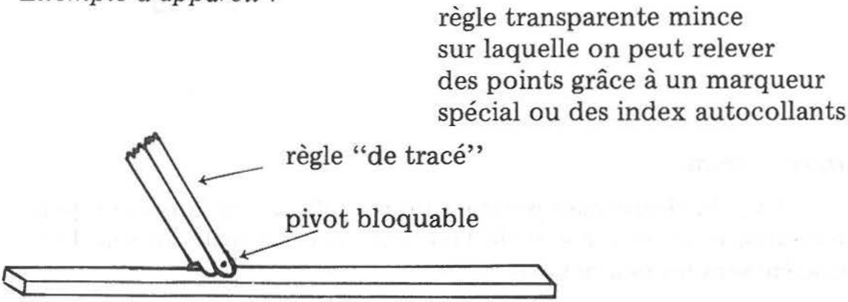
1°) Le dispositif précédent existe dans le commerce. Mais la plaque transparente est trop épaisse, ce qui introduit des erreurs de parallaxe.

2°) Au tableau noir, le calque peut être remplacé par une toile de tamis tendue sur un cadre. La craie, pressée sur le tamis, laisse à travers lui une trace sur le tableau.

B. TRANSLATEURS POUR UNE DROITE

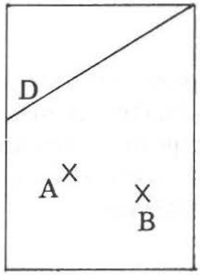
Ces appareils utilisent *le mouvement* de translation rectiligne défini par une "glissière".

Exemple d'appareil :

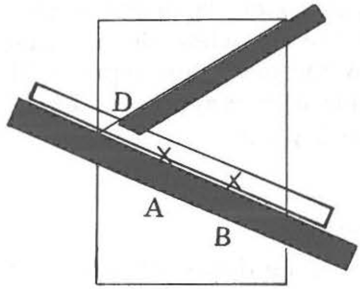


Utilisation

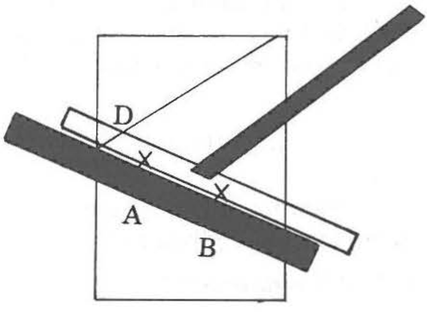
Les données. Il s'agit d'obtenir l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



La règle transparente est posée sur (AB). On la fait glisser (en s'appuyant éventuellement sur une autre règle) et on fait tourner la règle à tracer jusqu'à ce que celle-ci vienne sur (D). On relève alors A sur la règle transparente.

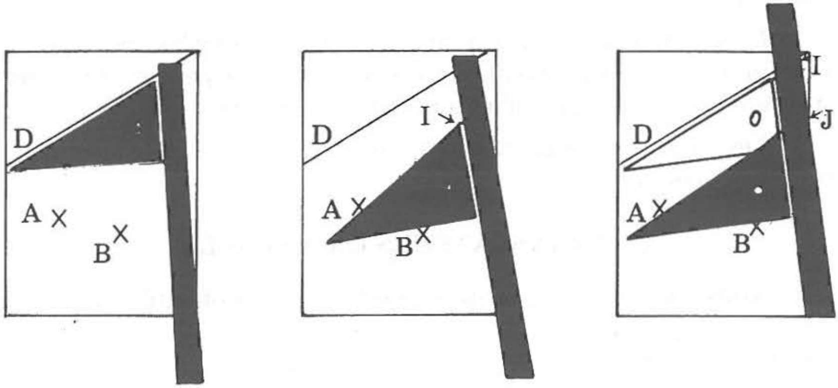


La règle transparente est toujours sur (AB) mais le relevé de A est sur B. La règle à tracer permet alors de tracer une partie de (D), qu'on prolongera éventuellement avec une règle ordinaire.



Autre exemple

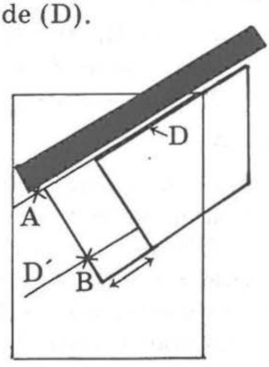
Au prix d'une manipulation un peu plus compliquée, on peut se contenter de la règle et de l'équerre, mais la justification de ce procédé sera un peu délicate.



On place un bord de l'équerre sur (D) et la règle sur un autre bord de l'équerre. La règle étant maintenue fixe, on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que le bord qui était sur (D) passe par A. On relève alors sur la règle le point I de rencontre de ce bord avec l'arête de la règle. On recommence, le bord de l'équerre passant par B, ce qui permet de repérer le point J sur la règle. On maintient l'équerre et on fait glisser la règle jusqu'à ce que I soit sur (D). On maintient la règle et on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que son bord coupe en J l'arête de la règle. Ce bord détermine l'image de (D) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas particulier

Si l'ordonnateur est donné de telle sorte que A soit sur (D), alors un translateur élémentaire, équipé d'un dispositif permettant de fixer le crayon, permet d'obtenir très rapidement l'image de (D).



La règle étant posée sur (D) et la plaque ayant un bord sur (D) et un autre bord passant par B, on fixe le crayon au relevé de B (avec la main).

En maintenant la règle fixe et en faisant glisser la plaque au contact de la règle, le relevé de B décrit, de façon continue, la droite (D') image de (D) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque

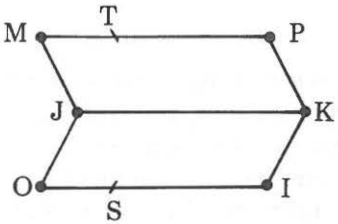
Le parallex minerva est une plaque de plexiglass portant de nombreux trous qui aident à fixer le crayon. Il permet de tracer très rapidement des parallèles à une droite donnée.

Les trusquins (du menuisier ou de l'ajusteur) utilisent un principe analogue.

C. TRANSLATEURS UNIVERSELS

Nous en donnerons trois exemples, de complexité croissante.

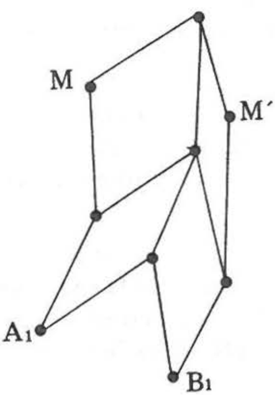
Premier exemple



L'appareil est constitué de deux parallélogrammes déformables ayant un côté commun (figure ci-contre) JK. Deux stylets S et T coulissent sur [OI] et sur [MP].

Pour utiliser l'appareil, il faut d'abord régler la position du stylet T en amenant M sur A et T sur B (rappelons que (A,B) désigne l'ordonnateur de la translation). Alors, O étant fixé sur A, S fixé sur B, si M décrit une figure (F), T décrit l'image de (F) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Deuxième exemple

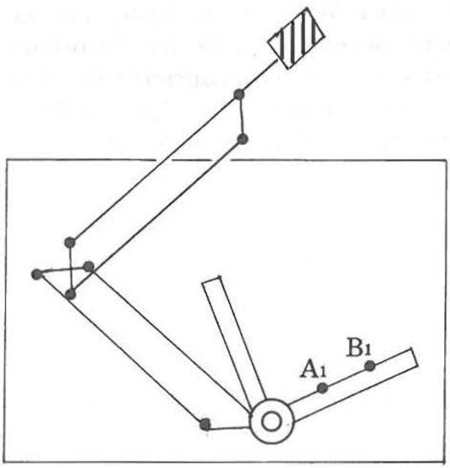


On évite l'inconvénient du réglage préalable en combinant quatre parallélogrammes déformables comme l'indique la figure ci-contre.

Si A_1 est fixé sur A et B_1 sur B, alors, si M décrit une figure F, M′ décrit l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La réalisation d'un tel appareil est délicate (la précision du meccano est insuffisante). D'autre part son utilisation pratique est limitée par les blocages qui se produisent quand l'un des parallélogrammes s'aplatit.

Troisième exemple



On munit un bord de l'équerre d'un appareil à dessiner professionnel de deux stylets A_1 et B_1 dont la position est réglable.

Le réglage préalable de l'appareil consiste à amener A_1 sur A et B_1 sur B et à fixer la position de B_1 sur cette équerre. Il est alors aisé de faire décrire une figure F donnée au stylet A_1 et le stylet B_1 dessine l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, ceci avec une excellente précision.

D. INTERET PEDAGOGIQUE

Si l'on pense que le seul intérêt du translateur est d'obtenir l'image, par une translation donnée, d'une figure donnée, on trouve évidemment méprisable le translateur élémentaire, car construire point par point l'image d'une figure donnée est fastidieux et imprécis.

Pourtant, les translateurs élémentaires suffisent pour :

1°) Contrôler expérimentalement l'adéquation au plan technique du modèle "plan affine", ou mieux (au niveau de la quatrième) induire le modèle à partir de la manipulation de l'instrument. En effet :

a) L'appareil définit une bijection du plan sur le plan pour chaque ordonnateur (A,B) donné (autrement dit des points distincts ont des images distinctes et réciproquement).

Si M' est l'image de M dans la bijection d'ordonnateur (A,B), alors B est l'image de A dans la bijection d'ordonnateur (M,M').

En résumé : à tout couple (A,B) de points du plan, le translateur fait correspondre une bijection unique (translation) dans laquelle B est l'image de A.

b) L'appareil permet de contrôler qu'il n'existe pas de contradiction, expérimentalement décelable, entre les propriétés des translations $\mathcal{T}$ énoncées ci-dessous, et les propriétés du plan technique ; autrement dit le modèle mathématique "plan affine" est, au degré d'approximation de l'appareil, un modèle satisfaisant pour le plan technique :

le signe + signifiant "suivie de" :

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1$$

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) + \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + (\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3)$$

θ désignant la transformation identique : $\mathcal{T}$ étant donnée, il existe $\mathcal{T}'$ telle que

$$\mathcal{T} + \mathcal{T}' = \theta$$

c) L'appareil permet de construire une graduation "régulière": Si B est image de A, C image de B, D image de C ..... etc et si T est image réciproque de A, S image réciproque de T ... etc, par la translation $\mathcal{T}$, la suite des points ..... S, T, A, B, C, D.... est une partie construite d'une graduation régulière qu'on peut concevoir illimitée.

Ainsi peut s'introduire le produit d'un vecteur par un naturel, puis par un entier, produit pour lequel les axiomes de la structure vectorielle se "vérifient" expérimentalement.

On généralise sans peine au produit d'un vecteur par un rationnel puis par un réel.

2°) Construire l'image d'une figure constituée de droites, une fois établi que l'image d'une droite est une droite. De ce fait, un translateur élémentaire et une règle suffisent pour pratiquer une "géométrie de construction" dont les avantages pédagogiques ont été présentés par ailleurs (cf séminaire 11, 12, 13 juin 1975 IREM Orléans).

*

*   *

Les translateurs pour une droite permettent d'obtenir plus rapidement l'image d'une figure constituée de droites. Mais ils ne peuvent servir à l'initiation. Il est préférable de justifier leur fonctionnement après avoir élaboré la théorie. Après quoi, ils permettent de gagner du temps.

Il en est de même des translateurs universels (utilisés comme tels car un translateur universel peut évidemment être utilisé pour obtenir l'image d'un point). D'autre part, les figures de la géométrie affine donnant lieu à raisonnement en classe de quatrième sont des figures constituées de droites. Les performances d'un translateur universel ne sont donc pas requises à ce niveau.

Il est cependant intéressant d'inventer un tel appareil, ou d'en expliquer le fonctionnement, d'en critiquer la précision, de réaliser avec son aide un dessin décoratif... etc. Mais, trop sophistiqués et trop chers, ces appareils ne se prêtent guère à une utilisation courante en classe par chaque élève individuellement, cherchant à comprendre la théorie ou à résoudre un problème.

Publications
A.P.M.E.P.

Bibliothèque de travail
du professeur de mathématique

Les
CARRES MAGIQUES

Brochure de 48 pages sur un "thème vertical"
Prix : 4 F par la poste : 5,15 F

LES PETITS MONSTRES

(Pièce géométrique en un acte et un tombé)

Le prof. - "Elève Pythagore, sortez de cet angle ou je vous mets la tête au carré".

Pythagore. - "C'est pas ma faute, m'sieur, Chasles m'a pincé l'hypoténuse".

Le prof. - "Franchement, vous avez de drôles de relations ! Chasles, vous êtes insupportable".

Chasles - "Allez ! encore moi ! c'est ce mouchard de Thalès qui a dû faire son rapport".

Le prof. - "Silence ! Et vous sinus, cessez d'éternuez !"

Thalès - "J'peux changer de place, M'sieur ?, j'vais être plein de projections !"

Le prof (piétinant son béret) -"J'en ai marre. Où est le représentant de la classe ?"

Deux élèves (qui se rassemblent) - "C'est nous, M'sieur".

Le Prof. - "Votre nom ?"
- "Bipoint Jules"

Le Prof. - "Et vous ?"
- "Bipoint aussi, M'sieur, Bipoint Fredo. On est du même milieu".

Le Prof. - "Bon ! Mettez un peu d'ordre dans la classe".
- "Pas à nous à le faire, M'sieur, c'est Euclide qui a tout laissé en plan".

Le Prof. (déchirant la poche de sa blouse grise) - "Assez ! Au travail ! Comment sont ces deux droites ?"

La classe (en choeur) - "Sé... cantes"

Le Prof. (au bord de l'apoplexie) - "Qu'est ce qu'il a fait, Kant ? Où est-il ?"

Bipoint (en aparté) - "Ha, ha, il est complètement nul, le mec !"

Le Prof. - "Bipoint, qu'est ce que vous faites sous la table ?
- "J'suis dans mon repère, M'sieur !"

Le Prof. - (Hurlant et se débattant dans sa camisole....)

"Vous irez pas en seconde C... vous irez..."

Marie-Thérèse PATALANI

7 - LE FIL A COUPER LE BEURRE

par Charles PEROL (Clermont-Ferrand)

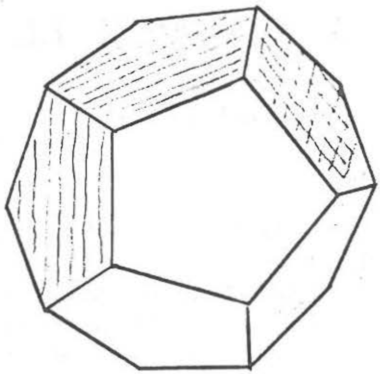
Oui, je sais, il est inventé depuis longtemps. Combien de temps au juste ? Mais avez-vous pensé aux services qu'une telle machine-outil pourrait rendre pour un enseignement appétissant de la géométrie ? Pour ma part, j'ai depuis longtemps déploré que l'enseignement de la géométrie se limite, de fait, pendant tant d'années, à la dimension deux. C'est et c'était de la faute des programmes ; bien sûr ! mais pourquoi les programmes étaient-ils ainsi ? Peut-être parce qu'on n'avait pas imaginé de moyen rapide de matérialiser autrement que par de mauvais dessins perspectifs des figures intéressantes de l'espace.

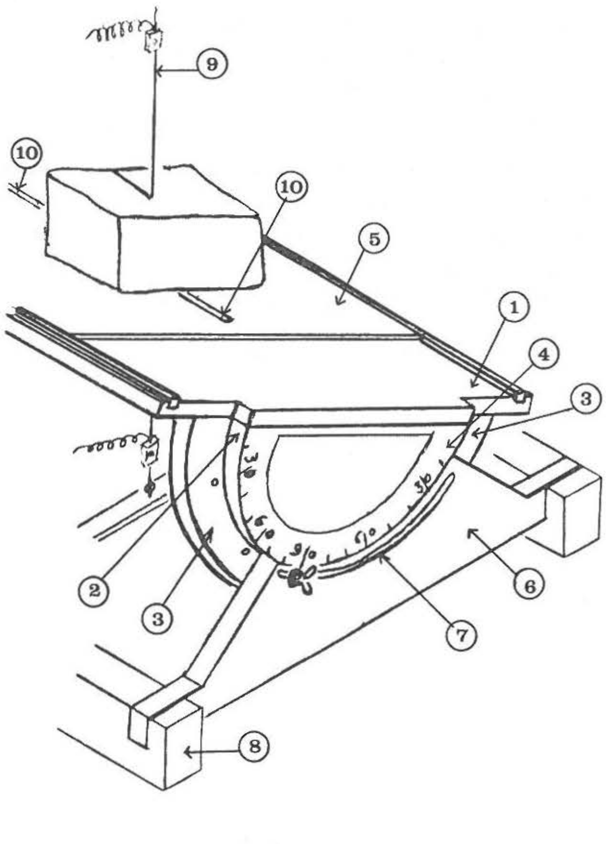
Nous n'avions pas pensé au fil à couper le beurre. Mis entre des mains habiles, il nous permettrait de réaliser rapidement des "solides" limités par les portions de plans, cylindres, cônes et autres surfaces réglées, hyperboloïdes à une nappe par exemple. Pour ceux à qui un régime sévère interdit le beurre, je vais indiquer maintenant une variante moins gastronomique.

Le styropor ou polystyrène expansé peut être coupé par un fil de nickel-chrome chauffé auquel on applique une tension de quelques volts. Il existe dans le commerce un petit appareil vendu sous le nom de "pyroscie" qui se branche sur un appareil à pyrograver. Il permet la réalisation d'objets décoratifs en travail manuel ou de diagrammes géographiques en relief en découpant des feuilles minces. Pour notre usage, il est nécessaire d'utiliser de la matière plus épaisse. Il existe des plaques de toute épaisseur : 1 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm par exemple, dans lesquelles il est possible de découper des solides : prismes, pyramides, polyèdres divers.

Dans un groupe de formation permanente de l'IREM de Clermont, nous utilisons une table inclinable. Elle permet de réaliser tel dièdre qui nous convient. Nous avons réalisé ainsi les divers polyèdres réguliers.

Plutôt que de la décrire par des mots, je préfère vous en donner un mauvais croquis accompagné d'une petite notice. La table s'incline en glissant sur un berceau.





L'utilisation de cette machine permet de réaliser une grande variété de solides.

NOTICE

La table inclinable

① Le plateau : 50 cm × 60 cm × 2 cm environ.

② Le cylindre qui assure la rotation : en aggloméré de 2 cm d'épaisseur environ. Le diamètre est imposé par celui du rapporteur ④ . L'axe du cylindre est situé dans le plan supérieur du plateau coulissant ⑤ .

③ La flasque qui maintient la table en bonne position sur le berceau (épaisseur 2 cm environ). Elle est percée de trous tous les 30° environ pour bloquer la table (dont elle est solidaire) sur le berceau, à l'aide d'un boulon et d'un écrou à oreilles.

④ Rapporteur de tableau acheté dans le commerce ; la graduation est en degrés.

⑤ Plateau coulissant : il permet de donner à la pièce de polystyrène un mouvement de translation rectiligne par rapport au plateau ① , donc par rapport au fil ⑨ . Il porte une fente ⑩ sur presque toute sa longueur pour permettre le passage du fil.

Le berceau

⑥ Berceau proprement dit : en aggloméré de 2 cm d'épaisseur environ.

⑦ Fenêtre en arc de cercle (voir ③).

⑧ Socle.

Cadre

Je n'ai pas représenté le cadre permettant de fixer et de tendre le fil de nickel-chrome (Il faut un système permettant de compenser l'importante différence de longueur du fil (plusieurs millimètres) suivant sa température).

Partie électrique.

Le fil mesure 50 cm environ. Son diamètre est 0,4 mm. Il est alimenté par un transformateur (entrée : 220 V; sortie : 12 V).

Prix du Styropor

La qualité 4 ayant la plus forte densité donne des coupes plus nettes. Elle coûte 3 F le dm^3 .

Le réglage de l'inclinaison de la table et le positionnement de la matière sur le plateau coulissant exigent que soient résolus divers problèmes de géométrie euclidienne. Ils sont simples dans des cas assez variés, mais ils peuvent, sans aller chercher midi à quatorze heures, devenir d'un bon niveau (sauriez-vous sans un moment d'attention calculer les dièdres d'un dodécaèdre régulier par exemple ?).

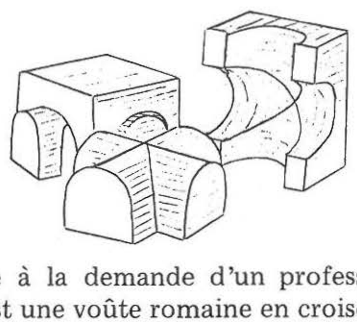
En aménageant un plateau pivotant sur le plateau coulissant (5) , nous avons découpé des surfaces réglées de révolution. La variété n'en est, hélas, pas grande.

Nous avons pensé à un guidage nous permettant d'obtenir divers hélicoïdes, notamment celui, développable, constitué par les tangentes à une hélice circulaire. Aurons-nous l'habileté de le réaliser ?

L'utilisation de la machine motivera la recherche de systèmes de guidage réalisant des conditions imposées.

Dès maintenant, notre programme de travail sur cette petite machine est donc important. Il ne cesse de s'accroître. Nous en espérons des retombées dans les classes à différents niveaux et aussi une coordination avec la technologie, le travail manuel ou la physique.

Quelques-unes de ces machines sont actuellement utilisées à des niveaux très variés, de l'école élémentaire à des groupes de formation permanente. En Auvergne, à Lyon, dans l'Orléanais et, quelle consécration ! en Normandie !



Maquette réalisée à la demande d'un professeur d'histoire pour expliquer ce qu'est une voûte romaine en croisée d'arêtes.

8 - FILMS DE GÉOMÉTRIE

par Marie-Claire DAUVISIS

"Comment, vous n'utilisez pas une plume d'oie ? c'est pourtant avec elle que l'on a écrit pendant longtemps... Ah ! Je vois, vous cédez au modernisme, à la société du gadget ; vous utilisez le stylo à plume, à bille ou même peut-être à pointe feutre !..."

Vous souriez sans doute, mais ne pensez-vous pas que l'usage du seul tableau noir et de la craie dans l'enseignement de la mathématique puisse prêter aux mêmes remarques ? Bien sûr, le tableau noir et la craie ont fait leurs preuves puisque c'est eux que vos professeurs ont utilisés et que "ça a marché" (pour vous au moins, qui êtes même devenu professeur de mathématiques) ; mais tous ceux pour qui "ça n'a pas marché" ou "ça ne marche pas" ne se retrouveraient-ils pas plus à l'aise dans leur apprentissage des mathématiques si d'autres moyens étaient utilisés ? Et si par exemple, on utilisait des films !

Pourquoi des films en géométrie ?

Il est banal de remarquer que nous sommes dans une société d'images, que sans cesse notre attention est attirée par des flasches lumineux fixes ou mobiles et que l'enseignement, en général, se coupera de plus en plus du monde environnant s'il refuse d'intégrer au moins ses moyens d'expression et les progrès de sa technique.

Le film est un moyen privilégié de transférer dans l'école des éléments du monde familier des élèves et de leur faire observer de façon précise cet environnement dans lequel ils sont immergés sans pouvoir en distinguer toute la richesse. La géométrie, plus que toute autre partie des mathématiques, est une science qui part du réel (n'oublions pas qu'étymologiquement c'est "mesure de la terre"), et ses contenus ne devraient pas être étudiés pour eux-mêmes mais pour permettre des applications dans des situations diverses. Le film permet une mathématisation et la découverte de propriétés communes à bien des objets ou situations très différentes, qui ne se trouvent pas toujours dans le champ restreint de la salle de classe et que l'évocation visuelle rend présents, de la même façon, à tous les élèves en même temps.

Par ce moyen, on incite les élèves à regarder autour d'eux, à observer, et on peut aussi, par une présentation visuelle d'exemples et de contre-exemples, espérer développer leur sens critique : on dit si souvent que c'est là un des objectifs principaux de l'enseignement mathématique alors qu'il est si rare de lui voir consacrer quelque activité.

Mais s'interroge-t-on vraiment sur les objectifs de l'enseignement de la géométrie dans le premier cycle ? Et si ces objectifs étaient variés, n'y aurait-il pas des moyens (media) variés et appropriés à chacun de les atteindre.?

Veut-on faire acquérir des connaissances ? Cependant ne voit-on pas dans les classes l'accent mis sur une construction rationnelle de ces connaissances, alors que souvent une perception globale et profonde vaudrait mieux qu'une analyse minutieuse des détails qui finit par voiler toute la structure de l'édifice ? Il faut alors consacrer un temps immense à la formalisation d'idées extrêmement simples et banales qui pourraient être suggérées en quelques secondes par des images bien choisies.

Désire-t-on apprendre à formaliser ? Ne confond-on pas souvent cet objectif avec "communiquer de nouvelles idées par le moyen d'un langage formel et linéaire" et ne pourrait-on pas d'abord susciter et rendre familières de nombreuses idées par le biais d'images et apprendre ensuite à les formaliser ? Quel mathématicien ou même quel professeur de mathématiques oserait dire qu'il n'a pas d'images en tête lorsqu'il manipule ses écritures ? Et quelle signification peut avoir pour les élèves un langage purement formel en géométrie, si les formes sous-jacentes ne leur ont jamais été montrées ou évoquées par quelques images ?

Même si on abandonne comme objectif de chercher des domaines d'applications ou supports permettant d'interpréter les écritures géométriques, il reste un objectif tout aussi important qui est de comprendre la structure des systèmes présentés. Si par "comprendre" on veut dire être capable de créer un nouveau mode de description de la structure permettant de nouvelles perspectives, de nouveaux problèmes à partir de la résolution d'anciens, on peut se demander comment acquérir cette capacité sans le secours d'images globales, synthétiques et surtout sans le secours des transferts entre images suffisamment variées. *

* Ce qui paraît essentiel, c'est de munir l'élève, pour un même concept, de plusieurs représentations (sur lesquelles les opérations définissent le même type de structures), pour que, à sa guise, il puisse utiliser celle qu'il perçoit profondément comme la mieux adaptée dans la recherche intuitive, voire dans la solution d'un problème. De la même façon les idées ne sont jamais transmises par une seule image ; c'est le rapprochement d'images qui peut en suggérer.

L'enseignement se veut plus démocratique, plus ouvert sur les réalités, plus à l'écoute des remarques des psychologues, moins dogmatique et plus dynamique. Or, en mathématiques et encore plus spécialement (et c'est presque un comble) en géométrie, sous la poussée des spécialistes de la rigueur, cet enseignement est en fait très verbal, très formel, encore plus éloigné des champs appliqués que le type d'enseignement précédent et si desséché que rares sont ceux qui peuvent y trouver quelque intérêt.

Que l'on reprenne les théories psychologiques de Piaget ; on sait que c'est par l'observation et l'action que l'élève peut intérioriser les concepts ; toute situation pédagogique ne peut que s'appuyer sur la vie, sur l'action pour que l'enseignement acquière un sens pour l'élève. Pendant tout le premier cycle, l'activité déductive elle-même ne doit guère s'écarter de l'action.

On sait aussi, à la suite de Bruner, que l'acquisition et l'intériorisation des concepts nécessitent trois niveaux de représentations successives (qui sont franchis à des vitesses variables et croissantes avec l'âge) :

- représentation de niveau concret (manipulation)
- représentation de niveau iconique ou imagé
- représentation de niveau symbolique ou formel

L'introduction des films dans l'enseignement peut permettre d'éviter la tendance fréquente actuellement de dérouler un enseignement ne relevant que du seul troisième niveau.

Enfin en géométrie les films peuvent apporter de multiples aides :

par exemple, on peut espérer ainsi :

- créer des images mentales capables d'évolution
- donner une appréhension de la géométrie du mouvement en face de la géométrie statique
- faire percevoir la distance et les liens qui existent entre la réalité physique et le modèle mathématique
- souligner la richesse des transformations sur un ensemble.

Même si on commence à percevoir une quelconque utilité des films dans l'enseignement de la géométrie en Premier cycle, encore faut-il s'interroger sur les possibilités et les conditions d'utilisation.

Est-il possible d'utiliser des films en géométrie ?

Tout d'abord une question se pose : existe-t-il des films utilisables ?

S'il existe beaucoup de documents filmés pour l'enseignement élémentaire, il est vrai qu'il en existe beaucoup moins pour l'enseignement du Second Degré ... Cependant il serait long d'énumérer de façon exhaustive tous les films concernant la géométrie du Premier Cycle. Ce sont des films 8 mm ou super 8 mm en général, films courts et muets, films d'animation ou situations réelles, ou des films 16 mm généralement sonores, films d'animation ou plus souvent cours enregistrés. On peut aussi adjoindre à ce panorama des films de vidéo, reprenant des émissions de télévision scolaire.

On peut reprocher aux films d'animation d'utiliser un procédé spectaculaire mais quelque peu artificiel. Cependant, et pour ne prendre qu'un exemple, leur utilisation en trigonométrie pour montrer les variations des fonctions circulaires (sin, cos, tg...) permet, par visualisation, d'accéder à la compréhension de cette notion de fonction trigonométrique et de sa représentation.

Le cours enregistré risque d'être un peu figé et de privilégier le maître ; il peut cependant aussi présenter une situation de classe inhabituelle et inciter les élèves à entreprendre tel type d'action qu'ils ont vu réaliser ou à la critiquer et ainsi approfondir leur connaissance et leur compréhension d'un concept.

Il semble que le film sonore, avec son commentaire imposé, ne permettant guère de souplesse d'utilisation, ne soit pas aussi bien approprié à l'usage de la classe que le film muet qui permet à l'enseignant de poursuivre, avec les élèves et sur le support d'images, le type de discours habituel à la classe dans ses mots et sa forme. D'autre part, le film sonore a de grandes chances d'être perçu comme une activité extérieure à la classe, ne s'intégrant pas au processus didactique, comme une distraction, une séance récréative, et même quelquefois annoncé comme récompense après un apprentissage formel difficile. Le film muet, quant à lui, peut être, sans inconvénient pour la compréhension, interrompu, fractionné en séquences très courtes et même présenté en partie seulement; une autre qualité c'est que l'on peut utiliser les mêmes images à des moments très différents, dans des classes différentes et même quelquefois pour faire approcher des notions différentes.

Il n'est guère nécessaire aussi de rappeler tout l'avantage de facilité de manipulation du projecteur 8 mm ou super 8 mm comparé au 16 mm.

Mais s'il existe des films, encore faut-il pouvoir les utiliser ! Tout d'abord il faut savoir que certains peuvent être empruntés dans les C.R.D.P. et que d'autres doivent être achetés ; mais les professeurs de mathématiques ne savent souvent que faire des crédits lorsqu'il leur en est alloué : voilà une occasion de les dépenser ou alors de justifier des demandes de crédits. Ensuite, bien sûr, il faut pouvoir disposer d'un projecteur — mais rares sont les établissements qui n'en sont pas pourvus, — d'une salle facilement obscurcissable, d'un écran ou d'un mur blanc, d'une prise électrique en état de marche et... d'une rallonge électrique : que de conditions qui empêchent sans doute bien souvent des enseignants d'utiliser les films et le projecteurs qu'ils avaient apportés... ; et pourtant, est-ce si difficile de réclamer et d'obtenir ce minimum de confort audio-visuel dans les classes ?

Un autre problème beaucoup plus fondamental est celui de l'intégration des images filmées dans le processus d'apprentissage surtout tant que, durant toute leur formation personnelle, les enseignants de mathématiques n'auront pratiquement vu réaliser qu'un seul type de pédagogie qui veut que le maître, armé d'une craie, soit au tableau pour dérouler un cours devant la classe. Si l'enseignant face à une notion du programme ne se croit muni que du livre et des connaissances théoriques qu'il possède, il est probable qu'il continuera à utiliser ce même type de pédagogie. Par contre, s'il s'interroge sur les objectifs poursuivis, sur les capacités psychologiques des élèves de sa classe et sur l'utilisation rationnelle de moyens mis à sa disposition, il pourra adapter ses actes pédagogiques à la situation à laquelle il est confronté et découvrir avec ses élèves de nouveaux modes d'appropriation de connaissances et de formation. Ce qui est certain, c'est que pour que le film ait un quelconque intérêt, il faut qu'il soit totalement intégré à la pédagogie, et utilisé assez fréquemment ; sinon son aspect de gadget ou de récompense lui fait perdre toute signification vis-à-vis de l'objectif qui lui était assigné.

Y a-t-il un moment plus approprié pour utiliser le film : en tant que motivation, en tant que résumé, en tant qu'illustration... ? Tout cela dépend bien sûr du film, mais aussi de la façon dont l'enseignant pense l'intégrer dans sa classe. Il n'est d'ailleurs pas certain que l'on utilise tout le film au même moment, ou que l'on ne l'utilise pas, par exemple, à la fois en motivation et introduction et en résumé. De toute manière, la fiche technique qui accompagne tous les films permet de préciser le contenu et son découpage.

Il faut cependant ne pas oublier que l'on peut rester fort passif devant des images filmées et il est important au contraire que le film suscite l'action des élèves, action qui se déploie pendant des interruptions de projection, ou à la suite d'une projection, ou entre deux projections du même film, la deuxième projection permettant de préciser les données, d'affiner l'observation à la suite de l'action. L'image ne remplace pas la manipulation, mais elle peut permettre d'approfondir la compréhension de ce qu'avait laissé percevoir l'action. Pour éviter le côté passif du visionnement des films, un tout autre aspect de l'usage du film en classe est de faire construire les images et les observations par les élèves eux-mêmes. Il est possible, sans moyens techniques très sophistiqués, de construire un film sur quelque notion géométrique, et les élèves sont habiles au maniement de la caméra, et puis... même si les images ne sont pas aussi belles que celles des films de professionnels, la notion mathématique ne sera-t-elle pas tellement mieux comprise par les élèves qui auront eu à construire les images, et cela ne vaudrait-il pas la peine d'y consacrer quelque temps ? Ne serait-ce pas aussi le moyen d'un travail pluridisciplinaire ?

Un exemple de film de géométrie : "A propos de Thalès"

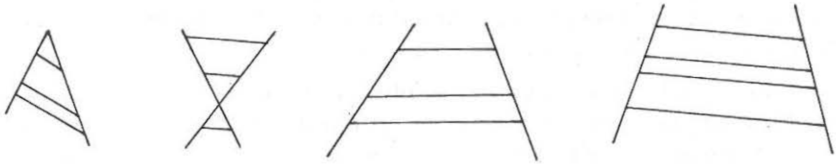
(de D. Boisnard, Régis Gras, I.R.E.M. de Rennes)

La fiche technique après avoir précisé les intentions et la ligne pédagogique des réalisateurs de la série de trois films dans laquelle ce film s'inscrit, précise pour celui-ci :

"But" *: On veut faire ressentir trois propriétés essentielles.*

— Conservation du parallélisme par projection parallèle (ombre obtenue par la source solaire).
— Conservation du rapport des mesures par projection parallèle (Thalès).

En particulier, on veut faire apparaître une formulation physique de l'axiome de Thalès pour l'examen de quatre situations dans lesquelles nous utilisons des barres articulées et des élastiques.



— *Enfin, on veut montrer que, si le modèle abstrait est conforme, la formulation de la réciproque ne peut contenir la seule propriété liée aux rapports égaux. Il faut en outre deux parallèles.*

Destination : *A projeter en classe aux enfants et à compléter par (ou à faire précéder de) un examen des montages et de projections d'objets familiers".*

Le film est un film muet super 8 mm (12 minutes) constitué d'images tournées en lumière naturelle ou en intérieur avec un matériel d'amateur. Tout d'abord sont présentées de multiples situations de projection parallèle (ombres d'un séchoir de linge, d'une barrière, d'une fenêtre, d'une échelle....) à partir desquelles on peut observer la conservation du parallélisme par projection parallèle. Ensuite,en utilisant un instrument de mesure quelconque (une réglette ou un crayon),on constate et on fait constater que les rapports de mesures sont conservés par projection parallèle (mesures faites sur l'ombre d'une barrière).

Enfin la présentation de manipulation de barres percées régulièrement et articulées auxquelles sont attachés des élastiques permet de vérifier numériquement cette propriété et d'atteindre le formalisme du théorème de Thalès et enfin d'écrire les relations de proportionnalité.

Le film se termine par une manipulation des barres articulées munies des élastiques dans la disposition précédente, pour mettre en évidence que la réciproque du théorème de Thalès nécessite l'existence de 2 parallèles.

Comme nous venons de le décrire, ce film comprend un certain nombre d'étapes distinctes et peut être coupé au moins en quatre séquences, entre lesquelles les élèves pourront aller chercher d'autres observations semblables, opérer eux-mêmes les mesures et les manipulations : de toutes manières, par sa présentation, c'est un film qui stimule l'activité des élèves.

Projeté dans différentes classes, et de l'avis des enseignants concernés, il se situe mieux comme une introduction au théorème de Thalès qu'en récapitulation de celui-ci.

Voici une réaction : "Projeté en quatrième sans aucune explication préalable, les réactions des enfants ont été excellentes : ils ont presque "bâti" Thalès. Il ne reste plus au collègue de troisième qu'à construire le modèle mathématique".

Que de temps gagné par rapport à la présentation traditionnelle du théorème de Thalès sur laquelle il faut maintes fois revenir avant d'emporter la conviction des élèves ! De plus, on leur a demandé d'exercer leur observation, et leur observation critique (réciproque). D'autre part, ne trouve-t-on pas ainsi, et au moins pour cette notion, une réponse à la fameuse question : "A quoi ça sert ?", et ceci encore davantage si l'on prolonge ce film par le suivant de la série : "Découvrons et appliquons Thalès".

Et les autres films utilisables en géométrie ?

Nous avons voulu prendre un exemple de film, mais cela ne veut pas dire, comme nous l'avons mentionné plus haut, qu'il soit unique.

Bien sûr certains IREM (Grenoble, Lille, Montpellier, Nice, Nancy, Rennes, entre autres) ont depuis quelques années commencé à se lancer dans la réalisation de documents filmés, dont ils assurent la reproduction et la vente de copies ; mais il est important de ne pas oublier que l'organisme public le plus important pour la création et la diffusion de films est l'"ex-OFRATEME" (actuellement CNDP).

Pour la géométrie, on peut citer en films super 8 mm la série "Patchwork" : films qui présentent les groupes de transformations sous-jacentes aux motifs géométriques usuellement rencontrés ; et dans la série "Problèmes ouverts" : "codage".

On peut visionner ces films et les acheter dans les C.R.D.P.

L'ex-OFRATEME diffuse aussi des copies d'émissions de la série "Atelier de Pédagogie : activités mathématiques". Des copies optiques peuvent être prêtées par la Cinémathèque du Département des Actions Educatives (31, rue de la Vanne 92120 Montrouge), et des copies optiques ou magnétoscopées sont en vente au Département Promotion et Ventes (29 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05). Dans cette série, citons : "Géométrie : Taxi-distance, Echelle et Taximètre, Pavage", "Autour du carré à partir du cube", "Mesure".

Enfin, on peut aussi obtenir par la cinémathèque centrale de l'ex-OFRATEME (via les C.R.D.P.), ou/et par le service du film de recherche scientifique, des prêts de films sonores 16 mm tels que "Repérage dans le plan ; translations" et "Composition de translations" — et bien d'autres encore.

Cette énumération ne se veut pas exhaustive ; elle voudrait seulement donner quelques idées et suggérer de demander au CRDP (ou CDDP) la liste des films et les catalogues de ceux qu'ils peuvent diffuser. Ces organismes pourront sans doute aussi connaître d'autres lieux d'édition et de diffusion de films ; en espérant que parmi tout le choix ainsi offert, il y aura un document adapté...;sinon au travail, caméra au poing !

9 - UNE AFFAIRE DE LOCAUX

par Henri BAREIL

Il serait vain de parler matériel si l'on ne précisait l'exigence de locaux adéquats.

Si l'on veut que le matériel soit facilement disponible et utilisé, il convient :

1. que chaque professeur de mathématiques travaille toujours dans la même salle et qu'il y dispose de meubles de rangement,

2. que ces salles aient un équipement minimum : tableau quadrillé, stores,...

3. que les diverses salles de mathématiques soient groupées autour d'une salle-laboratoire d'accès facile où seront entreposés des équipements communs.

Mais il y a d'autres exigences :

Un enseignement vivant de la géométrie suppose la possibilité de travaux par groupes et de travaux personnalisés. Ceci réclamerait, par salle, des "coins-travail" relativement équipés. L'agencement de ces "coins-travail" par rapport à la salle est à étudier avec soin.

Plus gravement, comment les élèves peuvent-ils en même temps se sentir "chez eux" ?, comment concilier leur besoin d'un espace propre et permanent avec celui de salles spécialisées ?

Les réponses que l'architecture des lieux apporte actuellement à ces questions en sont la pure négation. Or il y a, dans l'apprentissage des mathématiques, beaucoup de problèmes, de l'ordre du comportement, qui tiennent aux conditions matérielles de travail.

D'autant que les refus de concevoir d'autres distributions et d'autres architectures des locaux vont de pair avec une confiance indéracinable en les vertus de l'enseignement magistral et de compétition tel que des siècles l'ont façonné.

Des enseignements rénovés ne peuvent se couler dans de vieilles architectures adéquates à tout autre chose. Comme les murs ne sauraient céder, c'est la capacité de rénovation de l'enseignement qui sera liquidée.

Encore un voeu : nos élèves sont tirés à hue et à dia toute la journée, souvent soumis au bruit, par exemple lors des transports en commun, souvent recrus de fatigue par le biais de trop longs "ramassages scolaires". On aimerait que la conception des locaux scolaires et leur cadre procurent aux élèves détente et relaxation nerveuse.

Il resterait alors à tirer bénéfice de tels locaux : cela s'appelle démocratisation des établissements et accès des élèves aux responsabilités. S'il en était ainsi, l'enseignement pourrait devenir leur affaire ... et il y aurait un peu moins de difficultés pour celui des mathématiques du premier cycle !

D'après Paul ELUARD

"C'EST LA CHAUDE LOI DES HOMMES"

C'est le curieux effet des maths
De barres ils font des droites
De ronds ils font des cercles
Du familier ils font ... des maths

C'est là que nous tentons
D'être un enseignement malgré
Les séductions faciles
Malgré les voeux de sélection.

C'est que pour nous y sourdent
Des éclairs de lumière
Balbutiant la lecture
D'un monde qui se cherche

En un effort très vieux et très nouveau
Qui va jaillissant
De toutes les pensées d'enfant
Vers l'ambition de la raison.

Mais qui veut qu'une joie en les maths
Nous retienne, infiniment,
Pour qu'ils nous soient comme une vague
Ravissant nos visages du doux plaisir d'aimer.

H. B.

Brochure A.P.M.E.P.

QUELQUES APPORTS DE L'INFORMATIQUE A L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Cette brochure est essentiellement écrite pour les professeurs de mathématiques

- qui ont entendu parler d'informatique ;
- qui voudraient en savoir plus sans être noyés ;
- qui se demandent ce qui a été fait par d'autres collègues et ce qu'ils pourraient eux-mêmes réaliser ;
- bref ! *tous ceux qui voudraient avoir rapidement mais sérieusement une vue globale sur le sujet.*

En voici les différents chapitres :

* Une introduction fait traditionnellement le point général.

* Le chapitre 1 (RENOUVEAU DE L'ART DU CALCUL) développe quelques exemples simples d'activités montrant que, loin de reléguer au musée le calcul et ses techniques, les calculatrices en font un centre d'attraction particulièrement vivant.

* Le chapitre 2 (QUELQUES DEVELOPPEMENTS EN SITUATIONS PEDAGOGIQUES) montre le parti que le professeur de mathématiques peut tirer, pour sa classe, de la démarche et de l'emploi du matériel informatique.

* Le chapitre 3 (LANGAGES ET METHODES) explicite la nature spécifique du discours informatique et les idées fondamentales qui sous-tendent son utilisation.

* Le chapitre 4 (AIDE DE L'INFORMATIQUE A L'ENSEIGNEMENT) fait le point sur les possibilités actuelles.

* Enfin, le chapitre 5 (INFORMATIONS DIVERSES) donne des indications sur les matériels, les livres, les équipes de recherche, les lycées équipés en ordinateurs, les bonnes adresses ...

280 pages ; 25 F (port compris : 29 F).

6ème partie

COMPORTEMENTS

des élèves - des maîtres

1 - LA NOTATION ET SES VARIABILITÉS

par Marie-Claire DAUVISIS

"En mathématiques, au moins, c'est juste ou c'est faux, on sait ce que l'on a fait et comment on a réussi. Ce n'est pas comme en français, où tout dépend du correcteur !". Que de fois entend-on cette réflexion !... Et pourtant... si on s'"amuse" à faire corriger par plusieurs professeurs la même copie... on a (et eux aussi !) quelques surprises. Voilà que sur la même copie, avec un barème donné, sur un devoir du niveau BEPC, un correcteur donne 18/20 et un autre 7/20, les autres se répartissant entre ces deux extrêmes ; sur une autre copie on a 14 ou 3. Si vous pensez que ces collègues sont des "farfelus", des "névrosés", des "maniaques" ou encore des "incompétents" et que sans plus tarder ils devraient prendre leur retraite, faites l'expérience et sans doute bientôt vous constaterez que vous aussi vous pourriez aller "cultiver votre jardin" !

Mais oui : les différences de notation entre évaluateurs, ça existe aussi en mathématiques et surtout en géométrie : c'est en effet en géométrie que l'on constate les plus grands écarts, et le moins d'accord entre correcteurs sur des copies données.

Par exemple, s'il n'est pas dit explicitement dans le texte de faire une figure, et si dans le barème cette figure n'est pas notée, un certain nombre de correcteurs lui consacreront une partie des points de la première question, ne concevant pas que l'on puisse rédiger un devoir de géométrie sans faire la figure sur cette rédaction ..., et si les élèves l'ont faite au brouillon ... ? et même s'ils n'en ont pas eu besoin ?

Bien sûr, les questions des problèmes de géométrie du BEPC, qui influencent une grande partie de l'enseignement de Quatrième-Troisième, sont tellement stéréotypées que l'on a beau parcourir les annales, on ne sort guère de la monotonie ; mais, derrière chacune de ces questions, chaque professeur a développé un type de réponse avec sa propre personnalité, son propre désir de rigueur, ses objectifs et, disons-le, parfois "ses manies". Si, par malheur, l'élève dont il corrige la copie n'a pas suivi le même enseignement (ou "dressage") et ne suit pas le rite habituel, voilà qu'on interprète sa réponse comme "mauvaise", imprécise, ou encore révélant une incompréhension totale, alors que cet élève a répondu selon le rite dans lequel il a été éduqué avec bien sûr peut-être une interprétation personnelle !

Lorsque dans une question on demande "montrer", qu'est-ce que cela veut dire ? Est-ce faire un signe sur la figure (si elle est demandée), est-ce à l'opposé faire une démonstration dont tous les enchaînements soient parfaitement décrits, tous les théorèmes utilisés parfaitement énoncés ? Et quel degré de rigueur peut-on exiger en premier cycle ?

Voilà que se pose une question : est-ce qu'en troisième on prépare les élèves à la Seconde C, et dans ce cas la rigueur exigée est importante et comme le déclarent certains "le raisonnement par condition nécessaire et suffisante est un des objectifs du Premier Cycle" ; ou bien on accepte qu'à la fin du Premier Cycle tous les élèves n'ont peut-être pas atteint le niveau des opérations formelles et que ce type de raisonnement ne peut être acquis ?

Et si on se mettait à se demander ce que l'on évalue en réalité dans une question posée ? Et quel est l'objectif de l'évaluation ? Quel poids accorder à tel ou tel autre type d'objectif ? Mais qui peut se mettre d'accord sur ce genre de question ?... C'est sans doute pour cela qu'on évite de se les poser !...

Si on fait l'expérience de présenter un problème de géométrie en essayant de n'assigner qu'un seul objectif par question posée, on se rend compte que, pour l'établissement du barème, on se réfère à la forme traditionnnelle des problèmes, et ce avec toute l'ambiguïté que cela comporte. — ... Et souvenez-vous des commissions de barème où l'on ne précise pas trop pour laisser à l'"appréciation des correcteurs" — ... Cela n'est en fait pas plus catastrophique puisque, avec ou sans barème, les différences d'évaluation ne sont souvent pas significatives.

D'autre part, les programmes sont donnés en termes de contenus, mais les problèmes de géométrie permettent souvent d'évaluer bien d'autres aptitudes : exécution d'une tâche technique, traduction de données, analyse, intuition, rigueur, sens critique ... et bien d'autres choses encore laissées à l'"appréciation des correcteurs".

Voici deux exemples qui sont sources de divergences entre correcteurs :

"Calculer les distances AB, BC, AC. En déduire la nature du triangle (A,B,C)".

Voici que, pour démontrer que le triangle (A,B,C) est rectangle, l'élève a montré que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ étaient perpendiculaires. Certes il a trouvé la nature de (A,B,C), mais il ne l'a pas "déduit".

"Il s'est sans doute pénalisé par le temps passé à faire cette démonstration, et n'aura peut-être pas eu le temps de faire la dernière question" — "Peut-être, mais il n'a pas répondu à la question ; on demandait : en déduire".

"Donner les coordonnées des points A, B, C, D et montrer que (O, A, B, C) est un parallélogramme". Réponse d'un élève à la 2ème partie de la question : "si (O,A,B,C) est un parallélogramme $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$.

$$x_{\overrightarrow{AO}} = x_{\overrightarrow{BC}} \qquad y_{\overrightarrow{AO}} = y_{\overrightarrow{BC}}$$

$$2 = 7 - 5 \qquad -5 = -3 - 2$$

$$2 = 2 \qquad -5 = -5$$

On a $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$ et (O,A,B,C) est un parallélogramme."

Ce ne sont là que deux exemples, mais essayez d'y répondre vous-mêmes et de les proposer ; il y a de longues discussions en perspective. Au travers de ces expériences docimologiques et des discussions sur l'évaluation, c'est toute la conception de l'enseignement qui est remise en cause : qu'attend-on des élèves ? Quels moyens utilise-t-on pour évaluer effectivement ce que l'on dit attendre ?

2 - ÉTUDE SUR LA STABILITÉ DE LA GÉOMÉTRIE EN FIN DE TROISIÈME

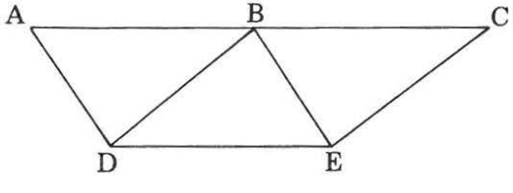
Résultats de deux enquêtes à modalités auprès d'élèves de classes de troisième (âge moyen : 15 à 16 ans).

par Claire DUPUIS, Raymond DUVAL, François PLUVINAGE, I.R.E.M. de Strasbourg.

1. PRESENTATION DES DEUX QUESTIONNAIRES SUCCESSIFS.

Pour explorer certaines acquisitions concernant la déduction après l'apprentissage de la géométrie, nous avons proposé en fin de troisième un premier questionnaire à quatre modalités concernant l'utilisation des notions suivantes : le parallélisme, le théorème de Thalès et les vecteurs.

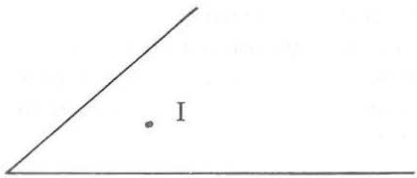
(a) Trois questions portaient sur le parallélisme. Dans la première, il s'agissait d'utiliser la transitivité de l'égalité des côtés opposés sur une situation simple : on donne deux parallélogrammes ayant un côté commun et on demande de montrer que B est milieu de AC.



L'informatique amenant à désigner les questions par des abréviations, nous avons appelé cette question LIV.OU. (Le livre ouvert). La seconde question est la reprise de la première, à ceci près que les hypothèses sont présentées en mentionnant les droites parallèles sans parler explicitement des parallélogrammes et que la situation précédente est légèrement enrichie : on prolonge AD et CE de sorte que la figure forme un grand triangle. Nous avons appelé cette question CHAP. (nous avons simplement habillé la situation précédente d'un chapeau). Les différentes modalités du questionnaire nous ont permis de combiner ces deux questions de la façon suivante :

LIV.OU. seul — CHAP. seul — LIV. OU. suivi de CHAP.

Enfin dans la troisième question il s'agissait d'utiliser la propriété des "diagonales qui se coupent en leur milieu" soit pour tracer un parallélogramme soit pour tracer un segment, un point donné I devant être soit le milieu des diagonales, soit le milieu du segment. Deux droites données devaient être le support soit pour deux côtés du parallélogramme, soit pour les extrémités du segment. Nous avons appelé cette question l'OEIL (la situation de départ étant



(b) Dans la question portant sur le théorème de Thalès, il s'agissait de transporter un rapport donné sur le côté d'un triangle, vers un autre côté de ce triangle. Nous avions retenu cette question pour sa ressemblance figurale avec le CHAP., les élèves pouvant assimiler l'une à l'autre les deux situations. Cette question était présentée dans toutes les modalités pour tester l'homogénéité des populations ayant eu les différentes modalités.

(c) Deux questions portaient sur les vecteurs. Dans l'une il s'agissait de déterminer les composantes d'un vecteur $\vec{u}$, dans l'autre de tracer ce vecteur $\vec{u}$. Les seules variations que nous avons introduites portaient sur les signes de l'équation $3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ et sur l'isolement ou non de $\vec{u}$ dans un membre de l'équation.

Ce questionnaire a été proposé dans 11 classes de troisième au début du mois de juin 1974. Malheureusement il se trouva à cette période de l'année que toutes les classes n'étaient pas complètes. Et comme nous avions 4 modalités pour notre questionnaire, cela faisait un échantillon trop restreint :

54	élèves en modalité	A
61	”	B
54	”	C
63	”	D
232		

Nous avons dépouillé et analysé les résultats et nous avons décidé de faire repasser le questionnaire une seconde fois pour vérifier la stabilité des phénomènes que nous avions observés sur ces échantillons restreints.

Pour la seconde passation du questionnaire fin mai - début juin 1975, nous avons procédé aux modifications suivantes :

— réduction à trois modalités pour des raisons techniques d'interprétation à l'aide de l'analyse des correspondances ;

— adjonction d'une question commune sur l'utilisation du théorème de Pythagore, les enseignants proposant souvent des exercices dans ce domaine en vue du B.E.P.C. ;

— transformation de la question sur la projection, la question du précédent questionnaire ayant donné lieu à des réponses trop succinctes pour permettre leur interprétation ;

— demande d'une appréciation de la familiarité de chaque question posée selon qu'elle a été souvent ou non proposée en classe ;

— un chronométrage du temps passé sur chaque question ;

— choix d'un tiercé parmi sept opinions positives et sept opinions négatives sur les mathématiques.

Les questions portant sur le parallélisme et les questions portant sur les vecteurs ont été gardées sans changement.

C'est ce deuxième questionnaire que nous avons joint en annexe. Il y avait une question par page, les indications de temps et d'appréciation pour chaque question se trouvaient respectivement en haut et en bas de la page. Voici une présentation synoptique de la distribution des questions par modalité. Une croix signifie que la question a été posée, et le décalage de deux croix signifie que la question a été posée avec une légère variation.

Question	Pythagore		Thalès			Composantes d'un vecteur			Vecteur à tracer			Point M	Livre ouvert	Chapeau		L'oeil		
Sigle d'analyse	PYT	PER	TBC	CTH	THA	AVC	BVC	CVC	AVT	BVT	CVT	PLM	LIV	CHA	AHC	AOE	BOE	COE
A	X	X			X	X			X				X		X	X		
B	X	X			X		X			X			X	X			X	
C	X	X	X	X				X			X	X		X				X

Ce deuxième questionnaire a été présenté à 14 classes, soit un effectif de 366 élèves répartis de la façon suivante :

Modalité	A	120
	B	116
	C	130

Pour cette deuxième enquête effectuée un an après la première, nous sommes allés dans d'autres C.E.S. que ceux où nous étions passés en 1974. Ce sont les résultats de ce deuxième questionnaire que nous présentons et analysons en priorité. Mais nous rappellerons chaque fois ceux obtenus au premier questionnaire pour permettre une confrontation.

2. DEPOUILLEMENT ET ANALYSE

Avant de passer à une analyse détaillée des résultats, question par question, il nous faut dire quelques mots du dépouillement des réponses et des méthodes d'analyse utilisées.

Le dépouillement a posé un problème difficile étant donné que les questions étaient ouvertes et qu'il s'agissait d'enregistrer l'expression partielle, parfois tâtonnante, d'une recherche ou d'un raisonnement. Nous avons élaboré a posteriori un code pour chaque question, permettant d'identifier les types de réponse les plus typiques et les plus fréquents. C'est la caractérisation lapidaire de ces types de réponse qui apparaît dans les tableaux de résultats, mais il n'est pas inutile de signaler que ces caractérisations sont consécutives à l'application d'un protocole de codage (décrit dans [1], annexe 2, page 104) et d'opérations de tri.

La plus grande partie des opérations de tri est effectuée sur machine à l'aide d'un programme, intitulé CATHERINE, mis au point pour les besoins de nos enquêtes, depuis plusieurs années déjà. Les tableaux de résultats donnés plus loin sont une illustration suffisante des possibilités d'exploitation. En revanche, l'utilisation de l'analyse des correspondances, employée à côté de ces opérations de tri, demande quelques précisions. En effet, nous faisons dans nos enquêtes un usage un peu particulier de cette méthode d'analyse, pour l'adapter à nos besoins. Grossièrement, on peut dire que l'analyse factorielle des correspondances déter-

[1] Démarches de réponse. R. Duval et F. Pluvinage. Educ. Studies in Math 8 (1977) · p. 51-116.

$$\begin{array}{r l} & \qquad j \qquad \qquad J\ (\text{réponses}) \\ \begin{array}{r} I \\ (\text{individus}) \\ \\ i \end{array} & \left(\begin{array}{l} \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \ldots k(i,j) \qquad\qquad \end{array}\right) \end{array}$$

Tableau 1

		J: A	B	C	BC	CA	AB	ABC
I	A							
	B							
	C							

Tableau 2

	A	BC	ABC	
A	100 010	001	10 01	Réussite Echec
B	001	100 010	10 01	R E
C	001	100 010	10 01	R E

Tableau 3

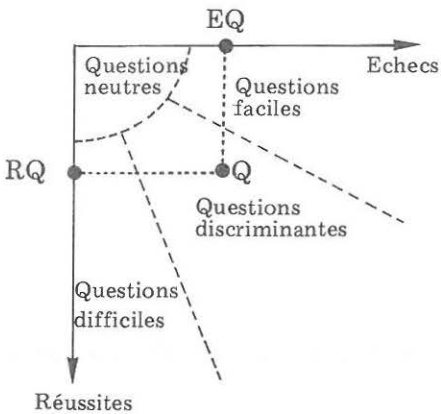
mine la façon dont un tableau I × J s'organise en s'écartant de l'hypothèse que les réponses (J) ne résultent que du hasard. Dans le cas de nos enquêtes, le tableau I × J aura d'emblée des particularités remarquables :

- La population interrogée est partagée en trois groupes.
- Les questions peuvent avoir été posées à un seul, à deux ou aux trois groupes d'individus.

Dans le tableau 2 ci-contre, les groupes d'individus sont désignés par A, B et C. Une question désignée par A n'a été posée qu'au seul groupe A, une question désignée par BC a été posée aux groupes B et C et une question désignée par ABC a été posée à toute la population... Le tableau 3 présente, pour ces questions, les différents cas possibles dans une analyse en Réussite-Echec. Le plus simple est celui des questions ABC : la réussite est codée 10 et l'échec 01. Dans tout autre cas, la question n'a pas été posée à l'un au moins des trois groupes ; dans ce ou ces groupes, la question est codée 001 ;

sinon elle est codée 100 (réussite) ou 010 (échec). Une telle pratique a quelque chose d'un peu choquant a priori en ce qu'elle mêle les véritables réponses, dues aux élèves interrogés, à de "simili-non-réponses", dues à l'expérimentateur (question non posée). Mais une étude détaillée montre que, pourvu que les trois groupes d'individus A, B et C aient des effectifs voisins et que les questions ABC (communes à toute la population) soient en nombre réduit, l'analyse dissocie très bien le fait des élèves de celui de l'expérimentateur.

Rappelons que le tableau I $\times$ J est "vu" comme un *nuage de points* dans $\mathbf{R}^{[I]}$ muni d'une métrique euclidienne (parce que les individus ont tous même pondération : chaque ligne du tableau I $\times$ J comporte le même nombre de 1). Ces points de l'analyse sont ceux dont les coordonnées sont données par les colonnes du tableau, chacune divisée par la somme marginale correspondante. L'analyse proprement dite consiste à extraire les axes principaux d'inertie de ce nuage, par ordre décroissant d'importance. Dans notre cas, le plan des axes n^{os} 1 et 2 mérite le nom de *plan des modalités*, et l'axe 3 est l'axe *réussite-échec d'ensemble*. Dans le plan 1-2, on repère des attractions, vers l'une des modalités, de la réussite ou de l'échec à une question posée à deux au moins des trois groupes A, B et C. Sur l'axe 3, chaque question apparaît selon deux points : l'un figure la composante de la réussite à cette question, l'autre celle de l'échec ; nous parlerons d'une coordonnée réussite et d'une coordonnée échec pour chaque question. Toutes les coordonnées réussite ont même signe (le signe — dans l'analyse effectuée) et toutes les coordonnées échec ont le signe opposé. Si l'on "casse" l'axe 3, comme sur la figure ci-contre, pour représenter une question Q comme le point de coordonnées EQ (échec à Q) et RQ (réussite à Q), les questions apparaissent ainsi dans un quart de plan. Et un régionnement est possible, selon les niveaux respectifs de la réussite et de l'échec à une question. Ce régionnement



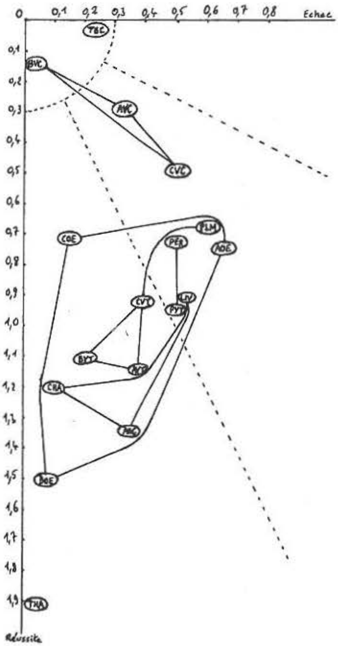
Plan réussite - échec

conduit à qualifier les questions. Pour les questions proches de l'origine, on peut dire que ni la réussite, ni l'échec ne sont significatifs de réussite ou d'échec d'ensemble.

D'où le nom de "questions neutres". Pour les questions difficiles, seule la réussite est significative ; c'est l'inverse pour les questions faciles : seul l'échec est significatif. Enfin, les questions discriminantes sont significatives aussi bien pour leur réussite que pour leur échec. Bien sûr, les frontières tracées sur la figure sont plus ou moins arbitraires, mais il n'en est pas moins vrai qu'elles enferment des questions nettement typées.

Pour faciliter l'interprétation ultérieure, nous présentons ci-après le plan réussite-échec ainsi formé sur le questionnaire soumis à l'analyse factorielle des correspondances. Les sigles utilisés sont ceux qui figurent dans le tableau de la page 68).

Plan Réussite - Echec



Les questions sont regroupées en "constellations" de questions analogues.

3. RESULTATS DETAILLES

3.1. Résultats de la question sur Pythagore

Détermination de la longueur des côtés

	A	B	C
Réussite	46	34	46
Pythagore utilisé mais non obtention du résultat : erreurs de calcul, erreurs de donnée, on s'arrête à $\sqrt{169}$	22	19	18
Résultats exacts non expliqués	0	1	3
Mesure dans l'unité donnée (résultat exact ou approché)	1	5	6
Ecrasement (LK = 12 + 5)	6	5	13
Mesure en cm	1	3	2
Erreurs inexplicables (trouve 12 ; 12,5 ...)	10	13	15
Non réponse	34	36	27
	120	116	130

Calcul du périmètre

	A	B	C
Réussite	45	36	63
Formule correcte inapplicable (pas les longueurs nécessaires ou $\sqrt{169}$)	14	10	5
Donne demi-périmètre	1	0	1
Résultats non conformes aux longueurs obtenues	9	10	5
Non respect de la consigne	3	3	3
Non réponse	48	57	52

En posant cette question, nous attendions deux informations : principalement tester l'homogénéité des populations ayant eu les modalités A, B, C, et, en second lieu, voir dans quelle mesure les élèves reconnaîtraient qu'il fallait utiliser le théorème de Pythagore. C'est pour obtenir cette deuxième information que nous avons demandé de calculer le périmètre du parallélogramme ; car nous voulions éviter de présenter trop directement un exercice d'application du théorème de Pythagore.

La distribution des résultats sur le tableau ci-dessus fait apparaître une grande analogie dans la répartition des réponses par modalité. A l'analyse des correspondances, laquelle s'en tient ici au seul partage réussite et non réussite, de faibles attractions apparaissent qui semblent correspondre à la place de cette question dans chaque modalité (en 1ère position pour A, en 5ème pour B, en 4ème pour C) : cette question est d'autant mieux réussie qu'elle est plus en tête du questionnaire.

Il n'y a rien dans nos observations qui nous permette de rejeter l'hypothèse de l'homogénéité des populations.

Pour la deuxième information recherchée, et qui ne prendra de signification que dans une comparaison avec d'autres résultats, retenons qu'un élève sur deux, pour chaque modalité, a utilisé le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur des côtés du parallélogramme. A l'analyse des correspondances, cette question se trouve à la limite entre question difficile et question discriminante. Le calcul du périmètre se trouve dans la zone des questions discriminantes.

3.2. Résultats des questions sur le parallélisme.

LIV. OU.

	Questionnaire 1975		Questionnaire 1974		
	Mod. A	Mod. B	A	B	D
Réussite	50 42 %	39 34 %	26 48 %	28 46 %	26 41 %
Transformation de la demande suivie de "donc B est le milieu"	11 9 %	17 14 %	5 9 %	7 15 %	6 11%
Recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat	18	18	4	9	9
Voit 2 diagonales se coupant au milieu de DB ou de BE	2	3	0	5	2
Remarques diverses sans conclusion	10	8	3	3	3
Transformation de la demande sans aucune autre indication	9	15	8	5	7
Non réponse	20 17 %	16 14%	8 15 %	4 7 %	10 16%
	120	116	54	61	63

CHAP.

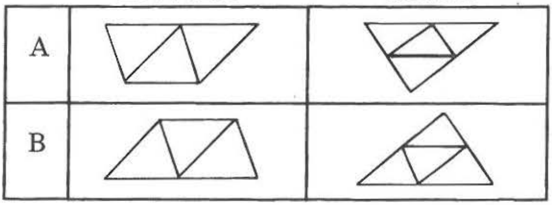
	Questionnaire 1975			Questionnaire 1974	
	Mod. A	Mod. B	Mod. C	Mod. C	Mod. D
Réussite	22 18%	13 11%	8 6%	5 9 %	10 16%
Admet un autre milieu + Thalès	22 18%	37 32%	33 25%	7 13 %	11 17%
Transformation de la demande suivie de "Donc B est milieu"	4	6	6	2	2
Voit les 2 parallélogrammes	2	0	5	0	1
Voit des triangles semblables ou égaux	2	2	4	2	4
Recours à des propriétés apparentes de la figure	16	11	27	8	6
Ni le résultat ni le but	8	17	9	5	3
Transformation de la demande sans aucune autre indication	5	6	13	4	3
Non-réponse	39 33%	24 21%	25 21%	21 39%	23 37%
				54	63

Elèves ayant eu la même démarche de réponse aux deux questions LIV. OU. et CHAP.

	A	B
Réussite	22	11
Transformation de l'énoncé de la question, suivie de "Donc B est milieu"	2	1
Recours à des propriétés apparentes de la figure	3	3
Simple transformation de l'énoncé de la question en AB = BC	4	5
Non réponse	15	5

Disposition des figures dans le questionnaire de 1975.

LIV. OU. CHAP.



La lecture de ces tableaux permet plusieurs observations, en rapport avec les influences possibles des deux éléments suivants :

- le fait qu'une question (CHAP) soit ou non précédée d'une question (LIV.OU.) comportant une sous-figure de la figure proposée ;
- le fait que l'orientation de la sous-figure soit conservée ou non dans la figure CHAP.

1°) L'existence ou non de la question LIV.OU dans le questionnaire conduit au tableau :

		AB	C
CHAP.	Réussite	35	8
	Echec	201	122

Pour ce tableau, on obtient $\chi_1^2 = 5{,}68$, qui est significatif au seuil 0,05. Mais ceci masque en fait le phénomène le plus important. En effet, c'est en modalité A que l'augmentation de réussite est la plus forte, c'est-à-dire dans la modalité où l'orientation de la sous-figure ne change pas. La différence est très significative lorsque sont opposées modalité A d'une part et modalités B et C d'autre part ($\chi_1^2 = 7{,}68$, très significatif). Et l'analyse des correspondances montre que si l'échec apparaît comme neutre en modalités B et C, il revêt un caractère plus significatif en modalité A. Aussi peut-on conclure :

La question CHAP n'est véritablement "préparée" que lorsqu'elle est précédée de la présentation d'une sous-figure *rigoureusement conforme* (côté commun aux deux parallélogrammes en bas dans les deux figures).

De plus, il apparaîtra à l'examen ultérieur (p. 78) que c'est le fait *d'avoir réussi* à la question LIV.OU qui augmente le taux de réussite à CHAP, et non simplement le fait d'avoir eu en main un questionnaire comportant les deux questions.

2°) Il y a pour les élèves une très grande difficulté à reconnaître la même situation lorsqu'elle est représentée une deuxième fois avec une information supplémentaire suggérant une autre organisation d'ensemble. Ainsi 28 élèves parmi les 50 ayant réussi LIV.OU en A ont échoué à la question CHAP. En B, à cause du renversement de la figure, la proportion est encore plus élevée : 28 sur 39. Quel a été le comportement de ces élèves à la question CHAP ? Pour la plupart, ils ont soit abandonné (9 sur 28 en A et 8 sur 28 en B) soit admis un autre milieu et utilisé le théorème de Thalès (9 sur 28 en A et 13 sur 28 en B).

En ce qui concerne la reconnaissance de la même situation dans les deux questions, la démarche des élèves qui n'ont pas réussi LIV.OU. est plus difficile à interpréter. Nous pouvons cependant faire les constatations suivantes. Deux types de réponse se sont révélés semblables sur ces deux questions. La première consiste à noter que pour prouver "B milieu de AC" il suffit de prouver que "AB = BC", sans rien ajouter d'autre. La seconde consiste à tirer directement de cette remarque la conclusion "donc B est milieu". En regardant le dernier tableau ci-dessus, nous pouvons voir que ceux qui ont adopté ce second type de réponse pour LIV. OU. ne le reprennent pas pour CHAP. Et sur les 4 et 6 élèves qui ont fourni cette réponse à CHAP, seulement

2 et 1 l'avaient fournie à LIV.OU. Il y a en revanche une meilleure stabilité pour ceux qui ont adopté le premier type de réponse : sur les 5 et 6 élèves qui ont fourni cette réponse à CHAP, 4 et 5 l'avaient déjà fournie à LIV.OU.

3°) Les questions LIV.OU et CHAP. ont été perçues par la plupart des élèves comme des questions présentant des situations très différentes et faisant appel pour la démonstration à des propriétés différentes. Ainsi on voit apparaître pour la question CHAP un nouveau type de réponse ; l'attraction pour le théorème de Thalès, une partie des élèves n'hésitant pas à commettre un cercle vicieux et à se donner comme admis ou comme évident un autre milieu sur l'un des deux côtés du grand triangle. Autre signe d'une perception très différente des deux questions : les élèves classés sous la rubrique "recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat" ne sont pas les mêmes élèves pour LIV.OU et pour CHAP.

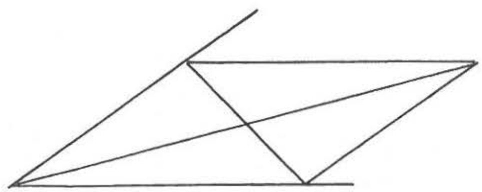
Mais si la plupart des élèves ayant réussi à LIV.OU. n'ont pas reconnu la même situation mathématique dans la question CHAP., *la réussite à CHAP. entraîne la réussite à LIV.OU.*. Les deux exceptions que nous avons relevées en modalité B tiennent à une application stricte du codage adopté. Dans les deux cas, les élèves, après avoir mentionné que AB = BC impliquait B milieu de AC, ont affirmé sans justification AB = BC. A la question CHAP ils ont justifié cette affirmation en indiquant les deux parallélogrammes. Nous ne nous sommes pas autorisés à considérer la réponse de la page suivante pour interpréter favorablement la réponse précédente.

Nous pouvons donc légitimement supposer que les élèves qui en modalité C ont réussi la question CHAP. auraient réussi la question LIV.OU.. Nous avions d'ailleurs introduit cette dernière question pour nous donner un moyen d'interpréter certains échecs qui pourraient se produire à la question CHAP.. Principalement pour déterminer si l'échec ne tiendrait pas à la difficulté de distinguer les deux parallélogrammes, c'est-à-dire de choisir l'information pertinente, ou au contraire à la difficulté de mettre en oeuvre la transitivité de l'égalité des côtés opposés. L'une et l'autre difficulté se révèlent extrêmement importantes en fin de Troisième. Et quand elles sont cumulées, comme dans la question CHAP., nous sommes en présence d'une tâche insurmontable pour 80 % de la population dans l'état actuel de l'enseignement.

4°) Non seulement les résultats de l'enquête de 1975 confirment les observations faites sur l'enquête de 1974, mais ils se révèlent sur certains points une troublante stabilité. L'écart des taux de réussite est inférieure à 0,10, le taux de réponse "transformation de la demande suivie de Donc B est milieu" est presque le même, les non réponses interviennent selon la même proportion, etc... Mais le plus important concerne la réussite en modalité D (quest. 1974). La figure pour la question CHAP. était renversée par rapport à la figure du LIV. OU. à la page précédente (comme pour la modalité B du questionnaire de 1975). Nous pouvons observer des taux de réussites très proches : $\frac{10}{26} = 0{,}38$ en 1974 et $\frac{13}{39} = 0{,}33$ en 1975. Précisons que les 10 élèves qui en 1974 ont réussi CHAP. ont aussi réussi LIV.OU.. Enfin en 1974, nous avions ajouté dans la modalité A une question intermédiaire pour le LIV. OU., de façon à "mettre sur la voie" : "comparer les longueurs BC et DE". Cette suggestion n'a eu aucun effet sur les résultats ($\frac{26}{54} = 0{,}46$ en A contre $\frac{28}{61} = 0{,}48$ en B).

3.3. L'oeil.

Le but de la troisième question était de voir dans quelle mesure les élèves utilisent la propriété selon laquelle les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. Dans la modalité A nous demandions de tracer un parallélogramme de telle sorte que O soit un sommet et I le milieu des diagonales. Dans les modalités B et C nous demandions de tracer un segment AB tel que I soit le milieu et que A soit sur l'une des deux droites, B étant sur l'autre. Pour inciter les élèves à situer ce problème dans la situation du parallélogramme nous avons fait une suggestion sous deux formes différentes. En B nous leur demandons d'énumérer les propriétés du parallélogramme qu'ils connaissent et en C nous leur présentons la figure suivante comme référence:

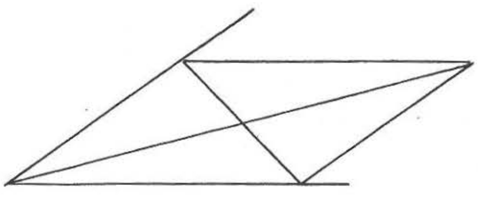


Enfin, pour faciliter l'interprétation des réponses, nous avons demandé aux élèves de numéroter les traits dans l'ordre où ils les traceraient (ce que nous n'avions pas fait en 1974).
Voici le tableau des différentes réponses obtenues.

L'OEIL (en gras : taux)	1975 A		1975 B		1975 C		1974 A	1974 B	1974 C
	construire un parallélo-gramme		construire un segment AB		construire un segment AB		construire un segment AB	construire un segment AB	construire un parallélo-gramme
Réussite	52	**0,43**	10	**0,9**	22	**0,17**	16	15	17
Procédure non identifiable	2		1		4		3	7	7
"Réussite" par tâtonnement (utilisation directe du double décimètre)	6	**0,05**	57	**0,49**	62	**0,48**	17	34	12
Bon départ par 20I mais application défectueuse	16		1		0				
Erreur due seulement à une attraction pour l'orthogonalité	4		1		2				
Erreurs de consignes ; I pas du tout au milieu	10	**0,08**	10	**0,09**	8	**0,06**			
Echec à reproduire une figure respectant les propriétés d'un parallélogramme ou à tracer un segment	13	**0,10**	3	**0,07**	2	**0,02**			
Non-réponse	17	**0,14**	32	**0,28**	30	**0,23**	4	3	2
							54	61	54

Sur ce tableau apparaît un renversement spectaculaire entre la modalité A et les modalités B et C. La propriété concernant les diagonales du parallélogramme n'a vraiment été utilisée qu'en modalité A : 52 plus les 16 qui ont commencé par 2 OI, soit 68 élèves sur 120. En revanche, les élèves des modalités B et C ont cherché à tracer directement le segment AB par ajustage à l'aide d'un double décimètre ; et cela malgré la suggestion précédant la question. Dès que la tâche ne porte plus explicitement sur le parallélogramme comme dans la modalité A, la propriété cesse pratiquement d'être utilisée. Un phénomène analogue que nous observerons sur les vecteurs nous inciterait à dire davantage : *dès qu'une propriété cesse d'être explicitement associée à la situation privilégiée par son apprentissage, elle cesse d'être utilisable.* C'est peut-être pour cette raison que les indications destinées à "mettre sur la voie" se sont révélées inopérantes. Nous avions remarqué le même phénomène dans le questionnaire de 1974 sur le LIV.OU.

Sur le tableau de l'analyse des correspondances, cette question est complètement dispersée dans le plan Réussite-Echec (c'est la seule question de l'enquête à s'éparpiller ainsi.). Elle est discriminante en modalité A, moyennement difficile en C (où nous présentions la figure de référence



) et très difficile en B.

Il est intéressant de comparer les réponses des élèves à cette question et à la question LIV.OU., bien que ces deux questions ne fassent pas appel aux mêmes propriétés du parallélogramme. Le premier tableau ci-dessous, à gauche, indique les réponses à LIV. OU. des élèves qui ont fait des erreurs de consignes à la question OEIL ou qui ont échoué à reproduire une figure qui soit un parallélogramme en modalité A. Le deuxième tableau indique les réponses à la question OEIL de ceux qui ont réussi LIV.OU..

	A	B
Réussite	6	1
Transformation de la demande suivie de "donc B est le milieu"	2	5
Recours à des propriétés apparentes de la figure ne conduisant pas au résultat	7	1
Voit deux diagonales se coupant en leur milieu	2	0
Remarques diverses sans conclusion	2	1
Transformation de la démarche sans aucune autre indication	2	2
Non-réponse	2	3
TOTAL	23	13

	A	B
Réussite	35	5
Réussite par tâtonnement	0	20
Bon départ par 2 OI mais application défectueuse	5	1
Erreur due seulement à une attraction par orthogonalité	0	1
Echec concernant l'application de la consigne ou d'une figure	6	1
Non-réponse	4	11
TOTAL	50	39

Au vu de ces deux tableaux, on peut estimer que c'est pratiquement la même population d'élèves qui réussit ou réussit presque (35 + 5 sur 50) à la question OEIL, dans la modalité A, c'est-à-dire dès qu'il s'agit explicitement du parallélogramme. On peut voir d'ailleurs dans le plan Réussite-Echec du tableau de l'analyse des correspondances que pour cette modalité A les question LIV.OU et OEIL sont proches. Ce n'est plus le cas pour la modalité B. Dans cette modalité, la tâche exigeant seulement un détour par l'une des propriétés du parallélogramme, la population qui réussit LIV.OU se partage en trois groupes pour la question OEIL : réussite, "réussite" par tâtonnement et abstention, ces deux derniers groupes étant les plus importants. Sur le tableau de l'analyse par correspondance, cela se traduit par un écart dans la position de ces deux questions.

Concernant les trois questions dont nous venons d'analyser brièvement les résultats, nous pouvons dire ceci en résumé. *Les élèves qui peuvent utiliser une propriété du parallélogramme sont aussi capables d'en utiliser une autre.* Mais, pour la plupart, cette utilisation semble restreinte aux situations où il s'agit de travailler explicitement sur un parallélogramme. En comparant LIV.OU. à CHAP. d'une part et à l'OEIL d'autre part (modalité B), nous constatons qu'il y a un seuil important entre savoir mettre en oeuvre une propriété du parallélogramme et recourir à cette propriété lorsque le parallélogramme n'est pas montré explicitement ou exclusivement. La reconnaissance du parallélogramme dans une situation plus riche et la conduite de détour telle qu'elle est exigée dans OEIL ne relèvent pas des mêmes démarches. Y a-t-il un lien entre elles ou sont-elles indépendantes ? Le taux peu élevé d'élèves ayant réussi l'une ou l'autre dans la modalité B ne nous permet pas de trancher. Ainsi les 11 élèves qui ont réussi LIV.OU. et CHAP. se partagent ainsi pour OEIL : 3 ont réussi en utilisant la propriété des diagonales se coupant en leur milieu, 4 ont réussi par tâtonnement et 4 se sont abstenus.

3.4. Résultats des questions sur les vecteurs

Calcul des composantes d'un vecteur $\vec{u}$

	1975			1974			
	A	B	C	A	B	C	D
	$3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$	$3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$	$3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$	$\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$	$3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$	$3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$
Réussite	61 **51** %	49 **43** %	63 **48** %	21 **39** %	26 **43** %	26 **48** %	27 **43** %
Erreurs de calculs portant sur les signes	13 **11** %	7 **6** %	4 **3** %				
Erreurs de calculs autres que de signes	8	6	3				
Composantes de $3\vec{u}$ correctes mais non celles de $\vec{u}$	4	2	7				
Equation vectorielle correcte (avec isolement de $3\vec{u}$) et arrêt	2	4	7				
Mauvaise équation vectorielle	20 **17** %	8 **7** %	21 **16** %				
Egarement	3	4	5	2	1	1	0
Non-réponse ou abandon	9 **8** %	36 **31** %	20 **15** %	10 **19** %	12 **20** %	10 **19** %	10 **16** %
	120	116	130				

En toute rigueur, le tableau comporte les résultats de populations différentes sur des questions différentes. Il ne permettrait alors pas d'établir des comparaisons. Toutefois, les choses changent à partir du moment où nous nous demandons si les questions posées sont *interchangeables*, c'est-à-dire si les résultats obtenus sont ou non les mêmes dans les différents cas. Cette question d'interchangeabilité peut être posée de plusieurs façons, conduisant à plusieurs vérifications par un test de χ^2 . Sur le bloc des trois questions, on obtient $\chi_2^2 = 4{,}31$ ce qui est non significatif au seuil 0,05.

	A	B	C
R	60	44	62
E	60	72	68

Cependant, la modalité B semble se détacher de A et C. La variation des questions entre les trois modalités porte soit sur l'isolement de la variable $3\vec{u}$, soit sur la présence du signe "—". Il apparaît que la modalité B, où il faut isoler $3\vec{u}$ puis travailler sur l'expression $(\vec{w} - \vec{v})$, est celle où il y a le moins de réussites et le plus d'abandons. En revanche, les réponses obtenues pour les modalités A et C sont sensiblement les mêmes à deux différences près : il y a plus d'erreurs de calcul pour $3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ mais moins d'abandons que pour $3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$. Tout semble se passer comme si la présence d'une seule difficulté n'arrêtait pas la moitié des élèves mais induisait chez certains des élèves de l'autre moitié des comportements spécifiques. La présence d'une variable à isoler tend à décourager les élèves d'essayer un calcul ; la présence du signe "—" ne rend pas la question inabordable, mais révèle de ce fait une insuffisante maîtrise du maniement des signes dans le calcul algébrique.

Effectivement, pour le tableau

	AC	B
R	122	44
E	128	72

on obtient $\chi_1^2 = 4{,}12$ qui est significatif au seuil 0,05.

En admettant, comme nous l'avons vu ci-dessus pour Pythagore, l'homogénéité des populations A, B et C, on est conduit à rejeter l'hypothèse que les questions comportant une difficulté et la question comportant deux difficultés soient interchangeables.

Cette dernière question, posée en modalité B et ayant obtenu le moins de réussites, apparaît dans la zone neutre du plan réussite-échec issu de l'analyse des correspondances, au lieu d'être dans la zone des questions difficiles ou celle des questions discriminantes. Nous ne pouvons ici que relever ce phénomène curieux. Signifierait-il que l'accumulation de deux difficultés sur ce type de question serait analogue à un parasitage ? Ou n'avons-nous pas méconnu un phénomène lié à l'organisation des questionnaires ? En tout cas, on peut légitimement supposer au vu de tous ces résultats que si nous avions posé la question $3\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$ nous aurions obtenu davantage de réussites.

Remarquons une nouvelle fois la stabilité des résultats de 1975 par rapport à ceux de 1974 (modalités C et D), au moins en ce qui concerne le taux des réussites. La limitation de notre questionnaire à trois modalités ne nous a pas permis d'étudier l'influence éventuelle qu'a un coefficient différent de 1 pour $\vec{u}$ ou pour $\vec{v}$.

3.5. **Tracés de vecteurs.** (voir tableau page 87)

Les résultats dans les modalités A et B sont très proches les uns des autres pour chacun des types de réponse. La différence de signe ne semble avoir aucune influence. En revanche, la modalité C présente simultanément une augmentation du taux des réussites et une diminution de celui des abandons ou des non-réponses. Pour A et B la question apparaît dans la zone des questions difficiles et pour C la question est à la limite entre question difficile et question discriminante (voir le tableau de l'AFC). Tout se passe ici comme si l'isolement de la variable présentait une difficulté particulière, difficulté qui semble confirmée par les résultats de l'enquête de 1974. Le taux de réussites est inférieur à celui obtenu pour les composantes : pratiquement moitié moins sauf en C. De plus certains élèves, qui sont capables d'isoler la variable quand il s'agit d'un calcul, ne l'isolent plus lorsqu'il s'agit d'une tâche de construction. En d'autres termes, les procédures acquises pour résoudre une équation cesseraient d'être utilisables

Construire le vecteur $\vec{u}$

	1975			1974			
	A	B	C	A	B	C	D
	$\vec{u}-2\vec{v}=\vec{w}$	$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$	$\vec{u}=\vec{w}-2\vec{v}$	$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$	$\vec{u}-2\vec{v}=\vec{w}$	$\vec{u}=\vec{w}-2\vec{v}$	$\vec{u}=\vec{w}+2\vec{v}$
Réussite	26 22 %	23 20 %	38 29 %	17 31 %	12 19 %	18 33 %	28 44 %
$\vec{v}$ multiplié par 2 mais application défectueuse de la règle du parallél. ou du triang.	28	22	13				
$\vec{v}$ non multiplié par 2	3	3	11				
Ecrasement : longueur seule prise en compte	19 16 %	22 19 %	30 23 %	21	14	7	5
Somme vue comme vecteur tracé à l'extrémité de $\vec{v}$ ou de $\vec{w}$	5	7	7				
Abandon ou non-réponse	36 30 %	22 30 %	30 19 %	1	10	9	6
Réponse ininterprétable	3	4	6				

pour une partie des élèves dès qu'on ne leur demande plus explicitement un calcul.

La comparaison des réponses données par les élèves pour le calcul des composantes et pour le tracé des vecteurs ne permet pas une interprétation précise. Sans produire ici de nouveaux tableaux, nous indiquons seulement les données les plus frappantes.

En modalité A, des 26 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$), 20 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$) soit les 3/4. Des 61 élèves qui ont réussi les composantes, 17 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle dans la construction du vecteur et 13 ont abandonné. Les 11 autres élèves se dispersent sur les autres types de réponse.

En modalité B, des 23 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w}$), 8 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$) soit 1/3. Des 48 élèves qui ont réussi les composantes, 11 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle, 16 ont abandonné et 11 ont écrasé en simple longueur. Détail particulier à cette modalité, 13 élèves n'ont pas répondu aux deux questions.

En modalité C, des 38 élèves qui ont réussi la construction ($\vec{u} = \vec{w} - 2\vec{v}$), 23 ont réussi le calcul des composantes ($3\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$) soit les 3/5. Des 63 élèves qui ont réussi les composantes, 15 ont fait une application défectueuse de la règle du parallélogramme ou du triangle, 12 ont abandonné. Détail particulier à cette modalité, 10 élèves ont reproduit, pour le calcul des composantes, lors de la substitution des valeurs, une mauvaise équation vectorielle et ont procédé à un écrasement pour la construction du vecteur $\vec{u}$.

Il semble qu'on ne puisse établir une liaison entre les comportements de réponse à "construction du vecteur $\vec{u}$" et au "calcul des composantes du vecteur $\vec{u}$". Au cours de la première enquête, des enseignants nous avaient signalé qu'ils n'avaient pas eu ou peu eu le temps de faire travailler les élèves sur la construction des vecteurs. Les résultats étaient d'ailleurs apparus extrêmement différents selon les classes. Pour le questionnaire de 1975, nous avons comparé par classes les résultats pour le calcul des composantes et pour la construction des vecteurs. Dans 9 classes sur 14, il y a un écart considérable entre les performances pour le calcul et celles pour la construction, au bénéfice de l'une ou l'autre question selon les classes. Tout se passe comme si dans ces classes, on avait mis l'accent soit sur le calcul des composantes, soit sur la construction des vecteurs ! Dans les 5 autres classes, le taux des performances est presque le même ou l'écart est peu important.

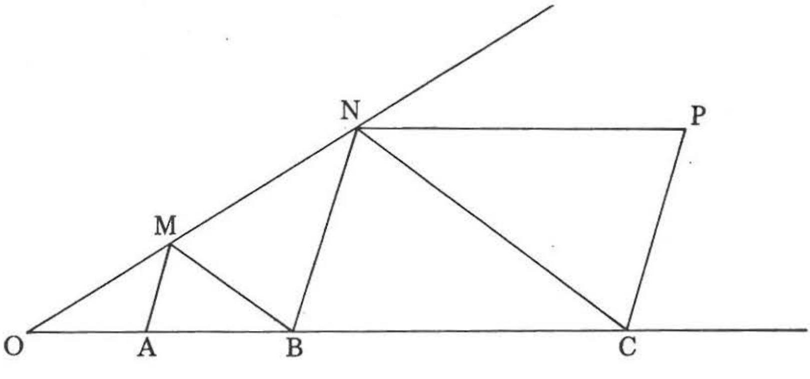
Ce manque de liaison entre les comportements pour le calcul des composantes et pour la construction des vecteurs apparaît comme une conséquence de la façon dont les vecteurs ont été ou n'ont pas été enseignés.

3.6. Résultats des questions sur le théorème de Thalès

Sur la figure ci-dessous, les relations de parallélisme étant données comme hypothèses, on demandait :

de montrer d'une part que $\frac{OB}{BC} = \frac{OA}{AB}$

et d'indiquer d'autre part les quantités égales à $\frac{PN}{BO}$.



Dans la modalité A, nous avons présenté pour la première question une figure simplifiée sans NP et PC, c'est-à-dire en supprimant le parallélogramme.

Dans la modalité C, nous avons supprimé la deuxième question et modifié la première de la manière suivante. On demendait de compléter $\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{...}$ puis de montrer que $\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{NP}$. La première question se trouvait en quelque sorte plongée dans une situation légèrement plus riche quant aux données.

Voici les résultats.

Première question :

	A		B		C	
Réussite	5	4 %	3	3 %	1	
Montre l'égalité en posant chacun des rapports égal à 1	14	12 %	9	8 %	4	3 %
Echoue, mais cherche à utiliser les points M et N	10	8 %	9	8 %	14	11 %
Echoue sans utiliser M et N, c'est-à-dire en travaillant sur la droite AC	30	25 %	26	22 %	38	29 %
Non-réponse	61	51 %	69	59 %	73	56 %

Deuxième question :

	A		B	
Non-réponse	70	57 %	79	67 %
Réponses interprétables	22	18 %	15	13 %
Erreurs issues de l'impression de milieu	15	13 %	7	6 %
Réussite du point de vue de l'égalité des longueurs mais pas de rapports égaux	6		3	
Réussite	1		1	
Erreurs diverses	6		11	

Question préliminaire : $\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{.....}$

	Modalité C	
Réussite ; BC justifiée	5	
Réponse BC sans aucune justification	96	74 %
Réponse autre que BC	15	
Non-réponse	14	

Les deux points à relever sont :

— le taux extrêmement élevé de non réponse

— le taux extrêmement bas de réponses dans lesquelles les élèves ont réussi à sortir de la droite OC, *tous les points intervenant explicitement dans l'énoncé de la question se trouvant sur cette droite.*

Seule la question préliminaire, en Modalité C, demandant de reconnaître l'égalité des côtés opposés du parallélogramme, a obtenu un taux élevé de réponses. Et cette question n'a rien à voir avec l'énoncé de Thalès.

Un certain nombre d'élèves ayant cherché à utiliser le théorème de Thalès dans la question CHAP., il est intéressant de regarder leur comportement sur cette question. C'est ce qu'indique le tableau suivant.

	A	B	C
réussite	0	2	0
égalité 1 = 1	5	2	6
utilisation de M et de N	4	4	2
pas d'utilisation de M et de N	6	6	6
non réponse	7	23	19

4. CONCLUSIONS

L'étude détaillée des résultats nous permet de dégager des observations plus générales, soit parce qu'elles apparaissent dans plusieurs questions, soit parce que des recoupements peuvent être organisés avec des résultats d'enquêtes antérieures.

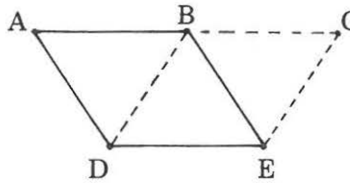
1°) Une différence apparaît entre la présence d'une difficulté et celle de deux *difficultés simultanées.* Cette différence, déjà observée en Cinquième, se retrouve ici en Troisième dans le cas du calcul des composantes d'un vecteur, où les équations donnent lieu à des manipulations comparables au traitement des équations numériques. Cela permet de préciser l'observation que nous avions mentionnée dans [1] (annexe 2, p. 203), à l'issue de l'enquête

[1] Démarches de réponse (loc. cit.).

1974, sur la *différence de fonctionnement* entre les équations vectorielles présentées à l'aide de composantes et les mêmes équations faisant intervenir des constructions géométriques.

2°) L'information contenue dans une figure géométrique simple n'est pas directement accessible pour beaucoup d'élèves. Le plus souvent, les propriétés apprises ne sont mobilisables que dans des *situations très typées*. A l'appui de cette affirmation, nous voyons que la perception d'une sous-figure n'est déjà pas une évidence, surtout dès qu'apparaît une quelconque modification. Les propriétés à utiliser ont un caractère trop local : le moindre écart avec les situations de référence constitue un véritable mur entre beaucoup d'élèves et le(s) résultat(s) à mettre en jeu.

3°) Il semble qu'à côté des *connaissances stabilisées*, coexistent au même instant des *connaissances erratiques*. Si l'une de celles-ci est susceptible d'intervenir de manière apparemment décisive, comme l'ultime pièce d'un puzzle, elle est capable de forcer la conviction (au moins pendant un certain temps). Cette interprétation convient très bien à la réponse suivante, que nous donnons à titre d'exemple. Il s'agit d'une réponse LIV.OU, extraite de la catégorie "Voit deux diagonales se coupant au milieu" (cf. tableau en 3.2. ci-dessus) "B milieu de AC car : C est le symétrique de A par rapport à B. Les diagonales DB et EB se rencontrent au point B."



D'autres observations nous laissent à penser que ces connaissances erratiques peuvent éventuellement l'emporter chez un individu sur des démarches correctes. Cependant, toutes les citations — sic ne sont pas de ce type. Ainsi l'exemple ci-dessus fait apparaître une simple paraphrase de l'énoncé, comportant le mot "symétrique" ; pour l'élève, c'est peut-être uniquement l'étalage d'un certain savoir. A propos de la même question LIV.OU., nous avons obtenu un nombre non négligeable de citations de Thalès, qui sont ici hors sujet. Mais, peut se dire un élève, là où il y a du parallélisme, il y a souvent du Thalès ; alors on ne sait jamais...

4°) Une remarque d'un autre genre, quoique prolongeant la précédente, concerne les polémiques, parfois passionnées, sur l'enseignement de la géométrie. C'est ainsi que l'on a entendu défendre les vertus de telle axiomatique par rapport à telle autre, l'affine avant ou après le métrique, le caractère minimal de telle présentation. Ces débats sont certes intéressants, mais ils ne font pas intervenir les difficultés éprouvées par les élèves, autres que celles sur les contenus. Et de ce fait se crée une distorsion entre les questions sur ces contenus de l'enseignement et les activités des élèves. Indépendamment de :

"Enseignera-t-on le plan affine réel selon la présentation A ou selon la présentation B (circulaire n° 71-370 du 22.11.1971) ?" on peut se demander, dans une réflexion sur les programmes d'enseignement :

"Donnera-t-on aux élèves des occasions de décrire les figures ?"

"Dictera-t-on des figures ?"

"Y aura-t-il des exercices d'extraction, de reconstitution de données ?"

"Mettra-t-on en évidence des invariants par rapport à des modifications ?".

Lorsque l'on voit combien le recours le plus direct à une transitivité reste difficile pour de nombreux élèves de Troisième (dans la question LIV.OU, AB = BC parce que AB = DE et DE = BC), se poser de telles questions n'apparaît pas comme inutile.

5°) La réflexion que nous venons de décrire exige de recueillir des données et de répertorier des éléments. Ceci ne peut résulter que d'un travail spécifique, qui n'était pas le but de ces enquêtes.

La présente analyse ne constitue pour nous qu'une première exploration du vaste domaine de la géométrie plane apprise et utilisée par les élèves. D'une part, notre analyse ne prend pas en compte la totalité des données recueillies ; par exemple, nous n'avons pas parlé ici des résultats concernant les impressions et les opinions des élèves. A suivre.... D'autre part, il faudra envisager de nouvelles enquêtes, plus délimitées que celles-ci, pour préciser non seulement les performances des élèves sur une question ou un groupe de questions, mais aussi la perception individuelle d'une question par rapport aux impressions sur l'apprentissage et l'enseignement antérieurs.

ANNEXE

Les questionnaires présentés aux élèves

Pour mieux vous permettre d'apprécier les variations de questions entre les différentes modalités, les pages suivantes donnent une présentation synoptique des trois modalités du questionnaire. Pour reconstituer les questionnaires effectivement présentés aux élèves, rappelons qu'il y avait

1° Une page 0.

ETABLISSEMENT

NOM

PRENOM

Que ferez-vous l'année prochaine ?

Ce questionnaire ne constitue pas un test d'orientation ou de contrôle, mais une enquête statistique. Votre classe a été choisie comme représentative d'une catégorie d'élèves.

Veuillez *ne pas utiliser de brouillon*, mais faites vos essais sur ces feuilles et ne les effacez pas.

N'oubliez pas de *marquer l'heure* en haut des pages, *même si* vous passez à une autre question *sans avoir répondu*.

2° Puis une question par page, dans l'ordre suivant :

Page	1	2	3	4	5	6	7
Modalité A	PYT-PER	THA	AVC	LIV	AHC	AVT	AOE
Modalité B	LIV	CHA	BVT	THA	PYT-PER	BVC	BOE
Modalité C	PLM	CHA	CVT	PYT-PER	CVC	TBC-CTH	COE

Le libellé de chaque question désignée ci-dessus se trouve plus bas.

3° En haut à droite de chacune des pages 1 à 7 :

INDICATION HORAIRE	Page commencée à. . . . . terminée à . . . .

et en bas :

Avez-vous déjà fait en classe un exercice semblable à cette question ?

- ☐ Oui, plusieurs fois
- ☐ Oui, une fois
- ☐ Non

Avez-vous déjà fait en classe des exercices du même genre, mais posés autrement ?

- ☐ Souvent
- ☐ Rarement
- ☐ Jamais

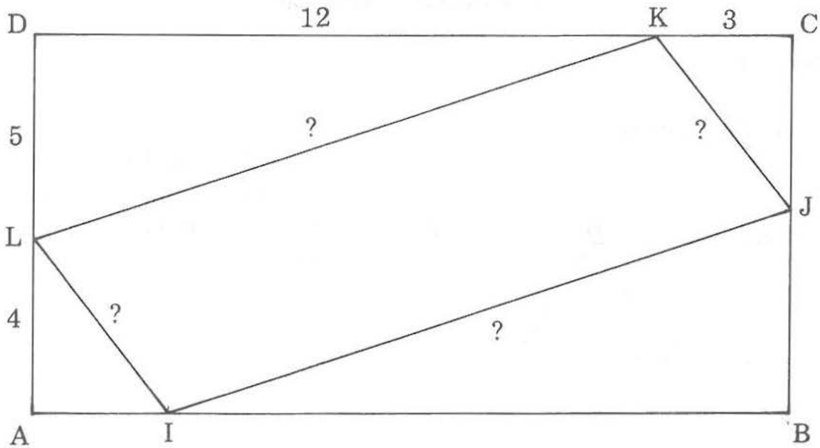
4° Des pages 8 et 9 où l'on demandait aux élèves leur opinion sur les mathématiques.

L'exploitation des temps, impressions et opinions des élèves fera l'objet d'une autre épître.

Page **PYThagore — PERimètre**

Modalités A, B et C

ABCD est un rectangle, IJKL un parallélogramme.



Des mesures, effectuées avec une certaine unité de longueur, ont donné les valeurs indiquées sur la figure :

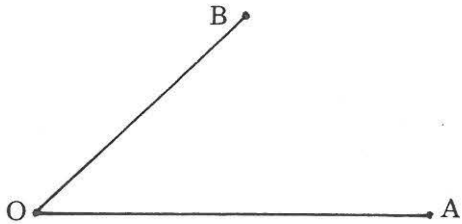
$$AL = 4 \quad , \quad LD = 5 \quad , \quad DK = 12 \quad , \quad KC = 3 \ .$$

Avec cette même unité de longueur, quelle valeur obtient-on pour le périmètre du parallélogramme IJKL ?

Page

Point LM

Modalité C



Placer sur la figure le point M tel que

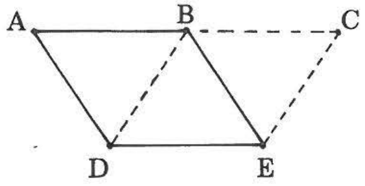
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB}$$

Livre ouvert et chapeau

Page LIV

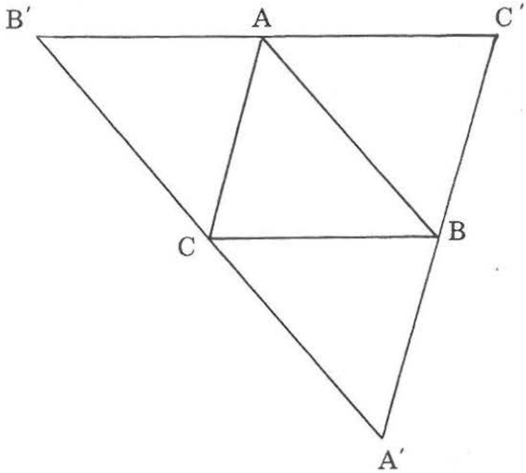
Modalités A et B

ABED et BCED sont des parallélogrammes. Prouver que B est le milieu de AC.



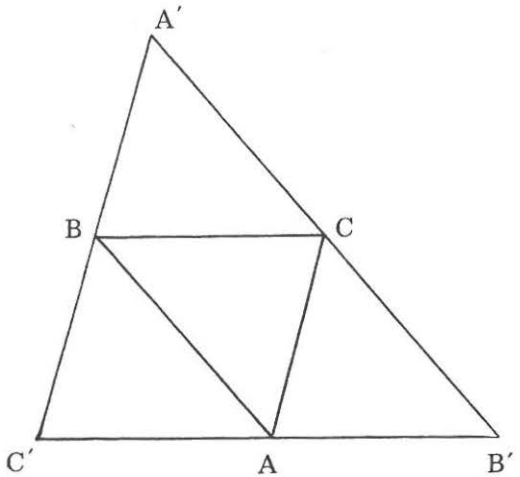
Page AHC (Chapeau renversé)

Modalité A



Page CHApeau

Modalités B et C



A′C′ et AC	sont parallèles
A′B′ et AB	sont parallèles
B′C′ et BC	sont parallèles

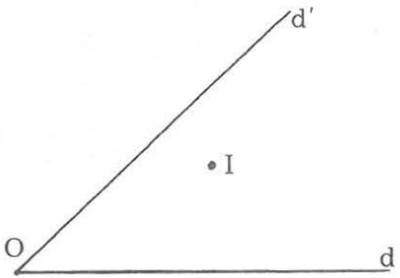
Prouver que A est le milieu de B′C′

Page AOE

Modalité A

En numérotant les traits dans l'ordre où vous les tracez, *construisez* sur la figure un parallélogramme tel que :

O est un sommet du parallélogramme, le parallélogramme admet, en plus de O, un sommet A sur d et un sommet B sur d' ,
I est le milieu des diagonales du parallélogramme.



Expliquez votre construction.

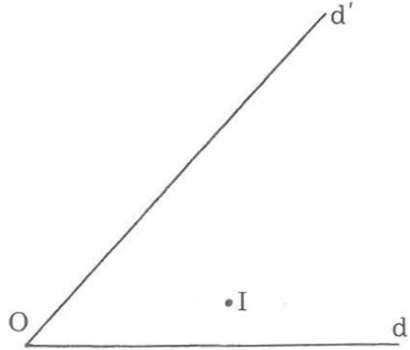
Page BOE

Modalité B

Etant donné un point et deux droites, on cherche à construire, autrement que par tâtonnement, un segment ayant le point pour milieu et ayant ses extrémités sur les deux droites.

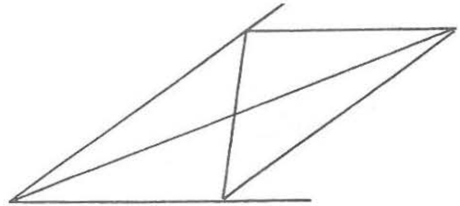
1° Rappelez les propriétés que vous connaissez sur le parallélogramme.

2°



Page COE

Modalité C



La figure ci-dessus pourra vous inspirer.

En numérotant les traits dans l'ordre où vous les tracez, *construisez* sur la figure ci-contre le segment (AB) tel que :

A est un point de d
B est un point de d'
I est milieu de (AB).

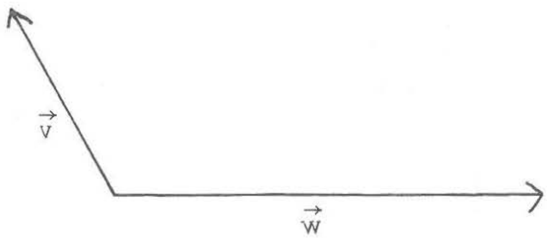
Expliquez votre construction.

Vecteurs : Tracé et Composantes

Page AVT en modalité A	Page BVT en modalité B	Page CVT en modalité C

Voici deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan; tracer le vecteur $\vec{u}$ tel que

$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{u} + 2\,\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{u} = \vec{w} - 2\,\vec{v}$



Indiquez aussi comment vous avez procédé pour tracer le vecteur $\vec{u}$.

Page AVC en modalité A	Page BVC en modalité B	Page CVC en modalité C

Par rapport à un repère $\vec{i}, \vec{j}$ du plan, deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donnés par leurs composantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

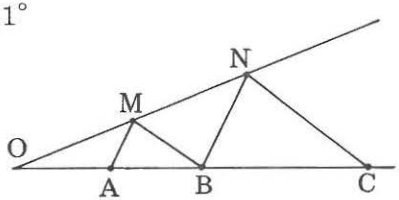
Déterminez les composantes du vecteur $\vec{u}$ tel que

$3\,\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$	$3\,\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$	$3\,\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$

Page THAlès

Modalité A

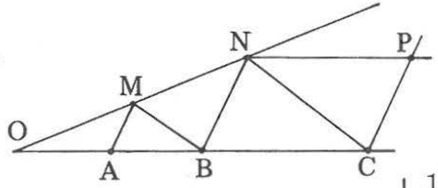
1°



Sur cette figure, les droites AM et BN sont parallèles, de même que les droites BM et CN.

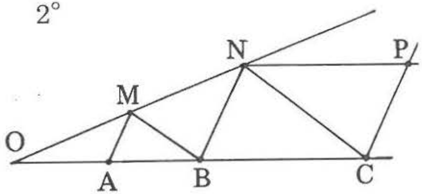
Modalité B

1°



Démontrer l'égalité $\dfrac{OB}{BC} = \dfrac{OA}{AB}$

2°



La figure est la même que précédemment avec, en plus, un parallélogramme BCPN.

2°

En utilisant les points marqués sur la figure, et ceux-là seulement.

quelles quantités égales à $\dfrac{PN}{BO}$ peut-on former ?

Page TBC - CTH

Modalité C

Hypothèses :

AM // BN // CP
BM // CN
BC // NP

1° Compléter en utilisant des points marqués sur la figure, autres que N et P

$$\frac{OB}{NP} = \frac{OB}{\dots}$$

2° Démontrer que

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{NP}$$

3 - A L'ÉCOUTE DE MARCEL DUMONT

INTRODUCTION A D'AUTRES TEMPS

Avant tout débat sur l'enseignement, une sage précaution pour chacun des participants, et spécialement pour ceux qui l'animent ou le dirigent, serait de lire rapidement des biographies telles que celles de Galilée, de Galois, de Cantor. Ceci aurait pour effet de nous rappeler que :

1) l'exercice du pouvoir culturel est le plus grand facteur de sclérose pour ceux qui exercent ce pouvoir (à tous les niveaux). Malheur à ceux qui n'ont pas les idées des puissants du jour, idées concernant les connaissances elles-mêmes !

2) les progrès fondamentaux sont toujours dus aux remises en cause des fondements mêmes des usages. A partir d'un certain moment, les raffinements et perfectionnements de détail n'aboutissent qu'à des progrès minimes. C'est vrai dans toutes les disciplines, à l'intérieur comme à l'extérieur. La terminologie de ces dernières et les cloisons qui les séparent, datant de plusieurs siècles, seront bouleversées d'ici peu. Ce travail est à faire.

Les optimistes pourraient croire que nos anciens souffraient d'un manque de recul historique, et que maintenant nos élites ont acquis une ouverture d'esprit telle que, plus jamais, des incompréhensions ne se produisent. Hélas, les repêchages miraculeux comme ceux de l'étudiant Grothendieck ne se produisent pas toujours. De toutes façons, le problème ne concerne pas seulement la détection et la sélection des élites ; il concerne la masse des citoyens.

Ces lignes n'ont d'autre but que de nous mettre en garde contre des idées toutes faites. Quand aux modifications du comportement humain, elles se situent à une échelle des temps hors de notre portée ; plusieurs milliers de générations, peut-être ?... Ceci pourrait expliquer l'intolérance des uns et la patience des autres et vice-versa ... ! L'espace est autre chose que la ligne droite et le plan ! Un point, ce n'est pas tout !

3.1. UN PEU D'HISTOIRE ... (de 1969 ... à 1975)

Les trois premiers papiers ci-joints ont été diffusés lors des stages d'expérimentation qui ont précédé la réforme, voici bientôt dix ans. D'autres, concernant des thèmes précis : distances, topologies, incidences et bords, etc..., avaient amorcé des débuts d'expériences (qui n'ont servi à rien ... ou presque rien puisque non-conformes aux idées des autorités).

Ce rappel n'a pas pour but de mettre en vedette tel ou tel d'entre nous ; il nous incite seulement à prendre nos libertés vis-à-vis de toute opinion préconçue, d'où qu'elle vienne, y compris de nous-mêmes.

A) Dijon (Mai 69)
B) Remarques (Août 69)
C) Signal d'alarme (Septembre 69)
D) Où va l'enseignement général ? (Novembre 69)
E) Libres propos (Avril 75)

Qu'en est-il maintenant ? Autant en emporte le vent !

*

* *

Dijon — Mai 1969

Pour ou contre la géométrie ? Pourquoi ?

Depuis de longs mois, chacun s'interroge sur l'orientation à donner à l'enseignement en quatrième et troisième. Un voeu se retrouve dans tous les rapports régionaux : voir définir une ligne de conduite. Ce voeu, nettement explicité en février, eut alors pour conséquence la décision de mettre cette question à l'ordre du jour du stage de mai.

Dans leur travail de réflexion, les animateurs de la région parisienne, et, parallèlement, certaines équipes de LYON, sont partis de l'analyse de la situation en 1969. Il existe alors un *programme* que l'on qualifie de "traditionnel" et qu'il est décidé d'abandonner, et un *projet de programme* élaboré par la commission LICHNEROWICZ, mais non encore reconnu. Ceux qui ont participé à l'élaboration de ce projet savent bien à quels débats il a donné lieu ! La rédaction réalisée fut certes accueillie avec une certaine satisfaction (Ne permettait-elle pas une construction plus "propre" de la géométrie ?). Mais cette "certaine satisfaction" s'accompagnant d'un "certain malaise" mal dissimulé.

Pourquoi ce malaise ?

Deux questions, que se posent les praticiens, expliquent cette inquiétude :

1°) Les jeunes enfants de quatrième sont-ils intellectuellement prêts à accueillir une construction axiomatique de la géométrie ?

2°) Le problème a-t-il été réellement bien posé ? Ne fallait-il pas revenir à la signification même de la géométrie plutôt que de se contenter de trouver la présentation satisfaisant le plus nos exigences de mathématiciens et d'adultes pour une matière dont l'existence même n'était pas mise en doute ?

Nos travaux à l'Institut Pédagogique National ont commencé par une tentative de définition de la géométrie.

La géométrie part de situations concrètes, étudiées et décrites avec un certain langage, dit géométrique, qui est toujours, avec quelques variantes, celui hérité des Grecs. Ce langage fut longtemps le seul mode de description des situations réelles, mais, *aujourd'hui*, on ne peut ignorer l'existence d'un autre langage, le langage algébrique des structures.

Ce rappel historique conduit à poser le problème de l'enseignement de la géométrie sous la forme suivante :

FAUT-IL CONSERVER LE LANGAGE GEOMETRIQUE TRADITIONNEL... OU BIEN LE COURT-CIRCUITER, ET FAIRE TOUT DE SUITE L'ETUDE DE SITUATIONS REELLES A L'AIDE DU LANGAGE ALGEBRIQUE ?

L'enseignement traditionnel de la géométrie a ses défenseurs. Il convient de ne répondre à la question posée qu'après avoir examiné les arguments en faveur de ce type d'enseignement. Nous en avons dégagé deux ! Il éduque la rigueur, il développe l'imagination. Il ne paraît pas incompatible de changer de conception pour l'enseignement de la géométrie et de conserver ces finalités !

Nous avons retenu un certain nombre de thèmes qui, à notre avis, vont permettre d'éduquer la rigueur et de développer l'imagination tout en évitant les écueils d'une axiomatique qui ne passerait pas très facilement chez nos jeunes élèves !

La liste de ces sujets — qui ont fait l'objet d'un début d'étude — n'est pas limitative. Elle concerne les thèmes suivants :

1° Notion de groupes et corps finis et non finis. Calcul dans **Z** et dans **R**.
2° Espaces vectoriels sur corps ou anneaux finis ou non finis.
3° Distances.
4° Mesures.
5° Chemins - Cheminements.
6° Logique et organisation de l'information.
7° Dessin géométrique.

Il ne faut pas oublier, en effet, les élèves qui termineront leurs études en fin de troisième et qui auraient besoin d'une certaine connaissance du dessin géométrique... Mais il convient surtout de donner à *tous* de bonnes techniques, de bons concepts, facilement utilisables quelle que soit l'orientation future.

Il est certain que tout un travail préparatoire, de réflexion et de discussion, s'impose. Adoptant une technique de travail rappelant celle des premiers stages d'expérimentateurs, il nous serait possible, par petits groupes, de rechercher des exemples précis illustrant telle ou telle question.

*

* *

Remarques concernant le projet de programme de 1968-69 relatif aux classes expérimentales de quatrième

L'objet essentiel de l'enseignement s'adressant à tous les elèves de 6 à 16 ans n'est pas de satisfaire aux exigences de tels ou tels spécialités ou spécialistes. Il est avant tout de donner la possibilité aux hommes

1° de vivre avec leur temps, de comprendre et dominer les techniques au lieu de les subir,
2° de leur donner les moyens de préparer le futur en développant toutes les "qualités" ou "vertus". Cet enseignement, qui est un enseignement de masse, doit surtout éviter un grave danger : la ségrégation intellectuelle avec les sentiments de supériorité qu'elle entraîne chez les privilégiés.

Ceci étant admis, un programme *expérimental* pour un niveau donné (quatrième par exemple) *n'a pas pour but de prolonger l'enseignement donné aux niveaux inférieurs, ni de préparer celui* *des niveaux supérieurs*. Il doit en tenir compte évidemment, mais son but est d'aller de l'avant, c'est-à-dire de corriger éventuellement les erreurs ou lacunes des programmes inférieurs ou supérieurs dans l'optique définie ci-dessus.

Le projet REVUZ suppose que c'est au niveau de la classe de quatrième que peut s'introduire l'idée de déduction. "Présente partout dans la science, elle doit donc l'être aussi à partir d'un certain niveau dans l'enseignement. Dès la quatrième, elle peut et doit intervenir dans de nombreuses occasions". Ceci suppose qu'il n'y a pas de déduction avant la classe de quatrième. Les exemples proposés montrent combien est grande la confusion entre :

1) recherche d'informations
2) codage de ces informations
3) organisation de ces informations
4) codage de l'organisation de ces informations

Tout comportement intelligent de l'être humain et cela dès la plus tendre enfance est à base de déduction et imitation. L'enfant qui bricole, l'ouvrier qui dépanne un moteur font des déductions. Vouloir limiter son introduction à la classe de quatrième est un non-sens. Le projet veut dire sans doute, 1) l'organisation de déduction en mini-théories, 2) la formalisation de ces mini-théories à l'aide de divers langages, y compris la langue usuelle.

Si l'unanimité est grande sur la nécessité de faire des "déductions" au sens large afin de développer les qualités d'"honnêteté intellectuelle", de "rigueur", etc... et autres mots mal définis, elle l'est moins sur la "fécondité" de ces déductions. En effet, une qualité essentielle au progrès de l'humanité nous paraît singulièrement négligée dans les programmes scientifiques latins : l'imagination.

Plusieurs dangers menacent notre enseignement des mathématiques, dangers dont ne sont pas toujours conscients les responsables (à cet égard le privilège d'infaillibilité n'est reconnu à personne, individu ou commission aussi prestigieuse soit-elle !).

Ces dangers sont :

1) figer l'imagination en imposant trop tôt et trop systématiquement des contraintes formelles-déductives;
2) vouloir faire "la" théorie des théories avant d'avoir donné suffisamment d'exemples de mini-théories;

3) lier l'étape déductive et formelle à l'âge des élèves alors que cette étape dépend avant tout des expériences antérieures de l'élève (enfant ou adulte) relatives à un thème particulier (En effet, on peut fort bien être au stade formel et déductif pour un thème, et n'être qu'au stade préhension, familiarisation et découverte pour un autre thème) ;
4) oublier la nécessité de faire acquérir à la plus grande masse des connaissances ignorées jusqu'à ces dernières années et indispensables aux générations futures. Des branches nouvelles se sont créées ou ont pris une importance considérable. Il serait extrêmement dangereux d'attendre plus longtemps pour introduire des notions d'informatique, de statistique et probabilité, de recherche opérationnelle dans les programmes du premier cycle. Les carences des programmes expérimentaux antérieurs ne doivent pas empêcher l'expérimentation de programmes raisonnables mais évolués.

En bref, l'argument selon lequel un programme expérimental pour les classes de quatrième et troisième doit prolonger les programmes de sixième et cinquième et préparer les programmes de second cyle est un argument de stagnation contraire à toute idée d'expérimentation et de progrès. L'idée de linéarisation de l'enseignement d'un bout à l'autre de la scolarité, idée qui régit depuis longtemps l'élaboration des programmes, est une idée dont l'efficacité à court terme est indéniable. Mais le rythme avec lequel les connaissances s'accroissent, les techniques et les besoins évoluent, font douter de son efficacité à long terme.

Des voies autres que ces programmes linéaires sont possibles. En tout cas, le but essentiel d'une expérience est de rechercher les voies les plus efficaces et non de se conformer aux prescriptions d'une longue tradition.

Le programme proposé par l'assemblée des expérimentateurs a le mérite d'ouvrir largement l'éventail des connaissances qui s'avèrent indispensables ; initiation à l'informatique, initiation aux statistiques, initiation à la recherche opérationnelle, etc... Le but de la présence de tels thèmes expérimentaux n'est pas de faire des théories sur ces thèmes mais d'enrichir l'expérience des élèves et les préparer ainsi d'une part à mieux entrer dans la vie, d'autre part à mieux comprendre les théories qui leur seront enseignées plus tard.

Les programmes traditionnels, Lichnérowicz et Revuz font une place trop grande aux théories (réels, géométrie affine plane) et oublient complètement les aspects utilitaires traditionnels (calculs pratiqués sur des rationnels à développement limité, dessin géométrique) et modernes (branches évoquées précédemment).

C'est pourquoi il importe, de toute urgence, de reconsidérer le problème de l'expérimentation en accordant la plus grande liberté aux expérimentateurs. A la lumière des travaux accomplis au cours de l'année, et seulement après ces travaux, alors les autorités compétentes pourront d'un commun accord décider de l'extension ou de la restriction des programmes et méthodes expérimentés.

La question essentielle est de savoir si, oui ou non, les expérimentateurs ont la confiance des autorités pour ne pas léser les enfants qui leur sont confiés.

Marcel DUMONT
17 août 1969

*
* *

Signal d'alarme

Le retard accumulé par notre pays sur de nombreux plans a entre autres causes une carence certaine de notre système d'enseignement et d'éducation. Freiner les initiatives qui tentent de moderniser cet enseignement et lui redonner la place enviable qu'il avait autrefois est un véritable crime envers nos jeunes générations, envers le pays tout entier. Il importe que chacun d'entre nous prenne conscience de la gravité de la situation : les querelles mesquines, les idées préconçues, les traditions, les ambitions personnelles doivent disparaître devant ce seul objectif : donner à nos enfants d'aujourd'hui les moyens de vivre en hommes libres et conscients dans la civilisation de demain. Vouloir ignorer les techniques nouvelles est le plus sûr moyen de transformer nos enfants en esclaves ou en révoltés.

C'est pourquoi l'assemblée des expérimentateurs de l'Institut Pédagogique National avait proposé le 21 mai 1969 un projet de programme expérimental de mathématiques pour les classes de quatrième et troisième. Ce projet se caractérisait par plusieurs aspects :

Contenu

1) introduction de thèmes nouveaux : recherche de moyens d'enseigner des notions élémentaires d'informatique, de statistiques et probabilités, de recherche opérationnelle, de logique, de topologie, de structures algébriques fondamentales

2) disparition de la géométrie en tant qu'objectif n° 1 de l'enseignement traditionnel, mais maintien d'exemples géométriques, entre autres, pour illustrer des thèmes algébriques

3) présence de thèmes concernant des techniques usuelles telles que dessins géométriques, calculs n'excluant ni les fonctions trigonométriques, ni les fonctions logarithmiques et exponentielles.

Forme

Un tel programme n'a plus l'aspect linéaire habituel : il s'agit en effet beaucoup plus d'enrichir l'expérience des enfants que de leur présenter toute achevée une théorie prématurée. En outre il reste identique en quatrième et en troisième, ce qui permet aux maîtres de passer d'une étape de familiarisation, d'expériences sensorielles, à l'étape de mathématisation, c'est-à-dire d'organisation puis de formalisation.

Toutefois l'ignorance où nous sommes concernant un tel enseignement exige que l'on accorde une liberté suffisante aux expérimentateurs. C'est la raison pour laquelle une rédaction détaillée des contenus de chaque thème n'a pas été proposée. Les détails de ces contenus devant se préciser au fur et à mesure que se déroulent les stages de confrontation et préparation des expériences.

Par contre une série de documents soulignant l'esprit dans lequel ces thèmes pouvaient être abordés, esprit d'abord pragmatique avant d'être formel, devait accompagner ce projet. Quelques-uns de ces documents ont été ébauchés.

Or ce projet a été repoussé par l'Inspection Générale sous le prétexte suivant : il sera impossible d'informer les maîtres de ce nouveau contenu. Cet argument paraît faible :

1) il s'agit d'un programme expérimental précédant de deux ans la mise en application d'un programme qui peut fort bien

différer du projet initial. Deux années permettent un travail efficace pour autant qu'on le veuille.

2) cédant aux pressions des spécialistes, l'Inspection Générale a accepté dans des classes supérieures et accepte pour les classes de quatrième et troisième un projet d'enseignement de la géométrie par une voie axiomatique et formelle. Or le recyclage des maîtres du premier cycle concernant une axiomatique de la géométrie euclidienne et une approche de l'analyse est une entreprise au moins aussi difficile (les expériences, à ce sujet, faites dans plusieurs pays le montrent).

De toutes façons, recyclage difficile ou non, c'est avant tout l'objectif même de l'enseignement qui doit être repensé d'abord ; les moyens doivent évoluer en fonction des objectifs et non vice-versa.

En fait la raison profonde de ce refus est la place prépondérante que tient la géométrie dans l'enseignement traditionnel et même "moderne", raison beaucoup plus sentimentale que logique. Seule une ébauche d'analyse montre la fragilité de ce sentiment :

1) Point de vue utilitaire (pour autant que ce terme ait un sens précis).

La géométrie de l'enseignement secondaire a été et est souvent considérée comme une description de notre espace usuel.

C'en est une, en effet, et nous ne l'oublions pas ; mais ce mode de description ignore d'autres propriétés de cet espace, propriétés de nature topologique qui actuellement prennent une importance considérable : tous les problèmes de cheminements, échangeurs d'autoroutes, circuits imprimés, etc. Il est normal que ces nouveaux problèmes importants dans notre civilisation actuelle trouvent place dans notre enseignement, par là-même introduisent de nouveaux modes de description de notre espace et réduisent du même coup la place accordée à une description antique.

2) Point de vue éducatif.

L'enseignement déductif de la géométrie euclidienne avait deux objectifs : l'un, explicite "apprendre à raisonner", l'autre, implicite, "développer l'imagination".

a — "développer l'imagination" : en quoi cette géométrie sollicite-t-elle l'imagination ? Essentiellement à cause de la présence d'un matériau sensible, "les lignes, les figures" prenant allure d'un mode d'information direct, global sur lequel la pensée peut travailler indépendamment de toute expression verbale. Ce fait était d'autant plus remarquable que, de toutes les disciplines scientifiques, c'était peut-être la seule mettant en oeuvre l'imagination créatrice.

Or depuis vingt ans se développent des modes d'information aussi visuels et synthétiques que les lignes droites et les cercles : graphes, organigrammes, diagrammes, schémas, arbres, etc.. Ces dessins, à la fois objets et moyens d'information, sollicitent tout autant l'imagination créatrice et ont en outre l'intérêt de pouvoir s'appliquer à des situations beaucoup plus générales.

b — "apprendre à raisonner" : traditionnellement les autres branches des mathématiques dans le secondaire étaient beaucoup plus un enseignement de techniques, de mécanismes, qu'une école de réflexion. Seule la géométrie apparaissait comme le temple de la rigueur, de la déduction plus ou moins sophistiquée. Hélas, d'une part la langue utilisée, notre langue usuelle, est porteuse de tant d'illogismes, de sous-entendus, d'ambiguïtés que son emploi est à double tranchant. D'autre part les fondements axiomatiques s'avèrent inconsistants. Bien qu'inconsistants, certains, tels les cas d'égalité de triangles, conservent un attrait dû sans doute à un aspect non négligeable à tous points de vue : l'aspect combinatoire. Or cet aspect combinatoire, dû à la nomenclature simpliciale du triangle, est l'objet même des structures algébriques fondamentales ; donc il peut se retrouver ailleurs que dans cette présentation de la géométrie.

Pour pallier cette faiblesse logique, certains proposent des axiomatiques modernes, cohérentes. Malheureusement il s'agit là d'un édifice théorique, logique, qui, pour être suivi et compris, s'étale sur plusieurs années.

Le problème est donc de savoir s'il n'est pas plus efficace d'enseigner des mini-systèmes, réduits dans le temps pour mieux faire comprendre ce que sont des systèmes formels déductifs, qui auraient l'avantage de s'appliquer à des notions indispensables aujourd'hui. En outre, l'élaboration de programmes d'instructions pour machines constitue un entraînement impitoyable à la rigueur. La machine n'interprète pas les oublis, les ambiguïtés. N'est-ce pas la meilleure école d'auto-correction ?

En bref, il ne s'agit pas de faire disparaître et l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse dont s'enorgueillit notre enseignement sans trop savoir ce que cachent ces mots.

Il s'agit de trouver les moyens les plus efficaces de donner à nos enfants les connaissances qui leur permettront, en quittant l'école à 16 ans, de ne plus confondre les sciences non-occultes et les autres, de ne pas être les esclaves de leur civilisation.

Mais en même temps, il s'agit aussi de sauvegarder les vertus chères aux yeux de tous, la rigueur, l'imagination et par-dessus tout la faculté de s'adapter rapidement à des situations nouvelles.

Tout le reste n'est que querelle entre anciens et nouveaux spécialistes.

De plus, dans certains pays, la place qu'occupent les mathématiques dans l'éducation est prépondérante. 6 heures hebdomadaires leur sont consacrées d'un bout à l'autre de la scolarité. Il est inutile de souligner que ces pays sont à la pointe de l'essort technique. On mesure l'écart si l'on songe aux 3 heures hebdomadaires qui sont consacrées aux mathématiques dans nos 4 années du premier cycle. Faute de moyens suffisants dans l'immédiat (personnels, crédits, etc.) il est néanmoins possible et urgent d'accorder 4 heures à cette discipline dans les 40 ou 50 classes expérimentales.

Si l'expérimentation d'un tel projet ne devait pas se faire dans les 2 années qui viennent, avec un accroissement de l'horaire portée à 4 heures hebdomadaires au moins, nous accumulerions un retard terrible par rapport à d'autres pays. Il faut que nos responsables prennent conscience de la gravité du problème. S'ils n'en sont pas capables, alors le pays se passera d'eux ou il périra.

Marcel DUMONT
3 septembre 1969

*
* *

Où va l'enseignement général ?

Enseignement général, classique, moderne... : ces mots, comme beaucoup d'autres, ont-ils conservé, à l'heure actuelle, un sens assez précis pour qu'ils vaillent la peine d'être utilisés ? L'enseignement général désigne celui qui est dispensé à toute la population scolaire jusqu'à la classe de Seconde. Il serait trop long d'en analyser les objectifs, les contenus, les méthodes, les résultats.

Un enseignement général est souvent conçu comme un enseignement de type non-professionnel, c est-à-dire ne spécialisant pas les élèves à telle ou telle profession. Or l'exercice d'une profession fait souvent intervenir plusieurs disciplines ; d'où cette idée qu'un enseignement général ne doit pas spécialiser les élèves à telle ou telle discipline. Ceci sous-entend que si cet enseignement remplit bien sa mission, il doit permettre n'importe quelle spécialisation ultérieure.

N'entrons pas dans les querelles des psychologues débattant sur la signification ou l'absence de signification du mot "aptitude". Soulignons simplement ce fait qu'il est impossible de développer ce que l'on a coutume d'appeler "aptitude" (par exemple l'aptitude physique à sauter) sans mettre en oeuvre un ou des types de comportement vis-à-vis de situations précises (dans l'exemple précédent, haies, rivières, perches, fils, etc...).

Le terme général n'a donc pas un sens absolu mais est relatif à l'ensemble des spécialisations possibles à une date déterminée. Or, les conditions d'existence de l'homme ont plus évolué en ce dernier siècle qu'au cours des vingt siècles précédents : conditions liées au progrès technique, à l'accroissement des connaissances, au perfectionnement des méthodes, des moyens, etc.. Nous assistons actuellement à un véritable bouleversement : des disciplines éclatent, se recherchent, de nouvelles disciplines surgissent. Une foule de professions, parfaitement ignorées jusqu'à ces dernières années, voient le jour. Les conditions d'existence de nos enfants, qu'on le veuille ou non, dépendent de l'évolution de ce phénomène. Certains en prévoient une accélération prodigieuse. Sans anticiper sur l'après-demain, essayons seulement de repenser nos problèmes d'aujourd'hui et de demain.

Qu'a fait l'enseignement général face à ce bouleversement ? Rien ! Les enseignements techniques, ceux qui commencent en classe de Seconde, ont un peu évolué sous la pression des besoins ; mais l'enseignement général n'a strictement rien fait. On a voulu remanier des examens, le baccalauréat en particulier, comme si le mal se trouvait là, en ignorant les raisons profondes : notre enseignement général ne remplit plus sa mission. Il ne permet pas n'importe quelle spécialisation puisqu'il ignore celles qui se sont créées. Il permet seulement les spécialisations d'autrefois. Autrement dit, la totalité de nos enfants n'est pas préparée à affronter les problèmes quotidiens avec la liberté d'esprit que leur donnerait un minimum de connaissances.

Pour s'en convaincre, il suffit de dresser un bilan : comparer dans chacune des classes du secondaire et du primaire l'horaire réservé aux disciplines dites scientifiques à celui des disciplines dites littéraires et artistiques. Cette comparaison au niveau des classes du premier cycle (de 11 à 15 ans) se passe de tout commentaire. Mais,outre l'insuffisance de temps consacré aux sciences, survolons sans entrer dans les détails les contenus et méthodes de ce trop rare enseignement des sciences (anciennes disciplines bien entendu).

Seules les Sciences Naturelles ont évolué. Les mathématiques amorcent péniblement un renouveau. L'Inspection Générale sous la pression de l'Enseignement Supérieur consent peu à peu à modifier les programmes. Mais aussi paradoxal que ceci puisse paraître, aucun plan d'ensemble n'a été envisagé ! Quant aux Sciences Physiques, elles ignorent l'existence d élèves avant la classe de Seconde et leur contenu reste sensiblement le même qu'au début de ce siècle. Que peut faire, dans ce fatras plus ou moins poussiéreux, la timide apparition d'une discipline, la Technologie, dont le nom risque de provoquer des illusions ou désillusions ?

Est-il concevable à l'heure actuelle qu'un adolescent quittant l'école à 16 ans, soumis aux slogans publicitaires, politiques, aux machines et machinations de tous ordres puisse ignorer des notions de statistique, de probabilités, d'informatique, d'électronique, de logique, de linguistique, de recherche opérationnelle, etc ? Quelle entreprise, petite ou grande, quel commerçant, quel artisan peut encore envisager la poursuite de son activité sans faire intervenir consciemment ou non des notions de stratégie économique ?

Quel individu n'utilise pas au moins une fois par jour des engins où la mécanique et l'électronique sont intimement mêlées ? Quelle est la place de l'électronique dans l'enseignement général jusqu'au Baccalauréat ? nulle. Comment s'étonner de la floraison dans nos hebdomadaires de ces "sciences occultes", horoscopes et autres prédictions alors que les notions de hasard ne sont jamais explicitées autrement que par le biais éventuel d'oeuvres littéraires ? Seul le second cycle, c est-à-dire une minorité d'élèves, a droit à quelques notions de statistiques et probabilités ô combien théoriques et désincarnées. Comment s'étonner de la floraison d initiatives commerciales : "apprenez la radio", "parlez anglais en 6 semaines", "cours de mathématiques modernes !", "cours d'informatique", "apprenez à bricoler", etc. etc.. Ces initiatives pourraient traduire un désir louable d'information permanente du grand public. Actuellement, elles sont surtout la preuve d'une grande carence de notre enseignement général, carence qui d'ailleurs ne concerne pas que les disciplines scientifiques.

Outre la rigidité d'une administration trop centralisée, trop hiérarchisée, paralysant les initiatives, il faut peut-être souligner deux facteurs non négligeables de cette stagnation :

1) La plupart des postes de responsabilité sont confiés à des personnes de culture littéraire (Il serait édifiant, à cet égard, de connaître une statistique indiquant la formation de nos hommes politiques). Certes, il serait injuste de faire le procès des littéraires, injuste et imprudent car un tel procès tournerait sans doute à l'avantage des accusés. *En effet, l'enseignement scientifique jusqu'au baccalauréat est conçu et donné de telle sorte que l'ouverture d'esprit, l'imagination ne sont pas particulièrement développées dans ces domaines.* Ceci explique la méfiance plus ou moins justifiée de l'opinion publique envers les "technocrates".

2) La culture, les habitudes acquises, tout concourt à donner à l'individu le sentiment qu'il ne peut penser que par l'intermédiaire de sa langue maternelle ou quelques autres langues usuelles. Les autres moyens d'expression que sont les théories mathématiques et physiques, les formalismes logiques, les graphismes de toutes sortes, schémas, organigrammes, dessins industriels, etc., ne paraissent que des astuces techniques. Le fin du fin consiste toujours à tout exprimer par l'intermédiaire de la langue usuelle. Une telle erreur est extrêmement grave car elle condamne l'homme à l'impossibilité de comprendre la plupart des phénomènes.

Ces deux raisons, entre autres, expliquent dans quel cercle vicieux est emprisonné notre système d'éducation. L'ouverture d'esprit, la rapidité de pensée, d'expression de pensée, l'efficacité dans la synthèse, la profondeur dans l'analyse ne sont plus l'apanage des cultures littéraires. Latin et Géométrie, ces deux pivots de la culture dite classique, disparaîtront peu à peu, et ceci non parce qu'ils sont nuisibles mais parce que d'autres notions, d'autres moyens sont plus importants, aussi bien sur le plan des connaissances que sur celui de l'éducation en général. Le monde dans lequel vivront nos enfants dans vingt ans sera le monde de l'informatique et non celui de César ou d'Euclide. Les laisser dans l'ignorance, c'est faire d'eux des esclaves ou ... des révoltés.

Que faire pour secouer la léthargie de l'enseignement général? Un ministre, un seul, a eu l'audace ou l'habileté ou les deux de critiquer cette citadelle qu'est l'Education Nationale en s'attaquant aux problèmes de fond. Il est vrai que sa tâche avait été bien préparée par un certain mois de mai. Et pourtant, la citadelle aux remparts massifs que sont les sociétés de spécialistes et de catégories, les syndicats, les cadres de hauts fonctionnaires, les associations d'anciens élèves de X ou Y, etc., et tous groupements dont la raison d'être essentielle est de préserver les traditions, la citadelle a eu raison de "l'impertinence de la pertinence" des critiques.

Il semble qu'actuellement l'effort le plus urgent à accomplir soit un effort d'information. Il est effarant de constater que de hautes autorités imaginent encore que la culture française est la meilleure du monde. Ce qui a été vrai à une époque ne l'est assurément plus maintenant. Si quelques brillants esprits peuvent encore faire illusion, peut-être faut-il en attribuer la valeur davantage aux individus qu'à l'éducation qu'ils ont reçue du système. Tous les parents, tous les éducateurs, tous les responsables à quelque niveau que ce soit devraient être informés des horaires, des contenus, des méthodes et moyens d'enseignement de divers pays étrangers. Il est évident que tous les pays cherchent une solution raisonnable à ces deux problèmes majeurs que sont l'éducation de tous nos enfants et l'information de tous les adultes. Il est non moins évident que l'inertie, l'inaction dans ce domaine conduisent le pays à une catastrophe. Un pays dont le système d'éducation reste tourné vers le passé est un pays qui meurt. Agissons avant qu'il ne soit trop tard !

Marcel DUMONT
20 novembre 1969

*

* *

Libres propos

Axiome A_1

Si on devait caractériser le comportement d'un mathématicien en "activité" avec deux mots, alors on pourrait dire :

1) Curiosité (ou Recherche)
2) Créativité (ou Invention)

Observation O_1

Mis à part quelques niveaux bien déterminés (quelques classes de Maternelle, sixième, et troisième cycle de l'Enseignement Supérieur) et quelques rares endroits de-ci de-là, tout l'enseignement actuel des mathématiques est axé sur des pratiques d'algorithmes, c'est-à-dire l'exécution *plus ou moins bien programmée* de listes d'instructions *plus ou moins bien explicitées*, dont une partie *doit être mémorisée* (sans qu'on dise exactement laquelle). Et ceci, dans une *forme "normalisée"*, c'est-à-dire conforme à des *règles dues à l'usage* et souvent *contradictoires*.

(Les deux mots du sujet du colloque : apprentissage et mémorisation n'infirment pas cette observation).

Conclusion C_1

Je souhaiterais que l'on dise clairement :

1) que les mots suivants (entre autres)
ou n'ont pas de sens
ou en ont et préciser lesquels :

— intelligence	— concret
— compréhension	— faire — penser
— raisonnement	— imiter — inventer
— abstrait	— répéter

2) que l'exécution des algorithmes (et non la création) est du ressort des machines
lorsque les programmes sont explicités,
mémorisés,
codés dans un système cohérent
et compatible avec la machine

3) ce que l'on attend lorsqu'on enseigne *des* mathématiques

4) ce que l'on pense de la liberté de pensée dans un régime de travaux forcés intellectuels où l'individu n'a jamais le temps de se poser des problèmes, où on ne lui donne guère l'envie de s'en poser, où on lui impose des problèmes, des solutions, des formes conventionnelles qui tiennent rarement compte des représentations mentales propres à chaque individu et dépendant de ses propres expériences.

Conclusion C_2

Tout l'effort des psychologues devrait porter sur l'observation des travaux libres d'enfants par opposition aux travaux imposés.

Conclusion C_3

Les spécialistes de l'observation (puisqu'il semble que l'éducation actuelle ait oublié le développement des facultés d'observation) pourrait faire le point sur

— le développement de l'imagination
— la curiosité
— le sens critique, la docilité, l'indocilité
— la tendance à l'imitation, à l'anti-imitation
— les initiatives (tant sur le plan physique que mental).

Conclusion C_4

Quelques problèmes particuliers :

1) les enfants les plus débrouillards, inventifs, critiques et observateurs sont souvent ceux qui négligent l'écriture, le codage, la transmission des informations.

2) la progression dans les niveaux d'intérêt

— *niveau 0* : une situation à problème étant posée, l'enfant résout le problème et fournit les réponses et n'*éprouve pas le besoin* de réfléchir sur la façon dont il les obtient.

— *niveau 1* : 2e problème sur le 1er ; la comparaison des réponses différentes incite à comparer les méthodes des mises en oeuvre et les écritures éventuelles associées à ses méthodes.

— *niveau 2 :* 3e problème sur 1er et 2e ; la comparaison de situations plus ou moins analogues laisse entrevoir une classe de problèmes, l'extension de ceux-ci et l'invention soit par analogie, soit par opposition, de nouvelles situations, etc.

3) rien n'est achevé ...

Marcel DUMONT
24 avril 1975

3.2. UN Q.D.P. DANS L'EAU

Voici quelques extraits de la théorie du QUART-DE-POINT (QDP) (Théorie psycho-pédago-épistémo-déonto-logico-mathématique des célèbres professeurs KOU-PAN-UIT et KRAKAMOA, de l'Université des Iles ALEOUJDI).

... Il est inconcevable qu'après les travaux du Pr G.A.π. sur les structures fondamentales de l'intelligence, on puisse encore commencer l'étude de la géométrie par la filière classique : le point, le bipoint, le segment, la demi-droite, la droite, le plan ... L'enfant ne peut pas gravir un escalier en sautant trop de marches à la fois ; de même il ne peut franchir trop d'étapes d'abstraction à la fois. C'est pourquoi nous suggérons de rétablir l'étude du tripoint entre le bipoint et le segment (étude abandonnée il y a peu, à cause du monothéisme), d'insérer les quadripoints à leur vraie place et peut-être même des pentapoints (les racines latines pardonneront aux grecs et vice-versa) qui manquent à la suite logique de cette progression ...

... Mais l'essentiel de nos travaux repose sur une idée simple : la difficulté pour l'enfant de distinguer le point matériel du point mathématique : ce dernier, en effet, suivant le point de vue, peut être considéré comme point géométrique, point affine, point vectoriel, point projectif, etc... etc... ; ... ! (sans oublier les autres points ! ... ?). Or cette richesse d'abstractions est difficilement concrétisable malgré les efforts des pédagogues ("la pointe d'un crayon, une étoile dans le ciel, un objet très petit pour la première,

un objet très gros pour la seconde, en donnent une image imparfaite ...") ("On représente un point par une petite tache circulaire, ou par une petite croix ..."). Or l'enfant vit d'abord au niveau des apparences ; dans le premier cas, c'est la tachéométrie, plus que la géométrie, qui lui est suggérée, dans le second cas l'étude des cimetières n'a rien de plus réjouissant ...

... Les manuels ajoutent à ceci la notion de notion première; on trouve ainsi "la notion de point est une notion première... la notion de plan est une notion première ... le plan est un ensemble de points..."). Heureusement que la notion d'ensemble a été mise hors programme, sinon une contradiction évidente éclatait dès les premières définitions...

... Ce sont toutes ces difficultés psychologiques de concrétisation et d'axiomatisation qui nous ont conduits à choisir comme notion première celle de "quart-de-point" en abrégé QDP (ou encore TET pour ceux qui lisent de droite à gauche).

(N.D.R. On note d'emblée une familiarisation avec l'emploi des lettres).

"... L'examen attentif d'un quart-de-brie, d'une gaufrette à glace, de l'essuie-glace d'une 2 CV — objets familiers qui n'ont rien de scolaire — suggère parfaitement l'image de cette notion première qu'est le QDP (à un détail près : c'est qu'on pourrait aussi bien prendre les quartiers de lune, d'où par continuité, croissants, brioches, et autres gadgets dont les enfants sont friands, c'est-à-dire finalement n'importe quoi, y compris les notions dernières)..." (N.D.R. — on remarquera le souci de motivation des auteurs).

"Dès que l'enfant a franchi cette première étape de familiarisation avec les images du QDP, alors on peut poser les jalons d'une première esquisse de mathématisation : ... exemple :

Définition : Un point est un ensemble infini de QDP
Remarque : tout ensemble de QDP n'est pas nécessairement un point.

Définition : Si deux QDP appartiennent à un même point, Alors et seulement Alors on dira que les 2 QDP sont co-pointés.

Théorème fondamental :
Si et seulement si 2 points ont 1 QDP commun, Alors et seulement Alors ces 2 points coïncident.

Naturellement, avec de jeunes enfants on évitera la démonstration longue mais rigoureuse de cette propriété importante de l'espace usuel. On l'admettra, etc... etc.

La place nous manque pour commenter ces travaux remarquables. Les lecteurs intéressés pourront consulter la thèse qui a valu aux auteurs un doctorat de 4e cycle. Ajoutons seulement que le souci de rigueur, de précision est compensé tout au long par le souci de rester constamment au niveau des enfants. Par contre on ne saurait trop insister sur le caractère paradoxal de ces travaux : à savoir la simplicité des notions premières et de leur enchaînement et la richesse des prolongements suggérés par cette théorie que l'on peut aussi bien tronquer en mini-théories, grouper en théories-quotients et multiplier selon des théories-produits que plonger dans des hyper-théories.

Signalons aussi, pour les meilleurs élèves, l'apparition des QDP semi-ouverts, semi-fermés, orientant ainsi soit vers des considérations topologiques, soit vers une autre théorie : celle des HDP (huitièmes de point).

Quant aux classes difficiles, enfants des voies 7-8-9 etc, qui nécessitent une pédagogie de soutien, de consolidation, les professeurs K.P.U et K.K.M. ont même prévu une théorie dérivée de la précédente : ils l'ont appelée la géométrie du point fini. Elle repose sur une légère modification de l'axiome premier : "le point est un ensemble de 3 QDP". Il serait trop long d'exposer ici les raisons de ce choix, liées à la physique théorique, mais il est évident que pour des enfants faibles de constitution, la finitude est plus simple à manier que l'infinitude.

Notons encore la possibilité pour les sujets brillants d'introduire les théories duales de celle des Q.D.P. : à savoir celles des T.E.T. et celle, plus subtile, des P.D.Q.

Les pédagogues se sont mis d'accord sur l'ordre d'apparition des axiomes : en priorité les axiomes métriques de l'espace des H.D.P., suivis des axiomes affines. Ce point de vue souligne le fait que l'espace des H.D.P. existe indépendamment des structures utilisées pour le décrire.

On remarquera, en passant, le souci de précision de la langue, qui apporte une clarté nouvelle aux explications (exemple : Si ... Alors et seulement Alors ...), ainsi que la présence constante bien qu'implicite des quantificateurs tels que "un", "le", "des", etc.

On notera également le tour de force des auteurs, qui ont réussi à exposer de façon lumineuse toute la théorie des QDP sans esquisser la moindre figure, ce qui est la preuve de son ultime perfection.

Enfin on y trouvera la marque des grands génies, à savoir le caractère fermé de cette théorie, qui se suffit à elle-même, mais qui s'achève pourtant avec de très larges ouvertures. Nous ne priverons pas le lecteur du plaisir d'apprécier cette conjecture formulée pour la première fois aux îles Aleoujdi en l'an 9 de l'ère universelle.

"Pour tout point, il existe au moins 4 QDP "distincts" et copointés dont la réunion coïncide avec le point et il en suffit de 4".

Aux dernières nouvelles, il semblerait qu'une démonstration algorithmique, par ordinateur et balayage exhaustif des QDP, ait permis de valider cette conjecture. Mais de nombreux théoriciens ne semblent pas convaincus par cette méthode et refusent d'admettre sa validité. "Ce refus souligne une fois de plus (c'est KPU qui parle) le paradoxe actuel : ce sont les mêmes qui refusent à la fois le recours à l'intuition, à l'imagination et le recours au traitement automatique des écritures.

Il est difficile à l'être humain d'admettre d'autres méthodes et d'autres connaissances que celles qui ont nourri son enfance. Voilà pourquoi nos doyens se retrouvent avec 30 ans de retard"

(N.D.R. — Cette allusion du Pr KPU vise les autorités culturelles des îles ALEOUJDI).

3.3. QUELQUES SUGGESTIONS PLUS SERIEUSES QUE LA THEORIE DES Q.D.P.

A. Objectifs

Le mot "géométrie" devrait être abandonné dans toute discussion pédagogique car il sous-entend trop d'activités différentes. Nous retiendrons parmi les objectifs traditionnels qu'il nous paraît indispensable de conserver :

1) familiarisation avec l'espace usuel 2) école d'imagination	spécifiques de l'enseignement traditionnel de la géométrie "pure" d'autrefois.
3) école de rigueur	spécifique de l'algèbre et d'une façon générale de tout ce qui devient formel. La rigueur n'atteignant sa perfection qu'au niveau de la programmation des machines, c'est-à-dire des traitements automatiques.

Les deux premiers objectifs ont été quasi-complètement abandonnés par les programmes actuels. Le retour aux formules antiques de calculs d'aires et de volumes ne concernant que des objets datant de plus de 2 000 ans souligne la grande misère de la géométropédagogie.

a) C'est pourquoi, d'un point de vue utilitaire, nous placerons ces activités sous la rubrique "Etudes d'espaces réels" (le pluriel se justifiera par la suite). D'un point de vue éducatif, ces études, tout en familiarisant l'élève avec son environnement spatial, se proposeront de suggérer l'idée fondamentale suivante : "pour mieux prévoir l'évolution des situations, il importe de créer des modèles, d'apprendre à les faire fonctionner et à en interpréter les états et le fonctionnement. La rigueur et l'imagination seront évidemment sollicitées au travers de ces deux objectifs : "familiarisation — modélisation".

B. Remarques générales

a) *La diversification des points de vue :*

Ne privilégier qu'un seul point de vue conduit des générations entières vers des idées fixes et bloque toute évolution ultérieure. Il importe de veiller à ce que divers aspects d'une même situation soient présentés, et parfois même des aspects "contradictoires".

Exemple 1 : "L'espace réel a trois dimensions". Au bord de trois siècles de cartésianisme, nos cités ne sont plus que des blocs de parallélépipèdes !

Exemple 2 : "L'espace est un ensemble de points". La masse de nos concitoyens reste désarmée complètement devant les nombreux problèmes topologiques à propos de situations pourtant familières et simples.

b) *L'ouverture des problèmes :*

Un problème ne s'achève jamais avec une solution. Ce sont les rapprochements, les généralisations, les contradictions qui donnent naissance à une nouvelle classe de problèmes. La curiosité, le sens critique de l'observation, l'originalité et le goût de l'aventure sont les qualités premières des explorateurs en tous genres.

c) *La richesse d'une situation* est une condition première pour susciter l'intérêt. Une ligne droite, un plan, un point tout seuls n'ont pas plus d'intérêt qu'un "quart de point" ! Sans motivation profonde, le potentiel d'intelligence reste en sommeil. Toute évaluation est faussée dès le départ dans de telles conditions.

C. Remarques particulières

1° . Nous ne prenons conscience d'un espace que parce que nous cheminons, nous nous déplaçons, dans cet espace. Si les arbres étaient doués d'intelligence, leur conception de "leur espace" serait sans doute totalement différente de la nôtre. L'espace de l'astronome et celui du chirurgien neurologue spécialiste du cerveau ont-ils beaucoup de "points communs" ? Poincaré préférait considérer l'espace comme un ensemble de trajectoires (celles des hirondelles par exemple) plutôt que comme un ensemble de points.

Cette remarque nous incite à mettre l'accent sur deux idées fondamentales : les "mouvements" et les "transformations". Les deux sont actuellement pratiquement ignorées de la scolarité obligatoire.

2°. L'étude des "objets" ne peut pas se faire indépendamment de l'espace dont ils font partie : les "automorphismes" d'un "pentagone" considéré comme partie d'une surface torique sont-ils les mêmes que ceux du pentagone considéré comme partie de plan ? Ceci souligne la nécessité, pour chaque problème, de préciser l'environnement, celui-ci dépendant évidemment du niveau d'expérience des élèves.

D. Prospection et expérimentation autour de thèmes

Ce qui suit n'est pas une classification : ce sont seulement des voies d'expérimentations possibles qui permettraient dans quelques années d'accumuler suffisamment de matériaux pour constituer un réservoir d'activités. C'est seulement à partir de celles-ci que pourront s'élaborer plus tard des programmes s'orientant vers les connaissances *contemporaines*. L'état de délabrement et de vide presque parfait des programmes actuels permet de penser qu'une telle période d'expérimentation ne lèserait en rien les élèves, au contraire (le pire étant atteint !). La curiosité est l'objectif n° 1 de toute éducation. On peut faire confiance à n'importe quel individu pour acquérir des connaissances dès l'instant où sa curiosité est en éveil.

a Quelques supports d'activités

(Aucun ordre ne peut être imposé : problèmes et connaissances dépendent de l'individu et ne dépendent pas des situations).

1 - "*Polyèdres*" : ne se limitant ni aux polyèdres de Platon (dits "réguliers") ni aux polyèdres convexes. (Cf. par exemple "Polyedron Models" de Magnus Wenninger, éd. 1975, Cambridge University Press ; "Formes, Espaces et Symétries", de Holden, éd. Cédic).

2 - "*Réseaux*" en tous genres et en toutes dimensions.
(Les propriétés spécifiques d'une "figure" peuvent devenir "évidentes" lorsque celle-ci est placée dans un "réseau" approprié : par exemple les médianes concourantes d'un triangle — penser alors au tétraèdre.

3 - *Pavages variés* (frises, papiers peints, cristaux, etc...) (Cf. "Rosaces, frises et pavages", éd. Cédic).

4 - "*Surfaces variées*" non limitées aux plans, sphères, cylindres et cônes (Cf. par exemple une tentative de Griffiths pour mettre à la portée des masses quelques idées fondamentales contemporaines : "Surfaces", éd. Cédic).

5 - "*Architectures simpliciales*" (non limitées aux "graphes habituels") incluant par exemple des "casse-têtes" du commerce ... (destinées à attirer l'attention sur l'organisation des relations). Pas d'ouvrage de vulgarisation à ce sujet.

6 - "*Objets technologiques*" (tels que trains d'engrenage, assemblages, articulations, etc...).

7 - *Courbes variées* (Cf. "Courbes mathématiques", numéro spécial 8, Revue du Palais de la Découverte).

etc.

b **Quelques comportements**

1. *Problèmes de cheminements* (indépendants du temps) conduisant à : Invention - Recherche - Codage et Pratique d'algorithmes de cheminements.
2. *Problèmes de repérage* (pas seulement de points mais aussi de "bords" pouvant être des lignes, des surfaces, etc...) et conduisant aux modèles vectoriels, projectifs, etc.. ainsi qu'à des techniques d'approximation concernant les intersections de courbes par exemple.
3. *Problèmes de représentation et de modélisation* : incluant dessin technique, géométrie "descriptive", "cartographie" et schématisations, voire maquettes :

   — nécessitant l'usage ou l'invention d'instruments
   — conduisant en particulier à la trigonométrie.
4. *Problèmes de transformation* (indépendants du temps)

   a) automorphismes des "objets" étudiés conduisant vers les structures algébriques classiques et explicitant ainsi l'utilité des modèles algébriques, à commencer par les structures affines (groupes d'opérateurs) *

   b) transformations de nature topologique comportant, outre les déformations continues de chemins, les troncatures de sommets, d'arêtes, etc.

   — soulignant ainsi l'importance de la notion d'invariance et des classifications qui en résultent,

* Cf par exemple : "Fascination des groupes" de Budden, éd. O.C.D.L., pour la motivation et "Groupes" de A. Bouvier, éd. Hermann, pour des aspects théoriques plus formels.

— permettant également d'animer et de passer d'une représentation à une autre.

5. *Problèmes de mesures* (y compris des techniques de dénombrements !)

   — ne se limitant pas aux formules traditionnelles des quelques "objets" non moins traditionnels,
   — introduisant les techniques d'intégration, c'est-à-dire de "*cumuls*".

6. *Problèmes d'"engendrement"* (action d'engendrer)

   — jeux de "pavages" non limités aux frises et aux plans, mais s'étendant à des espaces variés ; l'idée fondamentale à introduire étant celle-ci dans un premier temps : comment engendrer un "espace" à l'aide de quelques "générateurs" et de quelques "règles" ; dans un second temps : comparer et classer divers systèmes de générateurs.

   — cf. à ce sujet "Groupes abstraits", Coxeter Moser *
   (ne pas se leurrer au sujet du mot "abstrait" : les supports peuvent être extrêmement concrets et manipulables par des enfants de l'élémentaire pour peu qu'on y réfléchisse !!)
   — des idées comme celles d'itération et de récursivité peuvent s'introduire à ces propos.

7. *Problèmes de classification*
   (Plus statiques et plus spéculatifs, nécessitant déjà une certaine somme d'expériences et des reculs successifs). De tels problèmes ne peuvent surgir qu'au terme des familiarisations.

8. *Problèmes de "mouvements"*
   — un peu de cinématique conduisant au point de vue "local" de l'étude d'une courbe ou d'un espace (c'est-à-dire idée de différentielle — et des dérivées successives).

   etc.

c **Extraits de l'environnement** naturel ou provoqué

1) Cristallographie.
2) Assemblages moléculaires — chimie-biologie (cf. jeu "Kugeli", éd. OCDL).
3) Assemblages réseaux cubiques (cf. "Minicubes", éd. OCDL).

* Titre exact : "Generators and Relations for Discrete Groups", éd. Springer Verlag.

4) Cartographie — Navigation maritime, aérienne.

5) Maquettes immobiles
mobiles.

6) Astronomie.

7) Technologie.

etc.

E. Conclusion

Ces listes ne sont évidemment pas exhaustives.

Les divers niveaux et classes ne se dégageront que lorsqu'un nombre suffisant d'activités et problèmes auront été explicités.

Ceci permettra alors aux responsables des programmes de prendre conscience de la somme d'expériences et de maturations nécessaire pour appréhender un concept.

Comme les concepts, en mathématiques, s'échafaudent les uns à partir des autres (sans être nécessairement inclus dans l'enseignement déductif d'une théorie), il faudra bien alors organiser les objectifs à partir des matériaux obtenus.

Naturellement les supports d'activités se retrouveraient à tous les niveaux, mais conduiraient à des problèmes différents et plus généraux.

D'ores et déjà, on pourrait fixer à la fin des études obligatoires un savoir-faire minimum qui ne se limiterait pas à Thalès-Pythagore-droite-plan-parallélogramme et quelques formules de trigo (pour des arcs de 0° à 180° !!!).

Un tel projet peut paraître ambitieux si on conserve l'attitude dictatoriale de l'enseignement — attitude qui est celle des travaux forcés. On ne peut obliger un être humain à avaler de la nourriture indigeste lorsqu'il n'a ni faim ni envie !! Il est réalisable pour peu qu'on accorde à la curiosité, à l'esprit critique et à l'invention la place prépondérante qu'elles n'auraient jamais dû perdre et qui est aussi celle de la liberté de penser !

Marcel DUMONT
DOUK-SA-VIEN — Iles ONS-EN-FISH
le 26-05-1977

Note de l'auteur : relu le 26-02-1978 à KOA-SASER, îles SAN-FOUT.

ELEM-MATH III (96 pages)

LA DIVISION A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Traditionnellement, à l'Ecole Elémentaire, le mot *division* désigne une technique de calcul. Comme la technique enseignée est assez complexe (mise en jeu simultanément de produits et de différences, procédures d'estimation, apparition occasionnelle d'une virgule au quotient, ...) il n'est pas étonnant que les enfants essuyent bien des déboires et que les maîtres éprouvent bien des déceptions.

Nous appuyant sur de nombreux travaux de didactique en cours nous pensons qu'il est souhaitable de concevoir un enseignement des mathématiques essentiellement centré sur la résolution de problèmes.

* * *

QUELQUES QUESTIONS A PROPOS DE LA PRATIQUE DE LA DIVISION mettent en évidence certaines difficultés liées à la technique de calcul habituelle et introduisent aux trois chapitres suivants.

- L'examen des problèmes utilisés traditionnellement pour présenter la division montre qu'un calcul de division n'est en fait qu'une suite de calculs de différences (VERS LA DIVISION EUCLIDIENNE).
- Le souci de réduire les écritures inhérentes à ces calculs successifs nous amène ensuite à suggérer des travaux sur les MULTIPLES D'UN NATUREL.
- Nous montrons alors comment la volonté de réduire les écritures fait évoluer les procédures de calcul au prix d'une complexité croissante des calculs auxiliaires à effectuer de tête (TECHNIQUES OPERATOIRES DE LA DIVISION EUCLIDIENNE).

Enfin, on trouvera en annexe des comptes rendus de travaux effectués dans des classes élémentaires.

* * *

Pour respecter le volume habituel des brochures de la collection ELEM-MATH, il n'était pas question d'aborder les problèmes liés à la virgule (introduction de l'ensemble **Q** des rationnels, rôle privilégié des rationnels décimaux, division dans **Q** et division euclidienne dans **N**). Nous nous sommes donc délibérément limités à la division euclidienne dans l'ensemble **N** des naturels.

7ème partie

NOYAUX-THÈMES

Avertissement de la 7ème partie

par Henri BAREIL

"Noyaux-Thèmes" : c'est essentiellement la volonté de personnaliser l'enseignement dans le souci de permettre à chacun son plein épanouissement.

Le "noyau", c'est la partie commune à tous ces enseignements personnalisés à développer.

Partie commune quant aux connaissances mathématiques au sens strict (théorèmes de base, capacités opératoires,...) mais aussi quant aux démarches mathématiques générales (aptitude à définir des problèmes, à induire, à déduire, à conjecturer...) et quant aux comportements généraux (aptitude à s'informer, à observer, à imaginer, à se contrôler, ...)

Les "thèmes", ce sont diverses voies d'accès à ce noyau, ou diverses illustrations ou applications, aucune n'étant obligatoire.

Ceci suppose que soient clairement définis, et de façon opérationnelle, les finalités et les objectifs de notre enseignement. Le tome 1 peut y contribuer ainsi que les textes d'orientation de l'A.P.M.E.P. (Charte de Caen, texte de 1978,...). Mais il faudra aller plus loin.

Cela suppose également une longue réflexion en commun pour préciser le noyau et multiplier les thèmes ou les façons de les faire intervenir. C'est l'affaire de tous les adhérents de l'A.P.M.E.P. et celle de tous les I.R.E.M.. A tous je demande d'apporter de nouvelles contributions à l'édifice multicéphale "Noyaux-Thèmes" !... Le Bulletin A.P.M.E.P. leur est ouvert...

1 - VARIÉTÉS

1.1. LE PAVE AU C.M. OU EN SIXIEME

par Roger CREPIN, Limoges

Ce qui suit peut paraître rigide, parce que l'on écrit la relation de faits vécus dans une classe sans pouvoir souligner la vie de la classe, les communications entre enfants, le rôle d'animateur du maître qui saisit l'occasion, lorsqu'un fait semble compris par la majorité des enfants, pour affirmer une synthèse, une généralisation.

Une boîte de craie est posée sur une table et les enfants ont envie de s'exprimer sur cet objet. Les observations faites ne seront jamais gratuites, mais seront le départ de la découverte d'une notion. Parmi ces observations citons :

— observations à orientation topologique : des bâtons de craie aux notions d'intérieur et d'extérieur, et à la notion abstraite de frontière (boîte ouverte, fermée, ...) ;

— observations à orientation vers les relations d'incidence : six faces, positions relatives des faces, forme des faces, frontière des faces, ...

Les dessins en perspective de la boîte vue de l'extérieur seront nombreux et divers avec vision d'une seule face, de deux faces, de trois faces et comparaison des visions en perspective de diverses faces (un carré devient losange, un rectangle devient parallélogramme). L'enfant vivra les visions dans trois situations :

— il se déplace autour de l'objet fixe
— il déplace l'objet par rapport à lui
— l'observateur et l'objet en mouvement ;

— observations modélisantes : comparaison d'objets de la même classe.

• visions *de l'extérieur* de solides pleins :

- pièces de bois (à l'occasion de la visite d'un atelier de menuiserie ou de charpente), observation de l'action de l'artisan

qui veut contrôler une surface plane,
- parpaing, briques,
- livre.

L'expression des observations utilise un vocabulaire technique, par exemple pour le livre : tête, queue, tranche, dos, plats ou pour la brique : base, hauteur, faces, ...

- vision *de l'intérieur* :
- salle de classe

— observations d'objets faisant apparaître le modèle : pavé.
Les enfants observent tous les objets à trois dimensions de la classe et découvrent que la frontière de la table d'écolier a pour modèle le pavé. Il en va de même de la chaise, du tabouret. Les enfants enveloppent l'aspect matériel d'un objet dans une frontière modèle : pavé ;

— observations à orientation-mesure. Les comparaisons ont fait apparaître des variations dans les dimensions. Comment découper des tasseaux dans une latte de bois ? Comment est construit un mur de brique (dénombrement) ? ... L'aboutissement est la découverte de l'usage de l'empilement des cubes pour construire un pavé et le dénombrement donne la mesure dans le cas favorable de cubes de même format ;

— observations à orientation - déplacements dans l'espace.
Translation suivant une arête, découverte de l'isométrie des faces opposées. Construction par symétrie-plan d'un pavé droit.
Agrandissement et réduction, maquettes, plans à l'échelle.

— etc.

Cet usage de la "méthode spiralaire" * dégage un certain nombre de qualités du pavé :

— solide limité par six faces,

— deux faces consécutives ont en commun une arête, trois arêtes concourent à chaque sommet. Le solide a six faces, douze arêtes, huit sommets,

— deux faces opposées sont superposables par glissement,

— les faces sont des parallélogrammes,

— pour le pavé droit : à chaque sommet les arêtes sont deux à deux perpendiculaires ;

* Cf. tome 1, page 69.

ainsi qu'un certain nombre de qualités du parallélogramme :

— surface limitée par quatre côtés (surface à quatre sommets),

— deux côtés opposés sont superposables par glissement (translation),

— les côtés déterminent deux directions de droites dans le plan,

— pour les parallélogrammes particuliers : le rectangle (et carré) a ses côtés perpendiculaires ou le losange (et carré) a ses diagonales perpendiculaires,

ainsi que des propriétés du segment de droite et de la droite dans le plan ou l'espace.

Conséquences :

(A) *Travaux manuels éducatifs*

Réalisation de pavés droits ou obliques par les élèves

α) Solide plein : réalisation associée à une visite d'atelier (menuiserie, charpente, ...) pour réfléchir aux actions des artisans et à l'utilisation des machines-outils, tant pour le travail du bois que du fer (ou de la matière plastique).

Exercices :

— scier des pavés droits dans une barre de bois, de fer (usage de l'équerre) et tracer des parallèles (trusquin, pointe à tracer, ...). Est-il facile de réaliser à la main deux traits de scie parallèles ?

— construire un pavé avec de la pâte à modeler que l'on façonne en la plaquant sur une surface plane ou en la coupant ;

— couper une pomme de terre (!) ...

β) Solide limité par des plaques rectangulaires :

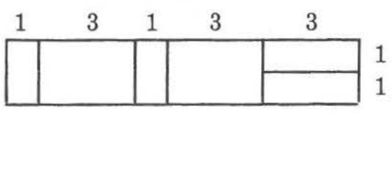
Exercices :

— scier un tube de section rectangulaire ;

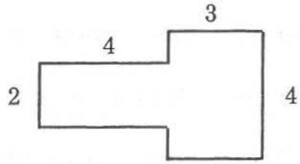
— tracés et découpages de plaques de carton (tracés associés au dessin géométrique sur feuille blanche ou sur quadrillage régulier), assemblage des plaques avec le scotch ;

— du développement du pavé à sa réalisation : recherche du minimum pour le découpage et l'utilisation du scotch.

Proposer aux enfants des projets dont certains ne permettent pas de construire le pavé sans découpage supplémentaire, par exemple :



Proposer aux enfants des patrons et faire rechercher sans mesurer les pliages à faire, par exemple :



γ) Solide limité par des barres, des tiges de "meccano", des pailles, du fil de fer (construction de la charpente du pavé).

Comment découper les tiges dans une tige donnée ? Nombre de tiges de même longueur.

Pour les sommets : soudures (ou pâte à modeler).

Les sommets avec les tiges de "meccano" sont matérialisés par des vis et écrous.

Les enfants jouent bien avec les pailles (arêtes) et la pâte à modeler (sommets).

Cette construction avec la pâte à modeler permet de faire varier les angles et d'aller du pavé droit au pavé oblique et inversement, du parallélogramme au rectangle et inversement ou du cube au pavé oblique, du carré au losange et inversement.

Constat d'une première différence entre le parallélisme (qui se conserve) et l'orthogonalité (qui ne conserve pas dans ces déformations).

δ) Solide limité par des crochets fixés convenablement.

Réalisation : piquer des aiguilles dans une pomme de terre (ou de la pâte à modeler) de façon que les huit chas représentent les sommets du pavé.

Exercices à partir de δ :

— A l'aide du fil retrouver le solide γ .

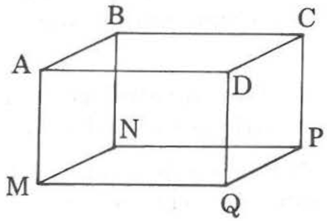
— A l'aide de papier et de scotch retrouver le solide β .

Il suffit de considérer β comme une boîte que l'on remplit de sable pour avoir le solide α .

α, β, γ, δ représentent quatre points de vue d'un même solide géométrique. La donnée d'un de ces points de vue suffit pour déterminer les trois autres. Si l'on veut éliminer l'aspect matériel au profit de l'idée de modèle mathématique, il suffit d'envisager le pavé du point de vue de l'octuplet (A, B, C, D, M, N, P, Q).

(B) *Déplacements de plans dans l'espace et réalisations technologiques* (à partir des travaux manuels)

Dans un pavé les faces parallèles deux à deux sont superposables par translation.



$t_{\overrightarrow{AB}}$: (A,D,Q,M) $\longmapsto$ (B,C,P,N) , [AM] $\longmapsto$ [BN] ...
$t_{\overrightarrow{AD}}$: (A,B,N,M) $\longmapsto$ (D,C,P,Q) , [AM] $\longmapsto$ [DQ] ...
$t_{\overrightarrow{AM}}$: (A,B,C,D) $\longmapsto$ (M,N,P,Q), [AB] $\longmapsto$ [MN] ...

Réalisation matérielle possible avec les solides β ou γ, faire glisser à l'intérieur un parallélogramme.

Réalisation possible avec les solides α, β, γ, faire glisser un manchon à l'extérieur.

L'octuplet précédent devient un couple de quadruplets. Le même pavé a plusieurs écritures :

((A,B,C,D), (M,N,P,Q)), ((A,B,N,M), (D,C,P,Q)),
((A,D,Q,M), (B,C,P,N)), ...

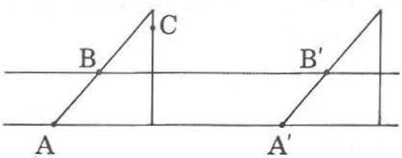
Extensions :
- translation dans l'espace,
- translation dans le plan.

Retrouver ici la construction des solides β et γ.

(C) *Dessin géométrique*

a) Tracé des parallèles avec la règle et l'équerre. Tracé lié à la translation :

$t_{\overrightarrow{AA'}}$: B $\longmapsto$ B′



(BB′) parallèle à (AA′) passant par B.

(A,B,B′,A′) est un parallélogramme.

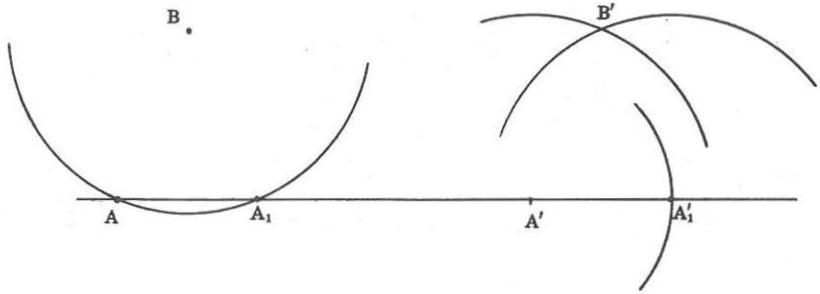
L'équerre glisse sur la règle située sur (AA'). Le côté de l'équerre n'a pas d'importance (trois possibilités de glissement).

Tracé de perpendiculaire avec la règle et l'équerre. Par C, mener la perpendiculaire à (AA'). Faire découvrir par des glissements adaptés que la construction peut se faire même si le point C est tel que d(C,(AA')) est plus grande que chacun des côtés de l'équerre.

b) Reconstitution d'un quadrillage à partir de la maille (A,B,B',A') par des translations successives selon deux directions.

c) Tracé de parallèles avec le compas utilisant le fait que la translation est une isométrie dans le plan métrique. Exemple : tracer la droite passant par B et parallèle à (AA').

N.B. — On retrouve aussi que la perpendiculaire en B à (AA') est la médiatrice de $[AA_1]$ (tracé classique).



$$BA_1 = BA \;;\; \overrightarrow{A'A'_1} = \overrightarrow{AA_1} \;;\; A'B' = A'_1B' = AB \;;\; BB' \,/\!/\, AA' .$$

(D) *Mesures*

1. Mesure des volumes.

a) Construction d'un volume à partir d'un volume unité (par translation dans trois directions : paver une surface et empiler des pavés plats). Nombre de volumes-unité.

b) Construction d'un pavé droit avec des cubes équivalents.

c) Rechercher à empiler des cubes équivalents dans un pavé droit. (Découvrir l'encadrement de la mesure)

Cet exercice peut se faire avec les solides β, γ, δ .

d) Tracer sur un solide α des quadrillages par faces qui construisent comme en b) (dessin géométrique).

2. Mesure des surfaces.

a) Construction d'une surface à partir d'une surface unité par glissement plan dans deux directions (celles des côtés). Nombre de volumes-unité.

b) Construction d'un rectangle avec des carrés équivalents. Nombre de carrés.

c) Chercher à carreler un rectangle quelconque avec des carrés équivalents (Découvrir l'encadrement de la mesure).

d) Recherche de l'aire d'une surface quelconque tracée sur papier quadrillé.

e) Etablir pour un pavé droit une relation entre volume et mesure de la surface d'une face.

Formule : $V = B \times h$

B mesure la surface d'une face,
h est le nombre de couches (utilisation des empilements), l'unité de surface et l'épaisseur de la couche sont des "unités concordantes".

3. Mesure des longueurs.

a) Construction d'un segment à partir d'un segment de longueur unité (côté d'un carré par exemple).

b) Encadrement d'une longueur.

c) Etablir pour un rectangle une relation entre la mesure de la surface et les longueurs des côtés.

Formule : $S = a \times b$

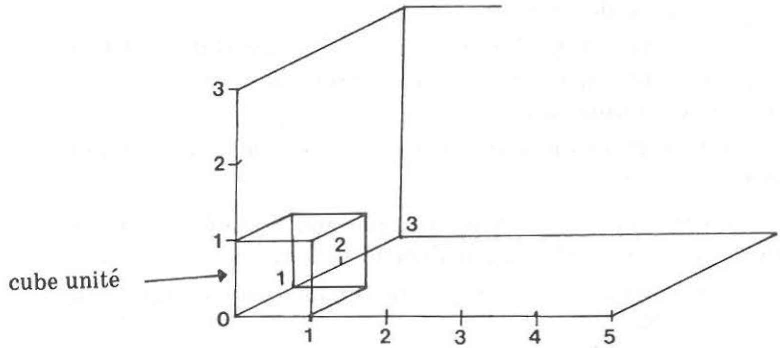
a et b mesurent les côtés avec la même unité.

d) Etablir pour un pavé droit une relation entre le volume et la mesure des arêtes.

Formules : $V = a \times b \times c$

et dans $V = B \times h$ constater que suivant le cas la mesure B est égale à ab, bc ou ac et que la mesure h est respectivement c, a ou b .

Pour mesurer V, B, h, S, il suffit de graduer trois arêtes du pavé droit comme ci-après.



De nombreuses applications numériques suivront avec les naturels ou les décimaux.

(E) *Dessin d'art*

Penser à Vasarelli.

On pourrait continuer longuement encore sur le thème du pavé.

1.2. TRIANGLE EQUILATERAL ET TRILLAGES

par une équipe de l'I.R.E.M. de Toulon

Une équipe du stage premier cycle de Toulon (74-75) s'est proposé de rechercher dans la littérature disponible des situations exploitables et d'aboutir si possible à des textes, non certes définitifs, mais suffisamment travaillés pour être présentés ainsi à nos élèves.

Sur le thème "*triangle équilatéral - hexagone régulier*", nous avons observé qu'on pouvait d'abord :

— en sixième, utiliser la fiche 21 des "Problèmes série verte" (O.C.D.L.)

— en sixième ou cinquième, utiliser la fiche 22/2 des fiches d'accompagnement de D. Barlier (et autres) (Hachette, collection 65/43, classe de sixième).

On aurait intérêt à pousser la recherche du paragraphe 2 de ce document :

— en étudiant les codages des déplacements menant de A à B (en variant le choix de (A, B)) ;

— en cherchant les règles qui permettent sur l'écriture de reconnaître de tels déplacements ;

— en définissant des déplacements équivalents (d équivalent à d' si, quel que soit le noeud de départ, d et d' définissent le même noeud d'arrivée).

Si le principe de la variabilité des situations étudiées (diversité d'habillage et diversité de contenu) est important, et s'il est certain qu'une situation ne doit pas lasser, il reste qu'on risquerait de ne récolter que du vent en multipliant les situations au détriment d'un travail approfondi.

Le document en question souffre probablement d'avoir été conçu non pour un travail de groupe mais pour un travail individuel dirigé en 50 minutes.

D'où l'idée d'écrire pour les classes de cinquième et quatrième des fiches prolongeant celles-ci : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Ce sont ces fiches que nous vous présentons.

D'abord quelques commentaires sur chacune.

$\boxed{1}$ Le trillage s'engendre lui-même ... mais quelle en est la "cellule génératrice" ? On a là un problème assez ouvert et pourtant bien à la portée des élèves de cinquième travaillant en groupes de trois ; le groupe apporte :

- l'autocritique ramenant au respect de la règle "connaître au moins deux points" ceux qui l'oublient ;
- l'initiative et le courage de reprendre la recherche plus méthodiquement.

$\boxed{2}$ — Mais comment commencer ?

a) on peut faire feu de tout bois,

b) ou faire appel à un duo célèbre !

— Et puis si on construit c'est pour utiliser.

$\boxed{3}$ "On n'a pas besoin d'un trillage — régulier ou non — pour faire étudier symétrie centrale et translation ! C'est artificiel !".

"Bien sûr ; mais on peut aussi penser qu'une petite théorie des translations est plus facile lorsque ce mot renvoie à l'intériorisation d'actions diversifiées : interprétation sur un quadrillage d'une famille d'applications de Z^2 dans Z^2, composition de symétries ponctuelles, glissements. Or, pour ne pas privilégier un aspect, il faut un matériel qui permette de travailler assez rapidement : le trillage permet, sans abuser du quadrillage, d'éviter les trop longs tracés du papier uni".

"Et si un autre thème (pavage du plan) est abordé, il fera apparaître le trillage non régulier. Et tant mieux si nos apprentis géomètres se demandent, devant une activité, si l'un peut remplacer l'autre".

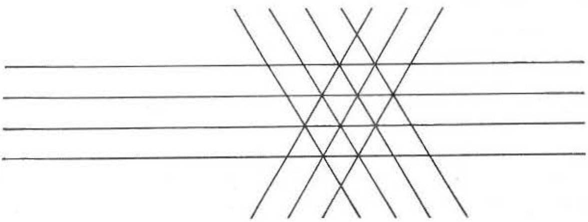
$\boxed{4}$ Ce peut être un travail à la maison, plus tard, au moment où il déclenchera peut-être la question "mais est-ce que nous pouvons prouver que ... ?".

$\boxed{5}$ C'est un petit pot-pourri (aires, observation, distance). On peut remarquer que nous nous exprimons dans le langage de l'enfant, appelant "distance" v(x,y) qui n'en est pas une. Chacun reste libre de décider, lors de la synthèse que ce travail appelle, de préciser ou non que les mathématiciens réservent ce terme à une "bonne" distance, symétrique.

La distance p, c'est la taxi-distance de Papy, transposée au trillage non orienté. On peut donc poursuivre (cinquième ou troisième) avec l'étude des ensembles liés à toute distance (cercle, médiatrice, segment) en s'inspirant des documents qui existent pour le quadrillage [NICO 5 Taximétrie (Papy) ; NICO 17 Taximétrie à cinq ans (C. Randour) ; R.T.S. Atelier de pédagogie : document d'accompagnement de l'émission "Taxidistance"].

$\boxed{6}$ Pas d'âge minimum requis.

FICHE $\boxed{1}$



1°) Peux-tu poursuivre la construction du trillage avec la règle et le crayon ? (On peut tracer une droite si on connaît *au moins deux* de ses points). Donne à chaque nouvelle droite un numéro dans l'ordre 1, 2, 3 ...

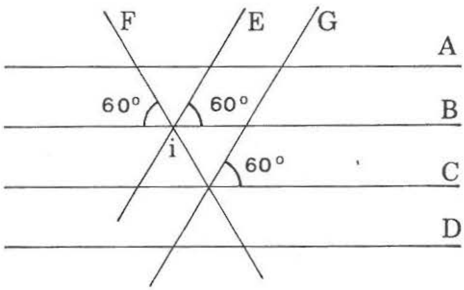
2°) Reprends la figure de départ et efface une droite : peux-tu alors poursuivre la construction ?

3°) Quelle est la figure de départ contenant *le moins* de droites qui permet de poursuivre la construction du trillage ?

FICHE [2]

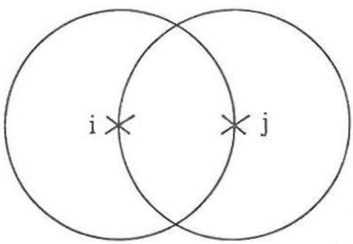
1°) Veux-tu apprendre à commencer un trillage ? Voici deux procédés :

a)



1. Les droites parallèles *équidistantes* A, B, C, D, sont décalquées sur un quadrillage.
2. Les droites E et F sont placées avec le rapporteur, le choix du noeud initial i étant indifférent.
3. Tu places encore G avec le rapporteur et tu peux alors poursuivre avec la règle seule.

b)



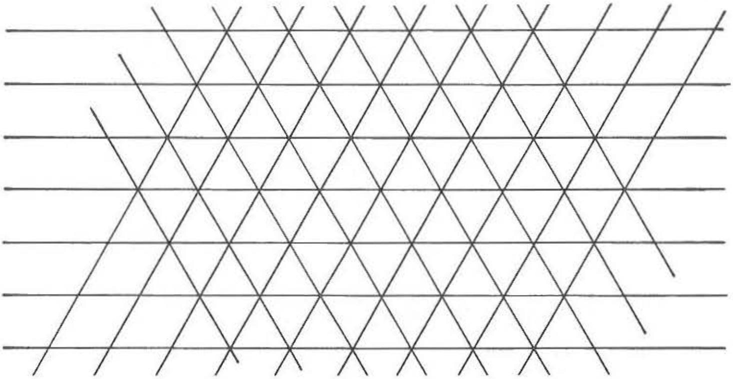
1. Tu choisis deux points i, j .

2. Tu traces : le cercle de centre i qui passe par j
le cercle de centre j qui passe par i .

3. Il y a maintenant 4 points qui permettent de tracer 6 droites : trace seulement les 5 droites qui déterminent deux triangles équilatéraux.
Ces 5 droites et les 2 cercles déterminent .... points d'intersection qui, à leur tour, déterminent de nouvelles droites qui ....

2°) Cherche les *polyèdres* dont le patron peut être découpé dans un trillage.

FICHE $\boxed{3}$



1°) Rappelle la définition de la symétrie *centrale* ou demande-la ; illustre-la.

2°) Choisis deux noeuds sur le réseau, O_1 et O_2 :

— place un point A (un noeud aussi) ; trouve son symétrique pour O_1 — A' — puis le symétrique de A' pour O_2 — A'' — ; recommence avec d'autres points B, C, D, ... jusqu'à ce que tu aies tous les couples (x, x'') dont l'extrémité n'est pas hors de ta feuille.

— que peut-on dire des couples de points (x, x''), c'est-à-dire (A,A''), (B,B'') ... ?

— observe les quadrilatères (x x'' y'' y), c'est-à-dire obtenus en traçant les quatre segments [x x''], [x'' y''], [y'' y], [y x] pour tout choix de { x, y } ; un nom convient à tous : lequel ?

3°) Propose un codage des déplacements sur le réseau ; donne alors :

— les codages de quelques-uns des plus courts chemins de O_1 à O_2 ;

— les codages de quelques-uns des plus courts chemins de A à A'', de B à B'', etc...

Observe .

— ayant choisi un noeud x , peux-tu trouver x'' sans utiliser les symétries pour O_1 et O_2 ?

Retenir

Sur le trillage infini, l'ensemble des couples (x, x'') est le graphe d'une application appelée *translation*.

FICHE $\boxed{4}$

Composition de symétries centrales

• Nous noterons S_{0_1} la symétrie de centre O_1 .

• Sur un trillage, ou sur un quadrillage, choisis 3 noeuds O_1 , O_2 , O_3 ; x désignant un noeud quelconque, on cherchera $x' = S_{0_1}(x)$ puis $x'' = S_{0_2}(x')$

puis $\overline{x} = S_{0_3}(x'') = S_{0_3}\,[S_{0_2}\,(S_{0_1}(x))]$

ou $\overline{x} = S_{0_3} \circ S_{0_2} \circ S_1(x)$.

Cherche les couples $(x, \overline{x})$ pour le plus grand nombre possible de noeuds A, B, C, D, ... etc.

Remarque : x peut aussi être pris en O_1 , en O_2 , en O_3 !

Conclusions pour $S_{0_3} \circ S_{0_2} \circ S_{0_1}$?

• Simplifions : notons 1, 2, 3 ... les centres des symétries, S_1 , S_2 ... les symétries correspondantes.

— Etudier les applications $S_1 \circ S_3 \circ S_2$, $S_2 \circ S_1 \circ S_3$, $S_1 \circ S_2 \circ S_3$, $S_2 \circ S_3 \circ S_1$, $S_3 \circ S_1 \circ S_2$.

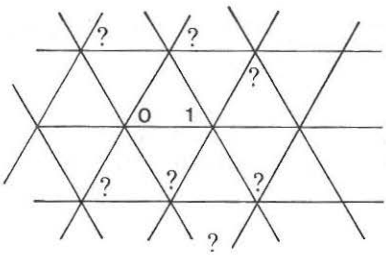
— Etudier l'application $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

— Etudier l'application $S_5 \circ S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

. . . .

FICHE 5

• Est-il possible d'attribuer à chaque noeud d'un trillage un des chiffres 0, 1, 2 de façon que les trois noeuds de toute maille du réseau portent trois chiffres différents ?



• Si a est l'aire d'une maille, comment sont codés les triangles d'aires 4a, 9a, 16a, etc... ?

• Observer le réseau R_0 dont les noeuds sont les points codés 0.

Observer le réseau R_1 dont les noeuds sont les points codés 1.

Comparer l'aire d'une maille du trillage et celle d'une maille du réseau R_0.

• Une ville a pour réseau de rues un trillage. Toutes les rues sont à sens unique, avec la règle :

on peut aller de 0 à 1, de 1 à 2, de 2 à 0.

Examiner la situation :

— du point de vue de la circulation : peut-on aller de n'importe quel point à n'importe quel point ?

— du point de vue de l'aménagement des carrefours.

• Pour tout couple (x,y) de noeuds on peut noter p(x,y) la distance parcourue par un piéton pour se rendre de x à y, v(x, y), la distance parcourue par une voiture pour se rendre de x à y.

— Comparer les 4 nombres p(x,y), p(y,x), v(x,y), v(y,x).

— Quand a-t-on :
$v(x,y) = p(x,y)$? $v(x,y) > p(x,y)$? $v(x,y) < p(x,y)$?

FICHE $\boxed{6}$

I. Le rouge et le noir (d'après STEINHAUS, "100 problèmes").

Sur un trillage est-il possible d'affecter à chacun des noeuds l'une des couleurs "rouge" ou "noir" de façon que pour chacune des mailles les règles suivantes soient respectées :

* si deux sommets de la maille ont la même couleur alors le troisième sommet est rouge ;

** si les couleurs de deux sommets sont différentes alors le troisième sommet est noir ?

II. Comparaisons du nombre de noeuds rouges et du nombre de noeuds noirs. Observons :

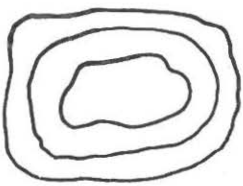
1°) sur une droite quelconque du dessin on observe la répétition périodique "rouge, noir, noir, rouge, noir, noir, ..." : donc il y a deux fois plus de noirs que de rouges ;

2°) un noeud rouge est le centre d'un hexagone dont les six sommets sont noirs : donc il y a six fois plus de noirs que de rouges ;

3°) de chaque noeud noir partent six segments dont trois conduisent à des noeuds rouges et trois à des noeuds noirs : donc il y a autant de noeuds noirs que de rouges !

Compare ces trois raisonnements et dis lequel te paraît juste.

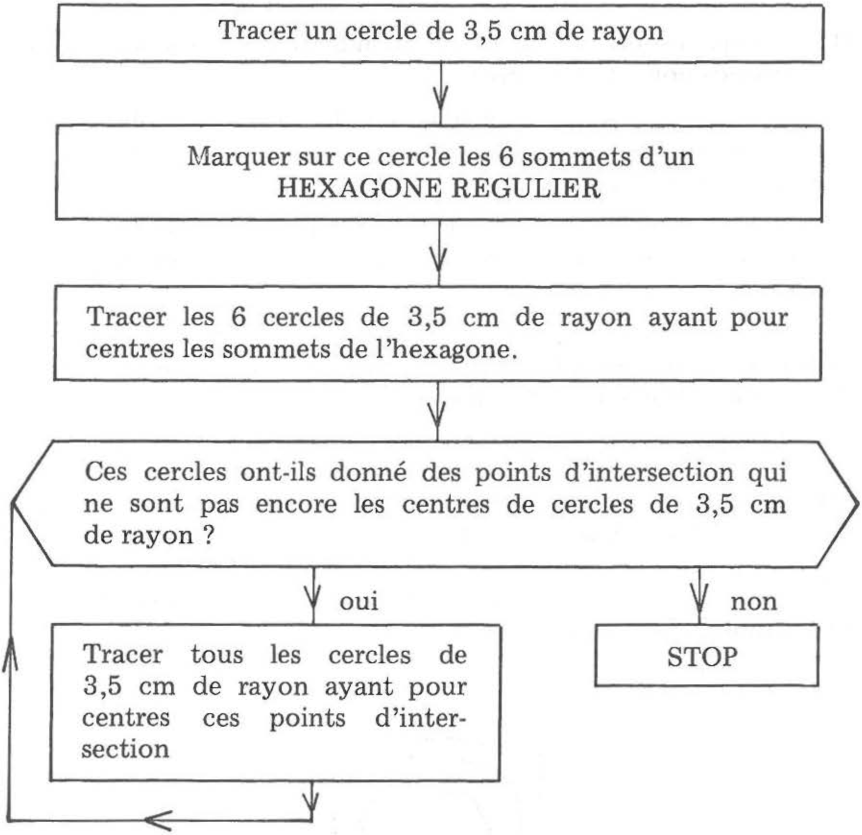
III. Un peu de statistique. Sur un trillage aussi grand que possible (mais à petites mailles) trace des lignes fermées ne passant par aucun des noeuds et limitant des surfaces d'aires croissantes S_0, S_1, S_2, ... Compare, pour chaque surface, le nombre de noeuds noirs et le nombre de noeuds rouges.



ANNEXE

Magdeleine MOTTE, qui nous communique ce travail d'équipe, nous adresse également sur ce thème ce texte qu'elle a utilisé en cinquième comme devoir à la maison, après lecture en classe.

La construction de l'hexagone régulier a été vue plus tôt dans l'année dans un devoir proposant un dénombrement de chemins dans une ville de plan hexagonal.



B/ Imaginer un pavage utilisant uniquement des segments joignant deux points distants de 3,5 cm et le réaliser à l'encre noire.

(Plusieurs solutions)

Au verso, nommer exactement les polygones utilisés.

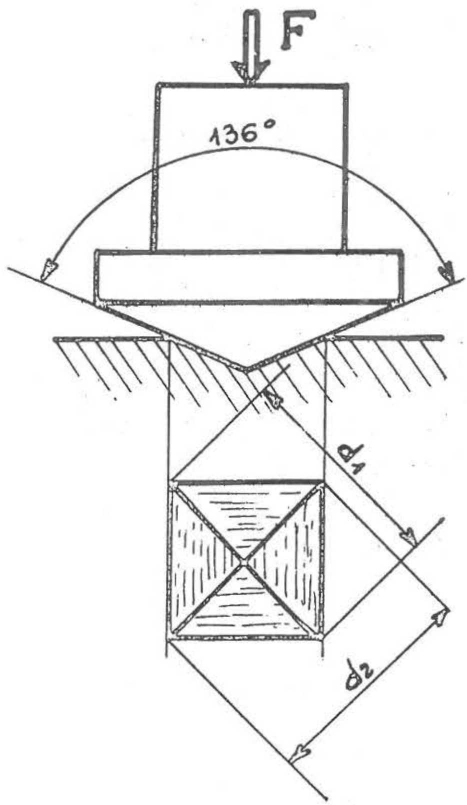
1.3. TECHNOLOGIE ET MATHEMATIQUES

A. APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE A L'ESSAI DE DURETE VICKERS

Principe de l'essai

Données technologiques

Le pénétrateur est une pyramide à base carrée dont l'angle au sommet est 136°. Ce pénétrateur, soumis à l'action d'une force F (en kgf), laisse une empreinte dans le matériau à essayer. Après l'essai, on mesure la diagonale — d — de la base carrée de l'empreinte pyramidale.



Remarques : pour plus de précision, on mesure les deux diagonales de l'empreinte et l'on fait la moyenne :

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

A titre de renseignement d : [0,15 ; 0,55 mm] selon la dureté.

La dureté (HV) est définie par le rapport $\frac{F}{S}$, où F est la force exercée sur le pénétrateur (en kgf) et pouvant prendre une des valeurs suivantes :
5 — 10 — 20 — 30 — 50 — 80 — 100 ,

et où S est l'aire latérale de l'empreinte (en mm^2) qui sera fonction de d .

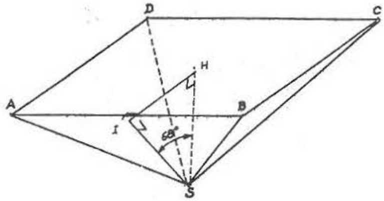
Problème posé

Trouver la formule de l'aire de l'empreinte permettant de calculer la dureté du matériau.

AC = d (diagonale du carré ABCD)

$$AB = \frac{d\sqrt{2}}{2} \; ; \; HI = \frac{AB}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{4}$$

$$SI = \frac{HI}{\sin 68^\circ} = \frac{d\sqrt{2}}{4 \sin 68^\circ}$$



Aire latérale de l'empreinte :

$$S = 4 \times \frac{AB \times SI}{2} = 2\,AB \times SI$$

$$S = 2\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{d\sqrt{2}}{4 \sin 68^\circ}\right) = 2\left(\frac{d^2 \,.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{8 \sin 68^\circ}\right) = 2\left(\frac{2\,d^2}{8 \sin 68^\circ}\right)$$

soit $S = \dfrac{d^2}{2 \sin 68^\circ}$ avec $\sin 68^\circ = 0{,}927$

$$\boxed{S = \frac{d^2}{1{,}854}} \qquad \boxed{HV = \frac{F}{S} \quad \text{ou} \quad \frac{1{,}854\,F}{d^2}}$$

Publication IREM de Rouen
Groupe C.E.T. du Havre

*

* *

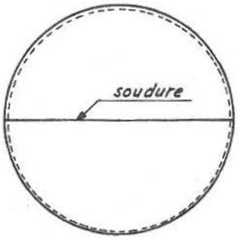
B. LA TRIGONOMETRIE APPLIQUEE A LA PROFESSION DES METAUX EN FEUILLES

Problème Technique I

Confection d'un flotteur de forme sphérique en aluminium.

Données Techniques

Pour obtenir un faible poids pour un grand volume, la pièce sera exécutée en deux éléments demi-sphériques à partir d'un disque de tôle (flan capable) qui seront ensuite assemblés.



Nous considérons, pendant les opérations de formage, que l'épaisseur reste constante, et que la matière est bien homogène.

Problème mathématique

Déterminer le rayon du flan capable à l'exécution d'un élément.

Calcul mathématique

Nous pouvons dire que la surface de la demi-sphère est égale à la surface du flan.

R : rayon de la sphère
r : rayon du flan

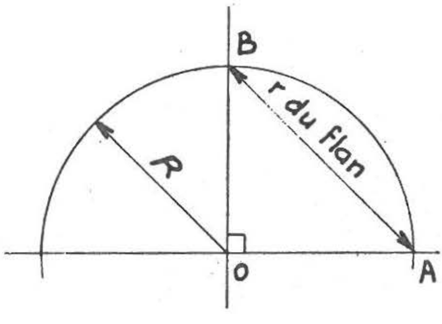
$$2\,\pi R^2 = \pi r^2$$
$$r^2 = 2R^2$$
$$r = R\sqrt{2}$$

Solution graphique

On vérifie que dans le triangle rectangle OAB

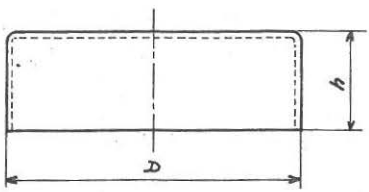
$$R^2 + R^2 = r^2$$
$$2R^2 = r^2$$
$$r = R\sqrt{2}$$

(théorème de Pythagore).



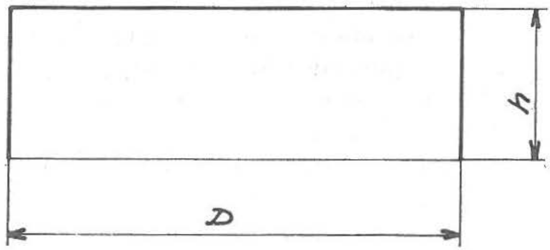
Problème technique II

Soit à confectionner des couvercles de boîtes cylindriques par emboutissage. A cet effet, il est nécessaire de calculer le rayon du flan nécessaire à la confection d'un couvercle.



Pour simplification de calcul nous négligeons l'épaisseur et le rayon de pliage.

Calcul mathématique



La surface du flan est égale à la surface totale de la pièce. Soit D le diamètre du couvercle
h la hauteur du couvercle
r le rayon du flan.

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (D \times \pi \times h)$$

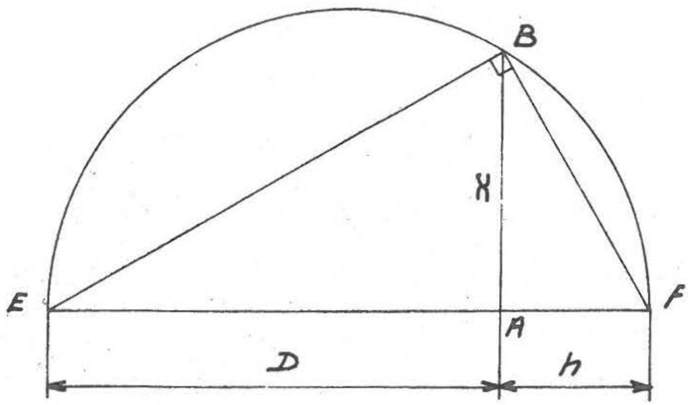
$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{D^2}{4} + Dh\right)$$

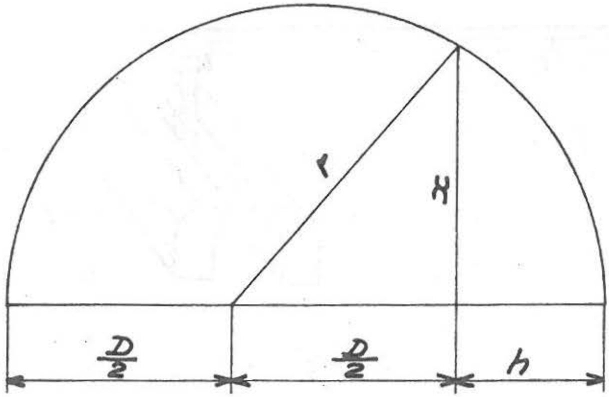
$$r^2 = \frac{D^2}{4} + Dh = \frac{D^2 + 4Dh}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + 4Dh}}{2}$$

Solution graphique

$AB^2 = EA \times AF$
si $AB = x$
$x^2 = D \times h$
$x = \sqrt{Dh}$





$$r^2 = (\frac{D}{2})^2 + x^2$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4} + Dh$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + 4Dh}}{2}$$

Publication IREM de Rouen
Groupe CET du Havre

*
* *

C. UN THEME EN TRIGONOMETRIE - TECHNOLOGIE

par Gérard CONVERSET

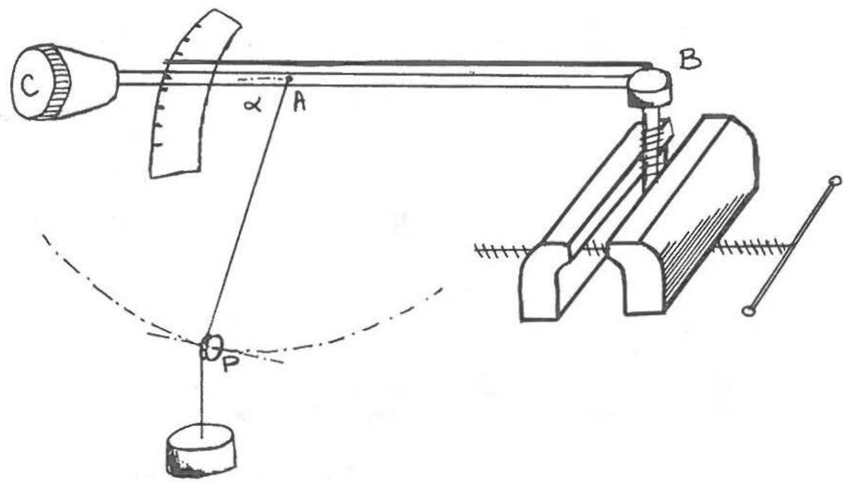
Dans le programme de troisième de Technologie, figure au chapitre "Mécanique" l'étude des rotations, de leur transmission, de leur guidage au travers d'objets facilement observables.

On est amené ainsi à étudier la limitation du freinage par frottement (rondelle ou surépaisseur qui amène les surfaces en contact le plus près possible de l'axe) et le rôle de la longueur du bras de manivelle (réduction de l'effort pour un résultat donné).

Cette étude, au départ basée sur l'observation et l'analyse de l'objet, débouche tout naturellement sur le moment d'une force.

En quatrième, la notion avait été vue de façon diffuse en étudiant les balances à bras égaux et inégaux et le pèse-lettres. En troisième, on peut isoler le phénomène qui nous intéresse, et en profiter pour en faire, suivant sa place dans la répartition annuelle, une leçon d'initiation à la Trigonométrie ou une séance interdisciplinaire Mathématique-Technologie plus complète.

J'avais réalisé le montage suivant :



Un boulon est solidement fixé sur un étau et serré à l'aide d'une clé.

Avec une clé dynamométrique, on mesure le couple de serrage. On maintient fixe la force exercée et le point d'application de celle-ci (Une masse est suspendue à un fil, qui passe sur une poulie P et vient s'accrocher en A au bras de la clé).

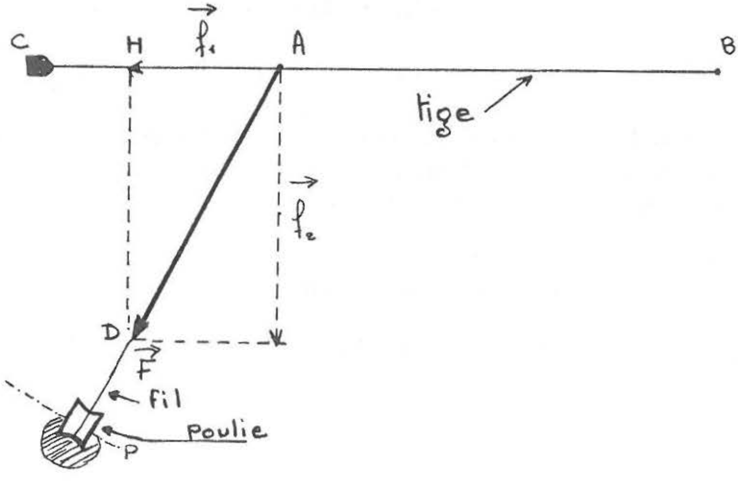
En déplaçant la poulie, qui est simplement tenue à la main, on modifie la valeur de l'écart angulaire CAP. Un rapporteur, tenu par un élève, indique de 0 à 180° cette valeur. La clé se déforme, et un cadran se déplaçant devant un index indique le couple de serrage.

Sur du papier millimétré, on reporte en abscisse e(CAP) de 10° en 10°, en ordonnée le couple indiqué. On obtient une demi-période qu'il est facile de compléter en choisissant un sens pour le couple et en mettant la poulie de l'autre côté (Attention que le boulon ne se desserre pas).

Une fois en possession de cette courbe, on voit facilement où se situent les couples maximum et on illustre ce résultat en se reportant à l'exemple des clés à molette, du pédalier de la bicyclette, etc...

On voit qu'il y a la double influence de la distance à l'axe de rotation et de "quelque chose" qui a rapport avec l'angle d'incidence de la force.

Une étude théorique facile, même en début de troisième, permet de dégager ou d'illustrer la notion de sinus :



La force $\vec{F}$, constante puisque c'est le poids du corps suspendu, se décompose en $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$.

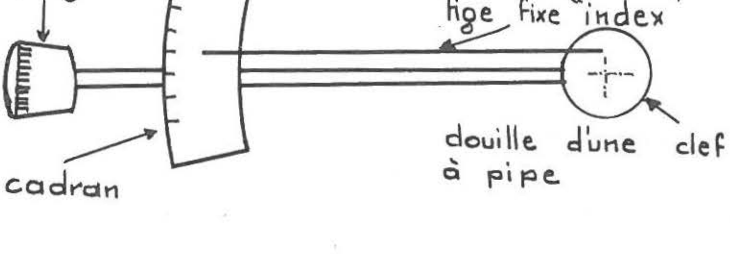
$\vec{f_1}$ n'a aucune influence sur la rotation.

$$\|\vec{f_2}\| = HD$$

$$\sin \alpha = \frac{HD}{AD} \Rightarrow HD = AD \sin \alpha = k \sin \alpha$$

$\vec{f_2}$ sera d'autant plus grande que α sera plus proche de 90°.

Nota — La clé dynamométrique que j'ai utilisée (marque Facom) a été prêtée par l'atelier du CES, mais il est très facile d'en faire une avec une clé ordinaire et deux morceaux de baguette sur le schéma suivant :

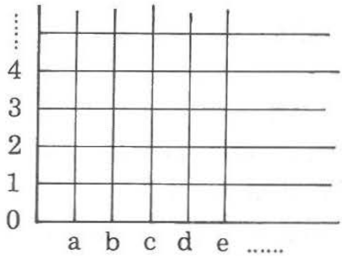


1.4. UN THEME MARITIME

par François CARNET et Joël LEROY (I.R.E.M. de Caen)

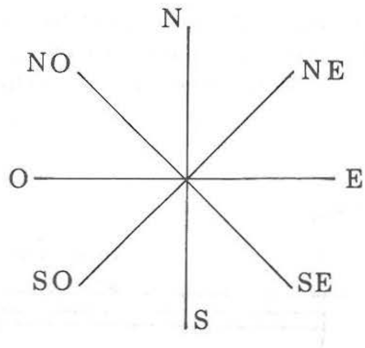
L'ORIENTATION POLAIRE EN MARINE pour une approche de : Repérage, Direction, Sens, Secteurs angulaires, Vecteurs, Classes d'équivalence, Arcs, Mille marin, Noeud.

LA ROSE DES VENTS. Dessiner le polygone dont les sommets ont les coordonnées cartésiennes suivantes dans le repère ci-dessous : (h, 13), (i, 10), (l, 12), (j, 9), (m, 8), (j, 7), (l, 4), (i, 6), (h, 3), (g, 6), (d, 4), (f, 7), (c, 8), (f, 9), (d, 12), (g, 10).



C'est une rose des vents. La colorier. Placer N, NE, E, SE, ...

A l'aide de la règle et du compas tracer une rose des vents simplifiée :



VENT — COURANT — CAP — MILLE — NOEUD

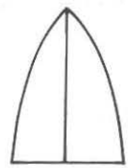
On dit d'un vent du Nord qu'*il vient du Nord*. D'un courant de Nord, qu'*il porte au Nord*. D'un navire dont le cap est au Nord, qu'il *se dirige vers le Nord*.

Voici les représentations :

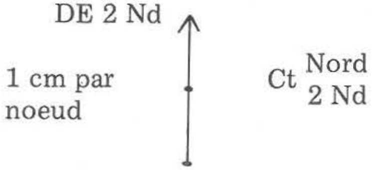
VENT DU NORD (en noeuds)

10 Nd, 20 Nd, 30 Nd,.. 50 Nd...

CAP AU NORD

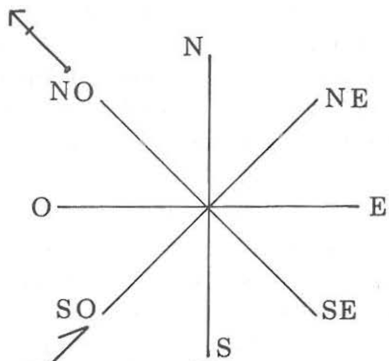


COURANT DE NORD
DE 2 Nd



EXERCICE N° 1 : En vous aidant de la rose des vents et des schémas ci-dessus, placer a) un vent de SO de 40 Nd ; un courant de NO de 1,5 Nd ; un navire dont le cap est au Sud.

Remarque : Une réponse sera celle de la figure ci-contre. Une meilleure réponse est celle où l'élève se passe de la rose des vents. Introduire alors la notion de classe d'équivalence et d'un représentant de la classe et faire l'exercice n° 2.



EXERCICE N° 2 : Sur une carte simplifiée de la Baie de Seine un navire se situe au Nord de Ouistreham, à l'ouest du Havre. Il fait route au NE. Le vent de 50 noeuds est au SE. Le courant d'Ouest est de 4,5 Noeuds. Représenter le navire, le vent, le courant. (On appelle "point" l'endroit où se situe le navire. Y placer le navire)

EXERCICE N° 3 : Rappeler les notions de coordonnées géographiques : latitude, longitude. Pour garder un système de mesure cohérent on choisit le mille marin comme unité de longueur. Le mille marin est l'arc terrestre correspondant à une minute d'angle au centre. Exprimer le mille marin en kilomètres.

40 000 : 360 = ... arc correspondant à 1° .

. . . . : 60 = arc correspondant à 1° ou mille marin.

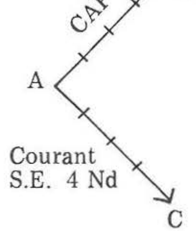
On appelle *NOEUD* l'unité de vitesse. Un noeud = 1 mille/h. Le "FRANCE" filait 35 noeuds. Donner cette vitesse en km/h.

EXERCICE N° 4 : a) Un navire situé au point $\begin{cases} L = 49°30'N \\ G = 1° \ 15'O \end{cases}$

parcourt un chemin estimé à 7 milles vers le Nord. Donner son point après ce parcours R $\begin{cases} L = 49° \ 37' \ N \\ G = 1° \ \ 15' \ O \end{cases}$.

b) Un navire situé au point $\begin{cases} L = 49°37'N \\ G = 1° \ 15'O \end{cases}$ se déplace vers l'ouest et parcourt 10 milles. Sachant qu'un parallèle n'est pas un grand cercle de la sphère terrestre, le navire aura parcouru une distance dont la mesure de l'arc en minutes terrestres est supérieure à celle donnée en mille. La raisonnement du a) n'est plus valable. Les marins utilisent des tables.

EXERCICE N° 5. Un navire situé au point A est soumis à un courant de SE de 4 noeuds et son cap est au NE. Son moteur lui donne une vitesse surface de 4 noeuds. Où se trouvera le navire au bout d'une heure ? en B ? en C ?



1.5. LE PAPIER PEINT

par Daniel CARRIOT, O.P.C. Clermont, D. BOISNARD et M. Th. LE CAM, O.P.C. Vannes

Ce document est le résultat d'un travail collectif mené dans le cadre de la recherche OPC. Le thème du "Papier peint" suffisamment connu et développé permettait d'obtenir un large consensus quant aux objectifs mathématiques poursuivis. Danièle Boisnard dans une classe de Troisième, Marie-Thérèse Le Cam dans une classe de Cinquième, Daniel Carriot dans une classe de Sixième ont donc conduit une expérimentation et c'est une synthèse de leurs comptes rendus que je présente ici.

I. La phase d'observation du papier peint

1. En classe de Sixième elle a duré 4 heures.

Les élèves sont invités à reconstituer un lé de papier peint préalablement découpé en rectangles. Ils procèdent par essais successifs (échec — réussite) et l'on ne note pas chez eux de tentatives méthodiques. Un autre exercice consiste à remettre aux enfants divers échantillons de papier peint sans aucune directive et de recueillir les différentes observations. Il peut leur être demandé de boucher un trou dans un échantillon, à partir d'un motif existant. On s'efforcera de leur faire dégager le déplacement à effectuer.

L'observation est facilitée et prolongée par des exercices de dessins et de mesurages. La répétition de formes (carré, triangle rectangle isocèle, rectangle) ayant été reconnue, il est utile chez de jeunes élèves de les faire dessiner en vraie grandeur. On peut aussi leur demander de dessiner sur une feuille 21 × 27 l'échantillon qu'ils possèdent à l'échelle 1/2, la consigne étant d'occuper toute la feuille 21 × 27. Ainsi sont-ils conduits à prolonger le motif qu'ils ont sous les yeux. On notera à ce propos combien nous nous sommes efforcés de réinvestir des connaissances déjà acquises (ici la proportionnalité avec la notion d'échelle) et de poursuivre à côtés d'objectifs spécifiquement mathématiques des objectifs variés (ici exécution d'une tâche technique). De tels exercices peuvent paraître très simples. Cependant nombreux sont les élèves qui perdent pied. Ceux là ne voient plus les "diagonales", la plupart travaillent "au coup par coup". Ainsi ayant à construire les 2 carrés juxtaposés de la figure n° 1, ils dessinent d'abord le carré n° 1, puis le carré n° 2 sans vue synthétique de l'ensemble.

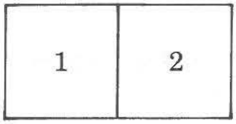


fig. 1

2. Les élèves de Troisième connaissaient les isométries du programme avant d'observer le papier peint. Il s'agissait pour eux de mettre à profit leurs connaissances et de les appliquer en "découvrant ce qu'ils connaissaient". Des échantillons ayant été distribués, on demande aux élèves de rechercher et de définir pour chacun de ces échantillons, et dans le cas où elles apparaissent :

a) les translations en précisant une base de vecteurs et un motif élémentaire minimum associé. Il peut exister différentes solutions.

b) les symétries orthogonales en précisant les axes de symétrie et le motif élémentaire associé.

c) les symétries centrales en précisant les centres de symétrie et un motif élémentaire associé.

En faisant comparer les réponses d'un groupe à l'autre, on amène les élèves à reconnaître des données équivalentes. Lorsqu'ils reconnaissent la solution d'un autre groupe comme acceptable, ils ont fait progresser leur capacité à changer de point de vue. Ceci concourt à la satisfaction d'un objectif général non négligeable.

II. La phase d'analyse

Elle vise à mettre en évidence l'existence d'un motif élémentaire, d'un ensemble de transformations (translation, symétrie axiale, symétrie centrale) et la dépendance du motif élémentaire et de la (ou des) transformation(s) utilisée(s). Ainsi les élèves de Sixième constateront-ils que si le motif élémentaire est réduit à un triangle ils doivent utiliser le calque avec retournement (cf annexe n° 2). Ainsi encore, dans le travail réalisé en classe de Troisième (cf annexe n° 1) on demande quel est le motif élémentaire dans le cas où les seules transformations permises sont les translations. Ils constatent, bien entendu, que celui-ci est bien plus grand que celui qui correspond aux symétries centrales. Ils constatent aussi que le plus petit motif élémentaire correspond aux symétries orthogonales. Cette constatation vise à attirer l'attention sur l'idée de système de générateurs.

Mais revenons aux classes de Sixième et de Cinquième pour décrire plus en détail cette phase d'analyse. Elle se situe, me semble-t-il, à deux niveaux.

Niveau n° 1

L'enfant prend conscience des transformations, se fixe des règles de jeu, utilise le papier calque, la règle, l'équerre, le pliage, les machines du type parallélogramme articulé...) manipule, décrit en utilisant son vocabulaire et ses gestes.

Niveau n° 2

- passage à la représentation.

- l'enfant va vérifier si la règle *formulée* est pertinente ; il va être amené à comparer plusieurs règles entre elles.

1) On donne aux enfants un échantillon (assez grand) de papier peint et on leur demande quel motif élémentaire permettrait de le reconstituer. Ils disposent d'un papier calque et de tous instruments classiques. Puis ils doivent prouver leurs affirmations en exécutant effectivement les déplacements indiqués.

2) On donne un échantillon et un motif élémentaire. Ils doivent reconstituer le modèle à l'aide d'appareils articulés (machine à symétriser, machine à translater, etc...). Quelles machines utilise-t-on ?

3) On donne un échantillon et le motif élémentaire et on demande *de citer* les transformations qui vont permettre de reconstituer le modèle. La description étant établie, on réalise les transformations indiquées pour vérifier la validité des hypothèses (utilisation du calque par exemple).

4) L'échantillon étant donné, on recherche le plus petit motif élémentaire ; non seulement les élèves de sixième ont échoué dans cet exercice, mais, le motif élémentaire leur étant apporté par le maître, plusieurs n'ont pas été capables de reconstituer l'échantillon et nous avons obtenu beaucoup de constructions fausses : les axes de symétrie à utiliser étaient les 3 côtés du triangle rectangle (cf. annexe II). Ainsi ces enfants qui ne sont pas parvenus à un modèle "implicite" ont également échoué dans l'exécution d'une tâche qui leur était restée "extérieure".

5) Inversement le point départ est maintenant le motif élémentaire. Il s'agit de composer une tapisserie.

5.1. l'élève est libre de choisir son motif élémentaire et les procédés à employer (calque, pochoir, pliage, appareils articulés, instruments de dessin habituels) pour composer son modèle.

5.2. l'élève compose une tapisserie à l'aide d'un motif élémentaire et de consignes donnés par l'enseignant. On notera que c'est le point de départ de l'exercice donné en classe de Troisième.

5.3. à partir du même motif qu'en 5.2. et d'une autre transformation, l'élève compose une nouvelle tapisserie qu'il pourra comparer avec celle obtenue en 5.2.. L'aboutissement à des tapisseries différentes à partir d'un même motif "choque" les élèves (même en Troisième) et leur montre la puissance de l'idée de transformation.

III. Prolongement et applications

1) Vers des activités numériques.

Nous avons déjà fait observer un certain nombre d'activités de mesurage et de calcul. Celle que nous décrivons ici concerne *les quadrillages.*

- l'élève doit réaliser un motif et son (ses) image(s) à partir de coordonnées fournies.

- un échantillon étant proposé et un quadrillage sur calque étant fourni à l'élève, celui-doit lire les coordonnées de certains points du motif élémentaire et celles de leurs images. En comparant les résultats il essaiera de déterminer une "règle de jeu".

Ce travail est en relation avec un travail sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$.

- prolongement d'un échantillon : l'élève doit calculer les coordonnées du $n^{ième}$ point image, celui-ci n'étant pas construit sur le modèle donné.

- On donne les coordonnées du motif élémentaire et de son image et l'élève doit déterminer la (les) transformation(s) permettant de passer de l'un à l'autre. Il vérifiera ses résultats en utilisant soit les appareils articulés, soit le calque, soit le pliage, les instruments de dessin (etc.) .

2 Etude systématique de glissements et de retournements

Dans les classes de Sixième, le travail s'est poursuivi en sytématisant par une étude sur fiches (4 h) les glissements et les retournements du plan. Les 3 fiches utilisées sont celles initialement prévues pour les classes OPC de Quatrième de Clermont-Ferrand.

a) mise en évidence du glissement et du retournement, superposition d'un triangle équilatéral à lui-même, codage de cette superposition.

b) composition de glissements et de retournements

c) étude de quelques glissements "importants"
- rotation
- translation

construction d'une règle graduée.

3) Etude de quelques pavages du plan.

- l'hexagone régulier.
- le triangle quelconque. On obtient en particulier le pavage (fig. 2) qui fait apparaître que la somme des mesures des angles d'un triangle est 180°. A ce stade il est intéressant *de déduire* que la somme des mesures des angles aigus d'un triangle rectangle est 90° et que dans un triangle équilatéral chaque angle mesure 60° .

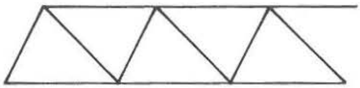


fig. 2

Ainsi apparaît un "ilot déductif" très court avec tout de même des renseignements intéressants qui pourront être réutilisés.

4) Conclusion

Il nous faut rappeler que nous proposons un enseignement par thèmes, qui sont des centres d'intérêt motivant, et que notre travail est un travail par niveaux :

a) manipulation
b) schématisation
c) formalisation

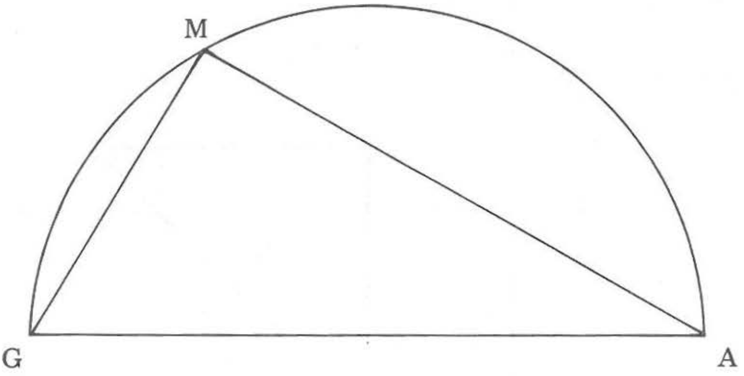
Evidemment en Sixième et en Cinquième nos ambitions sont modestes. Mais il est essentiel de ne pas s'en tenir au niveau 1.

Parallèlement, et toujours dans le cadre de notre recherche OPC, nous nous proposions de traiter la ligne "papier peint" du tableau des objectifs ; c'est cette ligne que nous fournissons maintenant, en n'ignorant pas tout ce qu'elle comporte d'incomplet et d'imperfections !

Résumé des objectifs opérationnels sur le thème "Papier peint"

Heuristique	Calculatoire	Classificatoire	Traductif	Logique	Réinvestissement	Technique	Critique	Prospectif
Recherche d'un motif élémentaire	Dessin à l'échelle 1/2	Etude comparée de déplacements.	Codage de déplacements	activités de déduction à propos des angles d'un triangle.	Notion d'échelle	Construction soignée de motifs à l'aide d'un motif élémentaire. au moyen de différentes isométries.	Pourquoi ne pave-t-on pas avec certaines figures ?	Groupe des déplacements
Puzzle	Table de composition des déplacements.	Transformations ou composées de transformations équivalentes.					Recherche d'une coquille dans une frise	
	Travaux dirigés sur quadrillage; approche ou activités sur Z, Q, D.	Classification de figur figures globalement invariantes.					Etude des différentes solutions proposées	

ANNEXE N° 1



Sur la feuille ci-jointe, vous trouverez un *motif élémentaire AMG.*

2.1. Effectuez la symétrie orthogonale d'axe (AG). Soit N l'image de M par cette symétrie.

2.2. Sur la figure obtenue, opérez la symétrie orthogonale d'axe (MG). Soit B l'image de A et P l'image de N.

2.3. Effectuez maintenant la symétrie orthogonale d'axe (AP). C est l'image de R.

2.4. Effectuez la symétrie orthogonale d'axe (BC). D est l'image de A.

Puis effectuez successivement :

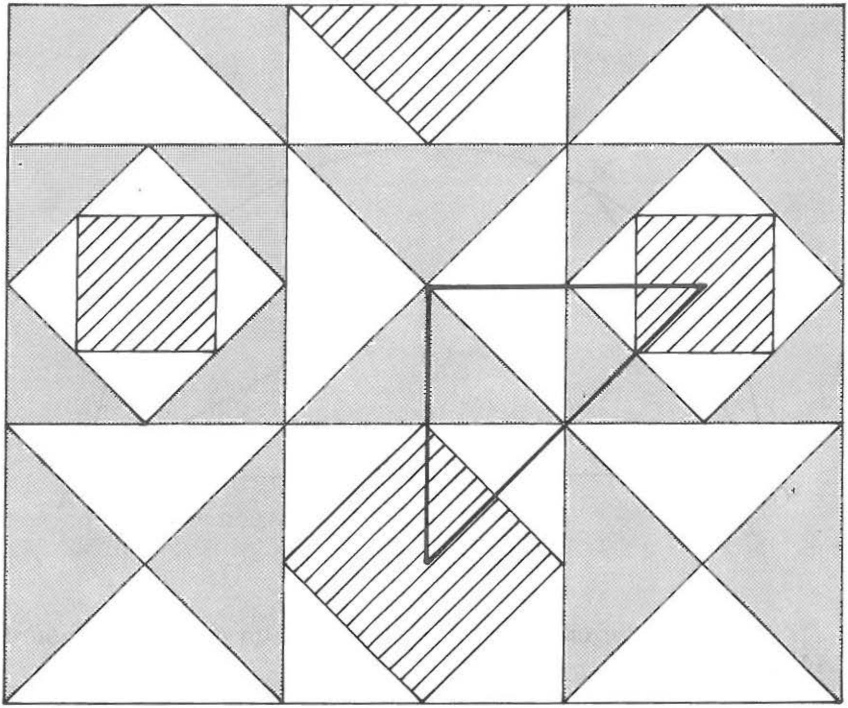
2.5. La translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $(A,B) \in \vec{u}$.
B a pour image E et D a pour image F.

2.6. La translation de vecteur $\vec{v}$ tel que $(A,C) \in \vec{v}$.
C a pour image H et F a pour image I.

2.7. La translation de vecteur $(-2.\vec{u})$.
A a pour image K et H a pour image L.

2.8. La translation de vecteur $(2.\vec{v})$.

2.9. Complétez votre dessin pour recouvrir toute votre feuille par les méthodes qui vous semblent les plus simples.



ANNEXE N° 2

Les élèves de Sixième ont échoué dans la recherche et l'utilisation de ce motif élémentaire.

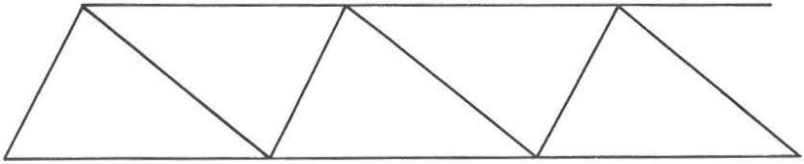


Fig. 2 — Paver le plan avec des triangles quelconques.

1.6. AFFINE OU METRIQUE ?

Extraits du n° 11 du Bulletin de Liaison des Professeurs de Mathématiques (AUDECAM, Association Universitaire pour le Développement de l'Enseignement et la Culture en Afrique et à Madagascar) et du "Petit Archimède" 37-38.

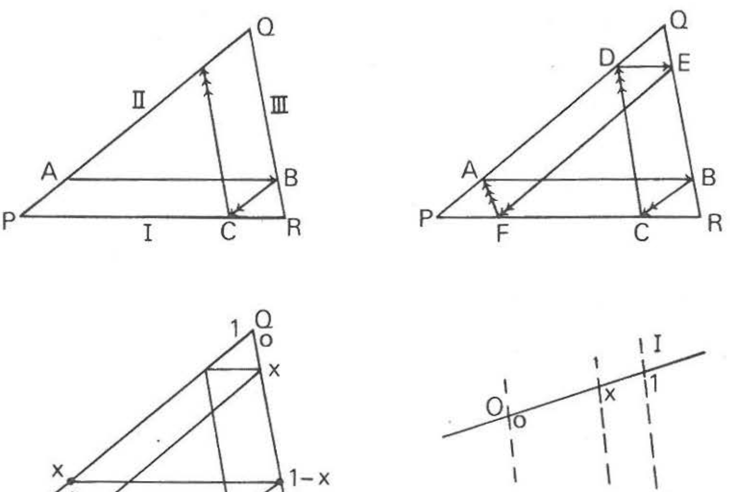
Textes d'André MYX (Lyon).

Cet article est particulièrement destiné aux élèves de quatrième, troisième et au-delà... et à tous les collègues, qui comme moi, ont parfois des doutes sur ce qui sépare

- la géométrie affine
  (en un mot Thalès)
- la géométrie métrique ou euclidienne
  (Pythagore pour simplifier)

Bref, rentrons dans le vif du sujet...

1. Les figures ci-dessous représentent le film d'une propriété du triangle que le lecteur connaît peut-être déjà.



Nous nous apercevons que notre ligne polygonale se ferme au bout de deux tours, en un seul si on choisit le point de départ A au milieu du côté...

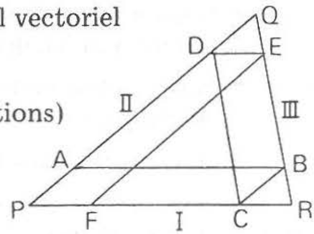
- Certaines démonstrations sont très élégantes : je pense à celle qui nous fait choisir :

  (P, Q) pour repère de la droite II
  (Q, R) pour repère de la droite III
  (R, P) pour repère de la droite I.

  On démontre alors que le projeté de F sur II parallèlement à III est un point d'abscisse x, c'est-à-dire le point A.

Nota bene. — Si O′ est le projeté de O et I′ le projeté de I, il suffit de savoir que la bijection $x \longmapsto y$ est involutive (le calcul de $y = 1 - x$ est inutile !).

- Bien sûr, il est possible de choisir l'outil vectoriel (définition du parallélogramme) :



$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DQ}$ (trois premières projections)

De même

$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FP}$

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EQ}$ si on veut prouver que A est le projeté de F sur II parallèlement à III :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{EQ} \end{aligned}$$

- Voici enfin une démonstration pour élève de Terminale C :

  N'oublions pas que les preuves les plus élégantes supposent le plus souvent une préparation laborieuse. Très rarement — je ne l'ai jamais rencontré dans un ouvrage — on fait appel à la *symétrie oblique* par rapport à d, parallèlement à PR...

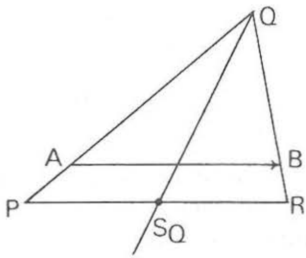
La transformation affine composée S :

$S = S_P \circ S_R \circ S_Q \circ S_P \circ S_R \circ S_Q$

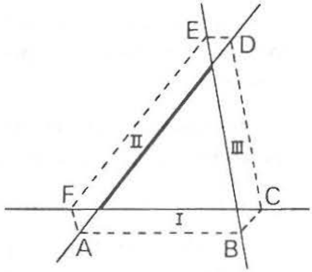
est telle que

$S(P) = P\ ,\ S(Q) = Q$ et $S(R) = R$

C'est l'identité... Concluez !



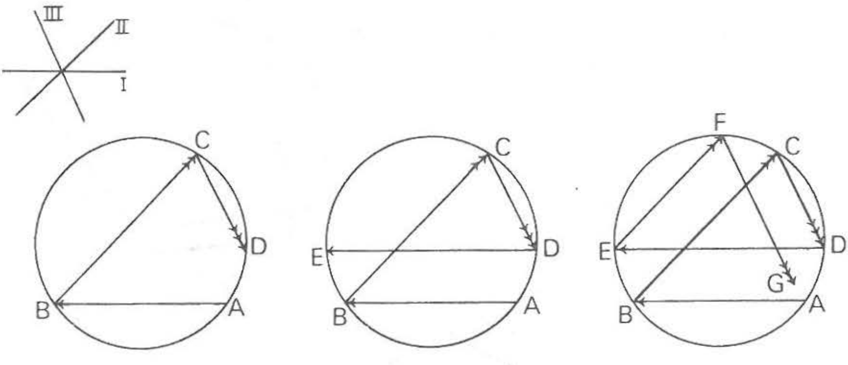
2. Nous avons l'habitude de choisir le point de départ sur le segment en trait fort sur la figure. La propriété semble moins mystérieuse si nous prenons le point de départ sur un des prolongements du côté du triangle...



3. J'en restais là lorsqu'un de mes amis (Pierre Gagnaire) me dit de recommencer le même dessin (animé) avec comme support, non pas un triangle, mais un cercle, un vrai, un qui soit tracé au compas !

Voici le mode d'emploi :

On se donne trois directions I, II et III (on pourrait dessiner un triangle) et on recommence le film des projections selon I, II, III, puis une deuxième fois si besoin est.



Tiens, tiens, cela se referme aussi !

Alors, cette propriété est-elle affine ou métrique ?
Ne répondez pas tout de suite ; attendez la fin...

Une ultime question sur ce cercle :

Où faut-il placer le point A si on veut que cela se referme en un seul tour ? Là, la démonstration semble plus compliquée que pour le triangle où il est simple de prouver que cela ne se produit que pour les milieux des côtés.

Et la démonstration de la propriété ?

Là encore, c'est affaire de symétrie et en examinant la figure achevée, nos lecteurs peuvent déjà trouver une solution — quitte à admettre une propriété bien évidente sur les arcs de cercle.

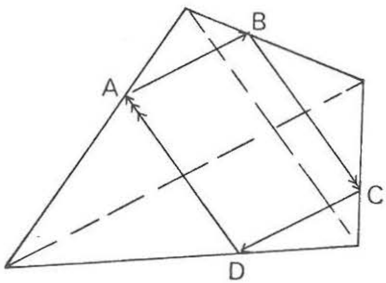
Si vous aimez le dessin, vous pouvez recommencer ces tracés avec cette fois-ci une ellipse !

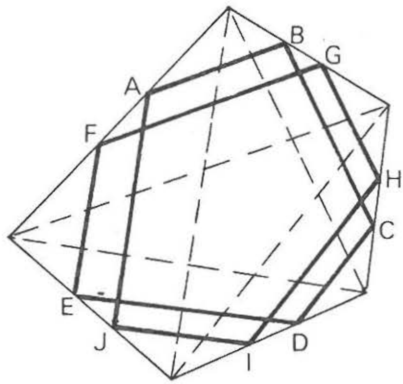
(Anciens professeurs de Math-Elem, à vos rangs !).

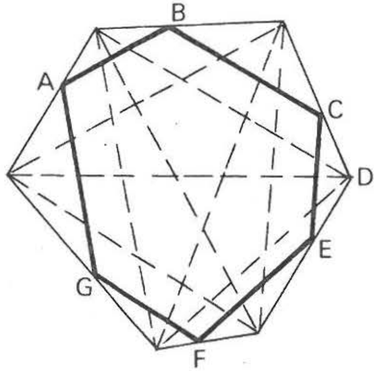
4. Pour terminer, nous pouvons revenir au triangle, ou plutôt aux polygones, et examiner les trois figures ci-dessous.

Qu'avons-nous voulu dessiner ?
Qu'avons-nous illustré ?

A vous de décrire ces dessins, d'en imaginer d'autres et de trouver quelques preuves bien ajustées.

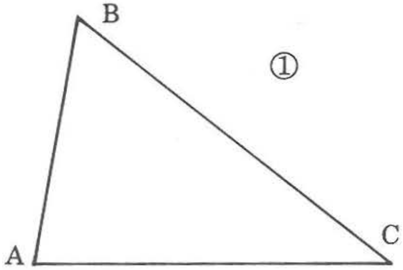






1.7. SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

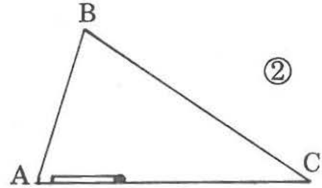
par Pierre GAGNAIRE, I.R.E.M. de Lyon

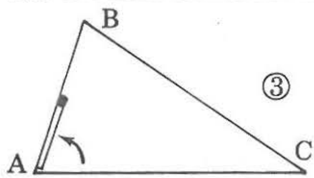


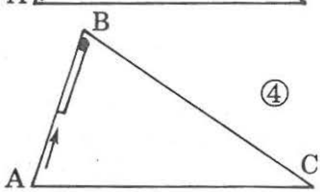
$\boxed{1}$ Voici un triangle ABC dessiné sur du papier. Mesurons-en les angles au rapporteur. Nous trouvons, par exemple, à 0,5° près :
$\hat{A} = 81°$, $\hat{B} = 61{,}5°$, $\hat{C} = 38°$, d'où
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 81° + 61{,}5° + 38° = 180{,}5°$.

Renouvelons cette expérience avec des triangles de formes et tailles diverses : nous constatons que, dans tous les cas, la somme des angles est *voisine* de 180° . L'écart constaté entre 180° et la somme des mesures effectives des angles est-elle due à l'imprécision des expériences ?

$\boxed{2}$ Plaçons au point A une allumette comme l'indique la figure ② (l'extrémité rouge vers C), puis faisons-lui exécuter le parcours indiqué par les figures ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ; les flèches des figures ③, ⑤, ⑦, représentent des *rotations*, celles des figures ④, ⑥, ⑧ représentent des *glissements*.

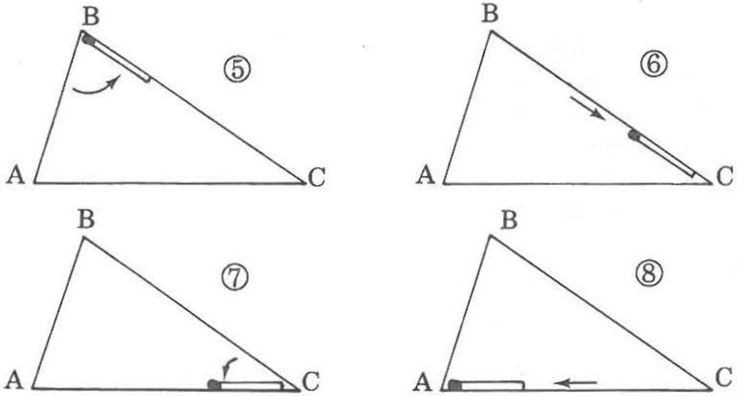






Sur la figure ⑧ , l'allumette est revenue au point A mais elle est dirigée en *sens contraire* de la position qu'elle avait en ② . Elle a donc fait 1/2 tour, ou encore a tourné de 180° . Cette rotation de 180° ne peut provenir que des trois rotations décrites en ③ (d'angle $\hat{A}$), en ⑤

(d'angle $\hat{B}$), en ⑦ (d'angle $\hat{C}$)
Donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



$\boxed{3}$ Ce qui a été décrit au paragraphe $\boxed{2}$ peut être aussi bien exécuté sur un *triangle sphérique*, à condition de remplacer l'allumette par une bande étroite de papier dont on coloriera une extrémité en rouge (cette bande s'appliquera sur la sphère parce qu'elle est flexible, alors qu'une allumette ne le peut pas).

Or, il est possible de tracer sur la sphère un triangle trirectangle, dont la somme des angles est 270°. Et pourtant, la rotation de l'"allumette" qui exécute le parcours ci-dessus décrit est toujours 180°.

Comment expliquer ce paradoxe ?

1.8. SUR LE THEME "MEDIATRICE, ORTHOGONALITE, PARALLELISME"

par Jean GIRAUD

On sait que certaines équipes (OPC par exemple) traitent ce thème en début de Quatrième, ce qui me semble très souhaitable pour de multiples raisons. Je me propose d'analyser les conditions, avantages et conséquences de ce choix du seul point de vue d'un mathématicien qui n'a jamais enseigné dans ces classes. Il me semble de bonne méthode de commencer par une analyse sommaire de la mathématique sous-jacente, du triple point de vue des concepts utilisés pour s'exprimer, des énoncés admis et des démonstrations qu'il est possible de faire, mais en même temps je montre à quel point cette entrée en matière permet de faire voir aisément que la "théorie" mathématique étudiée rend parfaitement compte de l'activité du dessinateur, armé de ses outils traditionnels. Le lecteur verra aussi que l'on peut très vite illustrer la *méthode* qui consiste à appliquer quelque isométrie simple à une figure pour en prouver les propriétés désirées.

§ 1. Etude mathématique

Il faut disposer de l'ensemble des nombres réels, du sous-ensemble de ceux qui sont positifs (par quoi on entend supérieurs ou égaux à 0) et de l'addition. On a rapidement besoin de diviser par 2, mais la multiplication n'est guère utilisée. L'étude des nombres réels peut donc être menée de front avec celle de cet ilôt géométrique.

Pour rendre compte de l'activité du dessinateur, on imagine un ensemble P appelé plan dont les éléments sont appelés points, un ensemble $\mathcal{D}$ dont les éléments sont des parties de P que l'on appelle droites et une application $d : P \times P \longrightarrow R^+$, appelée distance et qui est souvent notée d(A,B), ou |AB| ou même AB. Le dessinateur reporte les distances à l'aide d'un compas, il les mesure avec une règle graduée.

Nous admettons que deux points distincts A et B déterminent une droite D. Ils déterminent aussi le segment [A,B] qui est défini par $[A,B] = \{ M \in P, d(A,M) + d(M,B) = d(A,B) \}$ et dont nous admettons qu'il est contenu dans la droite D et que, pour tout nombre réel x , avec $0 \leqslant x \leqslant d(A,B)$, il existe un unique point $M \in [A,B]$ avec $d(A,M) = x$.

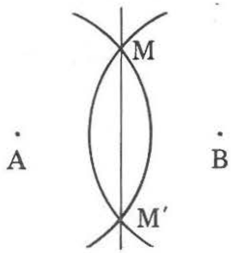
En fait, il nous suffirait d'avoir défini le *milieu* de [A,B] et admis son existence. On sait ce qu'est le cercle de centre 0 et de rayon R positif et l'on admet

(1) **Deux cercles de centres distincts et de rayons égaux et assez grands se coupent en deux points exactement.**

(II) **L'ensemble des points équidistants de deux points A et B, avec A ≠ B, est une droite appelée *médiatrice* de [A,B]*.**

* Je n'ai pas osé blasphémer et prendre (II) comme définition, ce qui eût évité d'introduire cet ensemble $\mathcal{D}$ qui n'est là que pour la précision du langage.

On peut donc *construire* la médiatrice D de [A,B] en considérant deux cercles de centres A et B, de rayon R assez grand, leurs deux points d'intersection M et M′ et la droite qui joint M et M′. On observe alors que AMBM′ est un *losange*, ce qui veut dire que AM = MB = BM′ = M′A. On dit qu'une droite D est orthogonale (ou *perpendiculaire*) à une droite D′ s'il existe deux points distincts A et B de D′ tels que D soit la médiatrice de [A,B]. La *construction* de la médiatrice montre alors que D′ est perpendiculaire à D.



Elle montre aussi que les *diagonales d'un losange sont perpendiculaires*. On observe alors que, si l'on dispose quatre équerres superposables comme le suggère la figure, on trouve un losange et surtout que les huit côtés les plus courts se juxtaposent quatre à quatre sur les diagonales du dit losange. On en conclut que le dessinateur peut tracer des perpendiculaires avec une *équerre*, ce qui conduit à admettre

(III) **Soit D une droite. Par tout point M, il passe une unique perpendiculaire à D ; elle coupe D en un seul point.**

Proposition 1. Soit D une droite et M un point n'appartenant pas à D. Il existe un unique point M′ tel que D soit la médiatrice de [M,M′] .

Par définition, la médiatrice de [M,M′] est perpendiculaire à la droite M M′ et passe au milieu de [M,M′]. On trace donc la perpendiculaire à D passant par M qui coupe D en I et M′ ne peut être que le point tel que I soit le milieu de [M,M′] .

Il est séduisant de prouver plutôt la proposition en "inversant" la construction de la médiatrice. On admet alors que

(IV) **Un cercle de centre donné et de rayon assez grand coupe une droite donnée en deux points exactement.**

mais cela ne suffit pas tout à fait à prouver que la construction évidente aboutit à un point M′ *différent* de M : pour cela on peut admettre (ce qui est laid) que si deux cercles se coupent en un seul point, celui-ci est sur la droite qui joint les centres.

Définition - On appelle symétrique d'un point M par rapport à une droite D

(i) **le point M s'il appartient à D**

(ii) **le point M′ tel que D soit la médiatrice de [M,M′] si M $\notin$ D.**

On appelle symétrie par rapport à D l'application $s_D : P \longrightarrow P$ qui associe à M son symétrique.

On admet que s_D *conserve la distance*, d'où l'on tire que l'image d'une droite perpendiculaire à D est elle-même, car c'est la médiatrice d'un couple de points de D et $s_D(s_D(M)) = M$; d'ailleurs toute droite est une médiatrice, donc son image est une droite ; les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ; image d'un cercle, d'un segment ...

Remarque 1 : Si on a choisi d'admettre (IV), on en tire (III) : si M $\notin$ D, la droite $Ms_D(M)$ convient ; c'est la seule car on a vu que la perpendiculaire est stable par s_D . Si M $\in$ D, d'après (IV) c'est le milieu d'un segment [A,B] porté par D, donc la médiatrice de [A,B] convient. Si D′ est une autre perpendiculaire à D passant par M, la symétrie $s_{D'}$ conserve D et la distance (sic), donc applique A sur B et B sur A ; comme elle induit l'identité sur D′, il en résulte que D′ est la médiatrice de [A,B].

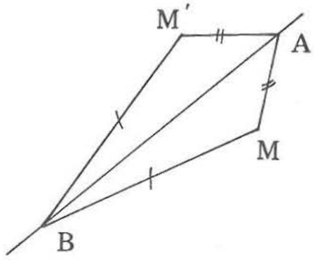
Remarque 2. Sans avoir à faire plus que contempler un losange, on voit que le pliage d'une feuille de papier ou l'image dans un miroir perpendiculaire au plan réalisent une symétrie. De même, les définitions de la médiatrice et du symétrique montrent que l'appareil ci-contre, où A et B sont assujettis à rester sur une droite fixe et où les distances

AM = AM′

et

BM = BM′

sont fixes, réalise la symétrie par rapport à la droite AB.



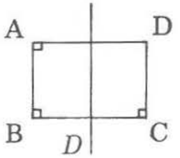
Définition. **On dit que deux droites D et D′ sont parallèles si D = D′ ou si D $\cap$ D′ = ϕ.**

D'après (III), si D et D′ sont perpendiculaires à une même droite D″, alors elles sont parallèles. On admet

(V) **si D est parallèle à D′ et perpendiculaire à D″, alors D′ est perpendiculaire à D″.**

Définition. On dit qu'un quadrilatère ABCD a un angle droit en B si les côtés AB et BC sont de longueur non nulle et portés par deux droites perpendiculaires. On dit que c'est un *rectangle* s'il a quatre angles droits.

Proposition 2. Un quadrilatère ABCD qui a trois angles droits est un rectangle. La médiatrice de [B,C] est aussi celle de [A,D] ; les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu, elles ont même longueur. Les côtés opposés ont même longueur.



En effet, si les angles en A, B et C sont droits, alors AD est parallèle à BC qui est perpendiculaire à DC, donc l'angle en D est droit. Si D est la médiatrice de [B,C], l'image de A par s_D est sur la perpendiculaire à D passant par A, qui est la droite AD, et sur l'image de la droite AB qui est la droite DC, donc $s_D(A) = D$. D'où l'on tire AB = DC et AC = BD. De plus, BD n'est pas parallèle à D ; si l'on note O le point commun, il est fixe par s_D donc il est sur AC et OA = OD. La symétrie par rapport à la médiatrice de [A,B] montre que OA = OB, donc O est le milieu de BD et de AC.

Corollaire. Soient D et D' deux droites perpendiculaires et soit O leur point commun. Pour tout point M, on a

$$s_D(s_{D'}(M)) = s_{D'}(s_D(M))$$

et O est le milieu du segment $[M, s_D(s_{D'}(M))]$.

En effet, si M n'est ni sur D ni sur D', les points $M, s_D(M)$, $s_{D'}(s_D(M))$, $s_{D'}(M)$ forment un rectangle. Si M est sur D ou D'...

Il est temps de s'arrêter puisque l'on change de thème ; non sans avoir noté que la matière développée jusqu'ici permet une foule d'exercices. Nous n'avons jamais utilisé l'inégalité triangulaire; si on le regrette, s'en servir pour prouver que le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur D est le point de D le plus proche de M et pour améliorer les énoncés (I) et (IV).

§ 2. Commentaires

Pourquoi avoir choisi ces définitions vieillotes qui sentent la règle et le compas au lieu d'admettre tout de go l'existence de la symétrie droite ? Parce que cette présentation permet plusieurs niveaux de lecture : on peut se contenter de savoir reconnaître quelques figures simples : losange, deux droites perpendiculaires à une même troisième, une médiatrice, un rectangle. On peut aussi être un peu plus dynamique et les construire avec les instruments de dessin. On peut aussi, si l'on maîtrise le concept de bijection du plan sur lui-même que j'ai utilisé librement, étudier l'image d'une figure par une symétrie (ou plusieurs), ce que fait le texte ; on peut enfin oublier tout cela et énoncer que le composé de deux symétries par rapport à des droites perpendiculaires est la symétrie par rapport à leur point d'intersection, ce que le dernier corollaire n'a pas osé faire en ces termes. A ce stade, on voit bien que l'énoncé est affranchi de la figure et concerne le groupe des isométries. Je crois très souhaitable que le maître ait la possibilité d'ajuster le niveau d'expression aux possibilités des élèves et il dispose d'une gamme très large avec le point de vue présenté ici. Par ailleurs, il faut bien reconnaître que pliage et papier calque ne sont pas les instruments de dessin les plus commodes et il me paraît très important de donner des énoncés constructifs, ou, si l'on préfère, de ne donner un énoncé d'existence que comme résumé d'un procédé de construction, l'unicité devenant une question naturelle (resp. oiseuse) s'il y a plusieurs procédés de construction (resp. un seul qui soit naturel). Il me semble aussi que le pari annoncé de bien faire voir que l'on rend compte de l'activité du dessinateur est assez facile à tenir, sans qu'on soit obligé de s'en tenir à ce point de vue étroit, ce qui serait néfaste (cf. remarque 2).

Pourquoi placer ce thème si tôt ? Il prolonge directement les acquis des classes antérieures. Contrairement à la géométrie affine, il ne nécessite que très peu de savoir sur les nombres réels ; d'ailleurs la nature exacte des nombres que l'on manipule peut être laissée dans l'ombre sans aucun inconvénient. On n'utilise pas la notion d'axe ou de droite graduée (un peu lourde peut-être à mettre en place) sauf en catimini pour dire qu'un segment a un milieu ou encore dans la première preuve de la proposition 1, mais l'axiome (IV) et le compas nous tirent alors d'affaire. Surtout ce thème permet d'emblée beaucoup d'exercices. Enfin, pourquoi pas ? puisqu'il ne déflore guère la géométrie affine (parallélogramme, translations, Thalès).

Je voudrais revenir sur le problème d'adéquation au réel. Dans un film très intéressant sur la symétrie droite (IREM de Vannes), on voit des élèves étudier l'appareil figuré plus haut et croire qu'il réalise une symétrie oblique. Sans doute guidés par leur maître, ils construisent l'image d'une figure par cette transformation et constatent avec stupéfaction que l'appareil, même en forçant un peu, refuse de leur donner raison. Il y a là, comme dit Pérol, une activité qui porte sa propre sanction; le maître n'a pas besoin de dire aux élèves qu'ils ont tort (ou raison). J'y vois plus : la preuve qu'il ne faut pas supprimer la manipulation en Quatrième, voire en Troisième. En effet, voilà une situation merveilleuse dont il serait bien triste de ne pas tirer parti : par définition de la médiatrice, la transformation réalisée par cet appareil se caractérise par le fait que la droite fixe est la médiatrice de M et de son transformé. Certes, les droites portant un point M et son transformé M' sont toutes parallèles, certes les milieux des segments [M,M'] sont sur la droite fixe, ce qu'ont vu ces élèves, mais en outre MM' est perpendiculaire à la droite fixe, ce qu'ils n'ont pas vu. Bien entendu, avec les définitions adoptées ici, ce ne serait qu'une tautologie si l'on n'avait pris soin de faire voir que la perpendicularité se vérifie avec l'équerre et qu'avec cette condition supplémentaire, tout rentre dans l'ordre. Un énoncé mathématique n'est pas gratuit : s'il est vrai, la réalité s'y plie, s'il est faux, elle se rebiffe.

Toujours sur le même sujet, un point essentiel. L'appareil en question, ou tout autre, ne définira jamais qu'une isométrie entre deux morceaux de plan. Or le mathématicien ose considérer des plans qui sont "infinis dans toutes les directions", même s'il se refuse (de nos jours) à écrire pareille horreur. Alors où est l'adéquation au réel ? En ceci bien sûr qu'une isométrie plane est caractérisée par l'image de trois points non alignés, ce qui résulte de (I). Plus modestement, dans le cas présent, l'expérience montre que l'appareil réalise une isométrie, la structure de l'appareil montre que c'est la restriction à une partie du plan de la symétrie par rapport à la droite fixe, transformation que le mathématicien sait définir sans peine dans le plan tout entier. Il me semble que les élèves ont tendance à se poser ce genre de question. Puisque l'on a une réponse à leur proposer, qui en outre est la bonne, pourquoi ne pas tenter de le faire ? Si l'on est optimiste, on peut espérer qu'ils comprendront que peu importe si les êtres mathématiques (comme une droite prolongée indéfiniment) existent ou non, le fait est qu'ils sont soumis aux contraintes exactement nécessaires pour que le raisonnement fait sur eux soit en accord avec le domaine expérimental dont la théorie étudiée est supposée rendre compte. Il y a là un objectif culturel (si ce mot a un sens) aussi important que la connaissance de tel ou tel théorème. Mais on ne l'atteindra pas par un cours de philosophie, encore qu'un cours de philosophie soit bien utile pour l'expliciter mieux que je ne l'ai fait. Mais pas avant d'avoir parcouru, modestement mais avec toute la rigueur possible, l'orbite complète de la démarche scientifique : étude d'un domaine expérimental bien cerné, modèle mathématique simple, mais riche et précis, dont on teste l'adéquation au fur et à mesure de son élaboration, retour au domaine expérimental qui se trouve simplifié, organisé, éclairé. Encore faut-il que le processus de mathématisation ne soit pas trop difficile à manipuler et que les embûches en soient reconnues de longue date. Il me semble que c'est le cas de la géométrie, et j'ai seulement voulu montrer sur un exemple restreint qu'on peut l'enseigner à la fois comme une théorie mathématique et une science expérimentale.

1.9. LE DODECAEDRE ET LE NOMBRE D'OR

par le Père GASPARD

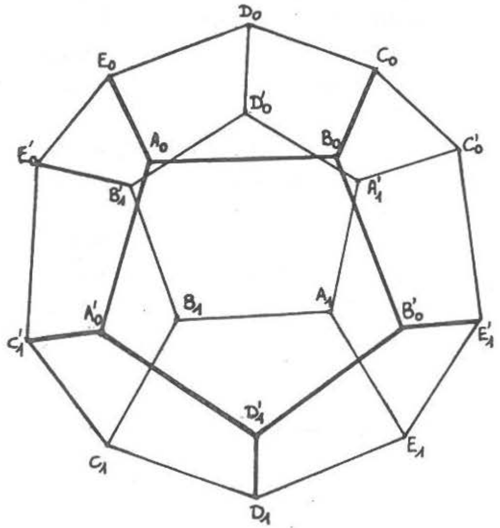
Les anciens de ma génération connaissent les polyèdres réguliers ((1) et (2)). Les plus jeunes ne peuvent pas manquer de faire connaissance avec eux bientôt. En effet, nombreuses sont les publications récentes ((3) et (4)) qui présentent agréablement ces beaux objets et leur environnement de joyaux. Ils constituent un thème riche, exploitable à tous les niveaux de notre enseignement en liaison avec le travail manuel, l'éducation artistique ou d'autres disciplines.

Délaissant le cube et ses dérivés — l'octaèdre et le tétraèdre, dont l'exploitation, quoique riche, est plus élémentaire et serait utilisable dès le premier cycle —, je voudrais évoquer un peu ici quelques éléments du dodécaèdre.

Le dodécaèdre régulier

12 faces qui sont des pentagones réguliers congrus (superposables).

Combien de sommets ?
Combien d'arêtes ?
Le croquis ci-dessous montre sommairement mes notations.



On peut facilement montrer (éventuellement à des degrés de rigueur divers), l'existence de trois sphères concentriques :

— une sphère circonscrite à laquelle tous les sommets appartiennent (rayon R)
— une sphère tangente à toutes les faces (rayon r)
— une sphère tangente à toutes les arêtes (rayon ρ).

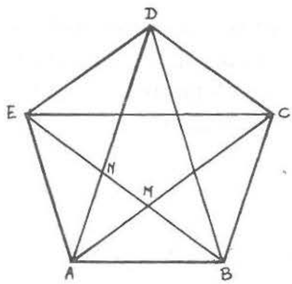
Il est intéressant d'exprimer en fonction de l'une d'entre elles les nombreuses dimensions intéressantes : arête 2a, R, r, ρ , rayons des cercles circonscrits et inscrits aux faces $\mathcal{R}$ et r et les caractéristiques du dièdre.

Nous avons intérêt à commencer notre étude par celle du pentagone régulier.

Le pentagone régulier

Démontrez donc d'abord que M divise la diagonale BE en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire que

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{BM}}$$



Une fois établis les parallélismes cotés-diagonales, c'est un exercice de géométrie affine.

En déduire que le rapport $\frac{BE}{CD}$ est la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire le célèbre nombre d'or :

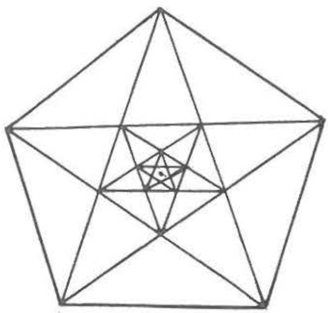
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$$

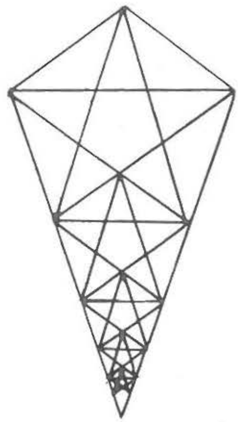
$CD = 2a$; $BE = 2a\,\Phi$; $\frac{ME}{BM} = \Phi$ d'où $BM = 2a\,\Phi^{-1}$

$\frac{BM}{MN} = \frac{CM}{MA} = \Phi$ d'où $MN = 2a\,\Phi^{-2}$.

Le petit pentagone central dont MN est un côté est homothétique de ABCDE dans le rapport $-\Phi^{-2}$.

Si vous aimez les belles figures rythmées, voici pour amorcer votre imagination :





Nous pouvons maintenant exprimer divers éléments géométriques intéressants de cette figure en fonction de AB = 2a. Pour obtenir des expressions élégantes, il est bon d'avoir quelques notions sur la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci

C'est la suite définie par récurrence par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Remarquons que la relation de récurrence permet d'étendre la suite dans les deux sens.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5, \ldots$$
$$u_{-1} = 1,\ u_{-2} = -1,\ u_{-3} = 2,\ u_{-4} = -3, \ldots\ldots$$

Il est bien connu que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi$

Exprimez les puissances de $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ à l'aide de la suite de Fibonacci.

$\Phi^1 = \Phi \qquad\qquad = u_0 + u_1 \Phi$

$\Phi^2 = 1 + \Phi \qquad\qquad = u_1 + u_2 \Phi$

$\Phi^3 = \Phi + \Phi^2 = 1 + 2\Phi \qquad = u_2 + u_3 \Phi$

$\Phi^4 = \Phi + 2\Phi^2 = 2 + 3\Phi \qquad = u_3 + u_4 \Phi$

Démontrez que $\Phi^n = u_{n-1} + u_n \Phi$ pour $n \in \mathbf{N}_*$.

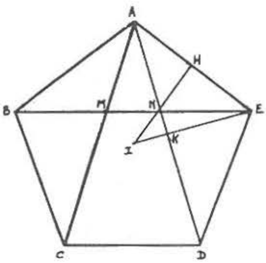
Démontrez aussi la formule pour $n \in \mathbf{Z}$.

Il en résulte une expression de Φ^n sous la forme

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n\sqrt{5}) \qquad \text{avec } a \in \mathbf{Z} \text{ et } b \in \mathbf{Z}.$$

La suite de Fibonacci est aussi une mine d'exercices et de sujets de réflexion à divers niveaux, mais ce n'est pas mon sujet et les quelques remarques ci-dessus me suffiront.

Retour au pentagone



Calculons les rayons des cercles intéressants. Soit I le centre du pentagone. Soit H le milieu d'un côté et K celui d'une diagonale. Le cercle circonscrit au pentagone a pour rayon IA. Le cercle inscrit dans le pentagone a pour rayon IH. Le cercle inscrit dans le pentagone étoilé (et dans le petit pentagone central) a pour rayon IK.

Pythagore donne :

$$IH^2 = IA^2 - a^2 \qquad (1)$$
$$IK^2 = IA^2 - a^2\,\Phi^2 \qquad (2)$$

D'autre part, l'homothétie mise en évidence plus haut donne :

$$IH = IK\,\Phi^2 \qquad (3)$$

De ces trois égalités, nous déduisons :

$$IK^2 = a^2\,\frac{\Phi^2 - 1}{\Phi^4 - 1} = \frac{a^2}{\Phi^2 + 1} = \frac{a^2}{2 + \Phi} = \frac{a^2(3 - \Phi)}{5}$$

$$IH^2 = \frac{a^2}{2 + \Phi}\cdot\Phi^4 = a^2\,\frac{2 + 3\,\Phi}{2 + \Phi} = \frac{a^2(3 + 4\,\Phi)}{5}$$

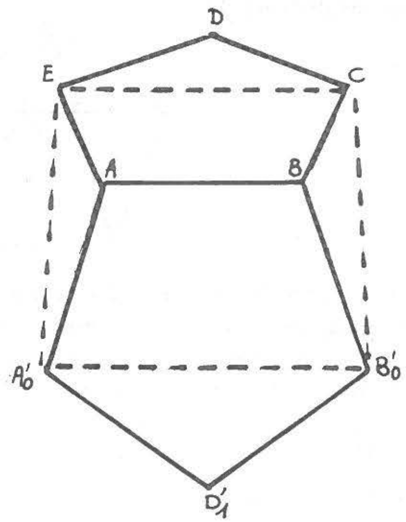
$$IA^2 = a^2\left(1 + \frac{2 + 3\,\Phi}{2 + \Phi}\right) = 4\,a^2\,\frac{1 + \Phi}{2 + \Phi} = \frac{4\,a^2\,(2 + \Phi)}{5}$$

Rien n'empêche de calculer, à titre d'exercice scolaire, le carré du rayon du cercle circonscrit au petit pentagone central et aussi NH^2, KE^2, CH^2, etc....

Mais là encore, nous nous écartons de notre ligne directrice. Calculons pourtant la distance entre un côté et la diagonale qui lui est parallèle.

$$d^2 = 4\,a^2 - \frac{a^2}{\Phi^2} = a^2\,\frac{3 + 4\,\Phi}{1 + \Phi} = a^2\,(2 + \Phi)$$

Le dodécaèdre et le cube



Considérons deux faces adjacentes.

$$\overrightarrow{EC} = \Phi\ \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{A'_0\ B'_0} = \Phi\ \overrightarrow{AB}$$

d'où $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{A'_0\ B'_0}$

$ECB'_0A'_0$ est un parallélogramme.

$$|EC| = 2\,a\,\Phi = |A'_0E|$$

car ce sont des diagonales de pentagones superposables.

Donc $ECB'_0A'_0$ est un losange.

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'_0}.\overrightarrow{AB}\ (= (2a)^2 \cos 108°)$$

d'où

$$\overrightarrow{EA'_0}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AA'_0}).\overrightarrow{AB} = 0$$

$\overrightarrow{EA'_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc perpendiculaire à $\overrightarrow{EC}$ et le quadrilatère $ECB'_0A'_0$ est un carré.

Le lecteur trouvera alors les raisons qui font que E, C, B'_0, A'_0, A'_1, B'_1 , C'_1, E_1 sont les sommets d'un cube dont les notations choisies apparient les sommets opposés.

Ce cube a une arête et une seule dans chaque face de notre dodécaèdre. Voyez (4), page 39.

Un cube analogue peut être construit sur chaque diagonale de l'une des faces du docécaèdre. Ces cinq cubes constituent par leur imbrication une très belle figure.

Voyez (4), page 42.

Calcul des rayons des sphères intéressantes.

Si 2a est la mesure du côté du dodécaèdre, $2a\Phi$ est celle du côté du cube et la diagonale du cube mesure $2a\Phi\sqrt{3}$.

Le rayon de la sphère circonscrite au dodécaèdre (et au cube) est $R = a\,\Phi\sqrt{3}$. Pythagore donne alors tous les autres rayons intéressants :

Le rayon ρ de la sphère tangente aux arêtes :

$$\rho^2 = R^2 - a^2 = 3a^2\ \Phi^2 - a^2 = a^2\ (2 + 3\ \Phi)$$

Le rayon r de la sphère tangente aux faces :

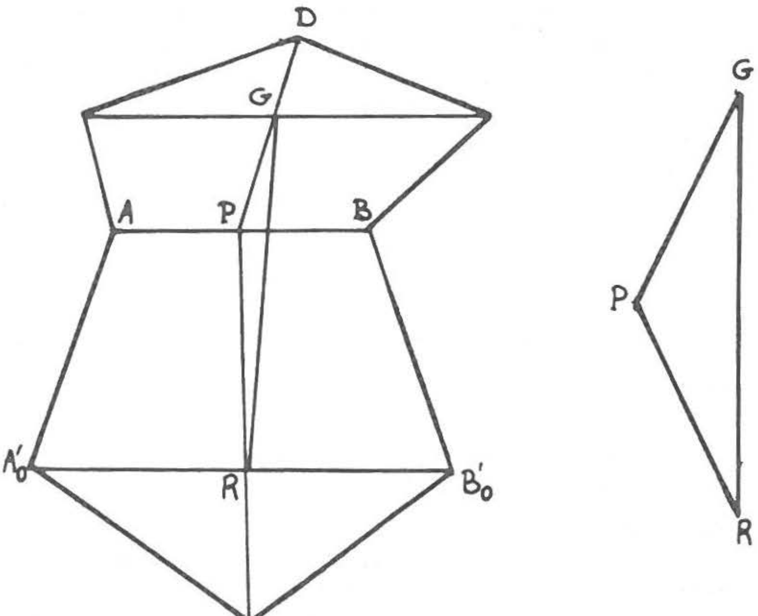
$$r^2 = R^2 - IA^2 = 3a^2 (1 + \Phi) - 4a^2\ \frac{1+\Phi}{2+\Phi} = \ldots = a^2\ \frac{5+8\Phi}{2+\Phi} = \frac{a^2(7+11\Phi)}{5}$$

L'angle dièdre

Le triangle G P R fait apparaître le dièdre $2\,\alpha$ du dodécaèdre.

$$\mathrm{Sin}^2\,\alpha = \frac{a^2\ \Phi^2}{a^2 \cdot \dfrac{3+4\,\Phi}{1+\Phi}} = \frac{2+3\,\Phi}{3+4\,\Phi} = \frac{2+\Phi}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

d'où $\alpha \simeq 58{,}28°$.



Enfin

Chacun peut trouver des prolongements plus ou moins savants, étudier les nombres de la forme :

$$a\,\Phi + b \qquad \text{ou} \qquad \frac{a\,\Phi + b}{c\,\Phi + d} \qquad \text{ou autre chose.}$$

Ou réaliser un dodécaèdre avec la technologie qui est de son domaine en chaudronnerie ou en mécanique générale ou en menuiserie.

Pour réaliser des objets tels que les 5 cubes imbriqués mentionnés plus haut, il peut être utile de représenter le dodécaèdre en géométrie de Monge dans l'une ou l'autre des positions qui donnent à quelque élément de symétrie une position remarquable. C'est un exercice qui, sans mettre en jeu des connaissances de haut niveau, est fort intéressant.

Amusement ? Je le pensais il y a quelques mois, jusqu'au jour où un petit industriel de notre région fit appel à notre Département de Mathématiques pour construire, en métal plein, un dodécaèdre dont la sphère circonscrite avait un rayon imposé. Il avait reçu commande de cet objet d'une firme de traitement de minerai pour laquelle il avait l'habitude de travailler. C'est en cherchant à lui rendre service que j'ai obtenu pour les côtés les belles expressions qui m'ont incité à écrire ces quelques pages.

BIBLIOGRAPHIE

(1) ROUCHE et COMBEROUSSE, Traité de géométrie (Deuxième partie)

(2) J. HADAMARD, Leçons de géométrie élémentaire - II Géométrie de l'espace. Pages 419 à 451.

(3) WENNINGER J. MAGNUS, Polyedron Models — Nombreuses photos.

(4) A. HOLDEN, Formes, espace et symétries
CEDIC Collection "Les distracts" N° 2 - 200 pages - Nombreuses photos.

(5) J.L. LOCHER, Le Monde de M.C. Escher - Gravures - N° 81, 157, 177, 178.

(6) C. MATILA GHYKA, Essai sur le rythme NRF 1938.

(7) N. VOROBIEV, Caractères de divisibilité - Suite de Fibonacci - Editions MIR, traduit du Russe.

(8) Marius CLEYET-MICHAUD, Le Nombre d'or - Collection Que sais-je ?

(9) Garth E. RUNION, The Golden Section 150 pages.

(10) MOURLEVAT G. "Le Nombre d'or à Notre-Dame du Port" Bulletin de l'A.P.M. 49ème année, N° 275-276, pages 291-323

(11) I.R.E.M. de Clermont, Le Nombre d'or, Film 8 mm

(12) I.R.E.M. de Clermont, Le Nombre d'or, Film sonore 16 mm.

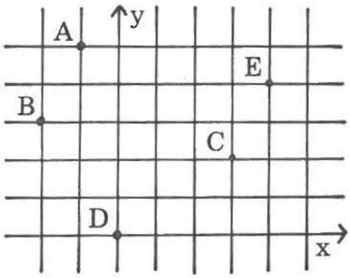
1.10. QUELQUES EXERCICES DE RECHERCHE

[*Extrait de : LES CAHIERS DU GROUPE DU CLAIN, I.R.E.M. de Poitiers*]

CINQ POINTS AU HASARD !

On donne dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cinq points distincts. Montrer qu'il existe un segment dont les extrémités sont deux de ces points et dont le milieu appartient à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Eliminatoire 1° degré — Olympiades Polonaises.



Pour des petits élèves (décoder le message). On a un quadrillage. Marque cinq points comme tu veux sur ce quadrillage. On peut tracer des segments en joignant les points deux à deux. Ces segments ont chacun un milieu. Trouve un segment (ou plusieurs) dont le milieu est un des points du quadrillage.

Pour des élèves ayant l'habitude d'utiliser un plan repéré :

Choisir un repère, trouver les coordonnées des points A, B, C, D, E. Comment déterminer les coordonnées du milieu d'un segment ?

Par exemple I milieu de AB

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Chercher un segment (ou plusieurs) dont le milieu est un des points du quadrillage.

Pour ces deux exercices les élèves trouveront au moins un segment pour leur dessin.

Démonstration : le point I milieu d'un segment MN est à un coin du carreau si et seulement si $x_M + x_N$ et $y_M + y_N$ sont tous les deux pairs, c'est-à-dire si x_M et x_N ont même parité et si y_M et y_N ont même parité (condition (1)).

Abscisse / Ordonnée	Paire	Impaire
Paire	D, E	C
Impaire	B	A

Considérons le diagramme de Caroll ci-contre.

On va y placer le nom des sommets ; par exemple, si x_c impair et y_c pair, on marque C dans la case supérieure droite.

Il est clair que chacune des 5 lettres A, B, C, D, E pourra être placée dans une (et une seule) case.

Si deux lettres sont dans une même case, par exemple D et E, la condition (1) est évidemment remplie. Donc le milieu de DE est un coin de carreau : DE répond à la question.

On peut ainsi trouver tous les segments répondant à la question.

Montrons qu'il en existe toujours au moins *UN* :

En effet, si cela n'était, il n'y aurait pas 2 lettres dans une même case. Or il y a 4 cases et 5 lettres.

Donc il y a *au moins* une case contenant deux lettres : il y a donc au moins un segment.

Exercice annexe :

1) Faire un dessin correspondant au cas où tous les *segments* ont des milieux appartenant à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

2) Même question pour *un seul segment*

3) Même question avec *deux segments*

4) Même question avec *trois segments*

5) Même question avec *quatre segments*

6) Même question avec *six segments*

7) Le problème est-il possible pour 5 segments ? 7 segments ? 8 segments ? 9 segments ?

Remarque : le triangle de Pascal peut être utile.

CERCLES ET QUADRILLAGE

Sources : Olympiades suédoises 1961 à 1968 (document SMF).

Quelle est la circonférence du plus grand cercle que l'on peut tracer dans les carrés noirs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté ?

Idée de la démonstration

1) Un cercle peut être tracé dans un carreau. Le rayon maximum est alors 2 cm (fig. 1).

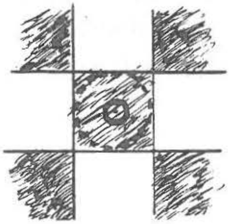


fig. 1 $R_0 \leqslant 2$

2) Si un cercle est tracé sur plus d'un carreau, il passe nécessairement (fig. 2) par les coins de carreaux (intersection du quadrillage).

Par suite, il doit (aux translations et symétries près) soit passer par deux coins de carreaux consécutifs, soit passer par deux coins de carreaux en diagonale.

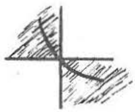


fig. 2

2-1) Le cercle passe par 2 coins de carreaux consécutifs, soit A et B : son centre est sur Δ médiatrice de AB; le cercle peut passer soit par C (à une symétrie près), son centre est alors I et son rayon $R_1 = 2\sqrt{2}$ (fig. 3), soit par D, mais alors on est ramené au cas suivant.

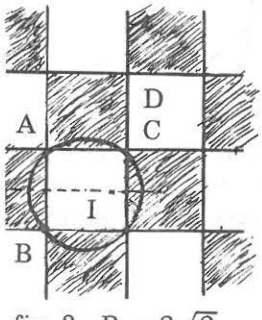


fig. 3 $R_1 = 2\sqrt{2}$

2-2) Le cercle passe par 2 coins de carreaux A et D en diagonale (fig. 4). Il ne peut passer par E, donc il passe (à une symétrie près) par B. Son centre est alors sur la médiatrice de AB d'une part, sur celle de AD d'autre part, donc en J. Le calcul du rayon A J est immédiat :

$AJ^2 = JH^2 + HA^2 = 40$

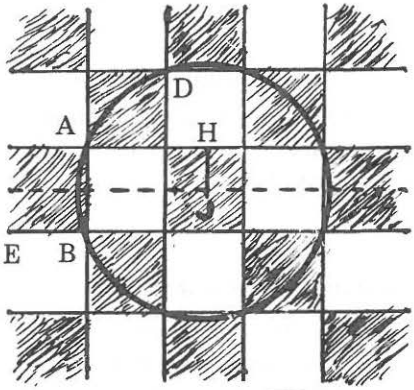
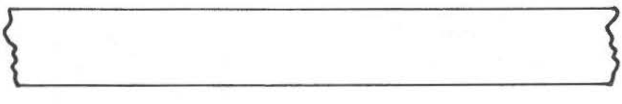


fig. 4 $R_2 = 2\sqrt{10}$

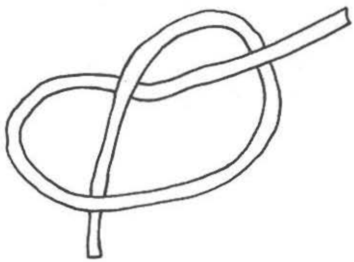
3) *En résumé* : le plus grand cercle correspond au cas de la figure 4, son rayon étant $2\sqrt{10}$.

CONSTRUCTION SANS COMPAS D'UN PENTAGONE REGULIER ET NOEUD DE SERVIETTE

1) Prendre une bande de papier (bords parallèles).

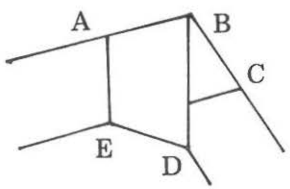


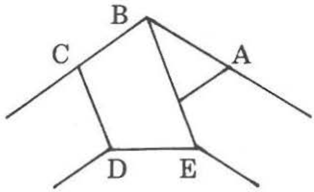
Faire avec cette bande un noeud "ordinaire" (comme on ferait avec une ficelle).



On obtient vu d'un côté

Vu de l'autre côté





En supposant le pliage très bien fait, le pentagone A B C D E est régulier.

2) Que se passe-t-il pour un noeud de serviette ?

COLORONS LA SPHERE

On peint une partie de la surface d'une sphère.

L'aire de cette partie est inférieure aux $\frac{7}{15}$ de l'aire de la sphère.

Montrer qu'il existe 2 points diamétralement opposés non peints.

Raisonnons par l'absurde.

Si tout diamètre admet au moins une extrémité peinte, alors la surface symétrique de la surface non peinte par rapport au centre de la sphère est une surface peinte.

L'aire de réunion de ces deux surfaces symétriques est donc supérieure ou égale à $\left(\frac{8}{15} + \frac{8}{15}\right)$ de l'aire de la sphère.

Ce qui est absurde.

PPMC, CHEMINEMENT SUR UN QUADRILLAGE, ET ORGANIGRAMME

Dans ce problème les nombres utilisés sont tous des naturels.

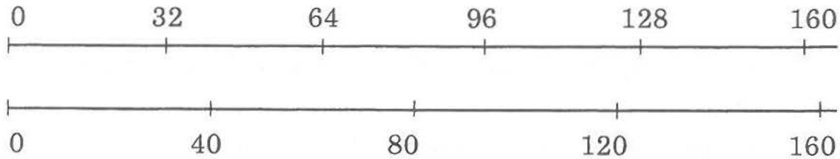
Soient deux naturels A et B. Chercher le plus petit naturel M multiple de A et de B. On supposera $A \leqslant B$.

1) *Les méthodes traditionnelles* (décomposition en facteurs premiers de A et B ...) conduisent au PPMC et au PGDC.

Rappelons que si M est le PPMC de A et B et m le PGDC de A et B, alors m.M = A.B .

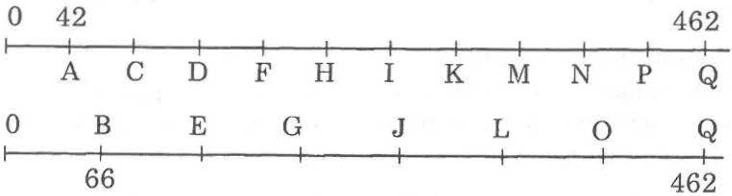
2) *Une méthode simple*

a) Soient les nombres 32 et 40.



Les multiples de 32 étant 32, 64, 96, 128, 160, 192, ... ceux de 40 étant 40, 80, 120, 160, 200, ..., une méthode simple serait d'"avancer prudemment" en passant par les points 32, 40, 64 ... sans aller "trop vite" et surtout sans aller "trop loin" ; ainsi à l'étape 160 on pourrait constater que 160 est multiple de 32 et de 40 et c'est bien le plus petit multiple commun à 32 et 40.

b) Recommençons avec les nombres 42 et 66.



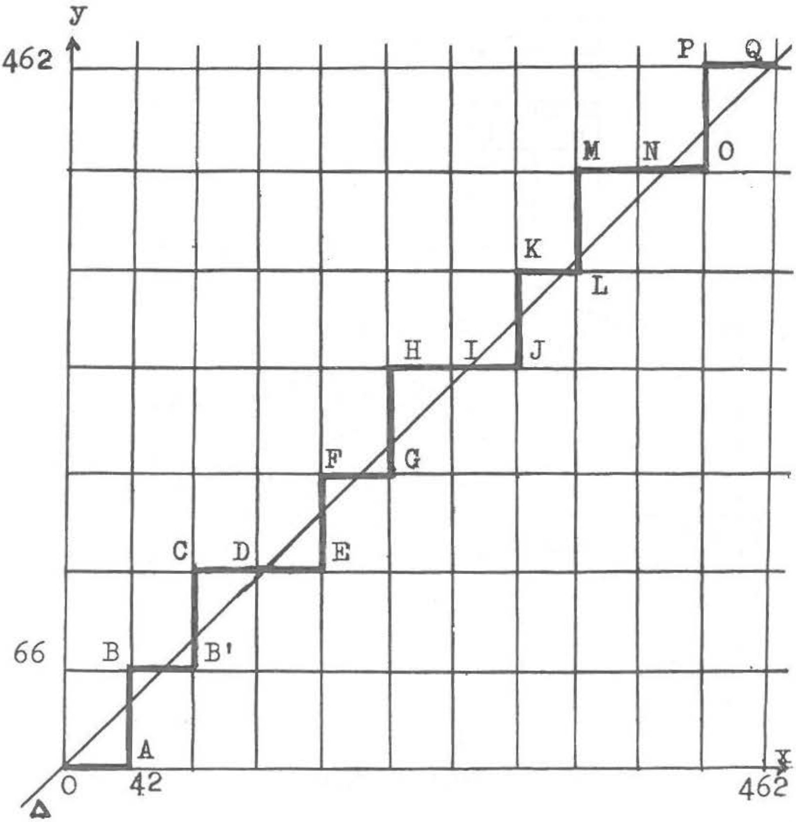
La même "avance prudente" nous conduit à 462, PPMC de 42 et 66.

c) Il est intéressant de voir dans les deux cas précédents la progression de la marche.

3) *Une visualisation dans le plan*

a) On peut sur du papier millimétré représenter la progression.

Prenons par exemple 42 et 66. Imaginons un quadrillage (voir schéma). Le PPMC, 462, correspondra à la première intersection de la bissectrice Δ avec les "coins" du quadrillage. En abscisse : $11 \times 42 = 462$, en ordonnée : $7 \times 62 = 462$.



b) Il est facile de prouver que cette construction est valable dans le cas général.

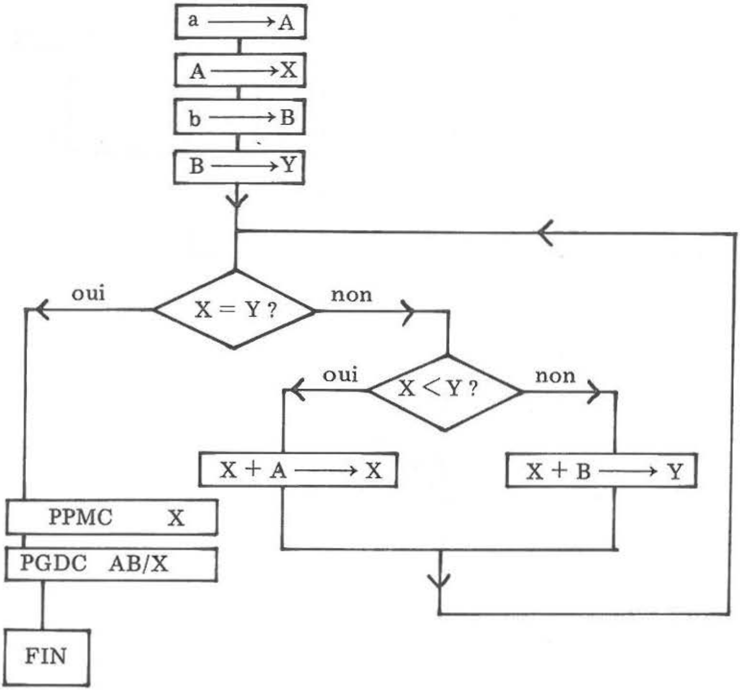
Il reste à trouver le cheminement "le plus efficace". C'est celui qui consiste à ne pas aller "trop vite" ni "trop loin", c'est-à-dire à rester le "plus près possible" de la droite Δ tout en avançant soit horizontalement par pas de 42 (respectivement A), soit verticalement par pas de 66 (respectivement B).

On obtient ainsi un *cheminement sur le quadrillage* illustrant dans le plan la méthode simple utilisée précédemment en 2 b).

4) *Organigramme*

Voici l'organigramme permettant éventuellement de programmer la méthode précédente.

Soient a et b les nombres dont on cherche le PPMC. $a \leqslant b$.



Organigramme

Explications pour l'organigramme

A, B, C, Y sont des registres.

a $\longrightarrow$ A : on envoie le nombre a dans le registre A.

A $\longrightarrow$ X : le contenu de X devient égal au contenu de A. A conserve son contenu.

X = Y ? test sur les contenus de X et Y.

X < Y ? test sur les contenus de X et Y.

X + A $\rightarrow$ X : X se charge du contenu qu'il avait augmenté du contenu de A.

X + B $\rightarrow$ X : idem avec B.

5) *Remarques*

a) On peut faire des rapprochements de la méthode 2) avec la technique du vernier d'un pied à coulisse.

b) On peut chercher des “alignements” de sommets de cheminement sur le schéma.

c) Pour le PPMC de trois nombres, la construction exigerait l'espace à trois dimensions, donc elle est graphiquement peu réalisable.

d) On peut essayer de visualiser une méthode de recherche du PGDC.

LES PROBABILITES PAR L'IMAGE

On casse un spaghetti en 3 morceaux au hasard [*1]. Probabilité pour qu'avec les 3 morceaux on puisse faire un triangle (vrai ou aplati).

Soit x, y, z les longueurs respectives des 3 morceaux ; la longueur du spaghetti est prise pour unité : $x + y + z = 1$.

Pour qu'on puisse former un triangle, il faut et il suffit que

$$(1) \qquad \begin{cases} x \leqslant y + z \\ y \leqslant z + x \\ z \leqslant x + y \end{cases}$$

Prenons un triangle équilatéral ABC de hauteur unité et pour tout point M du plan, soit x sa “distance” (affectée d'un signe) à BC, y sa “distance” à CA, z “sa distance” à AB : pour chacune des droites supports des côtés du triangle, le demi-plan positif est celui qui contient le triangle. Dans ces conditions, la surface délimitée par le triangle, frontière comprise, est l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x + y + z = 1 \quad {}^{*2}$$

Tout spaghetti idéal cassé en 3 est représenté de façon biunivoque par un point de l'intérieur du triangle. Dire qu'on le casse au hasard, c'est dire que la probabilité de tomber dans un domaine [*3] donné de l'intérieur du triangle est proportionnelle à l'aire de ce domaine, quelle que soit sa forme et sa position.

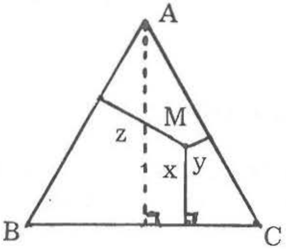
---

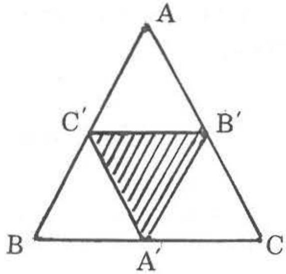
*1 N.D.L.R. : Cela signifie que les points de rupture A et B sont tous deux choisis au hasard et non pas que l'on casse d'abord en deux, puis que l'un des deux morceaux est à son tour fragmenté. — La probabilité serait différente —.

*2 Exercice : (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques de M par rapport à ABC.

*3 On n'envisagera, bien sûr, que des domaines quarrables; il est inutile de soulever cette question. Pour les frontières on remarquera seulement qu'un point ou une ligne ont une aire nulle.

On voit facilement que le domaine où sont vérifiées les conditions (1) est le triangle A'B'C', d'où la probabilité cherchée : $\frac{1}{4}$, puisque la probabilité totale, soit 1, correspond à l'aire du triangle ABC.





B'C' a pour équation $x = \frac{1}{2}$, ou $y + z = \frac{1}{2}$, ou $x = y + z$; il faut donc $x \leqslant \frac{1}{2}$ et par symétrie $y \leqslant \frac{1}{2}$, $z \leqslant \frac{1}{2}$.

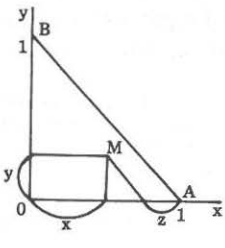
Autre solution (en coordonnées cartésiennes et non plus triangulaires)

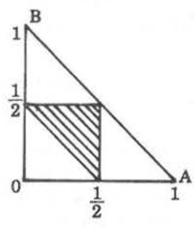
x, y, z représentent toujours les longueurs respectives des 3 morceaux de spaghetti. On doit avoir, pour pouvoir former un triangle,

$$(2) \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0 \\ x + y + z = 1 \\ |x - y| \leqslant z \leqslant x + y \end{cases}$$

Il n'y a en fait que 2 variables, par exemple x et y.

Tout spaghetti cassé en 3 peut être représenté de façon biunivoque par un point de la surface du triangle OAB.





On déduit de (2) :

$$z \leqslant \frac{1}{2}, \quad x + y \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{puis} \quad x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y \leqslant \frac{1}{2}.$$

La région qui convient est donc la surface hachurée et on voit que la probabilité est $\frac{1}{4}$.

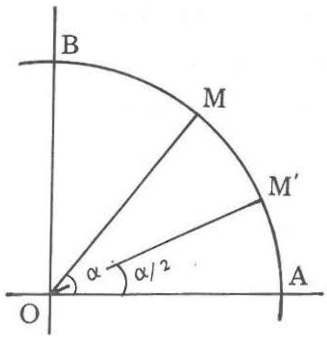
1.11. UTILISATION DE PROCEDES RECURSIFS POUR LE CALCUL DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES

par l'I.R.E.M. de Bordeaux

Ce texte est extrait d'un important fascicule de l'I.R.E.M. de Bordeaux : Notions élémentaires d'informatique - 4ème fascicule - Février-Mars 1977, par G. Noël, J. Bastier, D. Deycard, et les élèves du Lycée Montaigne * .

CALCUL DE COS α

NOTE : Le paragraphe ci-dessous est destiné à être utilisé par des élèves de seconde (ou de fin de troisième). Les élèves de première ayant étudié la trigonométrie pourront utiliser des formules vues en cours.



On considère un cercle trigonométrique limité au quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (voir la figure ci-contre).

On rappelle que le cercle trigonométrique est l'ensemble des points d'un plan rapporté à un repère orthonormé dont les coordonnées x et y vérifient la relation :

$$x^2 + y^2 = 1$$

On donne sur $\overset{\frown}{AB}$ le point M tel que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ soit égal

* Une synthèse plus explicite de ces travaux sera publiée prochainement (éd. Techniques et Vulgarisation) sous le titre "Mathématiques et calculatrice de poche"

à α . On désignera par x et y les coordonnées de M et on posera $\frac{y}{x} = t$.

On désigne par M' le milieu de l'arc $\widehat{AM}$ du cercle et par x' et y' les coordonnées de M'. On posera $t' = \frac{y'}{x'}$.

On a donc :

$$x = \cos\alpha \qquad y = \sin\alpha \qquad t = \operatorname{tg}\alpha$$

$$x' = \cos\frac{\alpha}{2} \qquad y' = \sin\frac{\alpha}{2} \qquad t' = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

1°) Calculer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M (on pourra remarquer que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux et que $\|\overrightarrow{OM'}\| = 1$).

On trouvera :

$$x' = \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x)}} = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{2(1+x)}}$$

2°) Exprimer x en fonction de x' seul. On obtient :

$$x = 2x'^2 - 1$$

Donc : $\qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

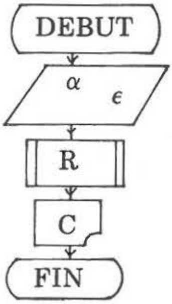
Nous savons que si α exprimé en radians est "petit" on a $\cos\ \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Les élèves de troisième et de seconde pourront admettre ce résultat en se contentant de le vérifier sur une calculatrice de poche.

On pourra donc écrire les formules de récursivité :

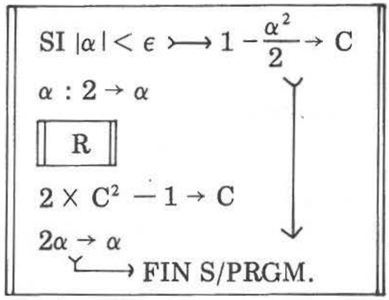
$\cos\alpha$: *Si* $\quad \alpha \simeq 0$ *alors* $\quad 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

Sinon $\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

On en déduit l'organigramme :



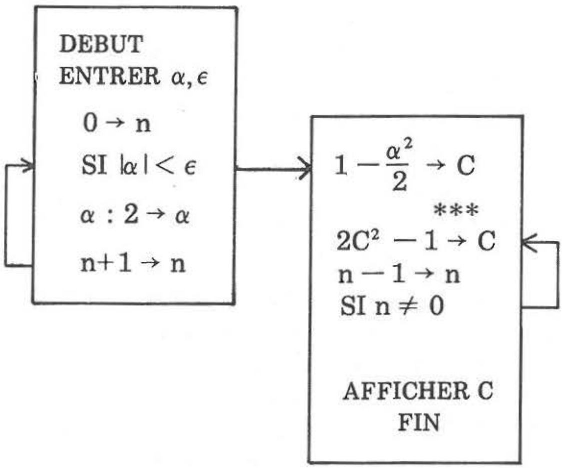
S/PRGM.R



Note : α représente l'incertitude désirée (voir remarque 1).

Nous simplifions l'organigramme en utilisant les principes vus au chapitre 15. On obtient le tracé ci-dessous :

L'organigramme ci-contre peut se programmer sur HP 25 ou sur SR 56.



Remarque 1 : Précision du résultat obtenu.

Il ne faut pas croire qu'il soit possible de choisir α aussi petit que l'on veut. Si l'on observe le premier contenu de C (il suffit pour cela de prévoir un arrêt supplémentaire à l'endroit marqué *** dans l'organigramme ci-dessus) on constate qu'il est bien entendu voisin de 1 (en fait 0,999.....).

Par exemple pour $\alpha = 1$:

— Si $\epsilon = 10^{-3}$ on lit sur une SR 56 : 0,999 999 523 2 soit quatre chiffres "significatifs" (en pratique un peu plus dans le cas de la SR 56 car la calculatrice n'affiche pas tous les chiffres). On retrouve cette précision dans le résultat : 0,5403013... au lieu de 0,5403023059...

— Si l'on prend $\epsilon = 10^{-4}$ on obtient pour le premier contenu de C : 0,999 999 998 1. Il n'y a plus que deux chiffres "significatifs". Le résultat sera moins précis : 0,540 334.

— Si l'on prend $\epsilon = 10^{-5}$ on obtient pour le premier contenu de C : 1 !!! Il n'y a plus aucune précision. Le résultat final serait : 0,527...

Le choix de ϵ résulte donc d'un compromis :

— Trop petit, le nombre de boucles est trop faible.
— Trop grand, on perd également de la précision.

Dans l'exemple ci-dessus c'est une valeur voisine de 10^{-3} qui donnera le meilleur résultat.

Remarque 2 : L'algorithme ci-dessus peut se programmer sur HP 25; la précision sera un peu moins bonne du fait que la HP 25 calcule avec 10 chiffres significatifs alors que la SR 56 calcule avec 13 chiffres.

Remarque 3 : Ce procédé de calcul n'est pas très économique car il faut travailler avec 13 chiffres significatifs pour obtenir cinq à six chiffres exacts sur le résultat.

Si l'on désire davantage de précision on pourra calculer d'abord sin α ou tgα et en déduire cos α. Nous verrons en effet qu'il est possible d'obtenir la tangente ou le sinus avec une grande précision (voir exercices n° 18.1 A et 18.8 A page 230). On verra également à la page 229 un autre procédé permettant un calcul direct du cosinus avec une grande précision.

CALCUL DE a^x

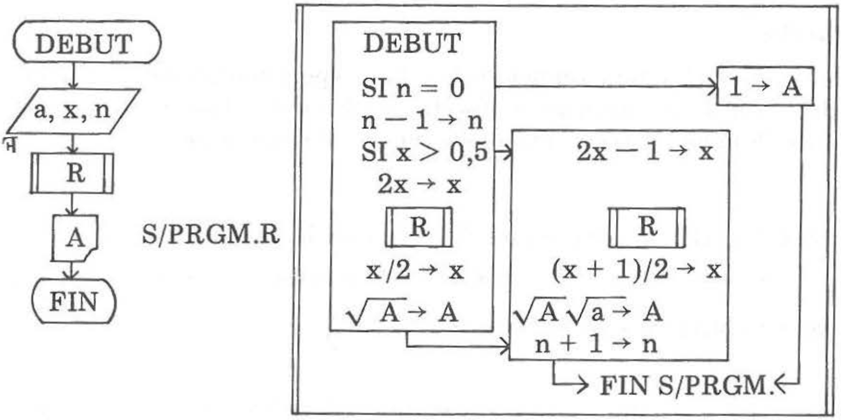
On suppose $a \in \mathbf{R}_*^+$ et $x \in [0\,;1]$.

On utilise les formules de récursivité que le lecteur démontrera aisément :

a^x : *Si* $x > 0{,}5$ *alors* $\sqrt{a}\sqrt{a^{2x-1}}$

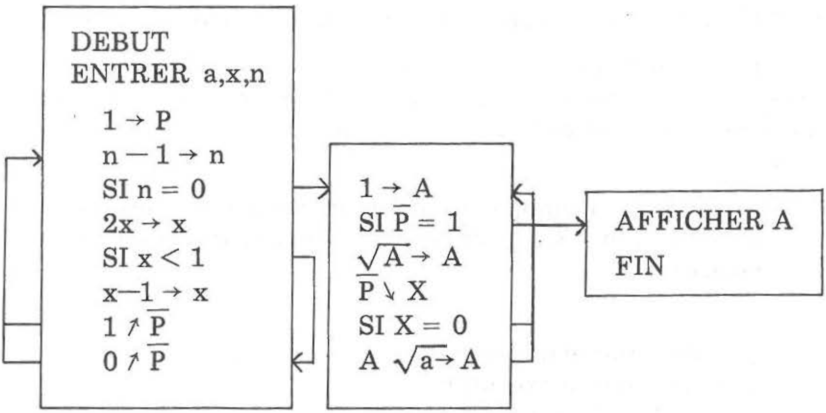
Sinon $\sqrt{a^{2x}}$

On en déduit l'organigramme :



Note : n désigne le nombre d'itérations désirées.

L'organigramme ci-dessus peut être simplifié en utilisant les principes exposés au chapitre 15 :



Note : Cet organigramme peut se programmer sur HP 25 ou SR 56.

On peut même se passer de la pile $\overline{P}$ du fait que la multiplication est commutative... Voir § suivant.

EXERCICES

NOTE

Pour chaque exercice rechercher expérimentalement la valeur de ϵ (ou de n) donnant le résultat le plus précis (pour une calculatrice donnée) et voir dans quelle mesure il dépend de x.

18.1 A : (HP 25) Reprendre l'exemple de la page 225.

1°) Exprimer y en fonction de y' seul. En déduire une formule exprimant $\sin\alpha$ en fonction de $\sin\frac{\alpha}{2}$.

2°) Sachant que si α exprimé en radians est "petit" alors $\sin \alpha \simeq \alpha$, déduire alors du 1°) des formules de récursivité permettant le *calcul de sin* α.

3°) Programmer la calculatrice. Montrer que l'on peut obtenir $\sin \alpha$ avec 10 chiffres significatifs (contrairement à ce que l'on avait obtenu pour le cosinus). Expliquez pourquoi.

18.2 C : (HP 25) Exprimer $\sin \alpha$ en fonction seulement de $\sin\frac{\alpha}{3}$.

En remarquant de plus que si α exprimé en radians est "petit" alors $\sin \alpha \simeq \alpha$, trouver des formules de récursivité permettant le *calcul de sin*α et programmer la calculatrice.

18.3 C : (HP 25) Comparer les programmes obtenus aux exercices n° 18.1 A et 18.2 C au point de vue (pour une même calculatrice):

1°) du nombre d'instructions
2°) du temps d'exécution
3°) de la précision des résultats.

1.12. CONVERGENCE ET TABLETTE DE CHOCOLAT

Dans son livre "JEUX AVEC L'INFINI" (Editions du Seuil), ROSZA PETER nous offre très joliment une tablette de chocolat.

Problème :

"... Imaginons que chaque tablette de chocolat d'une certaine marque contienne un coupon et que, contre présentation de 10 coupons, on puisse obtenir gratuitement une nouvelle tablette de chocolat. Que vaut exactement une tablette de chocolat avec son coupon ?"

Eléments de réponse :

- N'oublions pas le coupon : il induit des dixièmes de dixièmes en cascade !
  Voyez vous-même, et la tablette de chocolat avec son coupon vaut :

  $$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \quad \text{de tablette de chocolat.}$$

- Quand vous détiendrez 9 coupons, allez chez l'épicier et faites-vous avancer une tablette de chocolat ... : vous la paierez aussitôt, en coupons !
  Conclusion : "... donc la valeur d'un coupon est $\frac{1}{9}$ de tablette de chocolat et la valeur d'une tablette de chocolat avec son coupon est de $1 + \frac{1}{9}$ tablette de chocolat.

  Donc, la somme infinie :

  $$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

  vaut très exactement $1 + \frac{1}{9}$, de la façon la plus concrète puisque consommable."

NDLR. On pourra comparer cette méthode comestible avec celles du chapitre "Géométrie naturelle". [7ème partie, 1.13].

1.13. GEOMETRIE "NATURELLE"

par Henri BAREIL

La géométrie élémentaire française est pauvre : elle ne connaît que cercles, triangles et parallélogrammes. (Ne parlons guère des figures de l'espace qui semblent n'exister que pour fournir des situations de géométrie plane)

On lui opposera volontiers la géométrie élémentaire italienne telle qu'elle apparaît, éblouissante, à travers Emma Castelnuovo. Les participants des journées A.P.M.E.P. 1977 le savent bien, après avoir admiré l'exposition de LIMOGES. De même les lecteurs de son livre "Matematica nella realta" (Editeur Boringhieri). [Cet ouvrage, traduit en français par José MARIA, doit paraître prochainement aux éditions O.C.D.L.]

Cette géométrie conquiert vraiment l'espace ainsi que les solides que l'architecture moderne nous y propose.

Mais déjà, en géométrie plane, quelle variété !

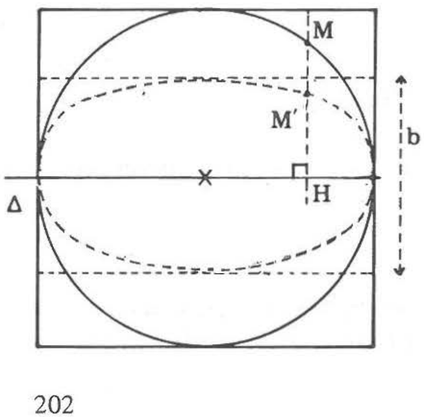
Je prendrai trois exemples : ellipse, Pythagore, cycloïde (extraits du livre d'Emma Castelnuovo, avec son aimable autorisation).

VARIATIONS SUR L'ELLIPSE !

On connait les diverses façons élémentaires d'obtenir une ellipse.

Mais son aire ? Est-elle rapidement accessible ?

Inscrivons un cercle dans un carré de côté a.



Aire du carré : a^2
Aire du disque : πa^2
Aire du disque :
(Aire du carré) $\times$ π

Une affinité orthogonale d'axe Δ ($M \mapsto M'$ tel que $\overline{HM'} = \lambda\ \overline{HM}$, λ constant) transforme :

— le carré en un rectangle de dimensions a et b.

(Dès lors $\lambda = \frac{b}{a}$).

— le cercle en une ellipse dont les axes mesurent a et b.

Des considérations de géométrie très élémentaire induisent la conservation du rapport des aires.

Donc aire de l'ellipse = (aire du rectangle) × π
$= \pi$ a b

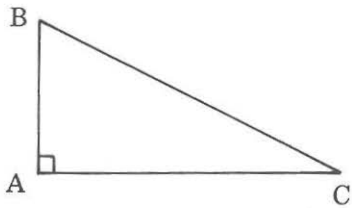
● Ceci s'étend à l'ellipsoïde, à partir d'une sphère inscrite dans un cube.

Soit a, b, c les mesures des axes de l'ellipsoïde, donc les dimensions du parallélépipède rectangle associé.

Alors $$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8 R^3} = \frac{\text{Vol. ellipsoïde}}{2a \times 2b \times 2c}$$

D'où $$V = \frac{4}{3}\pi \, a \, b \, c$$

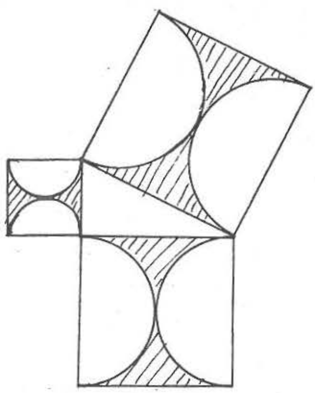
VARIATIONS SUR PYTHAGORE :



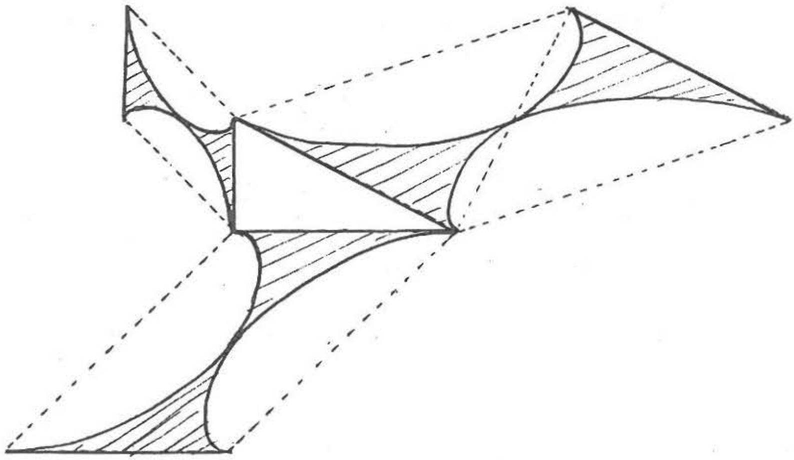
La forme de la relation, en raison des carrés, induit des applications aux aires.

Par exemple avec des carrés (resp. des triangles équilatéraux, resp. des demi-cercles, ... etc...) construits sur les côtés.

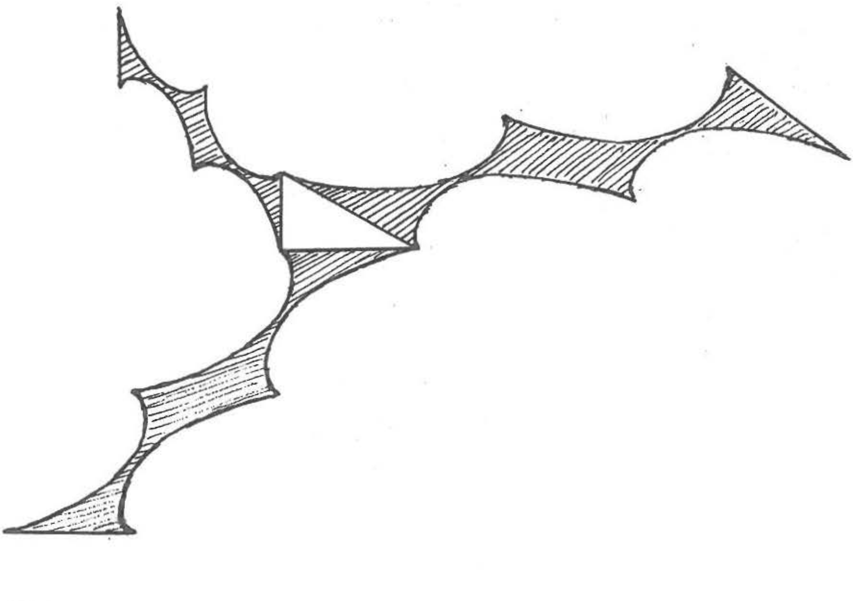
Par exemple :



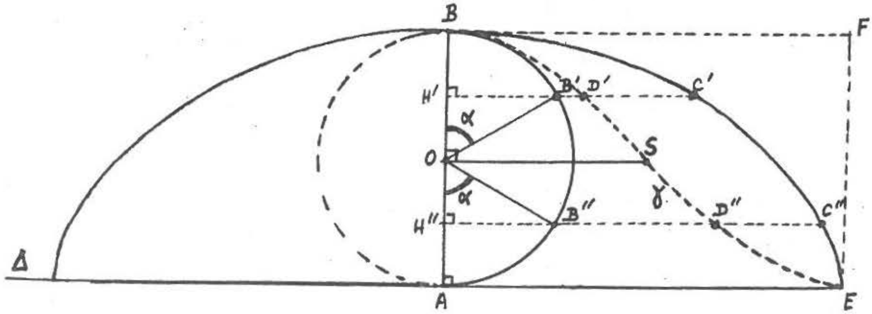
ou par déformation perspective :



D'où cette petite merveille de "peinture moderne" (essayez avec des couleurs, des entrelacs de ces motifs,...)



VARIATIONS SUR LA CYCLOIDE



Le cercle roulant sur Δ sans glisser, B engendre une cycloïde.

La figure ci-dessus donne une arche de cette cycloïde.

$$AE = \pi R$$

Pour chaque valeur de α, le déplacement de B est le composé d'une rotation autour de 0 suivie d'une translation.

Il s'ensuit que $B''C'' + B'C' = AE$ (1)

Associons à chaque C' le point D' tel que $H'D' = B'C'$.

Soit la courbe BSE obtenue, que nous appellerons γ.

S est centre de symétrie [Utiliser (1)] du rectangle AEFB et de la courbe BSE (γ).

D'où : aire BAESB (en suivant la courbe γ) $= \frac{1}{2}(\pi R \times 2R)$

$= \pi R^2$

Des considérations de géométrie très élémentaires permettent d'induire que l'aire comprise entre le demi-cercle $BB'A$ et l'arc de cycloïde BE est égale à l'aire ci-dessus.

D'où l'aire de l'arche de cycloïde : $3\pi R^2$.

Par ailleurs, indépendamment du livre d'Emma Castelnuovo, voici quelques autres remarques :

UTILISATION DES AIRES :

Nous savons tous faire visualiser (dans le cas de nombres positifs) m(ab), ou m(a+b), ou (a+b) (c+d), ou $(a+b)^2$, ... à l'aide d'aires de rectangles.

Mais il y a d'autres utilisations des aires.

(1) **Par exemple**, en utilisant la formule donnant l'aire du triangle, et le fait que si une droite coupe un segment [AB] en son milieu elle est équidistante de A et de B, on établit facilement par les aires (ô horreur pour une propriété affine ?) l'existence et la situation du point de concours des médianes d'un triangle.

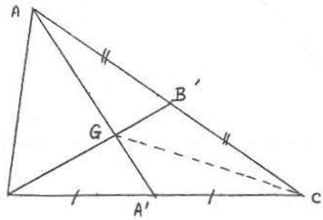
Soit S l'aire du triangle ABC.

Il vient successivement :

aire ABG = aire BCG

aire ABG = aire ACG

D'où aire ABG $= \frac{1}{3}$ S



D'autre part, aire BA'G $= \frac{1}{2}$ aire BGC

$= \frac{1}{6}$ S

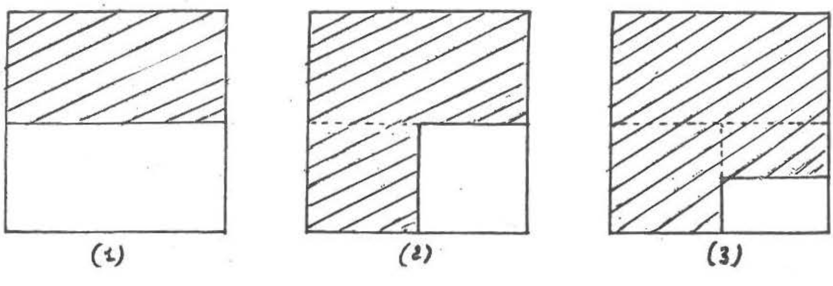
... D'où ... GA = 2GA' etc.

2 CALCULS NUMERIQUES :

Les aires permettent de visualiser des sommes du type $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots$ à nombre infini de termes tous déduits du précédent de la même façon,avec $n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\}$

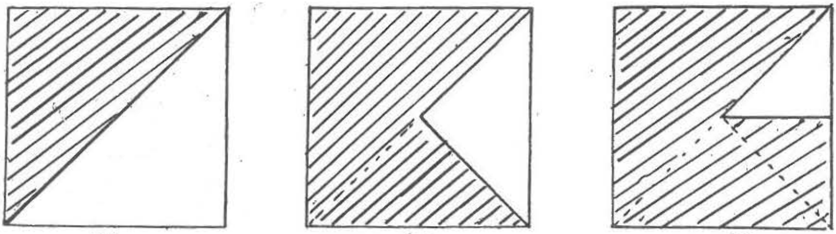
Prenons d'abord $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

A partir du carré d'aire unité on peut avoir successivement :



Notons que (2) nous ramène "à un carré blanc" comme dans la situation d'origine.

- Ou :



(1) (2) (3)

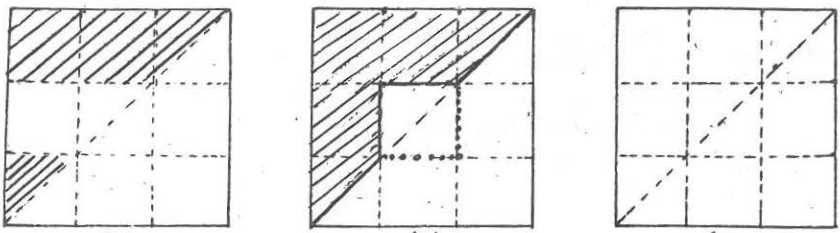
Ici (3) nous redonne (1).

De l'une ou l'autre façon on peut concevoir que la somme cherchée est égale à 1.

- Ceci est-il généralisable à d'autres valeurs de n ?

Difficilement, ... (sauf si l'on s'inspire du résultat !)

Ainsi pour $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ on peut envisager ce qui suit :



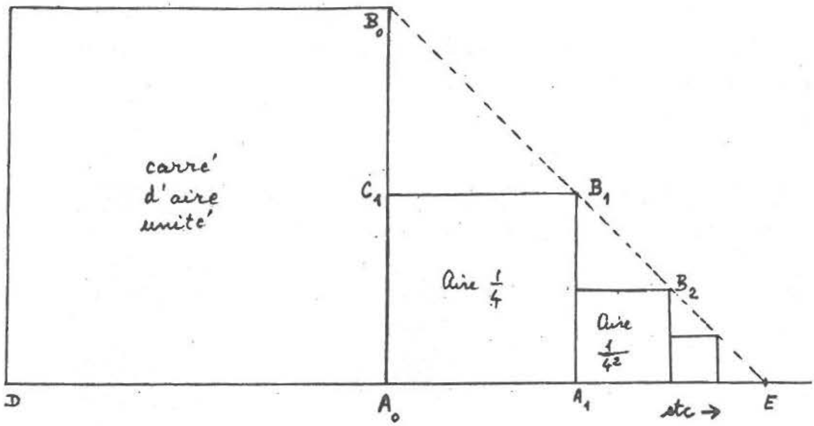
(1) (2) (3)

(2) redonne, pour le carré central, la situation initiale. D'où ....

●● Cette méthode met en évidence des périodes. Ce n'est pas d'un intérêt négligeable.
Mais ce n'est pas toujours facile.

Au contraire la méthode suivante est très facilement applicable quel que soit l'entier n ($\neq 0, \neq 1$) considéré :

Dessins successifs, cas $n = 4$:



Ici chaque carré est toujours situé de la même façon par rapport au précédent.

Ceci permet d'induire (ou de "démontrer", selon les classes) l'alignement des B_i et d'en déduire la position de E.

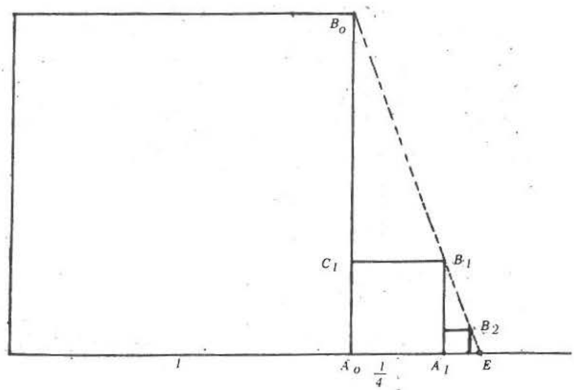
Or chaque carré occupe une certaine fraction, toujours la même, de l'aire du trapèze rectangle associé (A_0 A_1 B_1 B_0 pour le carré A_0 A_1 B_1 C_1, ...)

La somme des aires des carrés successifs représente donc cette fraction-là de l'aire du triangle $A_0 E B_0$.

Sur notre exemple on obtient $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ soit $\frac{1}{3}$.

●● Une autre méthode, aussi générale, et fondée sur le même principe, fait bâtir des carrés successifs dont les côtés sont les termes de la somme envisagée.

Ainsi, pour n = 4.



C'est alors $A_0 E$ qui donne la somme cherchée.

Cette méthode présente un autre intérêt : mener à bien une étude visualisée sur la droite $A_0\ A_1$ en étendant le problème au plan.

N'est-il pas aussi des problèmes du plan faciles à traiter avec un petit tour dans l'espace ?

●●● Il ne s'agit pas de monopoliser la géométrie ou son enseignement pour des activités de cet ordre, mais d'en profiter, à l'occasion, pour développer les qualités d'invention, de création, d'imagination, et étendre le champ du possible.

Sur ce, bonne chance pour une géométrie sans frontières !

2 - DE L'EXPERIENCE OPC A LA RECHERCHE SUR PROGRAMMES ET EVALUATION PAR OBJECTIFS

par Régis GRAS, I.R.E.M. de Rennes

Je voudrais esquisser rapidement ici quelles ont été les lignes pédagogiques directrices de l'expérience O.P.C. dont Ch. PEROL a parlé plus haut et l'ouverture sur la notion de programme par objectifs à laquelle elle a naturellement conduit. A l'heure où sont écrites ces lignes, des projets de programme de quatrième et troisième bousculant les programmes actuels fournissent un terrain favorable à la mise en application à court terme des principales options pédagogiques que je décris ci-dessous.

2.1. LIGNES DE FORCE DE L'EXPERIENCE

Soulignons que ces lignes de force ne sont apparues clairement ni avant, ni au début de l'expérience mais plutôt à la suite de différents colloques, à travers confrontations, encouragements, critiques ou réflexions sur l'action. Je reste donc persuadé que la bonne conduite et peut-être la réussite d'une expérience ne tiennent pas nécessairement à une définition trop rigoureuse et précise du plan et des objectifs expérimentaux, mais beaucoup au travail, à la bonne volonté, à la tolérance, à la lucidité, à l'imagination, à l'enthousiasme et au dynamisme des équipes engagées.

La *définition* s'est d'abord dégagée négativement :

- refus d'une axiomatique globale et linéaire comme modèle didactique pour les classes de quatrième et troisième
- refus d'un enseignement essentiellement verbal (voire verbeux), formel et détaché des situations du réel
- refus de la seule prise en compte d'une orientation élitiste vers les classes C.

Tout en visant l'atteinte des contenus globaux imposés par les programmes, les groupes ont précisé des *objectifs généraux* d'une autre nature :

- faire construire à chaque élève les représentations des concepts qu'il juge selon lui les mieux ressenties, les plus appropriables et, par conséquent, les plus opératoires (numérique, analytique, géométrique ou toute situation réelle isomorphe), ceci en vue de lui procurer une meilleure autonomie face aux contenus mathématiques
- donner un sens à ses activités scolaires en multipliant les appuis sur ses motivations, les illustrations et les applications situées hors du champ strictement mathématique
- ensemencer un terrain favorable à l'intuition et au développement de l'esprit scientifique où l'induction retrouve sa place à côté du raisonnement déductif ou hypothético-déductif

$$\text{(hypothèses} \xrightarrow[\text{(théorie)}]{\text{déduction}} \text{conclusion)}$$

Pour mettre en oeuvre ces projets ambitieux, nous avons pratiqué selon des *méthodes*, peaufinées elles aussi avec le temps. Citons les principaux points :

① *Place à une activité véritable de l'enfant* par des manipulations sur matériel, objectivées ou ouvertes, par des constructions graphiques, des enquêtes statistiques, des problèmes de natures et de niveaux très variables, certains mettant en oeuvre une réelle activité intellectuelle. C'est une tentative de mise en pratique des théories Piagétiennes relatives à la vertu des méthodes actives qu'il ne faut pas confondre avec les méthodes perceptives, assez inefficaces, pratiquées souvent pour se donner bonne conscience.

② *L'activité s'exerce en groupe* ; ceci en vue d'échanges interindividuels qui favorisent la socialisation de l'enfant à travers l'organisation d'une tâche collective, dans la tolérance de conceptions différentes et par la mise en place d'une logique s'imposant plus comme impératif moral et social que comme dette à l'autorité du maître. Le groupe fait naître aussi des affrontements et des conflits ouverts qui provoquent avec bonheur les remises en cause et les déséquilibres dans le champ des connaissances, seules sources de progrès dans l'appropriation des concepts. Enfin, l'activité du groupe permet au professeur une meilleure observation de la vie de classe et, en particulier, une détection des modèles implicites, sous-jacents aux comportements des élèves, révélateurs de ces modèles.

③ *L'apprentissage* des notions de quatrième et troisième (et a fortiori des classes antérieures) s'appuie sur une théorie mathématique primitive où les concepts et les termes descriptifs sont surabondants : "milieu" et "distance", par exemple, ne sont pas bannis du vocabulaire et reçoivent, au début de la géométrie de quatrième, le statut technique et opératoire dont les naturels, en particulier, disposent jusqu'à l'Université. Ainsi, plutôt que d'appauvrir les points d'appui, de séparer obstinément affine et métrique et d'avoir la prétention (que le professeur seul apprécie) de construire linéairement un édifice, et de croire que c'est ainsi qu'il se met en place chez l'enfant, nous préférons lui procurer ou lui autoriser des outils lui permettant de résoudre des problèmes ni naïfs, ni triviaux.

④ *Les transformations sont privilégiées* en raison de la dynamique dont elles sous-tendent les concepts plus statiques figurant aux programmes de quatrième et troisième :

Symétrie centrale → parallélogramme

Translation → parallélogramme, bipoint, vecteurs

Symétrie axiale → médiatrice, bissectrice

Homothétie → produit d'un vecteur par un entier, un rationnel

Rotation → angle

En outre, ces transformations, abordées sous deux représentations différentes (nombre et espace) procurent un liant naturel entre ce que l'on continue traditionnellement à séparer en les appelant : algèbre et géométrie. Enfin, ce sont ces transformations qui permettent avantageusement, au niveau de l'appropriation conceptuelle, de dégager des invariants et de faire fonctionner les structures trop souvent simplement construites puis contemplées : structures affine, métrique de la droite et du plan, structure de groupe, etc...

⑤ *Les contenus des programmes* sont intégrés dans des *thèmes*, à support concret, préfigurant une présentation d'un programme en ilôts. Citons, par exemple, certains de ceux qu'a développés l'équipe de Rennes-Vannes dans l'intention de l'apprentissage de quelques contenus :

Lignes et surfaces → incidence, orthogonalité

Ombres → projection → Thalès ; graphiques, abaques

Equilibre autour d'un point → parallélogramme
Equilibre autour d'un point → moyenne
Equilibre autour d'un point → symétrisation d'ensembles ($\mathbb{Z}$, puissances de 10, $\mathbb{Q}$)

Glissement → bipoints, vecteurs
Glissement → quelques fonctions numériques

Tableaux statistique (enquêtes) → données ⟶ tableaux ⟶ graphiques
Tableaux statistique (enquêtes) → extrapolation

Appareils gradués → graduations
Appareils gradués → décimaux

Pliage → médiatrice, bissectrice
Pliage → quelques fonctions numériques

etc.

On trouvera en annexe le développement intégral d'un thème tel qu'il a été pratiqué en classes expérimentales.

⑥ Chaque thème fait apparaître les concepts sous différentes *formes signifiantes ou représentatives* et à *plusieurs niveaux d'activités* (1).

a) *Lors d'une première étape*, les élèves "bricolent", manipulent, recueillent des informations, formulent des premières hypothèses relativement aux algorithmes de construction qui modélisent l'action de l'outil manipulé, soumettent par des simulations et des prévisions ces hypothèses à des confrontations effectives avec le réel. Les élèves conçoivent ici leurs premiers théorèmes en acte selon un modèle implicite : par exemple, pour construire l'image d'un polygone par une symétrie orthogonale, on constate qu'il suffit de chercher l'image des sommets et de joindre... Pas de théorie ! Les interrelations que l'enfant a ici avec son milieu (professeur, camarade, appareillage,

(1) Trois films super 8 élaborés à l'I.R.E.M. de Rennes par l'équipe OPC locale illustrent ce dernier point.

objets divers) sont dénommées par G. Brousseau *dialectique de l'action.* Les apprentissages sensori-moteurs acquis ici sont avantageusement réinvestis dans les activités plus mentales vécues ultérieurement.

b) Lors de la 2ème étape, l'élève fait fonctionner les algorithmes de construction graphique ou numérique précédemment conçus et se montre capable d'exprimer ses actes au moyen d'images ou du verbe (*dialectique de la formulation* selon G. Brousseau). Ces constructions se substituent à l'exécution faite par l'outil dans la phase initiale. Elles servent également de terrain d'apprentissage au dessin et à l'organisation de calculs où soin et minutie s'imposent ou sont exigibles naturellement.

c) Enfin, dans une 3ème étape, l'élève opère au niveau du modèle mathématique ou tout au moins il *valide*, à travers le modèle, ses actions antérieures. Cette activité est plus élevée dans la hiérarchie des démarches intellectuelles : en particulier, l'enfant est susceptible ici d'effectuer des opérations sur les opérations (raisonner à la 2ème puissance, dirait Piaget) à l'aide du langage formel dont il est maintenant muni. Par exemple, il validera un théorème en acte antérieur : "un triangle isocèle (AB = AC) est globalement invariant dans la symétrie d'axe la bissectrice issue du sommet A", ou bien prouvera que la composée d'un nombre pair de symétries centrales est une translation.

Bien entendu, ces trois types d'activités ne sont pas toujours séparés dans les actions et la pensée de l'enfant : mais nous voulons qu'un temps soit accordé dans chaque thème à chacune de ces étapes afin que tout enfant vive sa propre aventure, construise ses propres schémas conceptuels en disposant des homomorphismes de passage de l'un à l'autre, et enrichisse à son gré sa propre préparation à des orientations ultérieures très différentes.

2.2. POUR UNE PEDAGOGIE PAR OBJECTIFS

La tradition enseignante, fortement entretenue par la majorité du corps administratif, garant du système éducatif, veut que les contenus de l'enseignement soient la substance des programmes et que la méthodologie didactique se dégage des seuls objectifs de savoir. Nous venons de voir quelle est notre position au sujet de la méthodologie. Mais il manque un élément structurant la mission qui nous est confiée et qui donne un sens au "comment enseigner" : c'est le "pourquoi enseigner". Des points de vue et des propositions à ce sujet sont présentés, entre autres, dans "Pour une pédagogie par objectifs" (GREPPO — IREM d'Orléans) et dans "Vers une pédagogie par objectifs" (R. GRAS — IREM de Rennes). Aussi, je ne développerai pas ici les types de réponse apportés à la question mais en indiquerai seulement les grandes lignes, en communiquant les principales réflexions des équipes O.P.C..

2.1. *Nécessité de définition des finalités et objectifs généraux*

Sans entrer dans des considérations philosophiques qui auraient peu de chances de se concrétiser au niveau de la classe, nous distinguons trois finalités éducatives à court et moyen termes, attribuables à notre discipline :

1 - Préparation à une insertion à la vie quotidienne, sociale et professionnelle
2 - Préparation à une poursuite éventuelle des études techniques ou générales
3 - Formation humaniste

Ces finalités dans leur réalisation subissent des distorsions plus ou moins importantes du fait de certains facteurs comme la conjoncture, les idéologies de la société et de la famille, les motivations des enseignés, des enseignants, etc... Il s'en dégage néanmoins trois classes d'objectifs généraux qu'il est nécessaire de définir, préciser et prendre en compte dans notre action quotidienne :

- objectifs cognitifs
- objectifs affectifs
- objectifs psycho-moteurs

Les premiers traduisent les niveaux d'appropriation et de mise en disponibilité des connaissances : par exemple les capacités à analyser, à transposer, à structurer, à créer des exemples, des contre-exemples, etc... Les seconds touchent l'affectivité propre de l'élève (prendre intérêt à la recherche, à la rigueur, se poser des questions, avoir une attitude scientifique et humaine face à un problème concret, s'épanouir, etc...) ou bien son socio-comportement (échanger et produire collectivement, convaincre, admettre, tolérer, etc...). Les derniers décèlent la part éducative accordée à l'action dont nous avons parlé plus haut : vivre en acte des aventures mathématiques, simuler une action, la contrôler, etc...

2.2. *Opérationalisation de ces objectifs*

Nous avons dégagé des classes de verbes d'action (physique ou mentale) nous semblant rendre opérationalisables ces objectifs qui risqueraient sans eux de demeurer des voeux pieux, typiques d'instructions très moralisatrices, mais ne passant pas dans les faits.

Ces classes sont définies par un mot dont nous précisons le sens ici :

1 - *Heuristique* : recouvre tout ce qui est lié aux séquences de recherche, à vocation de découverte par l'élève.

2 - *Traductif* : recouvre les activités de passage d'un langage dans un autre langage (langue maternelle formalisée, dessin, tableau, graphique, etc...)

3 - *Classificatoire* : recouvre les activités de classement selon un critère, activités supposant éventuellement une perte d'information en faveur d'une identification classifiante.

4 - *Calculatoire* : recouvre toutes les activités algorithmiques, portant essentiellement, en premier cycle, sur les nombres, ce qui ne sera pas toujours le cas ultérieurement.

5 - *Logique* : recouvre les activités de type hypothético-déductif. Le développement des qualités de raisonnement y est visé.

6 - *Technique* : recouvre les activités où soin, minutie, précision, persévérance sont fortement sollicités.

7 - *Transfert* : recouvre toutes les activités dites d'application où les champs de représentation sont différents : on y passe, en général, d'un modèle au réel où l'on utilise les résultats établis dans le modèle.

8 - *Critique* : recouvre les activités où s'exercent l'esprit critique, la comparaison d'un résultat par rapport à un référentiel connu ou présumé.

9 - *Prédictif* : recouvre enfin les activités tournées vers l'extérieur du champ perçu et prospecté, activités qui mettent en oeuvre les facultés inductives de l'"apprenant".

Le tableau qui suit indique certains des verbes d'action satisfaisant ces objectifs :

Classes d'objectifs opérationalisables	1 Heuristique	2 Traductif	3 Classificatoire	4 Calculatoire
Verbes d'action permettant l'opération- alisation	. bricoler . chercher . inventer . créer . émettre des hypothèses	. observer et choisir . analyser . schématiser . représenter . décrire . modéliser . transposer	. organiser classifier . discerner . ordonner . analyser . synthétiser . identifier	. dénombrer . calculer . appliquer un algorithme

5 Logique	6 Technique	7 Transfert	8 Critique	9 Prédictif
. prouver . convaincre . rédiger (pour être lu) . tolérer . déduire . résoudre des problèmes	. soigner la présentation d'un dessin ou d'un calcul . se montrer précis, minutieux, méticuleux . se montrer persévérant et organisé	. appliquer . construire un exemple, un modèle . illustrer . faire fonctionner	. contrôler interpréter . évaluer . maîtriser la vraisemblance . critiquer (contre-exemple) . remettre en question . valider invalider . optimiser	. estimer (approximativement) . induire . prévoir . conjecturer

Dans le cadre de la recherche O.P.C. nous élaborons progressivement une grille qui, à titre d'exemple, essaie de tenir le pari de satisfaire simultanément les objectifs de contenus et les objectifs cités ci-dessus. Bien entendu, tout éventuel usager donnera le sens et la matière qui lui conviennent à l'activité proposée succinctement à l'intersection ligne-thème et colonne-objectif. Libre au lecteur de substituer, aux thèmes cités ici, d'autres thèmes plus conformes à ses voeux, à son tempérament ou aux aspirations de la classe. Nous décrivons plus loin comment un de ces thèmes (Papiers peints) a trouvé sa place dans des classes diverses de sixième, cinquième et troisième.

Objectifs pédagogiques / Thèmes (Situations)	HEURISTIQUE	TRADUCTIF	CLASSIFICATOIRE	CALCULATOIRE et TECHNIQUE	LOGIQUE
Enigmes policières Master-Mind		Choix des informations	Ordonner les informations		Déduction Preuve
Circuits électriques	Bricolage Invention de circuits	Schéma (codage)	Recherche de montages équivalents	Calcul booléen	Activités sur une algèbre booléenne
Factures et crédits	Trouver l'algorithme d'élaboration	Analyse de factures données ; élaboration		Vérification de calculs. Application d'algorithmes	
Jeu du "Compte est bon"	Recherche et création de problèmes	Organigramme		Calcul mental	
Ombres	Recherche de la loi. Recherche du rôle du plan de projection	Observer et schématiser	Classement des types d'ombres	Dessin en perspective cavalière	
Enquêtes statistiques	Recueil et premier ordonnancement des informations	Report des données	Inventaire et répartition des tâches. Relevé de données	Dénombrement	
Tableaux et traitement des données numériques		Analyse : tableaux graphiques, schémas divers	Classement selon critères divers	Dégager des paramètres ; construire des indices	Choix opportun d'indices
Le cube	Développement Squelette Intersections par des figures diverses	Paramètres spatiaux (sommets, faces, arêtes, représentations diverses)	Relations diverses (entre arêtes et faces; coloriages possibles) Classement des solides par leurs patrons	Mesurages divers Combinatoire des paramètres	Cheminement sur un treillis booléen

REINVESTISSEMENT (Transfert)	CRITIQUE	PREDICTIF	SATISFACTION DES OBJECTIFS ACTUELS EN MATHEMATIQUES 1er CYCLE			
			6è	5è	4è	3è
			Approche des règles de logique			
			Approche des règles de logique (distributivité en particulier)			
	Critique d'un devis. Recherche optimale	Prévoir des mensualités de crédit	Proportionnalité (ou non). Pourcentages (exemples - contre-exemples)		Fonctions polynômes (taux d'intérêt approché)	Fonctions linéaires et affines
	Optimiser l'algorithme		Usage des parenthèses			
Reconstitution d'une figure initiale			Approche globale des transformations ponctuelles non bijectives concernant ou non les formes		Projections. Proportionnalité. Rapport de projection. Thalès (toutes propriétés affines et projectives)	
Simulations	Validité des sondages	Sondage Prévision de phénomènes	Introduction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{D}$ Pourcentages		Graphiques	
	Rejet de résultats aberrants. Interprétation des résultats Critique des indices	Dégager des tendances. Prolonger Induire	Proportionnalité ; moyenne. Approche de la notion de distance	Approche du barycentre	Barycentre Vecteurs (non géométriques)	Distance
Construction du treillis des diviseurs Lecture de plans	Reconnaissance des patrons absurdes	Extension à la connaissance de l'espace ambiant (ou "surambiant")	Exercices d'observation et de mesure sur des objets géométriques. Pavage de figures élémentaires	Parallélisme Orthogonalité. Ensemble des diviseurs	Axiomes d'incidence	Eléments de symétrie

Mailles et réseaux	A clouter sur la planche à trous. Utilisation du papier quadrillé	Quadrilatères "téléphonés" Repérage par point ou par case Codage de déplacement	Classification des quadrilatères Classification points ou cases selon la direction Recherche de formes de mailles pour engendrer un réseau Du parallélogramme au classement des bipoints	Mesurages divers (pavages carrés par ex.) Aire d'une figure par la formule de PICK Dénombrement sur décomposition et recomposition de mailles à partir de mailles éléments	
Tables	Une table étant donnée, recherche de la loi	A partir d'un ensemble de données construire une table. Lecture d'abaques Construction d'un graphique à partir d'une table	Recherche de propriétés communes à plusieurs tables	Ayant une loi construction d'une table Interpolation (calculs) Produits matriciels	
Papiers peints	Recherche du motif minimal Recherche des instruments	Codage et expression des déplacements Modélisation par choix des paramètres	Classification des papiers peints suivant les isométries qu'on y trouve	(ex. raccords sautés, calcul de nombre de rouleaux, tricot Jacquard)	Application des lois découvertes. Règles d'utilisation des instruments
Calendriers	Recherche du jour de la semaine où tombe une date donnée	Traduire les observations par des tableaux de correspondance ex. : le 1er janvier tombe un mercredi, combien de fêtes tomberaient un week-end	Recherche de loi de périodicité (penser au calendrier des marées)	Appliquer les algorithmes découverts	Explication des procédés de calcul
Polyminos	Découvertes des formes	Codages des formes	Classement des dessins selon les formes représentées	Dénombrement Aires	Prouver qu'on peut (ou non) reconstituer un carré, un rectangle de dimensions données

Messages "bélinographiques" Génération de réseaux à mailles quelconques topologiquement équivalents, aux mailles données	Comptabilité de mailles avec générateurs de réseaux	Passage du plan quadrillé au plan affine Passage du quadrillage au plan vectoriel	Quadrilatères divers	Déplacement sur quadrillages	Plan repéré Bipoints équivalents Vecteurs	Equations de droites. Inéquations Représentation des solutions
Superposition et composition de tables. Construction d'abaques	Détection d'erreurs et calculs approximatifs	Extrapolation Interpolation	Propriétés des opérations et des relations	$(\mathbb{Z}, +)$	Groupes finis	Tables Trigo
Reconnaître des transformations dans des domaines différents (dynamiques) Translation Phénomènes périodiques	Des règles étant données critique de leur application	Prolongement d'un papier fabrication d'un papier	Composition de transformation - lois de composition - codage Transports de dessins Repérage		Translation Symétrie - point	Isométrie Groupe Symétrie orthogonale. Phénomènes périodiques Pavage du plan
Etude d'autres calendriers. Phénomènes astronomiques périodiques	Comparaison des différentes méthodes de calcul ; critique de choix de calendriers	Choix d'un système de fêtes légales qui optimiserait les congés. Problème d'étalement des vacances	Opérations	Divisibilité p p m c (compatibilité de congés)	Changement de graduation	
Poser et résoudre des questions analogues à partir de figures élémentaires différentes	Comparaison de méthodes de construction exhaustivité	Quelles questions peut-on se poser à propos de l'ensemble des polynômes?	Aires, relations Aire-périmètre, Nombre de carrés Nombre de formes	Démonstration par contreexemples		

Equilibres	Manipulation : balances Roberval, romaine ; didagraphes. Bilans - Alliages	Détermination graphique de barycentres Représentation de droites et hyperboles Coordonnées barycentriques	Recherche d'ensembles munis d'une loi interne et d'un invariant (centre d'équilibre)	Dégager la loi Appliquer l'algorithme Calculs de moyenne pondérée	Notion de vraisemblance
Calculateurs	Boîte noire (manipulation de la machine) Familiarisation avec des propriétés numériques Investigations	Organigrammes Programmes	Fonctions directes, réciproques	Tabulation d'une fonction Utilisation exhaustive de la machine	Construction d'organigramme Recherche d'erreurs Notion de boucle et test
Transformations de formes et de figures	Manipulation Observation des figures obtenues par source lumineuse ou appareils à transformer (didagraphes, appareil photo, miroirs) Perspectives Modèle réduit	Passage de l'analytique au graphique : plan, cartes / échelles dessin technique	Classement des transformations par leurs propriétés (invariant, linéarité, ordre, distance, angles, frontière) et des formes	Usage de l'algorithme de construction	
Agrandissement Réduction	Maquette Appareil photo Cartes Compas de réduction	Schématisation en "un plan"	Classification des homothéties et affinités	Echelle donnée recherche d'images Calcul d'échelles	Choix opportun d'une échelle

Faire opérer la loi "moment" sur des phénomènes réels Pont de Wheatstone	Vraisemblance des résultats	Interpolation Extrapolation	Associativité. Distributivité. Proportionnalité	Décomposition en facteurs entiers (pb : xy=A)	Equations-Inequations Fonction affine Puissances de 10 (xy=1 Symétrie centrale - Milieu - Barycentre - Parallélogramme - Figures admettant un centre de symétrie	
Organisation et traitement des données Tables traçantes	Maîtrise des limites de la machine (arrondis) Contrôle d'un programme Optimisation d'un programme	Investigations (conjectures) Recherche d'aires par des méthodes aléatoires	Calcul mental dans **Z** et **D** Opérations - Usage des parenthèses Simplifications d'écriture		Variables et constantes Encadrement Différentes écritures d'un nombre (virgule fixe ou flottante)	Résolution d'une équation par le schéma de Hörner Fonctions trigonométriques
Etant donné 2 figures, recherche d'une transformation les échangeant	Fourniture de contreexemples relatifs aux propriétés des transformations géométriques Reconstitution d'un concept à l'aide d'une de ses représentations (fidélité de certaines transformations) Fidélité des sondages	Prévision de forme et figures quand on connaît des éléments de leurs transformés	Transformations sur quadrillages Bijections		Toutes transformations planes : . symétries . translation . homothétie . affinité . inversion	
Diverses situations intervienent des facteurs multiplicatifs	Facteurs additifs et multiplicatifs Fidélité d'une représentation par rapport à son objet	Sondage. Inférence statistique	Echelles - Proportionnalité Multiples, diviseurs		Produit d'un vecteur par un scalaire Applications affines et linéaires Propriétés de Thalès Homothétie - trigonométrie	

2.3. POUR UNE EVALUATION PAR OBJECTIFS

2.3.1. *Nécessité oblige.*

Il est évident maintenant qu'une évaluation traditionnelle, déjà défectueuse dans le système actuel, n'a plus sa place dans le cadre d'un programme par objectifs où elle n'assumerait qu'une fonction étroite de mesure d'un acquis de savoir. Se limiter en effet à ne prendre en compte que les seules capacités de régurgitation de contenus, et de procédés ou d'automatismes pour les appréhender, a le double défaut de n'évaluer qu'une partie des acquisitions de l'élève et d'infléchir le comportement du maître à une mise en conditionnement question-type-réponse (tout au moins à l'approche des épreuves évaluatives).

Appauvrir l'instrument de mesure revient à notre avis à appauvrir l'acte éducatif lui-même. Il y a donc lieu de redéfinir sa fonction et sa forme. Il est bien clair que nous chercherons et dans sa fonction diagnostique (repérer les obstacles par exemple) et dans sa fonction sélective ou partitive à intégrer l'évaluation des objectifs visés. Que certains d'entre eux soient difficielement évaluables, sinon inévaluables, ne doit pas être un alibi pour ne pas tenter de les apprécier.

Nous travaillons actuellement à la construction d'un questionnaire cherchant à cerner les phénomènes affectifs et l'atteinte des objectifs dans ce domaine. Sur le plan cognitif, les groupes O.P.C. ont élaboré des exercices qui, utilisant peu ou prou la typologie de l'IREM de Strasbourg (1) et la typologie précédente, ont pour ambition de mesurer la satisfaction de chacune des 9 classes d'objectifs décrites précédemment. Ils s'efforcent, dans la forme, de mieux préciser ce que le correcteur (ou l'auto-correcteur) peut attendre de telle ou telle question, éclairant ainsi le contrat évaluateur-évalué. Ils s'efforcent aussi de limiter et homogénéiser les objectifs de tel problème et, selon cette ligne, dans le cadre en particulier d'un examen comme le BEPC, de rendre indépendants plusieurs petits exercices où numérique et géométrique peuvent s'associer.

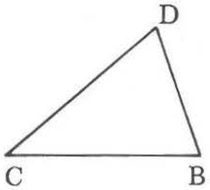
Par exemple, l'un d'entre eux aura pour mission de mesurer la capacité d'effectuer un raisonnement, un autre de mesurer la capacité à transposer une situation d'un langage dans un autre (tableau $\longleftrightarrow$ graphique) ou bien celle d'effectuer un calcul précis

(1) Cf. "Pédagogie de l'exercice et du problème". Tome I CEDIC

où soin et méthode seront appréciés, un autre de mesurer la capacité à créer un exemple personnel satisfaisant à des données imposées ou illustrant une situation ou bien de mathématiser et résoudre un problème du champ réel, etc.... Nous fournissons ci-dessous à titre d'exemples 3 textes niveau BEPC et quelques sujets d'exercices aux fonctions plus précises et moins appauvries semble-t-il qu'à l'ordinaire.

2.3.2. *Première proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. RENNES-VANNES*

I - D, B et C sont trois points donnés. Toutes les constructions demandées sont à faire avec soin. Il en sera tenu compte lors de la correction.



1°) Construis (en noir) l'image du triangle DBC par la symétrie de centre C.

2°) Construis (en noir) l'image du triangle DBC par la symétrie par rapport à (BC).

3°) Construis (au crayon gris) l'image D'B'C' du triangle DBC par la symétrie par rapport à la médiatrice de [BC].

4°) Construis (en noir) l'image du triangle D'B'C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

II - Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, place les points :

A(11, 13)   B(−4, 13)   C(−4, −7)   M(8, 4)

1°) Calcule les distances AB ; BC ; AC.

2°) Détermine et place les points A', B' et C' tels que :

$$\overrightarrow{MA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} \qquad \overrightarrow{MC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

3°) Calcule les distances A'B' ; B'C' ; A'C'.
Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Pouvais-tu le prévoir dès la 2ème question ? Pourquoi ?

III - Pour une vente-réclame, un magasin de disques donne une grande photo de chanteur à tout client achetant un disque 33 t. à 50 F ou pour l'achat d'un paquet de six disques 45 t. à 60 F le paquet. Un groupe de jeunes se propose

d'acheter des disques pour leur foyer pour un montant ne pouvant excéder 360 F.
Quelles sont les solutions possibles pour obtenir six photos ?
Combien au maximum ces jeunes peuvent-ils obtenir de photos ?

IV - ABC est un triangle rectangle en B.

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

P est le point tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; I est le milieu de [BP].

1°) Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

2°) Montrer que (MI) est la médiatrice de [BP].

3°) M′ est le symétrique de M par rapport à (BC). Le cercle de centre M′ et de rayon M′B coupe (AB) en N.
Démontrer que P, M′ et N sont alignés.

Notes pour les professeurs

Relativement à la classification de l'exercice et du problème,

l'exercice I est une *tâche technique* demandant surtout du soin et de la méthode

l'exercice II est un *exercice didactique* mesurant l'acquisition de mécanismes

l'exercice III est un *exercice d'application* demandant une reconnaissance du modèle

l'exercice IV est un *problème* où l'on attend une démonstration rigoureuse de la part des enfants.

2ème proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. RENNES-VANNES

I - On donne $f(x) = x^2 + 6x + 5$; on cherche à factoriser f(x).

1°) Complète $A(x) = x^2 + 6x + \dots$ pour que cette expression soit le carré B^2 d'un binôme du 1er degré B.

2°) Quel entier faut-il ajouter à B^2 pour obtenir f(x) ?

3°) Factorise f(x) en pensant à la forme obtenue à la question 2.

II - On donne $A(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 2x + 10$.

Calcule $A(\frac{1}{2})$ et $A(\sqrt{3})$.

III. Le but de cet exercice n'est pas de justifier les réponses données, mais de fournir les réponses convenables, au besoin en tâtonnant.

a) Dessine un triangle ABC tel que [AB] mesure 3 cm et que [AC] mesure 4 cm. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b) Peux-tu construire un triangle ABC tel que [AB] mesure 3 cm, [AC] mesure 4 cm et [BC] mesure 8 cm ?

c) Choisis toi-même plusieurs valeurs pour la mesure de [BC] et essaie chaque fois de construire le triangle. Est-ce toujours possible ? Dans quel intervalle la mesure de [BC] doit-elle être comprise pour que la construction soit possible ?

IV - Le but de cet exercice est de trouver et de rédiger une démonstration.
ABC est un triangle rectangle en A.
A' est le symétrique de A par rapport à (BC).
B' est le symétrique de B par rapport à (AA').
$(A'B') \cap (AC) = \{K\}$

1°) Démontre que les quatre points A, B, A' et C sont sur un même cercle.

2°) Quelle est la nature du triangle AA'K ? Justifie ta réponse.

3°) Donne une condition sur l'angle $\widehat{BAA'}$ pour que B' soit au milieu de [BC] .

Note pour les professeurs

Relativement à la classification de l'exercice et du problème :

l'exercice I est un *exercice didactique* mesurant l'acquisition de mécanismes

l'exercice II est une *tâche technique* demandant surtout du soin et de la méthode

l'exercice III est une *manipulation*, c'est-à-dire qu'elle correspond à la redécouverte en acte d'un théorème l'exercice IV est un *problème* qui comporte un enchaînement de raisonnements mais où les démonstrations ne se réduisent pas à des calculs numériques ou algébriques.

3ème proposition d'un texte d'épreuve BEPC par l'équipe O.P.C. CAEN

A — Exercice didactique.

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$

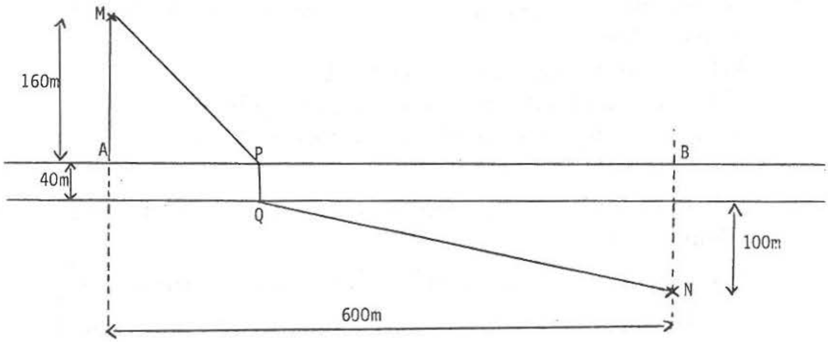
1°) f(x) est-il le carré d'un binome du 1er degré ? Justifier.

2°) Déterminer m pour que $x^2 - 6x + m$ soit le carré d'un binome du 1er degré.

3°) En remarquant que $5 = m - b$, trouver b et factoriser f(x).

4°) De même factoriser $4x^2 - 20x + 16$.

B — Exercice d'application + tâche technique



Une route doit passer impérativement par les points M et N, de part et d'autre d'une voie ferrée que doit enjamber un pont de 40 m. Ce pont doit être perpendiculaire à l'axe de la voie ferrée. On se propose de trouver entre A et B l'emplacement du pont afin que la route formée de 2 tronçons rectilignes et du pont soit la plus courte possible. (On exprimera les distances en décamètres).

a) P étant entre A et B, on note x la distance entre A et P. Exprimer, en fonction de x, les distances d(M, P), d(Q, N).
Soit f(x) = d(M, P) + d(P, Q) + d(Q, N).
Exprimer f(x) en fonction de x.

b) Calculer f(x) pour les valeurs de x comprises entre 0 et 60 (dam) qui sont multiples de 5.
Faire une représentation graphique (utiliser la table de carrés).

c) Quelle valeur de x faut-il choisir pour que la distance entre M et N soit la plus courte possible ?

C — **Problème**

Soit un parallélogramme (A, B, C, D). Une droite issue de D coupe (AC) en M et coupe la parallèle à (AC) menée par B en N.

Construire la figure et démontrer que M est le milieu de (D, N).

2.3.3. *Sujets divers classés*

I — **Application**

Le double plateau est la double roue dentée solidaire des pédales. La roue libre est la roue dentée liée à la roue arrière. La chaîne relie l'un des plateaux du pédalier à l'un des pignons dentés de la roue libre.

Chaque dent d'un plateau engrène une maille de la chaîne qui dans le même temps engrène une dent du pignon.

On admettra dans tout le problème que le vélo s'arrête dès que l'on cesse de pédaler.

700 est la mesure du diamètre (en mm).

BICYCLETTE GRAND SPORT 10 VITESSES

DEMI-COURSE - Fourche 1/2 chromée - Pneus 700 C sport - Garde-boue **Uginox** - Moyeux **Normandy** grandes joues - Disque protège-rayons - Freins 1/2 course **Racer** dural tirage central - Guidon course potence dural luxe - Selle course luxe matelassée - Pédales 1/2 course manivelles 3 branches - Double plateaux 45/50 dents - Roue libre 14, 16, 19, 22, 26 dents - Porte-bagages arrière sport chromé - Timbre - Pompe - Sacoche de selle avec outillage - Entrejambe 78 à 85 cm - Coloris ARGENT - Poids 14,4 kg.

1°) Si la chaîne relie le plateau 45 dents au pignon 22 dents (le cycliste utilise alors le rapport 45/22) et si on fait 1 tour de pédale, quel est le nombre de tours de roue ?

2°) Quelle est alors la distance parcourue par la bicyclette (cette distance est le développement). Pour ce calcul prendre 22/7 pour valeur approchée de π .

3°) Quel est le développement de cette bicyclette pour chacun des 10 rapports ?

(*Proposé par l'équipe OPC — Limoges*)

II — Manipulation

① On se pose la question : deux rectangles qui ont même aire ont-ils le même périmètre ?

1) On considère tous les rectangles dont les mesures des côtés, exprimées en cm, sont *deux naturels* l_1 et l_2, et dont l'aire est 16 cm^2 .

a) Compléter le tableau suivant, en envisageant tous les cas possibles.

l_1	l_2	Périmètre du rectangle exprimé en cm $[2(l_1 + l_2)]$

b) Le périmètre est-il le même pour tous les rectangles ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond le plus petit périmètre ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond le plus grand périmètre ?

2) Même dernière question si l'aire des rectangles est 36 cm^2.

3) Même dernière question si l'aire des rectangles est 12 cm^2.

4) Deux rectangles ont la même aire. L'un d'eux est un carré. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ? Avez-vous une intuition de la réponse ?

② On étudie maintenant un *ensemble de rectangles ayant le même périmètre.*

On considère tous les rectangles dont le périmètre est 12 cm et dont les mesures des côtés, exprimées en cm, sont *deux naturels* l_1 et l_2 .

1) Compléter le tableau suivant en envisageant tous les cas possibles :

l_1	l_2	Aire du rectangle exprimée en cm^2 $[l_1 \times l_2]$

2) A quels couples (l_1, l_2) correspond la plus petite aire ?

A quels couples (l_1, l_2) correspond la plus grande aire ?

(Textes proposés par l'équipe OPC — Limoges)

③ Tu disposes des instruments suivants :

règle graduée, rapporteur, compas.

Tu dessines dans un plan où il y a déjà une demi-droite fixe Ox, d'origine O.

Nous considérerons des nombres *naturels* t .

A chaque entier nous ferons correspondre un (et un seul) point M. Il s'agira de placer les points M de la façon la meilleure possible pour suivre, en lisant la figure, l'influence de la variation de t . Ceci, à partir des règles du I ci-dessous.

I Nous avons $0 \leqslant t \leqslant 6$

M est défini par $\left| \begin{array}{l} OM = \dfrac{1}{2} t \text{ (unité = cm)} \\ \text{En degrés, } \widehat{M0x} = 30\,t. \end{array} \right.$

1°) Place M pour t = 5.

2°) Place M pour chacune des autres valeurs possibles de t.

II Continue ton dessin pour t > 6. [Pour cela, change, le moins possible, la définition précédente de M]. Indique brièvement comment tu pourrais le poursuivre indéfiniment.

III Mêmes consignes, pour $t < 0$.

IV Parle-nous un peu de ton dessin ...

(Proposé par l'équipe OPC — Toulouse)

④ On donne un point A du plan.

a) Construire un parallélogramme (A, B, C, D) tel que AC = 8 cm et BD = 6 cm.

b) Il y a tout un ensemble de parallélogrammes répondant à la question ;

— dans quel sous-ensemble du plan se trouve nécessairement le point C ?

— dans quel sous-ensemble du plan se trouve nécessairement le centre 0 du parallélogramme ? Fais un dessin.

c) Peux-tu (en faisant éventuellement des tâtonnements) trouver un sous-ensemble du plan dans lequel se trouvent nécessairement B et D ?

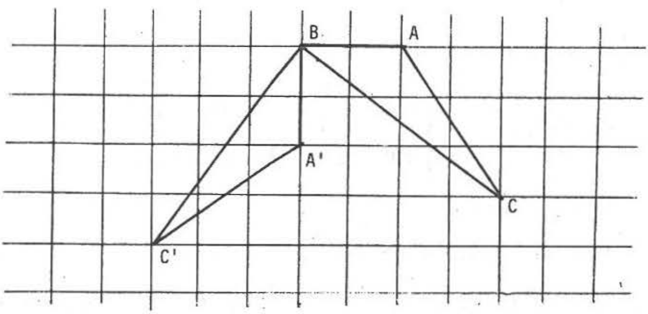
Hachure cet ensemble sur le dessin.

Dans quel sous-ensemble du plan se trouvent nécessairement B et D si (A,B,C,D) est un *losange* ?

(Proposé par l'équipe OPC RENNES-VANNES)

⑤ Trouve une isométrie qui, précédée de la symétrie d'axe (BC), transforme le triangle ABC en le triangle A′ B C′ .

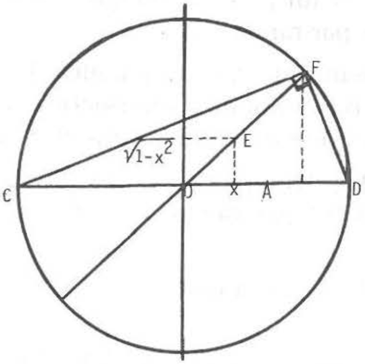
Donne toutes indications utiles sur le dessin et en particulier la figure intermédiaire.



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

III — Problèmes

①



Soit un plan (euclidien) rapporté à un repère orthonormé.
Soit A (1;0) et $E(x,\sqrt{1-x^2})$ où x est un réel compris entre −1 et 1.

1°) Choisis une valeur numérique non entière de x. Dessine le point E correspondant.

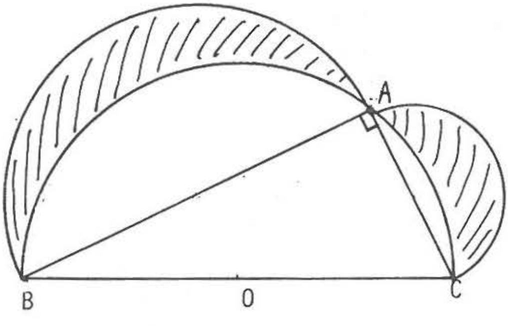
2°) Soit C(− 2 ; 0) et D(2 ; 0).

Explique comment tu construis, avec règle et compas, un point F tel que $\left|\begin{array}{l} F \in (OE) \\ (CF) \perp (FD) \end{array}\right.$

3°) Comment choisir x, entier ou non, pour que l'aire du triangle CFD soit maximum. (RAPPEL : aire du triangle $= \frac{1}{2}$(mesure d'un côté × mesure de hauteur correspondante).

(Proposé par l'équipe OPC — TOULOUSE)

② ABC est un triangle rectangle. On trace les demi-cercles de diamètres [BC], [AB], [AC].
Y a-t-il une relation entre l'aire hachurée et celle du triangle ABC ?



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

③ Soient un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ et un point A tel que $d(O, A) < r$. A′ est le symétrique de A par rapport à O.

Soient D une droite passant par A et sa parallèle D′ passant par A′. On appelle B et B′ les points d'intersection respectifs de D et D′ avec le cercle, situés d'un même côté de (AA′).

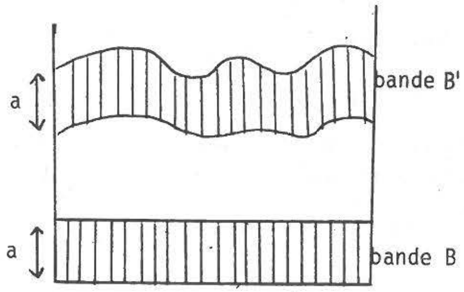
1) I est le milieu de [BB′]. Que penses-tu des directions des droites (OI), (AB) et (A′B′) par rapport à celle de (BB′) ? Prouve ton affirmation.

2) E est le symétrique de A par rapport à B. Calcule $d(E,A')$ en fonction de r.

(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

---

④ Les bandes B et B′ ont-elles les mêmes aires ? Pourquoi ?



(Proposé par l'équipe OPC — RENNES-VANNES)

IV — Sujets d'étude où les objectifs sont mêlés mais permettent le découpage en problèmes indépendants à objectifs plus précis.

① La partie A est de type "manipulation" alors que la partie B relève du type "problème".

P est un plan et Δ une droite donnée de ce plan.

k est un réel non nul.

M est un point quelconque de P et H le projeté orthogonal de M sur Δ.

On définit une application f de P dans P en donnant pour image à M le point M′ tel que $\overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$.

A Fais une figure dans chacun des cas suivants :

1) $k = -1{,}6$ et $M \notin \Delta$. Remarque la disposition des points H, M et M'.

2) $k = 2$ et $M \in \Delta$.

3) $k = 1$ et $M \notin \Delta$. Que dire de f dans ce cas ?

4) $k = -1$ et $M \notin \Delta$. Que dire de f dans ce cas ?

Soit maintenant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan P tel que $(O, \vec{i})$ est un repère de Δ .

B Dans cette partie, $k = -1{,}5$.

1 - (x,y) étant les coordonnées de M, calcule les coordonnées de M'.

2 - Quel est l'ensemble des points M tels que M = M' ?

3 - M décrit la droite D d'équation $y = 2x-3$. Quel est l'ensemble des points M' ?

4 - Généralise à une droite D d'équation $y = ax + b$, b réel,k étant quelconque.

(Proposé par l'équipe OPC — TOULOUSE)

---

② Voici encore deux problèmes "mixtes" proposés par l'*équipe OPC — Clermont-Ferrand.*

L'unité choisie est le cm.

A) *Construis*, en vraie grandeur, avec la règle et le compas, la figure suivante :

Un triangle ABC de 6 cm de côté ; le point D, *de la droite AB*, situé à 3 cm de A et tel que A soit *entre* B et D ; le point E, symétrique de D par rapport à (AC), le point F symétrique de B par rapport à (AC).

B) *Démontre que :*

a) les droites DE et BF sont parallèles
b) la droite EF passe par A.

C) *Démontre que* la figure ABCF est un losange.

D) On désigne par H le point d'intersection des droites (AC) et (BF). *Calcule* les distances AH et BH (pour cette dernière distance, on donnera la valeur *exacte*, puis la valeur approchée à 1 mm près par défaut).

E) On désigne par G le point d'intersection des droites (AC) et (ED). *Calcule* la distance AG.

③

1°) *Dessine* un triangle ABC rectangle en A. Construis la projection orthogonale H de A sur (BC), puis les symétriques M et N de H par rapport à (AB) et (AC). On désigne par K le point d'intersection de (AB) et (MH), par L le point d'intersection de (AC) et (NH).

2°) *Démontre* que ALHK est un rectangle. Qu'en résulte-t-il pour le triangle MNH ?

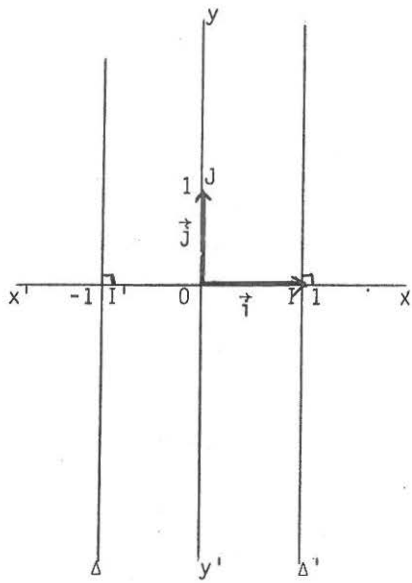
3°) *Démontre* que le cercle de centre A et de rayon AH passe par M et N.
Que représente ce cercle pour le triangle MNH ?
En déduire que A est le milieu du segment [MN] .

4°) *Démontre* que les droites (BM) et (CN) sont perpendiculaires à (MN).

(Proposé par l'équipe OPC — CLERMONT-FERRAND)

④ *Sujets d'étude de type didactique*

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère Δ et Δ' (voir figure ci-contre).



1°) Détermine une équation de Δ et une équation de Δ' en utilisant les informations données par le dessin.

2°) Trace la droite D d'équation $2x+y = 0$ et la droite D' d'équation $x - 2y = 0$. D coupe Δ en M et D' coupe Δ' en N. Calcule les coordonnées des points M et N.

3°) Calcule les coordonnées du milieu G de (M,N) puis les coordonnées du point P tel que (O.M,P,N) soit un parallélogramme. Démontre que (O,M,P,N) est un rectangle.

4°) Reproduis la figure ci-contre, trace une droite D quelconque passant par O et la perpendiculaire D' à D au point O.

D coupe Δ en M, D' coupe Δ' en N.

Prouve que le milieu G de (M,N) est élément de la droite (y'y) et que le point P sommet du rectangle (O,M,P,N) est toujours situé sur (y'y).

5°) Dans le cas où l'ordonnée de M est $\frac{3}{4}$, calcule d(O,M). En utilisant la table de trigonométrie, donne la mesure à 1 degré près de l'angle $\widehat{I'OM}$.

6°) Détermine alors les coordonnées du point N.

(*Proposé par l'équipe OPC — NIORT*)

2.4. EXTRAITS D'UNE FICHE-ELEVE REDIGEE ET COMMENTEE PAR L'EQUIPE OPC — VANNES :

A PROPOS DE LA TRANSLATION

Il nous paraît difficile, voire impossible, de rattacher directement l'idée de vecteur à une notion concrète. C'est pourquoi, malgré l'absence du mot TRANSLATION dans les projets de programme, nous maintenons l'étude de la translation, non pour elle-même, mais à titre d'instrument pour parvenir au vecteur et comme moyen d'action sur les figures.

Nous aurions aimé pourvoir comparer le niveau d'acquisition du concept de vecteur chez des élèves qui auraient fait un apprentissage pour les uns à l'aide de la translation et pour les autres, à l'aide des classes d'équivalence. Mais ceci reste à faire. Ainsi saurait-on mieux si le dynamisme des transformations favorise, comme on le croit, la compréhension.

La fiche élève qui suit comporte six parties dont certaines peuvent être menées de front, par exemple :

On peut commencer par motivation (I) et travaux pratiques (III), puis poursuivre avec schématisation (II), exercices graphiques (IV) et étude théorique (V) tout en traitant l'aspect numérique (VI) ce qui permet de faire des calculs pendant toute la durée de l'étude de ce thème.

I — Eléments de motivation (à l'intention du professeur)
II — Schématisation. Représentation
III — Travaux pratiques
IV — Mathématisation et exercices graphiques
V — Translation et vecteur (étude théorique)
VI — Aspect numérique de la translation.

On suppose connus : Le parallélisme. La projection.
Le bipoint. La symétrie centrale.
Le parallélogramme.

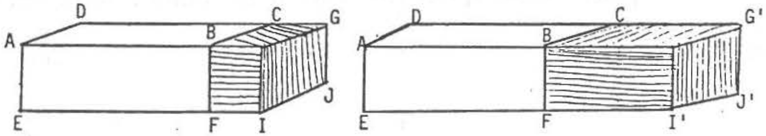
I - **Eléments de motivation** au niveau de l'observation d'objets dans lesquels interviennent des glissements.

- Fenêtres ou portes coulissantes
- Ascenseurs - Monte-charges
- Tapis roulants dans les aéroports
- Toboggan - Escalator

— Targette - Pied à coulisse - Tiroirs
— Boîte d'allumettes - Paquets de cigarettes, etc...

Donner l'idée de glissement en disant qu'on ne s'occupe pas de la trajectoire, seulement de l'état initial et de l'état final.

Schématiser la boîte d'allumettes par son état initial et son état final.



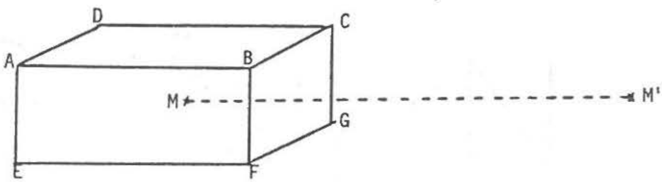
Etat initial — Etat final

Donner l'idée d'application entre 2 points du même objet.

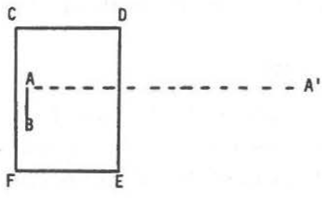
II - Représentation — Schématisation

2.1. Le schéma ABCDEFG représente une boîte d'allumettes.
M est un point dessiné sur la boîte.
Après glissement, le point M vient en M'.

Dessine la nouvelle position de la boîte, A'B'C'D'E'F'G', après le glissement.



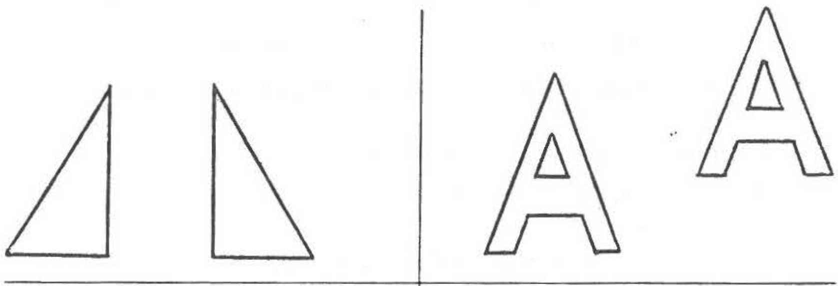
2.2. Regarde une fenêtre ou une porte coulissante. Agis sur la poignée d'un de ces objets. Remarque le mouvement de l'objet tout entier... Puis complète le schéma ci-dessous en dessinant la position finale de la vitre connaissant sa position initiale et la position finale d'un de ses points.



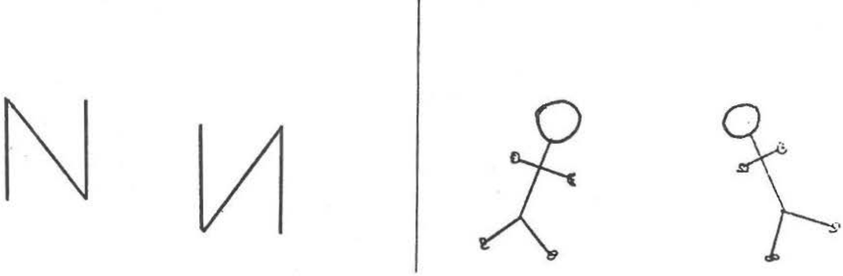
Donner d'autres exercices de ce genre en variant la direction de translation, la longueur, en donnant l'objet image au lieu de l'objet antécédent, en introduisant des cas où l'objet et l'image auront une intersection non vide.

2.10. Dans chaque exemple suivant, la figure a changé de place. Dans quels cas y-a-t-il glissement de la figure ?

1er cas — 2ème cas



3ème cas — 4ème cas



En particulier, le cas n° 4 doit conduire à une discussion qui permettra de préciser ce que l'on appellera *translation*. L'idée de glissement étant trop vague et ambiguë, on adopte un vocabulaire plus précis et on se donne des règles pour en parler et agir avec.

III - Travaux pratiques

Réalise un montage T et fais la fiche d'observations générales et entoure, parmi les conclusions suivantes, celles qui correspondent aux effets de la machine T représentée page 245.

La machine T donne d'une figure, une image :

de même forme
de forme différente
ayant une position renversée par rapport à la figure elle-même
ayant une position non renversée
de même grandeur
de grandeur différente

Complète les phrases suivantes :

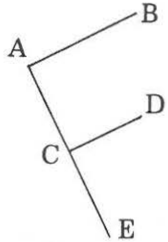
Certaines droites sont confondues avec leur image, ce sont celles qui .....
L'image d'une droite est une droite de .... direction
L'image d'un cercle est un cercle et la droite qui passe par les centres ...

Parmi les propositions suivantes, hachure les fausses, entoure, à l'aide d'un crayon feutre rouge, les vraies :

Tout point est confondu avec son image
Aucun point n'est confondu avec son image
Certains cercles sont confondus avec leur image
Aucun cercle n'est confondu avec son image

Manipulation n° 1

Colle la figure 1 ci-contre sur la feuille. Repasse-la avec la pointe verte. Avec la pointe rouge, dessine son image A'B'C'D'E'.



Joins alors chaque point à son image (A à A' ; B à B' ; etc...)
Quelles remarques fais-tu ?
Compare avec les tiges du montage. Joins les points d'attache.
Si nous appelons R l'ensemble des points rouges et V l'ensemble des points verts, les bipoints (A,A'), (B,B'), ... etc., éléments de R × V obtenus à l'aide de ce montage, ont un "air de famille", une certaine ressemblance.

Manipulation n° 2

Choisis deux points quelconques U et V sur la feuille de papier.

> Pose la pointe verte sur le point U.
> Si la pointe rouge coïncide avec V, nous dirons que le bipoint (U, V) appartient à la famille, que l'on note $\overrightarrow{OO'}$, déterminée par le montage T et ses points d'attache O et O'.
> Si la pointe rouge ne coïncide pas avec V, le bipoint (U, V) n'appartient pas à cette famille.

Les bipoints (A,A'), (B,B') ... etc. déterminés dans la manipulation n° 1 sont éléments de cette famille. On dit qu'ils représentent le même vecteur : $\overrightarrow{OO'}$.

Choisis comme nouveaux points d'attache A et A'. Peux-tu obtenir (B,B'), (C,C') ... à partir de ces nouveaux points d'attache ? Que penses-tu de la famille (O,O') et de la famille (A,A') ?

Suivent d'autres manipulations, chacune ayant un objectif précis parmi les suivants :

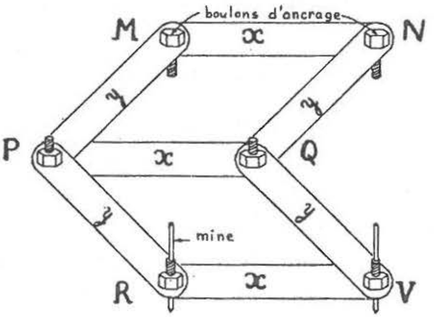
- *s'il existe une translation T telle que* $A \xmapsto{T} A'$
  $B \xmapsto{T} B'$

alors

il existe une translation T' telle que $A \xmapsto{T'} B$
$A' \xmapsto{T'} B'$

- *la composée de deux translations est une translation et l'on peut déterminer son vecteur à partir des deux premiers.*
- *la composition des translations est commutative.*

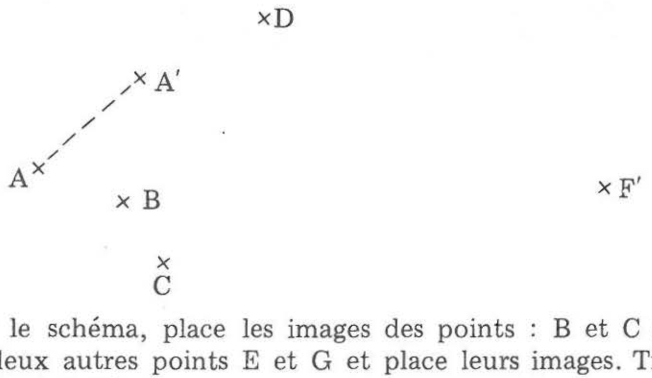
Schéma du montage de la machine T



La machine T se compose de 3 barres de longueur x et 4 barres de longueur y articulées comme indiqué sur le schéma. La barre reliant les boulons d'ancrage M et N peut être supprimée à condition que les trous où sont placés M et N aient même écartement que PQ et RV. R et V peuvent être permutés. En pratique, prendre y = 12 .

IV - Mathématisation

4.1. Lors de l'un des glissements dont on a parlé précédemment (il a pu être obtenu avec la machine T). le point A représenté ci-dessous a eu pour image A' .



Sur le schéma, place les images des points : B et C et D. Choisis deux autres points E et G et place leurs images. Trouve F antécédent de F' .

Joins chaque point à son image par des pointillés. Que remarques-tu ?

Les bipoints (A,A') ; (B,B') ; (C,C') ; (D,D'), etc.... ont un air de famille. Essaie de définir la ressemblance en comparant les droites (AA') et (BB') ainsi que les droites (AB) et (A'B').

Le bipoint (A,C) appartient-il à la famille ? Explique ta réponse.

Donne deux autres bipoints n'appartenant pas à la famille.

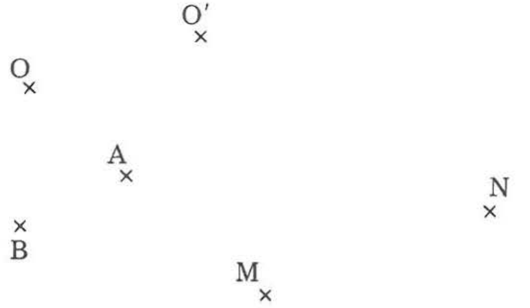
4.2. *Définition de la translation*

> (M,N) est un bipoint du plan.
>
> On appelle *translation associée au bipoint (M,N)* l'application du plan dans le plan qui à chaque point S fait correspondre le point R tel que MNRS soit un parallélogramme.

4.3. *Exercices graphiques.*

Nous donnons à réaliser aux enfants une grande quantité d'exercices graphiques du type des quelques suivants car ceux-ci peuvent être faits dans leur majorité à la maison. La vérification en classe en est très aisée. Ces exercices nous semblent permettre l'assimilation de la notion de translation même chez ceux de nos élèves qui ne pourront pas accéder au niveau de la validation dans le temps imparti à la classe. C'est pourquoi on cherche à ne pas bloquer les élèves à ce niveau en n'exigeant pas sans cesse une justification explicite de leurs actes intuitifs, spontanés ou réfléchis.

① t est la translation associée au bipoint (O,O'). Construis les images A', B', M', N' des points A, B, M, N.



② t est la translation associée au bipoint (E,F). Construis les images I', J', K' des points I, J, K.

③ t est la translation associée au bipoint (O,O'). Construis les antécédents C, D, L, P des points C', D', L', P'.

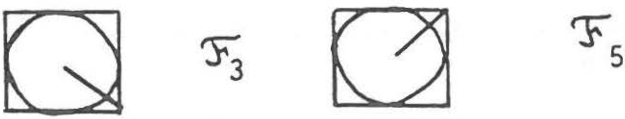
④ a)

Les plaques $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ se correspondent-elles par des translations ? Si oui, lesquelles ?

b)

Même question pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.

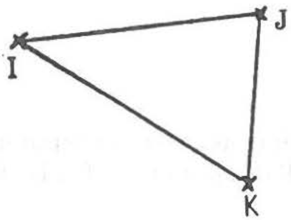
c)



Puis pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_5$.

⑤ Construis l'image du triangle IJK ci-dessous

1°) dans la translation associée à (I,J)
2°) dans la translation associée à (J,K).

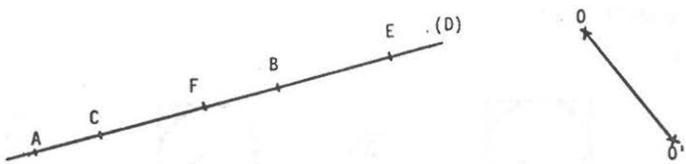


⑥ Choisis un bipoint (O,O′) et trace A′ image de A par la translation associée à (O,O′), A étant un point quelconque du plan.

Prends un point M dans le plan. Place les images de M par la translation associée à (O,O′) puis par la translation associée à (A,A′).

Que constates-tu ?

⑦ Construis les images A′, B′, C′, E′ et F′ des points A, B, C, E et F par la translation associée à (O,O′).

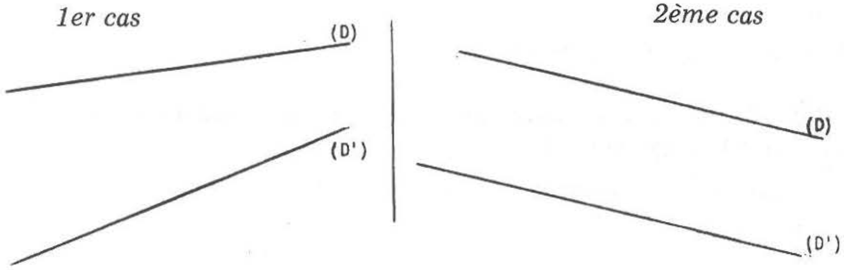


Vérifie que les points A′, B′, C′, E′ et F′ appartiennent à la même droite (D′).

Compare les directions des droites (D) et (D′).

Même exercice dans le cas où les droites (D) et (OO′) ont la même direction.

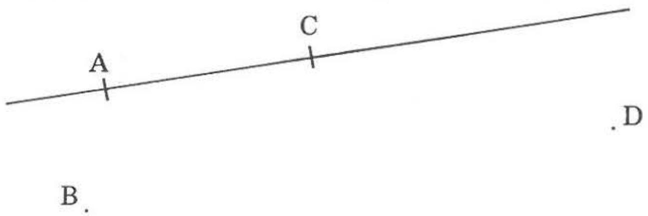
⑧ Vérifie, dans les deux cas, si (D′) est l'image de (D) par une translation.



A quelles conditions (D′) est-elle l'image de (D) par une translation ?

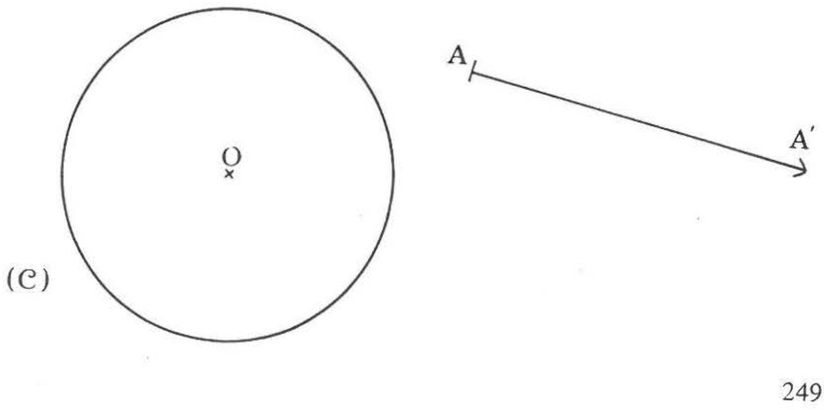
⑨. 1) Construis Δ' image de Δ dans la translation associée à (A,B).

2) Construis Δ'' image de Δ dans la translation associée à (C,D).



3) Trouve d'autres bipoints tels que Δ' soit l'image de Δ dans la translation associée à ces bipoints.

⑩ Construis les images d'une dizaine de points du cercle ($\mathcal{C}$) par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.



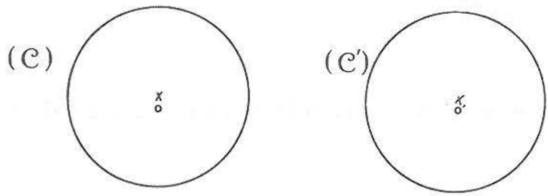
Que remarques-tu ?

Où est l'image du centre O ?

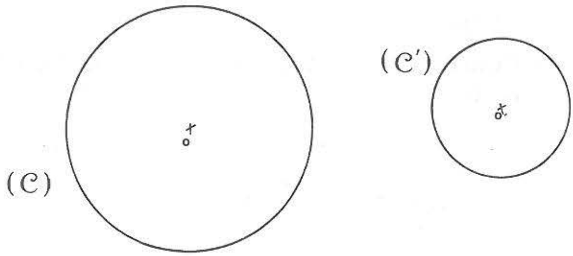
(11) Vérifie dans les deux cas s'il existe une translation telle que $(\mathcal{C}')$ soit l'image de $(\mathcal{C})$.

Quand la translation existe, donne un bipoint associé.

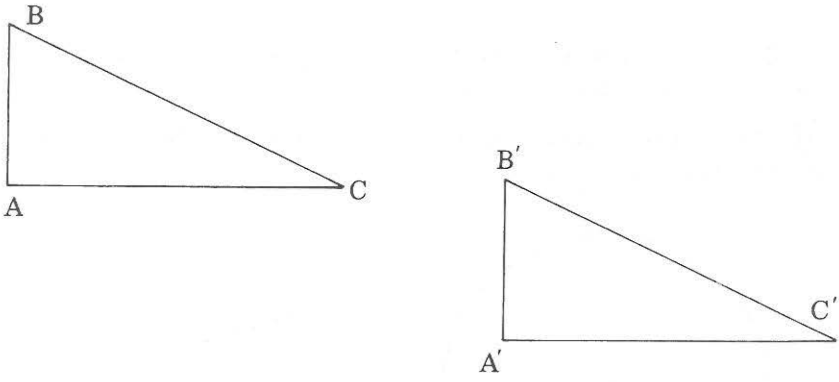
1er cas



2ème cas



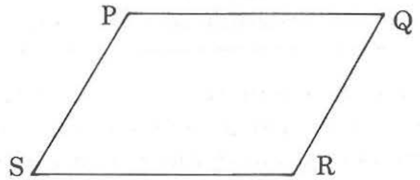
(12) ABC et A′B′C′ sont deux triangles.



a) Les figures ABC et A′B′C′ se correspondent-elles par translation ? Si oui définis-en une.

b) En partant du triangle ABC et en faisant deux translations successives, on peut arriver sur A′B′C′. Définis deux translations qui amènent à ce résultat.

(13) PQRS est un parallélogramme.



Construis :

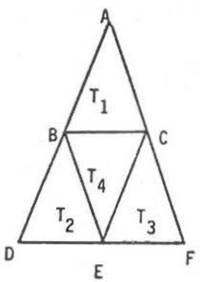
a) en rouge l'image de PQRS par la translation associée à (S,R)

b) en vert l'image de la figure rouge par la translation associée à (Q,R)

c) l'image de la figure verte par la translation associée à (R,P).

d) Que remarques-tu ?

(14) T_1, T_2, T_3, T_4 sont les quatre triangles dessinés.

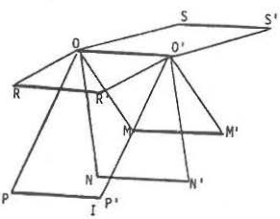


Peux-tu trouver une translation, et si oui définis-la, qui transforme :

a)	T_1 en T_2	b)	T_2 en T_1
c)	T_2 en T_3	d)	T_3 en T_2
e)	T_4 en T_1	f)	T_1 en T_4
g)	T_1 en T_3	h)	T_3 en T_1

V - **Translation et vecteur** (étude théorique)

Relation d'équipollence



Les bipoints (O, O'), (S, S'), (R, R'), (M, M'), (N, N') et (P, P') ont été obtenus par une translation. Peut-on savoir laquelle ?

Définition

> On dit que (M,M') est équipollent à (O,O') lorsque M' est l'image de M par la translation associée à (O,O').

Suit un développement comportant exercices d'exposition, définitions, théorèmes et exercices didactiques amenant à opérer sur les vecteurs en se référant au sens donné par ce qui précède (*).

VI - Aspect numérique de la translation

Exercice 1.

Lors d'un examen, une épreuve à option obligatoire donne lieu à une note et les points obtenus sont décomptés de la manière suivante :

— si un candidat obtient pour cette épreuve une note supérieure à la moyenne, on ajoute à son total les points excédant cette moyenne. Exemple : Martine a obtenu 13/20. On ajoutera trois points à son total.

— si un candidat obtient une note inférieure à la moyenne, on soustrait de son total le nombre des points qui lui manquent pour atteindre sa moyenne.

Compléter le tableau suivant où x est supérieur à 10 et y est positif.

Note obtenue à 1 épreuve à option	13	17,5	8	10			5		x	
Nombre de points portés au total	+ 3				10	0		5		y

Exercice 2.

1°) Pour obtenir l'heure de la pleine mer au port de Vannes, il faut ajouter approximativement 2 h 02 mn aux heures de pleines mers de Port-Navalo.

(*) La fiche, dans son intégralité, est à la disposition du lecteur intéressé ; la demander à l'IREM de Rennes.

(Port situé à l'entrée du Golfe du Morbihan).

Complète le tableau suivant :

Pleines mers

Jours	P — N	Vannes
13 J	4. 11	
14 V	4. 37	
15 S	5. 03	
16 D	5. 29	
17 L	5. 57	
18 Ma	6. 29	
19 Me	7. 06	

x désignant l'heure de la pleine mer à Port-Navalo et y l'heure de la pleine mer correspondante à Vannes, quelle relation lie x et y ?

On notera $y = f(x)$.

2°) Pour avoir l'heure des pleines mers de Pennboch, il faut retrancher approximativement 18 minutes aux heures de pleines mers de Vannes.

Complète le tableau ci-dessous.

Heures de pleines mers

Jours	VANNES	PENNBOCH
13 J	6. 13	
14 V	6. 39	
15 S	7. 05	
16 D	7. 31	
17 L	7. 59	
18 Ma	8. 31	
19 Me	9. 08	

y désignant l'heure de la pleine mer à Vannes et p l'heure de la pleine mer correspondante à Pennboch, quelle relation lie y et p ?

On notera $p = g(y)$.

3°) Exprime $g \circ f$ — est-elle de la même famille que f et g ?

4°) Exprime f^{-1} — est-elle de la famille de f ?

Définis $f^{-1} \circ f$.

5°) Exprime g^{-1} — est-elle de la famille de g ?

Définis $g^{-1} \circ g$.

6°) Définis $f^{-1} \circ g^{-1}$ et compare avec $g \circ f$.

Généralisation

Les relations rencontrées dans les exemples précédents sont des applications du type :

$$\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x + a \end{array} \right.$$

On les appelle des **TRANSLATIONS.**

La relation identique est une translation. La définir.

Si **D** est l'ensemble des décimaux, soit :

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ x \longmapsto x + a \end{array} \right. \qquad k \left| \begin{array}{l} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ y \longmapsto y + b \end{array} \right.$$

Définir $k \circ h$:

La composée de deux translations est une translation.

Définir h^{-1} et calculer $h^{-1} \circ h$. Conclure.

Chaque translation admet une translation réciproque.

Exercice 3.

Le professeur a fait noter dans un tableau les tailles de chacun des 40 enfants de la classe. Il a ensuite regroupé les enfants en sous-classes en identifiant les tailles d'enfants de la même sous-classe au centre de l'intervalle associé, comme l'indique le tableau ci-dessous, à compléter.

Sous-classes	Centre de la sous-classe	Effectif de la sous-classe	Tailles réduites	Tailles centrées
[140 cm-145cm[	142,5 cm	3	0	−15
[145 cm-150cm[	——	6	5	−10
[150cm-155cm[	——	9	10	− 5
[155 cm-160cm[	——	12	15	0
[160cm-165cm[	——	5	20	5
[165cm-170cm[	——	4	25	10
[170cm-175cm[	——	1	30	15

Ainsi, par exemple, 9 élèves ont une taille comprise entre 1,50 cm et 1,55 cm (exclu) et on considérera leur taille ramenée à 152,5 cm.

1°) Quelle est la moyenne M des tailles des enfants ainsi répartis en sous-classes ? Attention, 142,5 doit être affecté du coefficient 3, etc...*On dit que M est la moyenne pondérée des centres de sous-classes.*

2°) Sur chaque centre x de sous-classe, effectuez le changement : $x \xmapsto{f} x - 142{,}5$. On obtient une liste de 7 décimaux représentant des tailles "réduites".

Quelle est la moyenne M', avec les mêmes effectifs, de ces tailles "réduites" ?

Effectuez sur M' le changement $M' \xmapsto{f^{-1}} M''$. Que remarquez-vous ?

3°) Effectuez cette fois sur la liste des premières tailles le changement : $x \xmapsto{g} x - 157{,}5$ et calculez la nouvelle moyenne de ces nouvelles tailles "réduites". Effectuez ensuite sur cette moyenne le changement $x \xmapsto{g^{-1}} g^{-1}(x)$; que remarquez-vous ? Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4.

En France, l'Institut national de la statistique et des Etudes économiques* est chargé de l'observation de variations générales de prix.

On utilise, à cet effet, des nombres indices plus simplement appelés indices (souviens-toi des populations).

Le but de l'exercice suivant est de déterminer l'indice d'ensemble des prix des produits manufacturés à la consommation familiale en province en 1964 (base 100 en 1959).

L'indice d'ensemble à calculer est la moyenne pondérée des indices annuels des groupes d'articles.

ARTICLES	Pondération	Indices annuels
Cuisine, chauffage, ménage....	2	141,4
Mobilier, literie....................	2	152,8
Produits d'entretien, toilette papeterie	2	121,8
Outillage, électricité, jardinage ...	2	142,9
Lingerie, bonneterie, mercerie	4	111,0
Habillement	6	128,2
Chaussures	2	118,0

L'indice cherché s'obtient en divisant la somme des indices pondérés par la somme des coefficients.

Exercice 5.

Plus généralement, voici une liste de nombres et des coefficients qui leur sont associés :

nombres	x	y	z	t
coefficients	a	b	c	d

* Source I.N.S.E.E.

a) Calcule la moyenne pondérée M de (x,y,z,t).

b) Effectue sur chaque nombre le changement :

$$x \xmapsto{f} x - k$$

Calcule la moyenne pondérée M′ des images de x,y,z et t . Puis effectue sur M′ la transformation :

$$M' \xmapsto{f^{-1}} M''$$

Qu'obtiens-tu ?

Exercice 6.

Soient un quadrillage et $\mathcal{N}$ l'ensemble des noeuds.

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathcal{N}$ par :

$M \in \mathcal{N} \quad N \in \mathcal{N} \quad M \ \mathcal{R} \ N$ si et seulement si $M \xmapsto{(2,-6)} N$

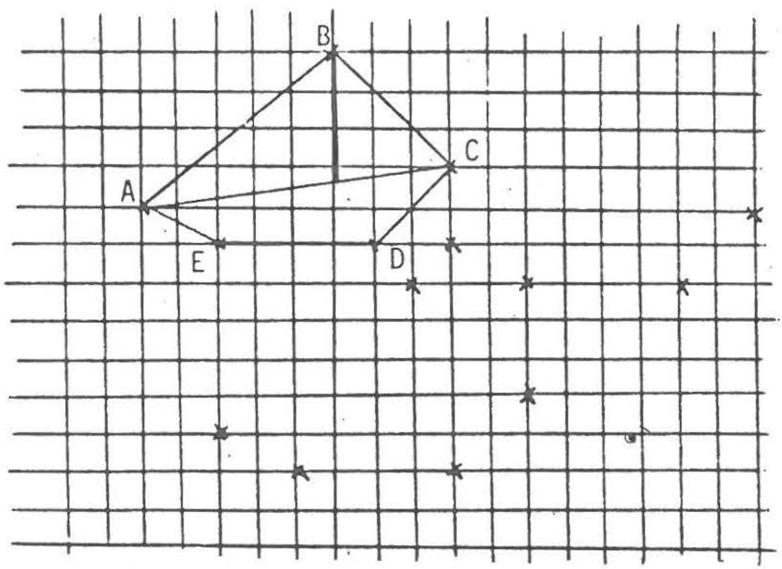
Donne les images A′, B′, C′, D′, E′ des noeuds A,B,C,D,E.

Chaque noeud a-t-il une image par $\mathcal{R}$?

Chaque noeud a-t-il un antécédent par $\mathcal{R}$?

$\mathcal{R}$ est-elle une application ?

$\mathcal{R}$ est-elle une bijection ?



Nous noterons cette relation $t(+2, -6)$.

Donne les images A'', B'', C'', D'', E'' de A', B', C', D', E' par la relation $t(+6, +5)$.

Peux-tu trouver d'autres relations du même type dans l'ensemble des noeuds ?

Toutes les relations de ce type seront appelées **TRANSLATIONS.**

Exercice 7. Quadrillages — Applications

7.1. Sur un quadrillage codé, place les points dont les coordonnées sont les suivantes et joins-les (en vert) dans cet ordre.

$(-2, 0)$
$(-4, 1)$
$(-4, -1)$
$(-6, -1)$
$(-5, -3)$
$(-4, -1)$
$(-3, -3)$
$(-2, -1)$
$(-4, -1)$
$(-2, 0)$

7.2. Trouve l'image de chacun des couples précédents par la relation :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ \\ (x,y) \longmapsto (x+5, y+3) \end{array} \right.$$

puis place, sur le même quadrillage les points représentant ces nouveaux couples en les joignant (en rouge) dans le même ordre.

7.3. Trouve l'image de chacun des couples obtenus à la question 7.2 par la relation :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ \\ (t, u) \longmapsto (t+3, u-5) \end{array} \right.$$

puis place sur le même quadrillage que précédemment les points représentant les nouveaux couples en les joignant (en noir).

7.4. Par quelle relation h ces nouveaux couples auraient-ils pu être obtenus à partir de couples données à la question 7.1 ?

Cette relation est-elle du même type que les précédentes ?

7.5. *Image d'un ensemble de couples*

Soit $d_0 = \{(1,0), (4,1), (7,2), (-2,-1), (-5,-2), (-8,-3)\}$.

1°) Les termes x et y des couples de d_0 sont liés par une relation du type : $y = a_0 x + b_0$. Trouve a_0 et b_0 .

2°) Soit $D_0 = \{(x,y) \in Z^2 \ / \ y = a_0 x + b_0\}$.
Quelle est l'image D_1 de D_0 par l'application k :

$$(x,y) \longmapsto (x + 1, y + 2) \ ?$$

Quelle est l'image D_2 de D_0 par l'application l :

$$(x,y) \longmapsto (x + 2, y - 3) \ ?$$

3°) Par quelle application D_1 aura-t-elle pour image D_2 ? L'exprimer en fonction de k et de l .

(D'après Victor Hugo)

Combien de postulats, combien de théorèmes,
Qui ont franchi le front d'une tête trop pleine,
Dans ce morne néant se sont évanouis !.
Combien ont disparu, dure et triste fortune,
Par un regard sans fond, sous une tête brune,
Dans l'aveugle océan à jamais enfouis.
....
Où sont les radicaux sombrés dans les mémoires ?
O symboles, oubliés dans de profonds tiroirs.
Equations, redoutées des mômes à genoux,
Nous vous les répétions, patients et résignés,
Et c'est ce qui nous fait ces voix désespérées
Que nous avons le soir quand nous rentrons chez nous....

Marie-Thérèse Patalani

3 - GÉOMÉTRIE NATURISTE

A mon Ami Henri Bareil

"Jamais la nature ne nous trompe ; c'est toujours nous qui nous trompons".

J.-J. Rousseau (*Emile*, III)

"Le mot de nature est un de ces mots dont on se sert d'autant plus souvent que ceux qui les entendent ou qui les prononcent y attachent plus rarement une idée précise".

Condorcet

Mettons-nous à la place d'un élève de Sixième ou de Quatrième. "Pourquoi faut-il que j'étudie la géométrie ? " Ecartons la réponse "Parce que c'est au programme", nous risquerions qu'il nous demande "Pourquoi est-ce au programme ?" et nous serions bien embarrassés pour lui répondre ("Le Ministre en a ainsi décidé" ne le satisfera guère et l'amènera à penser que nous faisons de la politique en classe !).

J'écarte aussi bien la docte explication : "Depuis que Platon écrivit au fronton de son Académie *Nul n'entre ici s'il n'est géomètre*, la géométrie est devenue un modèle de théorie mathématique. Autrement dit, à partir d'un nombre fini d'axiomes bien choisis, c'est-à-dire de propositions supposées vraies et non contradictoires, on peut en déduire une infinité d'autres en suivant les règles d'une rigoureuse logique. Il existe donc plusieurs géométries selon le choix des axiomes initiaux, les règles de la logique étant les mêmes dans tous les cas. Ces divers choix possibles entraînent des querelles entre mathématiciens ; X, Y et Z ont chacun leurs propositions. Nous adopterons le système proposé par Y parce que celui de X est réfuté par Z et que celui de Z est condamné à la fois par X et Y alors que celui de Y n'est réfuté par personne, Y ayant pris la précaution d'avertir que ses contradicteurs ne pourraient être que des imbéciles." Et j'espère que les élèves seraient d'accord avec moi pour refuser les arguments d'autorité ou les arguments terroristes, à mettre les uns et les autres dans le même sac.

Je propose donc à l'élève de découvrir par lui-même s'il doit ou s'il ne doit pas étudier la géométrie. Par lui-même, non sans mon aide car je ne désespère pas d'enseigner, mais persuadé plus encore que l'élève trouvera mille et une raisons, pas seulement d'étudier, mais d'aimer les considérations géométriques.

Conviction dont il faut que je dise un mot ; elle est fondée sur des réflexions simplistes : nous vivons dans un espace presque euclidien, nos maisons suggèrent les notions de parallélisme, d'orthogonalité, d'orientation, les journaux parlent de voyages vers la Lune ou Mars, des photos de monuments célèbres, des grandes Pyramides au pont de Tancarville, suggèrent des formes intéressantes et la queue du paon qui fait la roue pose des problèmes. Dans quelle géométrie précisément ? Au début, peut-être même longtemps, nous n'en saurons rien. Ne pas se précipiter dans l'axiomatique de X, de Y ou de Z, enrichir notre expérience de l'espace jusqu'au jour où nous désirerons organiser nos connaissances de façon systématique.

Ce qui, pour l'instant, nous fait courir un sérieux reproche : confiance excessive à l'intuition. C'est vrai, mais il faut savoir affronter certains risques, apprendre à tomber pour acquérir enfin la marche la plus alerte et la plus assurée.

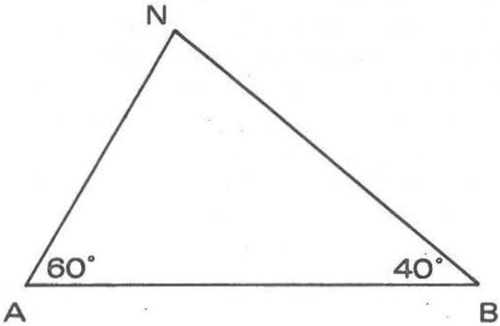
PREMIER ESSAI :
COMMENT MESURER DE GRANDES DISTANCES ?

Comment mesurer la distance de la Terre à la Lune ? Comment apprécier la distance d'un navire qui apparaît à l'horizon ? Quelle est la vitesse de la lumière ? Questions qu'un individu conscient comme un élève de Sixième ou de Quatrième peut se poser en 1978. Voici le schéma d'une recherche historico-scientifique pour l'aider à y répondre.

1.1. La hauteur de la grande Pyramide

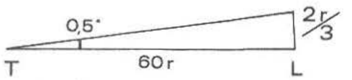
Alain disait "Thalès a reconnu que si la hauteur de l'homme est égale à l'ombre de l'homme, alors la hauteur de la pyramide est égale à celle de son ombre". Plus généralement, nous comparons la longueur de l'ombre d'un bâton à la hauteur du bâton supposé planté verticalement. L'expérience mérite d'être tentée, elle n'est pas sans difficultés pratiques. Le résultat est un ordre de grandeur vérifiable, par exemple, avec la hauteur d'une maison comparée à son ombre.

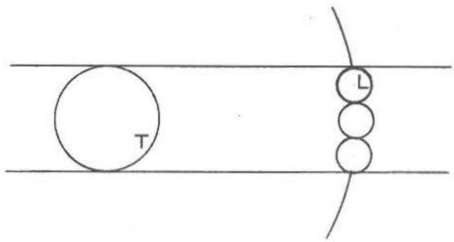
Thalès savait aussi apprécier la distance d'un navire par deux visées à partir des extrémités A et B d'une base terrestre facile à mesurer. Sur le papier on réalise une "maquette" à l'échelle du millième par exemple. Nous reviendrons plus loin sur la question passionnante des maquettes.



1.2. Aristarque et la Lune

Aristarque de Samos (vers — 250) pense que la Lune reçoit la lumière du Soleil et la réfléchit. Pendant une éclipse, la Lune disparaît (plus ou moins complètement) en passant dans l'ombre portée de la Terre. Pour Aristarque, le Soleil est "très loin" ; il assimile donc l'ombre de la Terre (qu'il suppose sphérique comme les autres corps célestes) à un cylindre de révolution. D'après la durée maximale d'une éclipse de Lune (trois heures de notre temps), le diamètre de la Lune serait donc le tiers de celui de la Terre ; en effet, en une heure, la Lune avance sur son orbite d'un angle égal à son diamètre apparent. Il ne reste plus qu'à mesurer le diamètre apparent de la Lune. Aristarque partit d'abord de la valeur 2°, grossièrement fausse, puis il rectifia en 0°,5. Notons qu'avec cette valeur on retrouve la durée approximative d'une période lunaire ; 360/0,5 = 720 heures = 30 jours au lieu de 27,3 pour la période sidérale de la Lune. Il ne reste plus qu'à construire un triangle avec un côté de longueur 2r/3 (r rayon de la Terre) et l'angle opposé de 0°,5 ; alors le côté TL mesure 60 r. C'est un très bon résultat, la distance de la Terre à la Lune varie entre 56 et 64 rayons terrestres.





Cette mesure appelle de nombreuses remarques.

1°) L'ombre portée de la Terre n'est pas un cylindre mais un cône (distance moyenne de la Terre au sommet du cône : 217 r). Cependant, à la précision dont disposait Aristarque, il n'y avait aucun inconvénient à adopter cette simplification. Et puis comment aurait-il pu connaître la longueur du cône d'ombre sans connaître le rayon du Soleil et la distance du Soleil ? Voir plus loin 1.3.

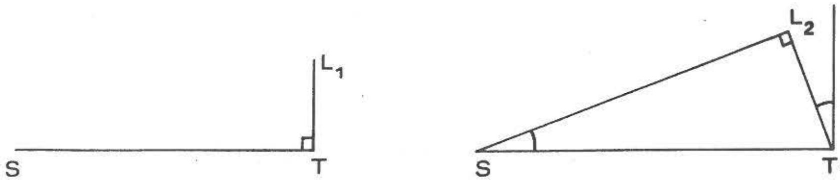
2°) Le fait que la Lune avance sur son orbite d'un diamètre de Lune en une heure est une donnée observable : à la jumelle, on observe l'occultation équatoriale d'une étoile par la Lune. Un exercice recommandé aux amateurs.

3°) En fait, le rayon de la Lune n'est pas 0,33 r mais 0,27 r. Les tables donnent tg $0°,5 = 0,009$ et $0,54/0,009 = 60$. Ainsi que l'a écrit un grand mathématicien, "les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables : 1°) les astronomes ; 2°) les arpenteurs ; 3°) les auteurs de manuels de trigonométrie." J'ajouterai 4°) aux apprentis géomètres à qui il n'est pas mauvais de savoir lire une table construite par les auteurs visés au 3° .

4°) Traduisons pour finir le très bon résultat trouvé par Aristarque : $r = 6\ 370$ km ; $60\ r \simeq 380\ 000$ km ; la lumière et les signaux radioélectriques mettent un peu plus d'une seconde à nous parvenir à partir des installations lunaires déposées par les missions Apollo.

1.3. Aristarque et le Soleil

Les anciens Grecs ont eu une foule d'idées géniales et n'ont pas tout réussi. En voici un exemple avec la distance du Soleil. Aristarque savait distinguer comme vous et moi la Lune en quadrature orientale et la Lune en "premier quartier". De L_1 (quadrature orientale) à L_2 (premier quartier), Aristarque évaluait l'arc décrit par la Lune à 3° ; il en déduisait, par la construction d'un triangle rectangle ayant en S un angle de 3°



distance ST = 19 distance TL : nous écririons ;

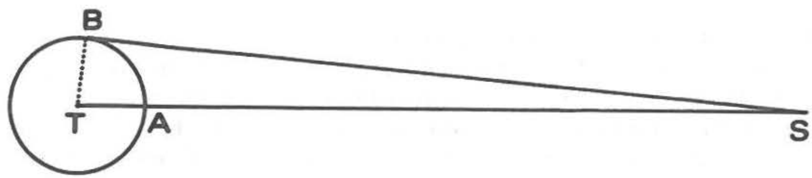
$$\text{distance ST} = \frac{60 \text{ r}}{\sin 3^\circ} \text{ soit environ 1100 r.}$$

Ce qui appelle encore de nombreuses remarques.

1°) Aristarque avait noté, d'une lunaison à l'autre, des variations de l'angle qu'il évaluait en moyenne à 3° ; il en déduisait que la distance du Soleil variait entre 1080 r et 1200 r. Que ce soit la Terre qui soit mobile autour du Soleil ou le Soleil autour de la Terre, l'orbite ne paraissant pas pouvoir être autre que circulaire (personne avant Kepler n'osa penser autrement), il fallait imaginer l'astre "fixe" *excentré*. Constatation faite par Aristarque quatre cent ans avant Ptolémée, cent ans avant Hipparque.

2°) Archimède, de vingt ans le cadet d'Aristarque, sut mesurer le diamètre apparent du Soleil, soit 0°,5. Alors, des distances mesurées par Aristarque, on déduit le diamètre du Soleil, entre 5 et 6 fois celui de la Terre. Ce qui faisait pencher Aristarque vers la solution du mouvement de la Terre autour du Soleil, de la boule la plus petite autour de la plus grosse.

3°) Les résultats précédents sont malheureusement fondés sur la valeur de l'arc L_1 L_2 très difficile à mesurer avec précision : quand on observe la Lune en L_2 elle n'est plus en L_1. Au lieu de 3° il aurait fallu lire $10'$. L'idée d'Aristarque était donc ingénieuse mais sa mise en pratique fut, pour nous, décevante. Le progrès dans la mesure de la distance du soleil est venu bien plus tard de la considération de *la parallaxe du Soleil*, l'angle sous lequel, du centre du Soleil, on verrait le rayon de la Terre, soit ω. Pour

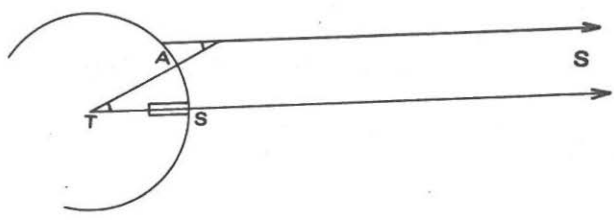


l'évaluer, il suffit, en principe, de mesurer l'angle des directions AS et BS du centre du Soleil observé à partir des points A et B (pour A le Soleil est au zénith,pour B il est à l'horizon). Les astronomes ont imaginé diverses méthodes pour résoudre au mieux les difficultés techniques de la mesure, méthodes qui sortent du cadre de cet article. Notons seulement une brève histoire des progrès dans les résultats : Copernic et Tycho Brahé admettaient encore une valeur de $3'$ pour la parallaxe du Soleil, soit vingt fois trop ; c'est à Cassini, en 1672 (donc peu avant le succès des méditations de Newton) qu'on doit la première évaluation correcte $9''$ (valeur adoptée actuellement : 8",8).

Proposons pour finir le calcul suivant : 8",8 soit environ 0,000 043 radian et $d(S,T) = \dfrac{r}{0{,}000\ 043}$ environ 23 400 r ou $1{,}5 \times 10^8$ km, une donnée, l'unité astronomique (u - a),qui pourrait faire partie du bagage de l'honnête homme du XXème siècle. Avec un diamètre apparent de $0°{,}5$, à cette distance de 23 400 r, le rayon du Soleil est 109 fois celui de la Terre. Encore plus grosse, la boule solaire, que ne le pensait Aristarque.

1.4. Eratosthène et la Terre

Revenons à la belle époque d'Archimède (— 250). Son ami et correspondant Eratosthène est conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, riche en cartes de la basse et haute Egypte. Il y relève que Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie sont sensiblement sur le même méridien. Il sait que, au solstice d'été, le Soleil culmine au zénith de Syène ; la preuve, les puits les plus profonds y sont alors éclairés jusqu'au fond. Eratosthène pense alors



que s'il mesure, ce même jour à midi, l'ombre d'un gnomon à Alexandrie, il en déduira la mesure de l'arc de méridien entre Syène et Alexandrie, soit un cinquantième de circonférence. Sur les relevés topographiques qui sont une des richesses de sa bibliothèque, il évalue la distance de Syène à Alexandrie à 5 000 stades. Ce qui donne, pour la circonférence entière, 250 000 stades.

Mesure justement célèbre. Si elle a été perfectionnée techniquement (en particulier par la triangulation pour la mesure de la longueur de l'arc de méridien), le principe de toutes les mesures géodésiques reste celui d'Eratosthène. Le résultat obtenu était également très satisfaisant ; en adoptant pour le stade la valeur 157 m, on trouve pour le périmètre 38 250 km et pour le rayon de la Terre 6 100 km (au lieu de la valeur adoptée actuellement 6 370 km).

Les perfectionnements techniques adviendront au XVIIème siècle avec la triangulation (imaginée par Snellius) et la mesure de la méridienne de France entre Amiens et Juvisy par Picard en 1667 : 57 057 toises par degré de méridien ; avec 1,95 m pour cette toise, on trouve 40 032 km pour le périmètre et 6 370 km pour le rayon de la Terre, bonne estimation qui fut appréciée et utilisée par Newton.

Rappelons enfin que l'ouvrage de Clairaut, *Théorie sur la figure de la Terre*, date de 1743 et donne pour la première fois une approximation de l'aplatissement du géoïde 1/180 (l'ellipsoïde de Hayford, 1907, donne 1/300).

1.5. Römer et la vitesse de la lumière.

Ces remarques nous ont fait passer d'une belle époque à une autre, de celle d'Archimède à celle de Newton ; l'histoire des sciences connaît des lents cheminements mais aussi des périodes fastes où beaucoup de problèmes réputés difficiles deviennent "faciles", comme dans l'histoire des sociétés. Picard, étant allé au Danemark vérifier quelques mesures sur l'emplacement d'Uraniborg, le château de Tycho Brahé, avait embauché sur place un aide, Olaus Römer, qui revint en France avec lui et participa aux premiers travaux du tout neuf Observatoire de Paris.

Là, Cassini confia au jeune astronome le soin de suivre les phénomènes des satellites de Jupiter, éclipses, occultations, passages. On savait déjà que le premier satellite, Io, un peu plus gros que la Lune, était à une distance relativement faible de Jupiter : 5,9 rayons de la planète. Il en résulte qu'à chaque révolution autour de Jupiter, Io traverse le cône d'ombre de Jupiter, il y a éclipse de Io. Connaissant la période de révolution de Jupiter autour du Soleil, T = 11 ans 314,84 jours et celle de Io autour de Jupiter T' = 1,769 jour, Römer pouvait en déduire que l'éclipse de Io se reproduirait tous les t jours, t donné par la formule

$$1/t = 1/T' - 1/T$$

qu'il est intéressant de faire établir (ça vaut bien les motos qui font la course sur une piste).

L'observation confirmait assez bien le résultat du calcul, tout au moins pendant une courte période, c'est-à-dire pendant que la distance de Jupiter à la Terre (à l'observateur) variait peu. Par contre, si on comparait les observations faites alors que Jupiter est proche de son opposition (la distance Jupiter-Terre est minimum, environ 4,2 u - a) avec les observations faites alors que Jupiter est proche de sa conjonction (distance JT maximum, environ 6,2 u - a), les éclipses de Io semblaient dans ce deuxième cas se produire en retard de 16,5 minutes environ sur les dates calculées à partir des observations faites lorsque Jupiter est en opposition.

Römer, ayant constaté le retard, l'expliqua : les éclipses se produisent régulièrement mais le retard constaté est dû à la plus grande distance que doit parcourir la lumière qui nous informe du phénomène. La lumière a, comme il disait, "une propagation progressive", et non comme d'autres le pensaient une propagation instantanée ; la vitesse de la lumière est alors facile à évaluer :

2 u-a $\simeq 300.10^6$ km ; 16,5 mn $\simeq 10^3$s soit c = 300 000 km/s.

Une plaque, à la porte de l'Observatoire de Paris, rappelle que cette première mesure, due à Römer, fut obtenue en 1676.

Pour ne pas trop allonger cette note, je signale seulement quelques exercices sur le même thème. 1°) Comment les données précédentes permettent-elles de calculer une valeur moyenne de la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil ? 2°) Comment la connaissance de cette vitesse et celle de la vitesse de la lumière permet d'expliquer le phénomène de l'aberration de la lumière (expliquée par Bradley en 1728) ? Enfin, autre remarque, les mesures de distances ont débouché sur des questions simples de mécanique et des allusions à quelques faits historiques n'ont pas été évitées, au contraire.

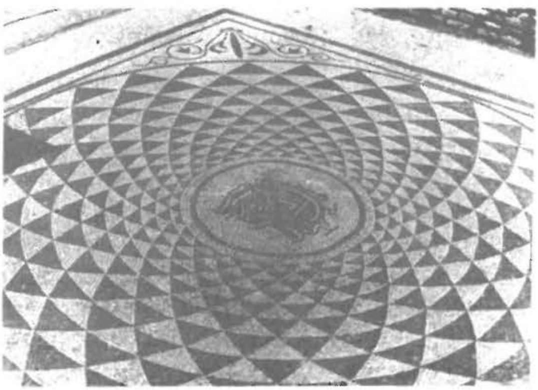
DEUXIEME ESSAI : FORMES, REPETITIONS, DEFORMATIONS

Deux images s'opposent ou se complètent. Dans son *Mysterium Cosmographicum* (Tübingen 1596), Kepler représente un ingénieux système de six sphères concentriques, chacun des cinq polyèdres platoniciens étant inscrit dans une des sphéres et circonscrit à celle du dessous. Il y voit un modèle du système solaire, le Soleil au centre, les orbites des six planètes placées sur les six sphères. Chef-d'oeuvre d'organisation mathématique du monde, image d'harmonie. En contraste, une photographie moderne de la nébuleuse d'Orion suggère l'idée du chaos dans lequel on ne saurait trouver de ligne directrice, de schéma d'organisation. A première vue tout au moins, car en cherchant un peu, tout s'ordonne selon certaines lois, même le désordre "brownien".

D'où l'idée de chercher, dans la nature ou dans l'art, des formes, des idées géométriques.

2.1. Des formes dans la nature.

Observons, manipulons, mesurons ; ouvrons l'oeil et touchons du doigt. Cette "étoile de mer", cet oursin, ces fleurs à quatre ou cinq pétales... A ceux qui admirent l'ingéniosité du laitier qui livre son précieux liquide dans des "berlingots" faciles à fabriquer et à empiler, proposons l'observation d'un épi de blé : comment les grains sont-ils serrés les uns contre les autres ? En est-il de même dans un épi de seigle ou d'orge ? L'arrangement des graines de tournesol suggère la disposition en spirale que reproduisent certaines mosaïques romaines (à Ostia Antica, par exemple) ou la coupole de la Chapelle d'Anet (due à l'architecte Philibert Delorme, 1550).

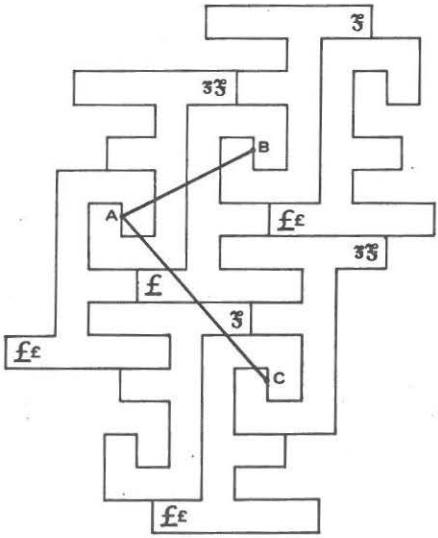


Les jets d'eau des fontaines tracent des arcs de parabole ; on retrouve cette courbe sur les photos du pont de Tancarville (ou de tout autre pont suspendu). Des ellipses se dessinent lorsqu'avec une lampe-torche on éclaire un mur ou un plancher. Quant à l'ovale des jardiniers, nous en reparlerons plus loin.

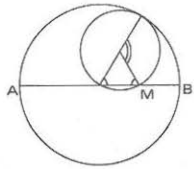
Cette très brève énumération n'épuise pas un sujet inépuisable par définition.

2.2. Formes dans l'art

A partir des formes dans la nature, l'artiste, l'architecte, l'ingénieur ont imaginé des formes belles et simples. Exemple, tous les pavages. Le Corbusier disait : "La preuve première d'existence, c'est d'occuper l'espace". A partir d'une stylisation du L barré de la livre sterling, un écolier anglais a proposé le dessin qui a servi de couverture au n° 73 (décembre 1975) de *Mathematics Teaching* et que je reproduis partiellement :



Le cercle tangent intérieurement à un cercle de rayon double propose maints motifs. Le symbole taoïste Taï Khi Tou oppose deux principes contradictoires, le Yin et le Yang (vous avez le droit de penser le bien et le mal ou le vrai et le faux). Dans un tout autre domaine, voyez l'engrenage de La Hire (1640-1718) qui participa à la mesure de la méridienne de France sous la direction de Picard : le petit cercle roulant sans glisser à l'intérieur du grand cercle, un point M fixe sur le petit cercle décrit d'un mouvement rectiligne oscillatoire un diamètre AB du grand cercle : transformation d'un mouvement de rotation en un mouvement rectiligne (un semblable montage existe dans l'astrobale impersonnel de Danjon, les roues étant non dentées, le contact avec frottement évitant le "jeu"). Pour La Hire, et pour nos élèves, c'est un des plus simples exemples d'engrenages épi ou hypocycloïdaux.

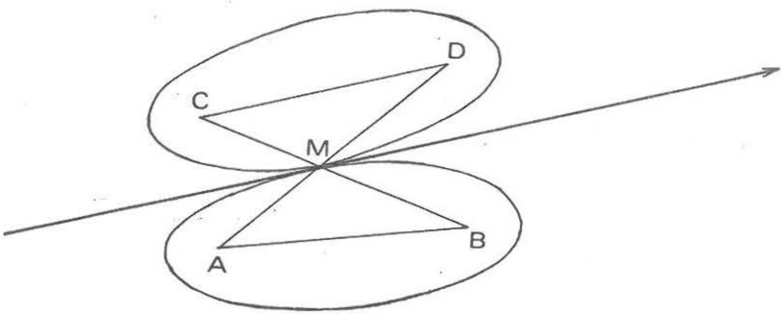


Autre exercice : retrouver tous les arcs de cercle dans la composition du tableau de Michel-Ange, *La Sainte Famille*.

2.3. La symétrie

Il suffit de regarder nos deux mains pour saisir, c'est bien le mot, l'importance de la symétrie dans notre vie. On peut même se demander : comment se fait-il qu'il y ait dans le corps humain certaines dissymétries, des organes uniques, coeur, estomac, foie, qui échappent à la symétrie ?

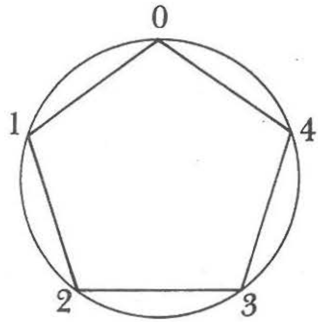
Le "quadrilatère croisé" formé par quatre tiges articulées deux à deux de même longueur, d(A,B) = d(C,D) et d(A,D) = d(B,C), nous ramène à l'ovale des jardiniers. AD et BC se coupent en M tel que d(M,A) + d(M,B) = d(M,C) + d(M,D) = d(A,D). On réalise facilement un modèle en carton : deux ellipses symétriques par rapport à la tangente commune en M roulent sans glisser l'une sur l'autre ; derrière les deux plaques elliptiques, les deux tiges AD et BC ne sont pas visibles ; le modèle fonctionne bien à la surprise de ceux qui ne l'ont jamais vu.



L'expérience des deux bougies symétriques par rapport à une plaque de verre mérite d'être présentée : une seule bougie est allumée, celle qui est du côté des spectateurs, les deux paraissent l'être. Le présentateur met son doigt sur la bougie non allumée, il supporte facilement l'ardeur de l'image de la flamme. On peut alors évoquer la loi de Descartes et en illustrer l'application dans le billard : deux réflexions successives sur les bords orthogonaux et la boule roule dans la direction du lancer initial mais dans le sens opposé. Le système se généralise avec trois réflexions successives sur les faces deux à deux orthogonales d'un prisme à réflexion totale : le prisme a été placé sur la Lune par une des missions Apollo ; un rayon laser est dirigé sur lui, le rayon réfléchi est reçu avec un retard sur l'émission qui permet de mesurer, avec une précision dépassant celle de toutes les mesures précédentes (y compris celle d'Aristarque !), la distance de la Terre à la Lune.

2.4. Polygones réguliers.

Prenons l'exemple du pentagone régulier convexe, dessiné sur la feuille de papier et marqué 0, 1, 2, 3, 4, à ses sommets (dans le sens direct). Découpons une plaque de carton, noire sur une face, rouge de l'autre et dont les sommets marqués ABCDE sur la face noire viennent s'appliquer exactement sur 0, 1, 2, 3, 4. Puis étudions toutes les façons d'appliquer la plaque de carton sur "l'empreinte" ; on finira par trouver les cinq rotations qui ne changent pas la couleur de la plaque et qu'on notera r^0, r^1, r^2, r^3, r^4 et les cinq symétries d'axes J0, J1, J2, J3, J4 toutes repérées sur l'empreinte et notée s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, qui, elles, changent la couleur.



Composer r^2 et s_3 : on fait tourner la plaque de 2/5 de tour, ABCDE qui étaient en 01234 viennent en 23401 et la plaque n'a pas changé de couleur. Ensuite on effectue s_3, c'est-à-dire qu'on retourne la plaque (changement de couleur), le point qui se trouve en 3, c'est-à-dire B, restant fixe ; alors ABCDE se trouvent en 43210. Conclusion, il y a eu changement de couleur, le point situé en 2 restant fixe, ce que réalise la symétrie s_2. Ce que nous notons

$$s_3 \circ r^2 = s_2$$

avec nos notations ésotériques. Nous amorçons ainsi la construction de la table du groupe d'ordre dix du pentagone ; travail un peu compliqué mais réalisable en équipes et le résultat est intéressant. Avec le triangle équilatéral, c'est vraiment trop simple ; avec le polygone à 32 côtés, celui qu'on retrouve dans la rose des vents, c'est dommage mais quand même un peu lassant....

Ici, le sous-groupe des rotations du pentagone est immédiatement visible ; on reconnaît un groupe isomorphe au groupe additif des classes résiduelles d'entiers modulo 5. L'étude du corps Z/5Z est alors une fantaisie qu'on se permettra, d'autant que la table de multiplication de la classe 2 donne la liste 02413 des sommets du pentagone étoilé.

Notre collègue G.W. Wilson (Bedford Field Middle School à Leeds) a eu l'idée d'associer les sommets d'un polygone régulier bien choisi aux décimales récurrentes de l'inverse d'un naturel premier. Par exemple, l'inverse de 17 a une suite de décimales de période 16 ; on marque ces seize décimales aux sommets d'un polygone régulier à seize sommets :

$$1/17 = 0{,}\dot{0}58\ 823\ 529\ 411\ 764\ \dot{7}\ \ldots$$

Les multiples de 1/17 auront aussi des suites périodiques de décimales qui seront les mêmes que pour 1/17 mais qui ne commenceront pas par 0 ; exemples :

$$2/17 = 0{,}\dot{1}17\ 647\ 058\ 823\ 529\ \dot{4}\ \ldots$$

$$3/17 = 0{,}\dot{1}76\ 470\ 588\ 235\ 294\ \dot{1}\ \ldots$$

et on peut repérer sur le cercle où commence chacune des seize suites périodiques.

Objection à ce qui précède : nous nous écartons de la géométrie "naturiste" annoncée pour déboucher sur des calculs et des propriétés pas évidentes du tout. Mais j'ai prévenu en commençant que je n'hésiterais pas à courir de grands risques, à tomber parfois. Je veux acquérir une expérience aussi riche que possible de faits mathématiques et la géométrie n'est pas plus isolée dans la mathématique que le Parthénon sur l'Acropole.

2.5. Répétitions.

Reprenons l'exemple de la couverture du n° 73 de *Mathematics Teaching* (fig. 7). Comment le plan est-il *occupé* ? A partir d'un des motifs, comment obtenir n'importe quel autre ? On découvre les deux translations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, la symétrie s de centre A. Pour transformer le motif initial (qui porte la lettre A) en tout autre motif du plan, ou bien on fait la symétrie s puis une translation $x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ avec x et y entiers, ou bien cette translation seule sans symétrie préalable.

On trouvera d'autres exemples dans des papiers peints. Mais à qui serait fatigué de ces exemples un peu simples, on proposera d'analyser dans le même esprit certaines compositions du peintre hollandais Escher ; par exemple ses cavaliers, ceux d'une première file "horizontale" allant de gauche à droite qui s'emboîtent exactement dans les cavaliers d'une autre file, au-dessous ou au-dessus de la première mais allant, eux, de droite à gauche.

Escher nous propose aussi des compositions plus savantes où se composent des homothéties et des rotations. T.J. Fletcher nous avait fait, à Marly en 1968, une belle conférence qui inspire les remarques précédentes.

2.6. Maquettes

Quels sont nos élèves qui n'ont pas construit des maquettes d'avion ? Une question leur est venue : les ailes en bois de balsa conviennent pour ces maquettes, pas pour les vrais avions ; pourquoi ? Voici un petit calcul très significatif : la construction de la Tour Eiffel a utilisé 9 000 tonnes d'acier ; quel serait le poids d'une maquette de 15 cm de haut et de même métal ? La réponse 1,125 g surprend ; les vilaines maquettes moulées vendues aux touristes sont bien plus lourdes ; la structure de la Tour Eiffel est remarquable par sa légéreté.

Ce calcul fait bien comprendre les différences morphologiques comme celle de la patte d'éléphant et de la patte de moustique ; avec des pattes aussi fines que celles du moustique, l'éléphant s'enfoncerait dans le sol. Rappelons-nous la mode, désastreuse pour les planchers, des talons aiguilles, même si les élégantes qui les portaient étaient autrement légères que l'éléphant !

Il n'est pas mauvais de mettre en garde contre certaines difficultés. Observons une goutte d'eau en équilibre sur une glace horizontale bien sèche ; essayons d'en évaluer le volume. Pourrons-nous maintenir en équilibre, sur le même plan, un volume double, triple, ... ? Pourquoi y a-t-il une limite ? La réponse n'est pas du programme de physique des classes secondaires mais on peut y voir l'amorce des problèmes difficiles de la théorie des maquettes. Une visite au Laboratoire d'hydraulique de Chatou avait passionné des élèves de Terminale C. Et puis, géométrie et physique peuvent-elles s'ignorer ?

TROISIEME ESSAI : GEOMETRIE ANIMEE

A dessein, je reprends le titre de la série des films réalisés par J.-L. Nicolet et qui se trouvent à la disposition des collègues à la Cinémathèque de l'Enseignement Public. L'auteur, notre regretté collègue enseignant à Lausanne, a précisé ses intentions dans l'article "Intuition mathématique et dessins animés" qui se trouve dans l'ouvrage collectif *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* réalisé par Caleb Gattegno en 1958 (édition Delachaux et Niestlé). Peut-être ces intentions sont-elles bien résumées par la citation liminaire ; Archimède écrit à son ami Eratosthène :

"Te sachant grand admirateur des recherches mathématiques, j'ai cru devoir te communiquer les particularités d'une certaine méthode que tu pourras utiliser pour *découvrir* par le moyen de la mécanique certaines vérités mathématiques... Souvent, en effet, j'ai *découvert* par la mécanique des propositions que j'ai ensuite *démontrées* par la géométrie, la méthode en question ne constituant pas une démonstration véritable, car il est plus facile, une fois acquise par cette méthode une certaine connaissance des questions, d'en trouver ensuite la démonstration que si l'on cherchait celle-ci sans aucune notion préalable".

Ces films de Nicolet sont d'une remarquable sobriété : pas de titre, pas de son, pas de lettres ; seulement des figures animées, toutes nues, toutes simples, étonnamment *éloquentes*. Au spectateur attentif d'en suivre l'enchaînement ; incidemment, l'analyse de ces scénarios très courts participe à une bonne formation cinématographique (pour qui voit dans le cinéma autre chose qu'une salle où on suce des chocolats glacés). Un exemple : sur l'écran apparaissent deux cercles concentriques ; un troisième cercle se déplace pour devenir tangent extérieurement au plus petit des deux premiers ; son rayon diminue pour qu'il devienne tangent intérieurement au grand ; alors ce petit cercle bitangent à la couronne se déplace en conservant ses contacts ; au second tour, son centre décrit un cercle concentrique aux deux premiers. Des élèves de treize ans qui n'avaient jamais vu de films mathématiques étaient intéressés par cette brève projection (entre deux et trois minutes). Après une seconde projection, les élèves peuvent faire une assez bonne description du film par séquences successives : il faut savoir regarder. Puis cela suggère des remarques ; justement parce que le film est muet il donne envie de parler à qui, d'habitude, ne dit rien : "Cela fait penser à un roulement à billes" "Oui, mais il faudrait calculer les dimensions pour qu'un nombre entier de billes tienne dans la couronne". "Et alors, les points de contact des billes entre elles ne seront pas sur le cercle décrit par les centres des billes". Enfin un autre jeune spectateur m'a fait remarquer qu'il y a d'autres cercles bitangents à la couronne. J'étais comblé par cette avalanche de remarques.

Comme l'a très bien dit un autre élève "ça ne démontre rien". Non, ça montre, ça suggère des problèmes. Films qui font parler, qui font penser. Nicolet était un pédagogue.

Les films de T.J. Fletcher sont plus riches et partant plus difficiles. Même si le délicieux *La ronde carrée* (obligeamment prêté par l'Ambassade du Canada) nous propose sur la musique des "square dances" écossaises une fantaisie pleine d'imagination avec des carrés en couleurs. Deux autres films de Fletcher, *Four points conics* et *Four lines conics*, sont de niveau élevé, à faire beaucoup rêver des élèves de Spéciales si ceux-ci pouvaient encore rêver.

Nicolet, Fletcher, des pionniers du cinéma géométrique. Nous ne sommes qu'à l'aube de l'utilisation du cinéma dans l'enseignement. Je connais des classes qui ont utilisé les ressources des tables traçantes pour étudier des familles de courbes comme celles que l'on construit plus ou moins adroitement à la main, le calcul venant au secours du dessinateur.

*

* *

D'AUTRES ESSAIS

Il y a certainement bien d'autres voies possibles pour ouvrir le goût à la géométrie. J'espère que les exemples cités auront rassuré les mathématiciens justement épris de rigueur. Aussi dépouillée qu'elle soit d'un système d'axiomes qui rend la géométrie correctement habillée mathématiquement présentable, la "naturiste" n'est donc pas là pour remplacer la vraie. Non, pour mettre en appétit. Et puis aussi pour illustrer un principe énoncé par le grand Herschel "Observer est un art qui doit s'apprendre", comme disait si bien en anglais cet Allemand qui connaissait la musique.

(Figures par Gilles Walusinski) **Gilbert Walusinski**

CELEBRATION

Là-bas dans les espaces infinis de l'affine,
Par-delà l'horizon de tous les plans stellaires,
La danse des vecteurs qu'un réel illumine,
Clôt la célébration de leur produit scalaire.

Marie-Thérèse Patalani

4 - QUELQUES THÈMES DE GÉOMÉTRIE POUR LE PREMIER CYCLE

P. GAGNAIRE, IREM de LYON

L'avant-projet de programme de mathématiques du 12 février 1977 (*) pour les classes de quatrième et troisième présente à mon avis un inconvénient majeur en ce qui concerne la géométrie. Comme dans les programmes actuellement en vigueur, l'aspect affine et l'aspect métrique de la géométrie plane sont artificiellement séparés, celui-ci (agrémenté de "compléments") étant rejeté en troisième, et celui-là étant abordé dès la quatrième.

Cette séparation est évidemment contradictoire avec la première phrase de cet avant-projet, phrase qui ne peut qu'emporter l'adhésion de chacun :

"L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation ; celles-ci requièrent, en particulier, l'usage des instruments de dessin".

Comment l'usage des instruments de dessin pourrait-il *ne déboucher que sur l'aspect affine* de la géométrie plane ? Est-il, au demeurant, souhaitable de faire croire aux élèves que le plan, c'est un "truc" affine sur lequel se greffe, comme par accident, un "machin" métrique dont on n'a pas le droit de se servir avant la classe de troisième ? Est-ce un bon apprentissage du raisonnement que de commencer à interdire certaines formes de celui-ci ? Enfin, le compas (comme traceur de cercles) ne serait-il plus un instrument de dessin ?

Que les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons puissent être classées en deux grands domaines (affine d'une part, métrique de l'autre), c'est une bien belle chose pour qui connaît ces propriétés et les domine suffisamment pour s'en servir. Mais les élèves qui sortent du premier cycle n'en sont pas tous là.

On ne peut axiomatiser qu'un ensemble de connaissances sûrement acquises. Le premier cycle doit avoir pour but de faire acquérir ces connaissances. Bien sûr, chaque fois que faire se peut, on montrera que de certaines d'entre elles peuvent être déduites

(*) Voir le Bulletin de l'APMEP n° 308, pages 308 et suivantes.

d'autres, mais cela est vrai aussi bien pour les propriétés métriques que pour les propriétés affines, et celles-ci ne sont pas nécessairement plus évidentes que celles-là.

CLOPEAU a prononcé un jour une phrase qui m'a frappé :

"La géométrie du premier cycle, ce n'est ni une géométrie affine ni une géométrie métrique ; c'est une géométrie de construction".

De même, je dirai que l'espace matériel n'est ni affine ni métrique. Il est simplement construit (et on peut le re-construire, pour l'étudier) de manière que les propriétés de l'une et de l'autre sorte y fassent bon ménage. Mais on aura bien le temps de voir plus tard qu'elles ne sont pas de la même sorte !

Avant d'entrer dans le vif du sujet, voici encore quelques critiques formulées contre "la lettre" du programme (mais, la mathématique étant une construction essentiellement formelle, *la lettre* se confond vite avec *l'esprit* !).

"... Le plan est un ensemble de points". Ce n'est pas du tout évident pour nos élèves, pour lesquels la notion de *point* reste assez vague même après la troisième. Alors *un ensemble d'objets mal déterminés*, pensez voir ! Et, de plus, il s'agit d'un ensemble infini, non discret, non dénombrable, dense, ... enfin un ensemble dont les propriétés rompent avec celles des exemples d'ensembles étudiés jusqu'alors. Si bien que la question : "Les points d'un plan forment-ils un ensemble ?" n'est pas, à ce niveau, dénuée de sens. La phrase du programme n'apporte aucune information nouvelle à l'élève. Surtout qu'elle est ainsi "précisée" : "Il contient au moins trois points." ! Chacun sait qu'il est difficile de faire admettre aux enfants que l'ensemble des points du plan ne se limite pas à ceux qui sont explicitement marqués sur telle ou telle figure. La "précision" ci-dessus peut l'inciter à croire qu'on peut compter les points du plan (puisqu'il y en a au moins *trois*) !

La même remarque vaut pour "Toute droite est une partie propre du plan et contient au moins deux points".

Il est vrai que de ces deux axiomes et de l'axiome d'Euclide qui les suit immédiatement dans l'avant-projet, on peut déduire que le plan contient un quatrième point distinct de chacun des trois premiers ! Mais est-ce ainsi qu'on peut persuader qui que ce soit de la puissance du raisonnement mathématique ?

Un peu plus loin, on lit :

"Le quadruplet (A,B,C,D) est un parallélogramme si et seulement si... ". Mais un parallélogramme n'a jamais été un quadruplet ! Tout au plus un quadruplet peut-il servir à *désigner* un parallélogramme. Mais alors ce quadruplet est le *nom* du parallélogramme (et non le parallélogramme lui-même). Il y a un ensemble de règles pour former les noms des objets qu'ils désignent. Cet ensemble de règles s'appelle l'orthographe. Un nom (comme tout mot) est formé de *lettres*. Tout autre signe (ici, les virgules et les parenthèses) est à exclure du nom. L'orthographe géométrique est à ce point simple que si on connaît les noms des sommets, des côtés et des diagonales d'un parallélogramme, on sait former *un* nom (et même *tous les* noms) pour ce parallélogramme. Mais il ne faut pas confondre le nom et l'objet ! Ainsi, ABCD et BADC sont deux noms *différents* pour désigner le *même* parallélogramme. Mal écrit, cela donne : "(A,B,C,D) et (B,A,C,D) sont deux quadruplets *différents* qui désignent le *même* parallélogramme". C'est bien qu'un quadruplet *n'est pas* un parallélogramme !

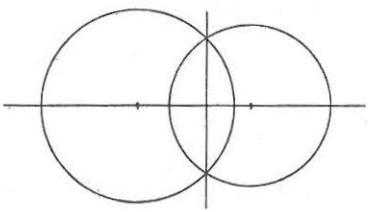
Mais laissons là ces peccadilles et voyons les thèmes dont parle le titre de cet article. Il est possible que certains d'entre eux soient à cheval sur plusieurs noyaux mais l'essentiel n'est-il pas que sur ces thèmes les élèves puissent exercer leur activité ? Ce n'est qu'alors que les noyaux pourront être mis en évidence.

J'ai choisi cinq titres de paragraphe :

- Variations sur une figure simple
- Les quadrilatères et leurs symétries
- Le théorème de Pythagore
- Les vecteurs
- Trigonométrie

Vous voyez que certains de ces titres sentent le noyau autant que le thème ! En fait, tout dépend de la manière de les aborder.

4.1. VARIATIONS SUR UNE FIGURE SIMPLE



Le *dessin* ci-dessus n'est pas encore une *figure*... il lui manque une *légende*... et une légende, ça se raconte !

"FIGURE... *Math*. Représentation par le dessin de lignes, de surfaces ou de volumes." (Petit Larousse 1966, p. 433).

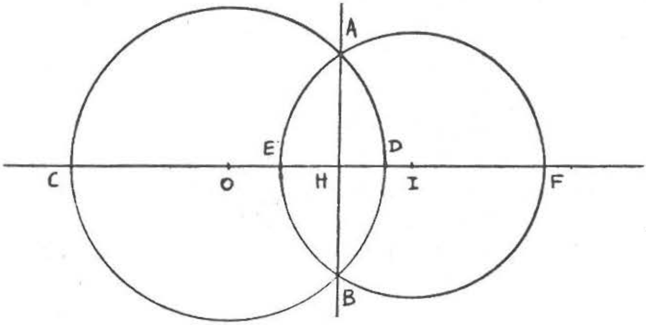
Une figure, c'est un dessin qui représente, qui *figure* quelque chose ("FIGURER v.t. Représenter par la peinture, la sculpture, le dessin, etc.." ibidem). Ce dessin ne commencera à devenir une figure que lorsqu'on l'aura *raconté*, ou mieux, fait raconter par les élèves. C'est le stade d'observation auquel fait allusion l'avant-projet de programme.

Faisons donc décrire ce dessin par les élèves, et à cette occasion, recensons le vocabulaire nécessaire à cette description. La nécessité de la désignation de chaque *point intéressant* (*) par une lettre apparaîtra tôt ou tard au cours de cette description.

Comment s'assurer que l'une des descriptions données est *bonne* ? En ce qu'elle dit *tout* ce que l'on peut voir sur le dessin ? Ou en ce qu'elle dit *juste le nécessaire* pour le reproduire ? Cela peut donner lieu à discussion et les élèves peuvent fort bien décider que celle qui dit *tout* est meilleure que l'autre. N'empêche qu'au cours de cette discussion on aura mis en évidence qu'il *suffit* que la distance des centres soit 3,5, l'un des rayons 2,5 et l'autre 3 pour que la distance des points communs aux deux cercles soit 4,2 (à 0,1 près). Ainsi, certaines connaissances peuvent être déduites d'autres connaissances, ne serait-ce qu'au moyen d'un dessin bien fait. Que ces nouvelles connaissances ne soient qu'approximatives (ce qui satisfait d'ailleurs nombre de techniciens, voire d'ingénieurs) doit encourager à travailler plus soigneusement et aussi à chercher d'autres moyens plus sûrs que le simple dessin. Chaque lecteur aura reconnu ici une amorce pour le thème n° 3 mais il n'en est pas de même, bien sûr, pour l'élève de quatrième qui n'entend que trop souvent la réponse : "Vous verrez cela plus tard !".

(*) Et non pas de chaque point ! Les *points intéressants* (ou *remarquables*) qui interviennent dans un dessin pour en faire une figure sont toujours en nombre fini. Leur intérêt est d'ailleurs très divers selon qu'ils peuvent servir à reproduire la figure ou qu'ils sont retrouvés comme résultat de cette reproduction .

Revenons à notre figure, sur laquelle nous mettons des lettres.



"Variations sur une figure", cela ne peut être mieux réalisé qu'en "faisant varier" le dessin.

Il s'agit de deux *cercles* de *rayons* donnés dont les *centres* sont à une *distance* donnée.

L'unité de longueur étant choisie une fois pour toutes (la changer ne serait que compliquer l'étude inutilement), obtient-on des dessins différents du précédent si on change la distance des centres et les rayons ? Certes, les figures sont toutes différentes mais on peut toutes les classer en tenant compte de certaines *ressemblances*. Ce classement va d'ailleurs nous permettre de préciser ces ressemblances. Par exemple, on arrive à coup sûr à l'énoncé suivant, qui implique l'inégalité triangulaire :

"Selon que le plus grand des trois nombres : distance des centres, premier rayon, second rayon est

- strictement inférieur
- égal
- strictement supérieur

à la somme des deux autres, les deux cercles ont respectivement

- deux
- un
- zéro

points communs"

Une analyse plus fine des ressemblances mènera à distinguer le cas des cercles extérieurs l'un à l'autre ou des cercles dont l'un est intérieur à l'autre. L'ordre relatif des points O,I,C,D,E,F,H peut aussi faire un objet d'étude ; le point H peut ne pas exister, ni même, d'ailleurs, la droite des centres si O = I .

Le cas où les cercles sont tangents est délicat à examiner. Combien y a-t-il alors de points communs ? Etrange question, direz-vous ! Cela se voit-il donc si bien sur la figure ? Supposez qu'on vous demande de dessiner deux cercles dont les centres sont distants de 3 cm et dont les rayons sont respectivement 5 cm et 8 cm. Supposez, de plus, que vous fassiez une erreur d'un demi-millimètre dans l'ouverture de votre compas si bien que les deux cercles n'auront pas un seul mais deux points communs. A quelle distance chacun d'eux sera-t-il de la ligne des centres ? *Vous* pouvez calculer cette distance par le théorème de Pythagore, pas vos élèves de quatrième. Quoi ! Vous êtes surpris du résultat ? Alors ne soyez pas étonné si la question n'est pas aussi évidente pour les enfants. Mais maintenant, répondez sincèrement à la question:

> "Peut-on prétendre faire comprendre ce qu'est l'inégalité triangulaire aux enfants sans les avoir fait chercher *expérimentalement*, sur ces questions de dessin ? "

Mais cela ne figure pas dans le programme, ni dans l'avant-projet !

"Variations sur une figure", cela peut aussi se réaliser en variant les manières d'attaquer sa reproduction.

Par exemple, on peut demander de la reproduire à partir des points A et B *imposés*. On débouche alors sur la construction du point D et du point I, laquelle met en oeuvre des cercles qui ne figurent pas explicitement sur le dessin donné (et il n'est pas sûr du tout que les enfants éprouvent la nécessité de les tracer !) On peut ensuite demander de tracer d'autres cercles passant par A et B : où sont leurs centres ? On débouche ainsi sur la *médiatrice* des points A et B, et sur la *perpendicularité*.

On peut encore demander de reproduire la figure à partir de la donnée du point A et de la droite des centres, avec ou sans la connaissance des rayons (dans ce dernier cas, il s'agit seulement de reproduire une figure *qui ressemble* à la figure donnée). On débouche ainsi sur la *symétrie* autour d'une droite. La construction du symétrique B de A autour de la droite des centres, au moyen de deux cercles centrés sur cette droite, présente un intérêt certain : quels que soient les centres choisis, les cercles se recoupent toujours en B. Il ne s'agit pas de *démontrer* ce fait ; mais observer que l'on ne fait que mettre en évidence une propriété déjà vue lors de l'étude de la médiatrice contribue à tisser ces *liens logiques* qui, plus tard, feront la trame d'une véritable théorie.

L'étude de la symétrie autour d'une droite est ainsi amorcée. Ce n'est pas ici le lieu d'insister sur l'intérêt considérable de cette "transformation géométrique". Il en sera d'ailleurs question dans le paragraphe ② . Mais il est important de mettre en évidence quelques faits :

- la distance de deux points est la même que celle de leurs symétriques,
- si trois points sont alignés, alors leurs symétriques aussi.

Ces deux faits sont aussi *évidents* l'un que l'autre, c'est-à-dire que l'expérience nous les montre pareillement l'un et l'autre. Que le second puisse être déduit du premier, moyennant l'inégalité triangulaire (stricte) énoncée précédemment (et aussi le fait que si M est sur le *segment* AB alors la distance de A à B est la somme de la distance de A à M et la distance de M à B), cela peut faire l'objet d'un raisonnement, certes. Mais le principal intérêt de ce raisonnement sera de faire manipuler, et par cela consolider, un énoncé précédemment établi, et non pas acquérir une connaissance nouvelle à partir d'une ancienne !

Remarque — La symétrie autour d'une droite est un exemple (fondamental) d'*isométrie du plan*. On pourrait la définir comme l'isométrie distincte de l'identité conservant deux points distincts. On peut se demander si, étant donnés deux points distincts d'une surface (autre qu'un plan), il existe une isométrie de cette surface, distincte de l'identité et conservant ces points. Encore la réponse dépend-elle de la manière dont on a défini une distance sur la surface considérée. Par exemple, pour un cône, la réponse est "non" si les distances sont reportées au compas et "oui" si les distances sont reportées au moyen d'une bande de papier enroulée sur le cône, à condition, toutefois, de ne pas "aller trop loin" dans ce dernier cas. Le fait que, dans le plan, la "distance du compas" soit *la même* que la "distance de la bande de papier" distingue le plan des autres surfaces ; il en résulte que celles-ci se comportent différemment de celui-là du point de vue de l'existence des isométries ayant certaines propriétés. Il n'est pas question de faire une théorie de ces choses en quatrième mais quelques expériences *physiques* qui auraient pour objet de comparer ce qui se passe sur un cylindre, ou un cône, selon qu'on y adopte la "distance de la bande de papier" ou la "distance du compas" contribueraient bien mieux à répondre à la question "Qu'est-ce qu'un plan ?" que des phrases telles que "Le plan est un ensemble de points. Il contient au moins trois points".

4.2. LES QUADRILATERES ET LEURS SYMETRIES

Et d'abord, qu'est-ce qu'un quadrilatère ?

Si un élève vous répond que c'est "une espèce de carré", réprimandez-le pour la forme (c'est bien le cas de le dire !) mais consolez-vous en pensant qu'il aurait pu vous dire : "c'est un quadruplet" ! En vérité, j'exagère, et j'ose espérer que nul élève n'aura été à ce point déformé !

Dans un quadrilatère, il y a quatre sommets ; quatre côtés, deux diagonales et, le plus souvent, un centre. Ce qui nous fait six segments et cinq points. Il est d'usage de faire jouer un rôle à part au cinquième point (le centre) et de *définir* le quadrilatère par ses sommets.

Puisqu'en cinquième il a été question d'ensembles et de parties d'un ensemble, il est peut-être bon de revoir ces notions à propos de l'ensemble des quatre sommets d'un quadrilatère.

Soit $\{A,B,C,D\}$ cet ensemble. Choisissons deux de ses éléments : ce sont des *points* qui sont donc les extrémités d'un *segment*. Combien de segments détermine-t-on avec les éléments de l'ensemble ? Autant qu'il y a de paires dans l'ensemble des parties :

$$\{A,B\}\ ,\ \{A,C\}\ ,\ \{A,D\}\ ,\ \{B,C\}\ ,\ \{B,D\}\ ,\ \{C,D\}\ .$$

Certaines de ces parties peuvent être mises en *circuit fermé*. Par exemple :

$$\{A,B\}\qquad \{B,C\}\qquad \{C,A\}$$

mais, pour cet exemple, la lettre D n'est pas utilisée.

Quels sont tous les circuits fermés qui utilisent *toutes* les lettres ?

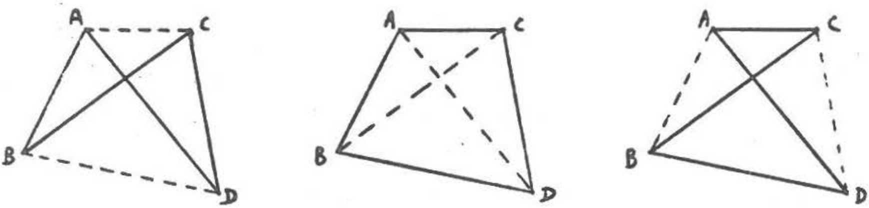
On en trouve trois :

$$\{A,B\},\{B,C\},\{C,D\},\{D,A\}\ ;\ \{A,B\},\{B,D\},\{D,C\},\{C,A\}\ ;\ \{A,C\},\{C,B\},\{B,D\},\{D,A\}$$

Ces circuits comportent tous *quatre* paires et laissent de côté chacun *deux* paires sans points communs, respectivement :

$$\{A,C\}\ \text{et}\ \{B,D\}\ ;\ \{B,C\}\ \text{et}\ \{A,D\}\ ;\ \{A,B\}\ \text{et}\ \{C,D\}$$

Les quatre paires d'un circuit correspondent aux *côtés* d'un quadrilatère qui admet pour sommets les points A,B,C,D ; les deux paires laissées de côté à ses *diagonales*. Ainsi, avec quatre points donnés pris pour sommets, on peut former *trois* quadrilatères différents. C'est ce que représente la *figure* suivante où les côtés sont en trait plein et les diagonales en trait interrompu.



Le classement des six segments en côtés et diagonales permet de distinguer deux sortes de positions relatives pour deux sommets : ils sont soit *consécutifs* s'ils sont extrémités d'un même côté, soit *opposés*, s'ils sont extrémités d'une même diagonale. Nous sommes maintenant en mesure de donner la règle d'écriture d'*un* nom pour un quadrilatère :

on écrit d'abord le nom d'un sommet
puis le nom d'un sommet consécutif au premier
puis le nom du sommet opposé au premier
puis le nom du sommet opposé au deuxième.

Voilà, c'est l'usage qui veut cela. En Poldavie (*), l'usage est différent : on nomme un quadrilatère en juxtaposant les noms de ses deux diagonales. Ainsi, les noms français des trois quadrilatères dessinés sont respectivement :

ABCD ABDC ACBD

(il y a d'autres noms possibles, cherchez-les !) alors que les noms poldèves sont respectivement :

ACBD ADBC ABCD

(Les géomètres poldèves prétendent, non sans raison, que les diagonales sont au moins aussi importantes que les côtés et que leur notation les met mieux en évidence, alors que la nôtre, disent-ils, ne met même pas en évidence tous les côtés : l'un d'eux est toujours escamoté !).

(*) Voir les Oeuvres complètes de Marcel Aymé pour plus de renseignements sur cet admirable pays à qui nous devons tant.

J'ai dit plus haut qu'un quadrilatère comporte *le plus souvent* un centre. Ce point est le point commun aux diagonales si ce point existe (*Remarque* : d'autres points que le point commun des diagonales peuvent être appelés "centre". Par exemple le centre de gravité ou le centre du cercle circonscrit ou du cercle inscrit, s'il en existe...). Ce n'est le cas que pour le quadrilatère ABDC (notation française) dessiné ci-dessus. Bien sûr, pour les quadrilatères ABCD et ACBD, on peut bien *prolonger* les diagonales jusqu'à ce que les *droites* obtenues se coupent mais on peut juger bizarre un "centre" situé à *l'extérieur* d'une figure (c'est d'ailleurs parfois le cas pour le centre du cercle circonscrit quand il y en a un).

Ici se pose une question d'existence de point commun à deux segments ou à deux droites. Cela peut donner lieu à un travail de recherche *expérimentale* :

Peut-on tracer un quadrilatère dont deux côtés quelconques ne se coupent pas *et* dont les diagonales ne se coupent pas ?

La réponse est "oui" et on découvre, incidemment, des propriétés telles que :

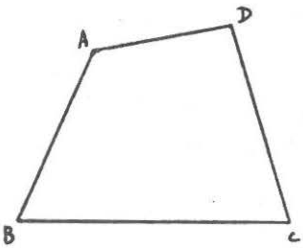
> "Si aucun segment parmi ceux qui joignent deux des quatre points A,B,C,D n'en coupe un autre, alors trois segments (et trois seulement) sont coupés par les prolongements des trois autres."
>
> "Si deux des segments joignant quatre points A,B,C,D se coupent, alors aucun segment n'est coupé par le prolongement d'un autre".

De telles recherches mettent en évidence des propriétés *topologiques* de la droite et du plan, et peuvent mener à l'énoncé de l'axiome de Pasch :

> Si une droite qui ne passe par aucun sommet d'un triangle coupe un côté de ce triangle, alors elle coupe un autre côté de ce triangle.

Ces propriétés sont tout à fait laissées dans l'ombre par le programme actuel et par l'avant-projet du 12 février 1977. Elles contribuent pour le moins autant que les "relations d'incidence" entre droites à distinguer le plan du cylindre, par exemple, et il est regrettable, à mon avis, qu'elles ne soient pas jugées dignes de faire partie du "bagage culturel" de l'honnête homme de la fin du vingtième siècle.

Mais revenons à notre quadrilatère. En voici un, *convexe*, mais dépourvu de symétrie :

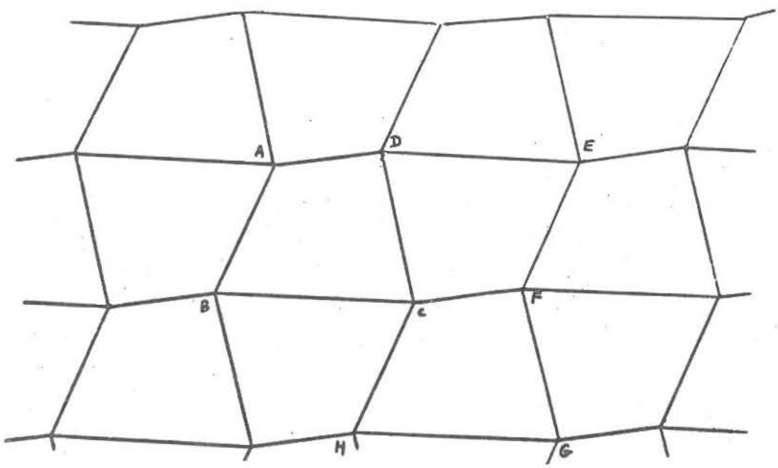


Dans le but (non déclaré, mais bien naturel, c'est-à-dire digne d'un matheux) de faire apparaître la symétrie là où elle n'est pas (*), posons la question :

"Peut-on paver le plan avec un tel quadrilatère ? "

Il s'agit, comme chacun sait, de recouvrir le plan entièrement avec des quadrilatères de même forme et de même taille que celui-ci, deux quadrilatères différents ne se chevauchant pas.

Quelques essais mènent à la solution que voici :



Sur ce pavage, comment passe-t-on du quadrilatère ABCD au quadrilatère voisin CDEF ? de CDEF à CFGH ?

Le coloriage des coins du quadrilatère mobile découpé dans du papier qui aura servi à dessiner le quadrillage rendra bien des services pour répondre à ces questions. Par exemple, après avoir mis le quadrilatère mobile sur ABCD, colorions en rouge le sommet qui est sur A, en vert le sommet qui est sur B, en noir le sommet qui est sur C, en jaune le sommet qui est sur D.

(*) Soyez sûr que c'est dans ce but que la notion de groupe fut inventée !

Cette position peut être ainsi représentée :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

On peut aussi obtenir les positions :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ F & E & D & C \end{pmatrix} \quad (2) \qquad\qquad \begin{pmatrix} r & v & n & j \\ C & H & G & F \end{pmatrix} \quad (3)$$

mais non celle-ci :

$$\begin{pmatrix} r & v & n & j \\ E & F & C & D \end{pmatrix}$$

Le changement de position se traduit ainsi :

le coin qui était sur A est venu sur F
le coin qui était sur B est venu sur E
le coin qui était sur C est venu sur D
le coin qui était sur D est venu sur C

ou, plus schématiquement :

$$\begin{aligned} A &\longmapsto F \\ B &\longmapsto E \\ C &\longmapsto D \\ D &\longmapsto C \end{aligned}$$

Choisissons maintenant un point M du segment AB, par exemple, et marquons-le en marron sur le quadrilatère mobile en position (1), puis plaçons le quadrilatère en position (2). Où vient le point marron ? Sur un point du segment EF, bien sûr. Appelons P ce point :

$$M \longmapsto P$$

N'y a-t-il pas un point qui est le même que son image dans le changement de position (1) → (2) du quadrilatère mobile ?

Que peut-on dire de ce point I pour les couples (A,F), (B,E), (C,D), (D,C), (M,P) ?

On met ainsi en évidence la *symétrie* autour du point I, *milieu* commun des points de chacun des couples que l'on vient de citer.

Passons maintenant de la position (2) à la position (3) :

$$\begin{aligned} C &\longmapsto F \\ D &\longmapsto G \\ E &\longmapsto H \\ F &\longmapsto C \end{aligned}$$

Quel est alors le point égal à son image ?

Composons maintenant les changements de position (1) → (2) puis (2) → (3). Y a-t-il encore un point égal à son image ?

La *translation* est ainsi abordée autrement que par les droites parallèles. Les translations sont ici engendrées par les symétries-points, de même que, plus loin, les symétries-points seront engendrées par les symétries-droites.

Les droites parallèles apparaissent ici : par exemple BC et DE, BC et HG, CD et FG, ... Le fait essentiel, pour ces parallèles, c'est d'être symétriques l'une de l'autre autour d'un certain point. On peut déduire de là qu'elles n'ont aucun point commun, mais cette *propriété* mérite-t-elle vraiment d'être prise comme définition ? La question sera reprise au paragraphe 4.

Donc, la symétrie peut apparaître là où elle semblait d'abord ne pas exister. Mais là où elle est déjà,comme, par exemple, dans le rectangle, le losange, le carré, que de découvertes son observation peut provoquer !

Les enfants sont naturellement attirés par les quadrilatères riches en symétries et si vous leur demandez d'en dessiner un, la plupart d'entre eux va dessiner un rectangle. Ce fait est naturellement favorisé par le quadrillage de leur cahier et la forme de la feuille sur laquelle ils dessinent, même si elle est blanche.

La découverte des symétries du rectangle, du losange et du carré nécessite un matériel peu important mais qu'il importe de bien utiliser. Par exemple, on voit dans beaucoup d'ouvrages, par ailleurs sérieux, un rectangle mobile en carton qui se balade sur un rectangle fixe dont les sommets sont désignés par les mêmes lettres. Comme, de plus, l'auteur utilise encore ces mêmes lettres pour désigner les axes de symétrie ("la diagonale AC", "la médiatrice du côté AB"), la confusion ne tarde pas à s'installer, surtout quand le rectangle devient un carré. Le même nom peut alors désigner deux axes de symétrie différents selon que l'on considère la "figure fixe" ou la "figure mobile". C'est pour éviter cet inconvénient que je recommande dans GEOMETRIE autour d'un CARRE (*) de tremper chaque coin du carré dans un pot de peinture de couleur différente des autres. Les sommets du carré mobile sont ainsi repérés par des *couleurs*, ceux du carré fixe par des *lettres*. Le carré mobile apparaît alors comme un *opérateur* qui

(*) Editions CEDIC.

permet de mettre en évidence certaines *applications dans l'ensemble des sommets du carré fixe.* Une fois le carré mobile disparu, il reste les applications mises en évidence, sur lesquelles on peut travailler mathématiquement.

Il n'est pas question, dans cet article, de recopier la première partie de l'ouvrage cité et qui traite précisément du groupe des isométries du carré, lequel contient comme sous-groupes les groupes d'isométries de tous les autres quadrilatères.

Lors de l'étude de ces symétries, une foule de propriétés apparaît : les diagonales du rectangle ont même longueur, celles du losange sont perpendiculaires, les côtés consécutifs du rectangle sont perpendiculaires, ceux du losange ont même longueur, etc... Contrairement à une idée largement répandue, il est aussi intéressant, *même du point de vue du raisonnement logique*, de progresser de la situation la plus particulière (celle du carré) vers la situation la plus générale (celle du quadrilatère "quelconque", via le parallélogramme) que dans le sens contraire. En effet, pour les enfants auxquels le carré est plus familier que le quadrilatère quelconque, les propriétés ne sont pas mieux mises en évidence que lorsqu'elles disparaissent. Un quadrilatère dont les diagonales ne sont ni de même longueur, ni de même milieu, ni perpendiculaires est un quadrilatère sur lequel ils ignorent tout, donc sur lequel ils ont l'impression qu'il y a quelque chose à apprendre.

De ce point de vue, on peut poser la question suivante : si on *supprime* telle ou telle propriété du carré, peut-on en même temps *conserver* telle ou telle autre ?

On est ainsi conduit à chercher quelles propriétés, parmi celles du carré, entraînent quelles autres. Cela donne lieu à la mise en évidence de contre-exemples (un quadrilatère peut-il avoir des diagonales perpendiculaires sans avoir des côtés consécutifs de même longueur ?) et provoque des démonstrations (un quadrilatère peut-il avoir tous ses côtés de même longueur sans avoir ses diagonales perpendiculaires ?). On est véritablement dans l'apprentissage, par sa mise en oeuvre, du raisonnement logique.

Parmi les résultats importants auxquels peut mener une telle activité, retenons ceux-ci qui interviendront dans les paragraphes suivants :

> Si les diagonales d'un *parallélogramme* ont même longueur, alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires et réciproquement.

Si les côtés consécutifs d'un *parallélogramme* ont même longueur, alors ses diagonales sont perpendiculaires et réciproquement.

Le seul quadrilatère invariant par *quart de tour* est le carré.

Le mot *parallélogramme* apparaît pour la première fois dans ce paragraphe. Il s'agit, comme l'indiquent le programme actuel et l'avant-projet du 12 février 1977, d'un quadrilatère muni d'un centre de symétrie. Ce quadrilatère sera rencontré à nouveau au paragraphe 4, aussi ne nous étendrons-nous pas davantage ici à son sujet. Le *quart de tour* est une isométrie, distincte de sa réciproque, par laquelle chaque sommet du quadrilatère a pour image un sommet consécutif. Il est remarquable que le quart de tour *n'engendre pas* le groupe des isométries du carré, bien que le carré soit le seul quadrilatère invariant par quart de tour.

Signalons, pour terminer, que les isométries des quadrilatères sont toutes, ou bien des symétries-droites, ou bien engendrées par des symétries droites. Il y a là un cas particulier d'un fait plus général : toutes les isométries du plan sont engendrées par les symétries-droites. L'étude des isométries du carré peut servir de point de départ à celles des polygones réguliers et, d'une manière plus générale, à l'étude des rotations comme composées d'un nombre *pair* de symétries-droites (de même que les translations sont des composées d'un nombre *pair* de symétries-points).

4.3. LE THEOREME DE PYTHAGORE

Dans *Mathématiques et Mathématiciens* de P. Dedron et J. Itard, on peut lire, page 26 :

> "Inutile de dire après cela que notre *théorème de Thalès* ne doit rien au vieux philosophe. D'ailleurs, ce théorème sur la proportionnalité des segments que des parallèles découpent sur deux sécantes est loin d'avoir la vénérable antiquité du Théorème de Pythagore. Il est accepté des Egyptiens et des Babyloniens, mais non comme une proposition qui a besoin de preuve : simplement comme une évidence, ainsi d'ailleurs que toutes les notions de similitude. Le Théorème de Pythagore au contraire n'est pas évident, et a nécessité *une découverte*".

Et les auteurs consacrent un chapitre entier (le chapitre XV) à ce glorieux énoncé.

L'intérêt d'un théorème n'est pas dans sa démonstration mais dans son efficacité. Celle du théorème de Pythagore est telle, dans le domaine du calcul des longueurs, que l'élève qui l'utilise pour la première fois éprouve vraiment l'impression d'avoir (enfin !) appris quelque chose.

Avant, il ne peut connaître la diagonale d'un rectangle de longueur et de largeur données qu'au moyen d'un dessin bien fait, et encore approximativement (ce n'est déjà pas si mal !).

Après, il est en mesure de *calculer* la longueur de cette diagonale avec toute la précision qu'il veut (et c'est encore mieux !).

Seulement, voilà : *le théorème de Pythagore n'est pas évident*. Si "démontrer" veut dire "rendre évidente une chose qui ne l'est pas", alors voilà l'exemple type d'un énoncé nécessitant démonstration .

Dans un recueil de fiches bien connu, à l'usage des élèves de troisième, on présente deux dessins comportant des points donnés par leurs couples de coordonnées relativement à un repère (O, I, J) :

$$B\,(3\,;4) \qquad C\,(3\,;-4) \qquad D\,(0\,;3) \qquad E\,(4\,;0)$$

Les deux dessins diffèrent en ce que, sur le premier, OI et OJ sont deux segments perpendiculaires et de même longueur, alors que sur le second, les segments OI et OJ ne sont pas perpendiculaires, quoiqu'ils aient encore même longueur (ils auraient pu être de longueurs différentes ...). On demande alors à l'élève de constater sur le dessin n° 1 que si on associe à chaque vecteur le radical de la somme des carrés de ses composantes, on obtient ainsi la distance des points d'un couple qui le représente ; on lui demande de constater en outre que cela n'est pas vrai sur le dessin n° 2. Ensuite de quoi, on érige en Axiome l'énoncé suivant :

"$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère *orthonormé* du plan.
A et B étant deux points quelconques du plan,
X et Y étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j})$,

$$d\,(A,B) = \sqrt{X^2 + Y^2}\ ."$$

Sept fiches plus loin, après avoir entre-temps introduit le produit scalaire, l'auteur énonce et "démontre" le Théorème de Pythagore, énoncé cette fois-ci dans sa forme classique (*).

(*) C'est-à-dire qu'il "démontre" un énoncé *exactement équivalent* à celui qu'il a pris précédemment pour axiome. Le raisonnement déductif, ainsi présenté, n'apparaît alors que comme l'art de manier du vent !

Une telle présentation n'est à mon avis qu'une *caricature* de raisonnement démonstratif. Elle ne rattache pas un fait nouveau à des faits précédemment connus par les élèves qui se demanderont toujours qui a eu le premier l'idée (et comment ?) d'extraire la racine carrée de la somme des carrés des composantes. Cela tient vraiment de la magie, de la révélation, du droit divin ...

D'autant plus que le seul exemple donné pour motiver le fameux axiome est celui du triangle 3 ; 4 ; 5 . Or on aurait aussi bien pu énoncer, sur ce *seul* exemple :

> "$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
> A et B étant deux points quelconques du plan,
> X et Y étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j})$,
> $$d(A,B) = |XY| - |X| - |Y| \text{ ."}$$

En effet, $5 = 3 \times 4 - 3 - 4$.

L'"axiome de la différence du produit et de la somme" n'est-il pas aussi "évident" que celui "du radical de la somme des carrés" ?

Bien sûr, les Babyloniens ne connaissaient pas de démonstration du théorème de Pythagore, et il a fallu attendre Euclide pour voir établie la proposition selon laquelle

> "le carré [construit] sur le côté opposé à l'angle droit est égal [à la somme des] aux carrés [construits] sur les côtés qui contiennent l'angle droit".

Chez Euclide, par "carré", il faut entendre "aire du carré" et la démonstration qu'il donne consiste effectivement à découper le carré construit sur l'hypoténuse et les carrés construits sur les côtés de l'angle droit en triangles dont on montre qu'ils sont équivalents (i.e. qu'ils ont même aire) à certains autres dont la mise en évidence révèle surtout l'astuce du grand géomètre : ces triangles qui vont par paires de triangles isométriques ont chacun un angle *obtus* et, pour y penser, il fallait certes s'appeler Euclide ...

Bref, la démonstration d'Euclide n'apporterait peut-être pas grand chose à nos élèves mais elle a au moins le mérite, sur la pseudo-démonstration précédemment citée, de rattacher un énoncé non évident à des connaissances antérieures : celles relatives à l'aire d'un triangle.

Bien sûr, on objectera que, de nos jours, les connaissances des élèves sur les aires sont mal assurées et qu'on ne peut les prendre pour base d'un raisonnement déductif. Voire ! Je réponds que cette objection n'est qu'un mauvais motif et qu'il y a là une occasion pour rendre *opératoires* les connaissances sur les aires. D'autre part, il y a des démonstrations plus simples que celle d'Euclide, et on peut présenter les choses progressivement (donc assez tôt, comme le souhaite André Revuz). Voici un exemple de telle présentation.

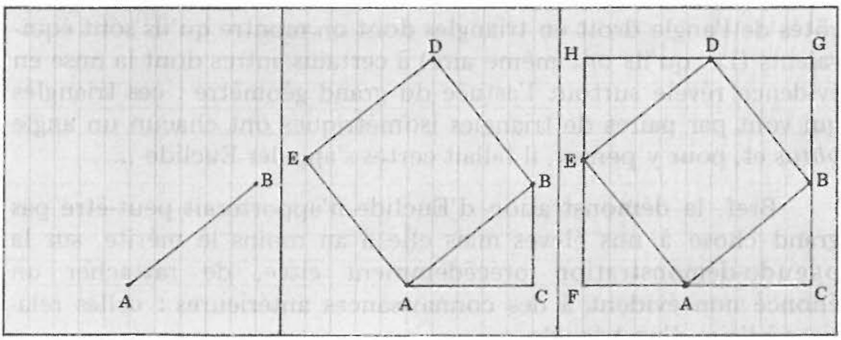
Les élèves ont à leur disposition du papier quadrillé. Le papier millimétré est bien connu, mais le papier 5×5 est sans doute aussi intéressant dans son emploi.

Voici donc deux points A et B marqués sur un quadrillage. Pour les repérer l'un par rapport à l'autre, nous dirons simplement que B est à 5 carreaux à droite et à 4 carreaux au-dessus de A. La question est de connaître la longueur du segment AB. Ce n'est pas facile ! Transformons-la un peu. Ne peut-on pas connaître l'aire du carré dont le côté est AB ? Au moins peut-on construire ce carré. Comment sont situés ses sommets autres que A et B ? Pour les curieux qui voudraient voir démontré que ABDE est vraiment un carré, signalons qu'il est invariant par l'un des quarts de tour conservant le carré CGHF.

L'aire de ce dernier carré est facile à connaître : c'est $9 \times 9 = 81$. Pour trouver celle de ABDE, il suffit d'enlever l'aire des quatre triangles ABC, BGD, DHE, EFA ; soit l'aire de deux rectangles 4×5. D'où :

$$\text{aire (ABDE)} = 81 - 2 \times (4 \times 5) = 41 .$$

La mesure de AB est donc le nombre dont le carré est 41.



Notons au passage que c'est seulement à la suite de telles activités que la notation $\sqrt{41}$ et la recherche d'encadrements de ce nombre sont motivées (sans qu'il soit besoin de construire le "corps des réels" dont on oublie trop souvent l'origine du nom — ce sont tout simplement les nombres qui nous sont imposés par la réalité !).

Quelques exercices du même genre, *avec des données numériques*, font manipuler les idées qui, une fois mises en forme, donneront une *véritable démonstration* (*).

Soit ABC un triangle rectangle dont on connaît les côtés de l'angle droit AC et BC (les mesures de ces longueurs seront désignées par AC et BC). A partir de ce triangle, on peut reconstituer les carrés CGHF et ABDE. Alors :

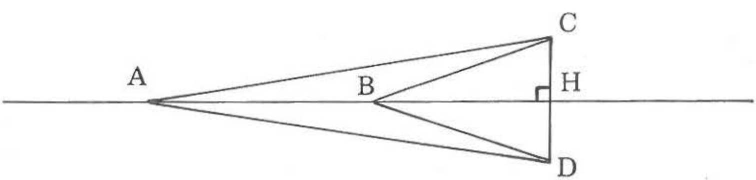
$$\begin{aligned} \text{aire (ABDE)} &= (AC + BC)^2 - 2\,AC \times BC \\ AB^2 &= AC^2 + 2\,AC \times BC + BC^2 - 2\,AC \times BC \\ AB^2 &= AC^2 + BC^2 . \end{aligned}$$

Et, au passage, on *utilise* $(a + b)^2$ autrement que dans un exercice dont le seul but est de *faire utiliser* (sic !) $(a + b)^2$.

Comme application du Théorème de Pythagore, donnons la réponse à une question posée au paragraphe 1 :

> Les centres de deux cercles sont distants de 3 cm. Le rayon du premier est 5 cm, celui du deuxième est 7,95 cm (il devrait être 8 cm, mais le dessinateur s'est trompé d'un demi-millimètre). A quelle distance de la droite des centres se trouve chacun des points communs ?

Désignons par y cette distance, par x la distance BH, H désignant le milieu des deux points C et D, communs aux deux cercles de centres respectifs A et B.



(*) Au sens, indiqué ci-dessus, où "démontrer" signifie "rendre évidente une chose qui ne l'est pas" ou encore "rattacher un fait nouveau à des connaissances antérieures".

Les triangles AHC et BHC étant restangles en H (la *perpendicularité* des droites AB et CD est une vieille connaissance : elle date du paragraphe 4.1. !), on peut leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$(3 + x)^2 + y^2 = 7{,}95^2$$
$$x^2 + y^2 = 5^2$$

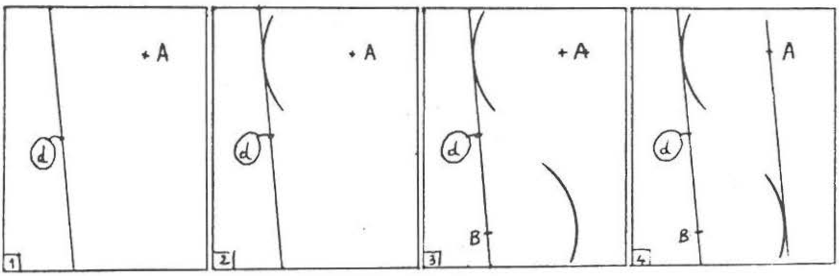
Un calcul facile donne alors :

$$6\,x = 7{,}95^2 - 34$$
$$x \approx 4{,}867$$
$$\text{d'où} \quad y \approx 1{,}145$$

Ainsi, une erreur "minime" de 0,5 mm se trouve amplifiée par le dessin en un écart de plus de 2 cm entre les points C et D qui eussent dû être confondus si le dessinateur ne s'était pas trompé !

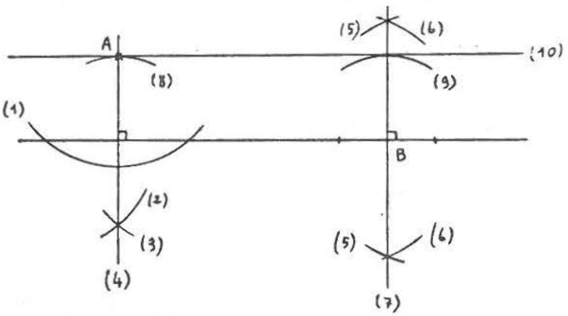
Ce rôle d'*amplificateur d'erreur* joué par le dessin présente un intérêt pratique dans certains tracés, utilisés notamment par les chaudronniers. Par exemple, pour tracer par un point donné A la parallèle à une droite donnée d , ils utilisent le procédé suivant que nombre de professeurs de mathématiques jugent proprement abominable :

> ils piquent leur compas sur A et tracent le cercle de centre A tangent à la droite d ; puis, sans changer l'ouverture du compas, ils le piquent en un point B de d , le plus loin possible du point de contact du cercle et de la droite, et tracent le cercle de centre B (et de même rayon que le précédent) ; enfin, ils tracent à l'aide d'un réglet et d'une pointe traçante "la" tangente (*) du point A à ce dernier cercle.



(*) Les guillemets sont mis pour faire plaisir aux rigoristes qui feront remarquer qu'il existe *deux* tangentes de A au cercle de centre B. On ne m'a jamais signalé le cas d'un chaudronnier qui se serait trompé de tangente !

J'entends d'ici les cris d'horreur de certains : "Mais les points de contact *ne sont pas déterminés* ! On n'a *pas le droit* d'opérer ainsi ! ". Voilà les grands mots lâchés. Mais regardons-y de plus près. Pour le but poursuivi, c'est-à-dire le tracé d'une droite dont tous les points sont à la même distance de d que le point A, la "détermination" du point de contact n'est pas essentielle ; par contre une grande précision dans le report des distances est requise. Or, que se passe-t-il s'il y a erreur : ou bien il y a un "jour" entre le cercle et la droite qui devrait lui être tangente et ce "jour" est facile à détecter, donc à éviter, ou bien le cercle "mord" sur la droite, mais alors la profondeur de cette "morsure" est considérablement amplifiée par sa largeur et, là encore, l'erreur est détectable, donc évitable. En fait, il y a encore deux causes d'erreurs : le compas est-il bien piqué au point A d'abord puis en un point B de la droite d ensuite (et non pas un peu à côté) ? Mais ces deux dernières causes d'erreurs ne sont pas propres à ce type de tracé et interviennent dans tout autre. Par exemple, dans celui que résume le dessin suivant où la chronologie est indiquée par des numéros croissants dans l'ordre des opérations à effectuer. Le plus grand numéro est 10 : c'est précisément le nombre de sources d'erreurs dans un tracé jugé plus correct que le précédent par beaucoup de lecteurs de cet article (et qui n'en comporte que 4).



Au lieu de vitupérer un procédé pratique qui corrige lui-même les erreurs de l'opérateur, ne serait-il pas plus sage de l'accepter comme donné (humblement !) et d'expliquer mathématiquement (ici au moyen du théorème de Pythagore) pourquoi ce procédé est bon ? Bien sûr, une telle attitude suppose une certaine *ouverture* d'idées ; elle suppose aussi que le professeur aura le *temps* de se livrer, dans sa classe, à des *ouvertures* sur des situations non proprement mathématiques et de montrer ainsi que la mathématique peut servir ... ailleurs qu'en mathématiques. Quand cessera-t-on de ne mathématiser rien d'autre que la mathématique ? C'est en cela, en effet, que consiste l'axiomatisation et nos élèves en sont bien loin : qu'on les mette d'abord en condition de mathématiser la réalité !

4.4. LES VECTEURS

Le principal intérêt des vecteurs, c'est que leur ensemble est structuré de manière telle que l'on peut calculer sur eux *presque* comme sur les nombres. C'est d'ailleurs, en gros, ce qui constitue la *définition* des espaces vectoriels.

Cette structure est tellement simple pour qui la connaît que celui-ci se pose aussitôt la question "mais pourquoi ne pas y avoir pensé plus tôt ? pourquoi n'est-ce pas Euclide l'inventeur des vecteurs ? ". Bien sûr, j'exagère : nos élèves de troisième connaissent les vecteurs mais ignorent les oeuvres d'Euclide et ne peuvent donc pas se poser une telle question. Ou, plutôt, ils connaissent une espèce de mélange dans lequel la notion de vecteur est fondée sur celle de parallélisme de droites (voir les fameux "axiomes d'incidence" de l'actuel programme et les "propriétés d'incidence", qui leur sont identiques, de l'avant-projet du 12 février 1977), lesquelles droites seront définies plus tard (sic) au moyen des vecteurs ! La vicieuse circularité d'une telle présentation compromet sûrement toute possibilité ultérieure de vue d'ensemble et de jugement sain sur la géométrie et sur son évolution historique. A ce sujet, il serait intéressant que l'avant-projet soit soumis, pour critique, à quelques groupes de recherche ayant pour préoccupation l'épistémologie.

Que le grand Euclide (et nombre de ses successeurs) n'ait pas pensé aux vecteurs, cela montre que ceux-ci ne sont pas si naturels qu'on veut bien le dire.

Admettons qu'à la suite de nombreuses activités expérimentales, les élèves finissent par admettre que l'espace est un ensemble de points (*). Peut-on définir "naturellement" dans cet ensemble une loi de composition qui en fasse un groupe ? La réponse est *non* parce que, dans tout groupe, il y a un élément qui joue un rôle spécial, c'est l'élément neutre, alors que dans l'espace, tout point

(*) Cette hypothèse suppose, bien sûr, que la première leçon de géométrie de sixième ne commence pas ainsi : "L'espace est un ensemble de points" comme je l'ai encore malheureusement constaté récemment dans certains des "nouveaux" manuels plus ou moins allégés que nos élèves auront désormais "gratuitement" sous les yeux.

joue le même rôle que tout autre. L'espace est *homogène*. Y définir une structure de groupe détruit *ipso facto* cette homogénéité en forçant à distinguer un point particulier : l'*origine* de l'espace.

Les ensembles numériques sont "naturellement" pourvus de cet élément particulier : 0 pour la structure ($\mathbf{R}$, +) et 1 pour la structure ($\mathbf{R}_*$, $\times$) qui sont des groupes. Mais l'espace n'est pas pourvu "naturellement" d'une origine, il faut la créer de toutes pièces (et, au besoin, en changer) *artificiellement*.

Une autre manière de procéder consiste à fabriquer de toutes pièces un groupe qui opèrera sur l'ensemble des points de l'espace. Ce groupe est celui des *translations*. Mais là encore, il y a *création artificielle* et c'est sans doute dans le fait que la structure de groupe ne peut être introduite en géométrie que d'une façon *artificielle* qu'il faut voir la cause de l'apparition tardive des vecteurs.

Mais, préalablement à cette construction (et nous sommes bien ici dans le cas d'une *construction* nécessaire puisque l'espace n'est pas muni *naturellement* d'une structure de groupe), ne serait-il pas bon de sensibiliser les élèves à l'étude d'une *loi de composition* dans l'espace ? Cette loi serait une loi *naturelle*, et il ne faut pas chercher bien loin pour en trouver une : c'est la loi qui à tout couple de points associe le *milieu* de ces points.

Il va sans dire qu'*on ne définira pas* le milieu de deux points, attendu que les enfants savent parfaitement ce que c'est. Par contre, la recherche de procédés permettant de marquer le milieu de deux points est instructive, de même que ceux qui permettent de marquer le symétrique d'un point autour d'un autre. Ces procédés mettent tous plus ou moins en oeuvre les notions de *segment de droite* et de *distance*. Je crois que cela ne suffit pas pour faire dépendre la notion de milieu de celles de *droite* et de *parallélisme* (au sens où deux droites parallèles sont deux droites non sécantes d'un même plan) comme le suggèrent les propriétés M_2 et M_4 de l'avant-projet de programme du 12 février 1977.

Mon idée est de fonder les vecteurs sur le milieu. Faire dépendre celui-ci de la *droite* et du *parallélisme* pour, plus tard, définir (sic !) ces notions vectoriellement serait tomber dans le cercle vicieux ci-dessus dénoncé. Et je n'en ai pas l'intention. Aussi ai-je inventé (*) un instrument que tout élève peut construire (presque) gratuitement en quelques minutes de la manière suivante :

(*) Invention non brevetée et non commercialisable.
Toute reproduction largement autorisée !

- à partir d'un point situé au bord d'une feuille blanche, tracer à main levée une ligne (pas trop tordue) ;
- "graduer" grossièrement cette ligne, à main levée encore, en traçant des traits transversaux qu'on numérote 1, 2, 3, ... des deux côtés de la ligne, à partir du bord de la feuille ; chaque trait porte le même numéro au-dessus et au-dessous de la ligne, les chiffres étant placés tête-bêche ;
- "affiner" cette "graduation" en marquant des traits transversaux plus courts dans les intervalles déterminés précédemment ;
- découper la feuille en suivant la ligne tracée au début ;
- coller *bord à bord* les deux parties de la feuille de manière que la ligne "graduée" ainsi obtenue ne présente aucune discontinuité ;
- marquer 0 au point de jonction des deux parties de la "ligne graduée".

A cause de sa forme, cet instrument est appelé "moustache". C'est ainsi que mes élèves l'ont baptisé lorsque je le leur présentai pour la première fois en 1966 au Lycée Municipal Mixte de Charlieu (Loire).

Son mode d'emploi est absolument évident et les plus exigeants ne manquent pas d'être étonnés de la précision des résultats obtenus, précision remarquable devant l'apparente grossièreté de la fabrication de l'instrument. Cette précision est due au fait que le marquage du milieu de deux points à la moustache nécessite *une seule* opération, alors qu'il en faut *quatre* si on construit le milieu par la médiatrice.

Le milieu étant ainsi "désolidarisé" de la droite et de la distance, pour ne plus être que le point donné par la moustache, la question de la découverte de ses propriétés fondamentales n'est pas dépourvue d'intérêt, ne serait-ce que par le biais de la "vérification" de la moustache.

On arrive ainsi aux cinq énoncés suivants qui, issus de l'expérience et servant plus tard à démontrer d'autres propriétés, sont dignes de s'appeler *axiomes* (ce n'est qu'après avoir donné quelques exemples de démonstrations basées sur eux qu'on les appellera ainsi) :

M 1 Pour tout couple de points (A,B), il y a un point M et un seul qui est leur milieu. On note $M = A * B$.

M 2 Quel que soit le point A, $A * A = A$.

M 3 Quels que soient les points A et B, $A * B = B * A$.

M 4 Quels que soient les points A et M, il y a un point B et un seul tel que $A * B = M$. B est le symétrique de A autour de M.

M 5 Quels que soient les points A,B,C,D,
$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D)$.

Les quatre premiers axiomes sont immédiats, le cinquième nécessite une petite mise en scène qu'on peut proposer sous forme du petit problème suivant :

Marquer quatre points A,B,C,D et choisir deux de ces points. Marquer le milieu de ces deux points puis le milieu des deux autres et, enfin, le milieu des deux milieux. Recommencer en choisissant différemment les deux premiers points. Qu'observe-t-on ?

Le résultat est d'ailleurs valable si les quatre points A,B,C,D ne sont pas situés dans le même plan, et il y a là un thème intéressant de travaux manuels.

A partir du moment où on fera des démonstrations, certains seront tentés de prouver M 5 à partir des quatre autres axiomes car il n'est pas aussi évident que ces derniers. Pour couper court à ces tentatives, on peut exhiber le modèle fini ci-après dans lequel l'ensemble $\{A,B,C,D,E,F,G\}$, contenant sept éléments, est muni de la loi de composition donnée par la table ci-dessous.

*	A	B	C	D	E	F	G
A	A	C	B	F	G	D	E
B	C	B	A	E	D	G	F
C	B	A	C	G	F	E	D
D	F	E	G	D	B	A	C
E	G	D	F	B	E	C	A
F	D	G	E	A	C	F	B
G	E	F	D	C	A	B	G

Il est immédiat de contrôler que les axiomes M 1 M 2 M 3 M 4 sont vérifiés par cette loi. Par contre M 5 ne l'est pas. En effet :

$$(A * B) * (D * G) = C * C = C$$
$$(A * D) * (B * G) = F * F = F$$

donc

$$(A * B) * (D * G) \neq (A * D) * (B * G)$$

Cela prouve que l'axiome M 5 n'est pas déductible des quatre autres : il en est *indépendant.*

Pour en finir avec ces questions qui touchent à un niveau théorique assez élevé, on peut se demander si les axiomes M 1 , M 2 , M 3 , M 4 , M 5 ne sont pas mutuellement *contradictoires.* L'existence du modèle $\{A,B,C\}$ muni de la loi donnée par la table ci-contre montre que ces axiomes forment un système *consistant* : M 1 M 2 M 3 M 4 sont immédiatement contrôlables ; pour ce qui est de M 5 , il suffit de contrôler l'égalité

*	A	B	C
A	A	C	B
B	C	B	A
C	B	A	C

$$(A * A) * (B * C) = (A * B) * (A * C)$$

compte tenu du fait que A,B,C jouent le même rôle et de la commutativité de la loi * ; on trouve A = A.

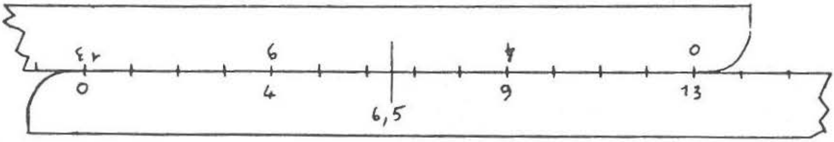
La loi-milieu est à l'espace ce que la moyenne arithmétique est à $\mathbb{R}$ ou la moyenne géométrique à $\mathbb{R}_*^+$. Ces trois lois de composition vérifient les cinq axiomes précédents. Mais, généralement, la moyenne arithmétique des réels est définie à partir de l'addition et la moyenne géométrique à partir de la multiplication. Renversant cette situation, on peut se demander s'il n'est pas possible de "définir" l'addition des réels à partir de la moyenne arithmétique et la multiplication des réels strictement positifs à partir de la moyenne géométrique.

Pour farfelue que puisse paraître cette question, il n'en reste pas moins vrai que c'est à un problème de ce type qu'on est confronté pour définir une *loi de groupe* dans l'espace.

Appelons "symétriques autour de c" deux réels a et b dont la moyenne arithmétique (resp. géométrique) est c . Ainsi, 4 et 9 sont symétriques autour de 6,5 (resp. 6). *La somme* (resp. le produit) *de deux réels* (resp. strictement positifs) peut être définie *comme le symétrique de 0* (resp . 1) *autour de leur moyenne arithmétique* (resp. géométrique).

Cela peut être concrétisé par des manipulations telles que celle-ci :

Prenons deux règles graduées et plaçons-les de manière que, par exemple, le 4 de l'une coïncide avec le 9 de l'autre *et réciproquement* (cela nécessite le pivotement de l'une des règles) ; quel est le point marqué par le même réel sur l'une et l'autre règle et quel est ce réel ? (le point est le *milieu* des points marqués 4 et 9 et le réel est la *moyenne arithmétique* de 4 et 9) ; comment est marqué sur l'une des règles le point marqué 0 sur l'autre ? (il est marqué 13, c'est-à-dire 4 + 9).



Le fait que pour passer d'une règle à l'autre il soit nécessaire d'effectuer un *demi-tour* autour du point marqué 6,5 montre clairement que 9 + 4 est le symétrique de 0 autour de la moyenne arithmétique de 9 et 4. Remarquons qu'une graduation *logarithmique* de la règle mène à une représentation analogue de la multiplication (pour une telle graduation, il suffit, par exemple, de marquer 1, 2, 4, 8, 16, ... les points naguère marqués 0, 1, 2, 3, 4, ... respectivement ; une telle graduation serait d'ailleurs plus justement appelée *exponentielle*).

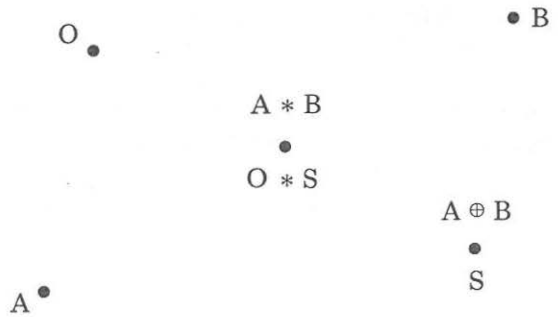
Dès lors, il est loisible de définir dans l'espace une loi de groupe :

1°) On fait choix d'une origine O, *une fois pour toutes* (je ne sache pas qu'il eût été jamais question de "changement de zéro" dans **R** !).

2°) La somme (d'origine O) de deux points est le symétrique de l'origine autour de leur milieu.

Notons $A \oplus B$ la somme (d'origine O) des deux points A et B (vous remarquez que le signe $\oplus$ rappelle + (addition) et O (origine choisie)). La définition se traduit donc ainsi :

$$\boxed{A \oplus B = S \quad \text{signifie} \quad A * B = O * S}$$



On reconnaît alors une configuration bien connue : le quadrilatère O B S A est un parallélogramme.

Ainsi définie, *l'addition d'origine* O est bien une loi de groupe dans l'espace. D'abord il est bien évident, d'après les axiomes M 1 et M 4, que, quels que soient A et B, $A \oplus B$ désigne un point et un seul. Ensuite, il est immédiat que O est neutre pour cette loi et que tout point admet pour elle un point symétrique. La commutativité ne fait aucun doute ; il ne reste plus qu'à établir l'associativité. Celle-ci donne lieu à un joli dessin. Soit donc trois points A,B,C et soit $S = A \oplus B$, $T = S \oplus C$, $U = B \oplus C$, $V = A \oplus U$. Pour tenter de démontrer l'associativité de la loi $\oplus$, on ne peut guère qu'appliquer M 5 aux quatre points donnés O,A,B,C. Voici ce que cela donne :

$$(O * A) * (B * C) = (O * C) * (A * B)$$
$$(O * A) * (O * U) = (O * C) * (O * S)$$
$$(O * O) * (A * U) = (O * O) * (C * S)$$
$$A * U = C * S$$
$$O * V = O * T$$
$$V = T$$

(la justification de chaque étape est laissée au lecteur).

Or, $V = A \oplus U = A \oplus (B \oplus C)$ et $T = S \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$

donc, quels que soient les points A,B,C, on a bien démontré

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

c'est-à-dire qu'on a bien établi l'associativité de l'addition d'origine O.

Ainsi se trouve construite dans l'espace une loi de groupe à partir d'une loi "homogène" (i.e. pour laquelle aucun élément ne joue un rôle privilégié), à savoir la loi-milieu. Remarquez que cette loi homogène *n'est pas associative*, contrairement à la loi de groupe. Or, vous savez que l'associativité est à la base de tous les calculs classiques ; les raisonnements algébriques qui ne la mettent pas en jeu, au moins implicitement, sont assez rares.

Ce qui précède montre qu'on aurait pu construire une autre algèbre que celle dans laquelle l'associativité exerce son impérialisme, la propriété tenant lieu d'associativité étant celle qui est exprimée par l'axiome M 5.

Mais nous voici nettement au-dessus du niveau du premier cycle, quoique à propos de choses très simples regardées assez simplement. Revenons à nos vecteurs.

Pour munir un ensemble d'une structure vectorielle, il faut définir sur celui-ci une loi de *groupe* (voilà qui est fait et *nos vecteurs sont les points de l'espace*) et aussi une *loi externe* dont l'ensemble d'opérateurs est pourvu d'une structure de *corps*. Si l'ensemble d'opérateurs est seulement muni d'une structure d'*anneau*, alors l'espace considéré est muni d'une structure plus générale : celle de *module*.

Or, dans le cas présent, il va nous être facile de munir l'ensemble des points de l'espace d'une structure de module sur l'anneau des nombres *dyadiques* dont l'ensemble sera ici désigné par D. Il n'est pas question, dans cet exposé, de *fonder en détail* la théorie de ce D - module. Tout au plus l'amorcerai-je par la définition de la multiplication (d'origine O) des points par les nombres dyadiques. Cette multiplication sera symbolisée par $\otimes$. Le produit (d'origine O) par le nombre dyadique α du point A est un point désigné par $\alpha \otimes A$.

On commence par poser, *par définition* :

$0 \otimes A = O$ (*) ; $1 \otimes A = A$; $2 \otimes A = A \oplus A$;
$3 \otimes A = A \oplus A \oplus A$; ...

et, pour tout naturel n , $n \otimes A$ est la somme (d'origine O) contenant n termes dont chacun est A.
Ensuite, on pose que $(-1) \otimes A$ est le point symétrique de A pour la loi $\oplus$; on note $-A$ ce point.
Enfin, puisque l'équation d'inconnue X :

$$X \oplus X = A$$

(*) Lire : "Zéro $\otimes A$ = origine de l'espace". Il est remarquable que le zéro des nombres et l'origine de l'espace soient couramment désignés par des symboles de même forme sans que la confusion qui en résulte produise d'autres fautes.

qui équivaut à $2 \otimes X = A$ ou encore à $X * X = O * A$ a une solution et une seule (à savoir $O * A$), on pose, par définition, que $\frac{1}{2} \otimes A$ est cette solution, si bien que (par analogie avec ce qui se passe pour les nombres)

$$\frac{1}{2} \otimes A = X \qquad \text{équivaut à} \qquad A = 2 \otimes X\,.$$

On arrive ainsi à définir le produit par $\frac{5}{2}, -\frac{9}{16}, \ldots, \frac{n}{2^p}$ (d'origine O) d'un point quelconque ($n \in \mathbf{Z}$, $p \in \mathbf{N}$).

La *démonstration* de ce que la loi externe ainsi définie définit bien sur l'espace une structure de Z-module utilise la récurrence et il n'est pas question de l'imposer à nos élèves du premier cycle.

Plus intéressant est de leur faire observer sur de nombreux exemples que si on connaît les points $\alpha \otimes A$ et $\beta \otimes A$, le point $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \otimes A$ s'obtient en marquant leur milieu : la correspondance moyenne $\longleftrightarrow$ milieu se trouve ainsi consolidée. Il est aussi intéressant de leur faire construire, à partir de deux points donnés A et B, des points M tels que

$$M = (1 - \alpha) \otimes A \oplus \alpha \otimes B$$

et de leur faire observer la position mutuelle de ces points. Pour cela, on choisit d dyadique et toutes les constructions se font à la moustache. Le résultat est assez surprenant.

Voilà donc construite la structure de D-module. Comment parvenir, à partir de là, à la structure de R-vectoriel ? Autrement dit, comment définir le produit (d'origine O) d'un point par un réel ?

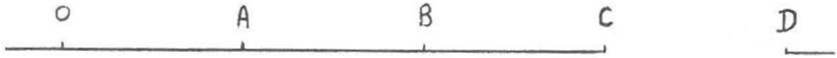
Même dans le premier cycle, on peut donner aux élèves une idée de cette définition. Cette idée sera du même ordre que celle qu'ils ont des réels :

un réel, c'est un nombre qu'on peut encadrer par des dyadiques (ou, ce qui est équivalent, par des décimaux).

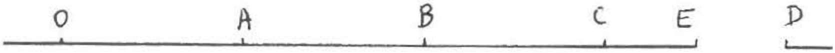
Remarquons tout de suite que certains décimaux (3,7 par exemple) *ne sont pas* dyadiques et ne peuvent être qu'approchés par une suite illimitée de dyadiques.

Posons donc le problème de trouver le produit (d'origine O) du point A par le réel 3,7, A étant un point donné.

Sur le dessin, on a marqué les points O, A, puis B = 2 ⊗ A, C = 3 ⊗ A, D = 4 ⊗ A. Comme 3,7 est compris *entre* 3 et 4, on va chercher le point 3,7 ⊗ A *entre* les points C et D. Pour porter sur le dessin la suite des opérations, nous allons utiliser la convention suivante : nous marquons au crayon, sur les cahiers, ou à la craie, au tableau, l'ensemble des points où n'est sûrement pas le point 3,7 ⊗ A, en nous limitant aux points alignés avec O et A (*).



Continuons : 3,7 est compris entre 3,5 et 4, donc 3,7 ⊗ A est entre les points D et E, E étant le point 3,5 ⊗ A :



L'étau se resserre ! Ses mâchoires sont deux fois moins éloignées que précédemment.
Continuons. A cet effet, on calcule à chaque étape la *moyenne* des bornes du précédent encadrement et on compare 3,7 à cette moyenne ; puis on trace le segment sur lequel le point 3,7 ⊗ A n'est sûrement pas. Cela donne lieu à un exercice de calcul numérique et de *disposition* de ce calcul numérique. Autant dire que c'est un véritable exercice de *programmation*.

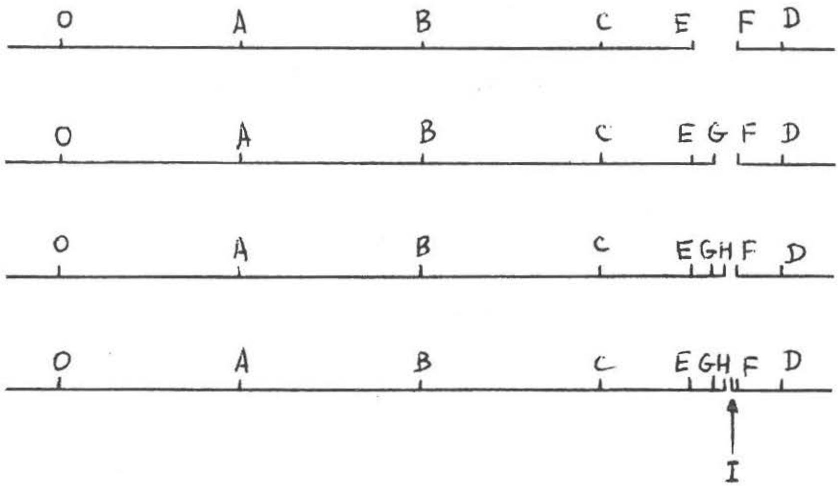
Voici les calculs et, plus loin, "les" dessins (les guillemets indiquent qu'en réalité il y a *un seul* dessin, construit par étapes mais il fallait bien le répéter chaque fois pour en montrer l'évolution). Le calcul est mené simultanément avec le tracé du dessin, jusqu'à ce que celui-ci ne permette plus de marquer de point nouveau, faute de visibilité.

$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$	$3 \leqslant 3{,}7 \leqslant 4$	Points C et D

(*) Pour le moment, "3,7 ⊗A est sur le segment C D" n'est qu'un *pari*. La suite des opérations justifiera ce pari : les dessins suivants sont assez éloquents.

m 3,5 + 4 7,5	$3{,}5 \leqslant 3{,}7 \leqslant 4$	Point E = C * D
m 3,75 + 3,5 7,25	$3{,}5 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point F = E * D
m 3,625 + 3,75 7,375	$3{,}625 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point G = E * F
m 3,6875 + 3,75 7,4375	$3{,}6875 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}75$	Point H = G * F
m 3,71875	$3{,}6875 \leqslant 3{,}7 \leqslant 3{,}71875$	Point I = H * F

(la lettre m indique que l'on prend la *moitié* du nombre précédent).



Lorsqu'on décide d'arrêter le dessin commence la discussion.

Le point $3{,}7 \otimes A$ semble bien être *coincé* entre H et I : la longueur du segment H I ne dépasse guère l'épaisseur d'un trait. *Mais* les calculs peuvent être poursuivis sans fin puisque 3,7 n'est pas un dyadique. Et le point $3{,}7 \otimes A$ n'est pas plus *coincé* entre H et I qu'il ne l'était entre E et F ! Certains élèves, ne s'avouant pas vaincus, vont même jusqu'à faire un *agrandissement* du segment

H I , sur toute la largeur de la feuille et recommencent ainsi trois ou quatre fois.

Les deux conclusions de la discussion sont :

1°) Par ce procédé, jamais le point $3{,}7 \otimes A$ ne sera *mathématiquement* atteint.

2°) Mais ce procédé permet d'*approcher* le point $3{,}7 \otimes A$ d'aussi près que l'on veut. On se déclare *matériellement* satisfait dès qu'il est approché de moins que l'épaisseur d'un trait.

Le procédé que je viens de décrire vaut aussi bien pour un réel non décimal, tel que π ou $\sqrt{2}$. Or, j'ai très rarement vu expliquer comment on multiplie un vecteur par un réel autrement que par des phrases du genre : "on mesure le segment OA et on multiplie sa longueur par 3,14".

En fait, je tiens pour indispensables des exercices du type ci-dessus si on veut faire *toucher du doigt* ce qu'est un *nombre réel*, sous ses *deux aspects* :

comment le mathématicien le définit,
comment le physicien l'utilise.

De plus, le concept de *droite* se trouve mathématiquement éclairé : si $A \neq O$, si $M = x \otimes A$ et si le réel x est encadré par les dyadiques n et p, alors le point M est sur le segment dont les extrémités sont les points $n \otimes A$ et $p \otimes A$.

Réciproquement, soit M un point de la droite OA. En construisant les points P_n tels que $P_n = n \otimes A$ $(n \in Z)$, on arrive à trouver deux entiers k et $k + 1$ tels que M soit sur le segment $P_k P_{k+1}$. C'est l'*axiome d'Archimède* qui l'affirme. Soit Q le milieu de ce segment ; alors M est sur l'un des segments $P_k Q$ ou $Q P_{k+1}$ (sur les deux si $M = Q$). En prenant le milieu du segment sur lequel M se trouve, on arrive à le *coincer* de plus en plus près, donc on détermine ainsi, par encadrements dyadiques de plus en plus serrés, un réel x tel que $M = x \otimes A$.

Au contraire, un point K situé hors de la droite OA ne peut être approché de cette façon car la distance de K à un "point dyadique" (ni même à un "point tout court") de la droite OA ne peut descendre en dessous d'une certaine limite.

Il importe de souligner que ce sont les *propriétés topologiques* de l'espace, sous leur aspect métrique, qui interviennent ici explicitement. Or ces propriétés sont actuellement négligées par les programmes. Je ne dis pas qu'il faut en faire la théorie dans le premier cycle, mais il convient de ne pas les laisser dans l'ombre, et encore moins de les cacher (honteusement !) lorsqu'elles se présentent à nous.

Mais là encore, il faut en avoir le temps ...

De toute façon, ayons clairement conscience que l'introduction de l'ensemble des réels en géométrie y provoque *ipso facto* l'irruption de sa structure topologique aussi bien que de sa structure algébrique. En ce sens, l'actuelle "*séparation affine-métrique*", perpétuée par l'*avant-projet du 12 février 1977*, constitue une véritable escroquerie.

La *droite* OA étant ainsi définie comme l'ensemble des points M pour chacun desquels il y a un réel x tel que

$$M = x \otimes A ,$$

voyons comment le *plan* peut être approché.

O, I, J sont trois points non alignés (nul besoin d'imposer aux élèves l'énoncé d'un axiome pour les persuader de l'existence de tels points).

Traçons les droites OI et OJ. Elles ont en commun le *seul* point O (si elles en avaient un deuxième, soit K, distinct de C, alors chacune d'elles serait identique à la droite OK, comme on peut le *démontrer* à partir de la définition des droites OI, OJ et OK).

Marquons maintenant un point M sur la feuille puis cherchons, à l'aide de la moustache, un point Q sur OI et un point R sur OJ dont M soit le milieu. Dans tous les cas, notre recherche est couronnée de succès. On peut même prouver que si les droites OI et OJ sont perpendiculaires, alors les points Q et R sont sur le cercle de centre M passant par O ; dans ce cas, la distance à O de chacun des points Q et R est inférieure au double de la distance des points O et M.

Nous admettrons le résultat de notre expérience à titre d'axiome :

M 6	Quel que soit le point M du plan passant par les trois points non alignés O, I, J, il y a un point Q sur la droite OI et un point R sur la droite OJ tels que $M = Q * R$.

Chacun des points Q et R est d'ailleurs unique. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on trouverait deux autres points Q' et R' remplissant les mêmes conditions et, par suite, les droites QQ' et RR', qui ne sont autres que OI et OJ respectivement, seraient symétriques autour de M. Or, dans l'étude de la symétrie-point, on aura eu soin de prouver que deux droites symétriques ne peuvent pas être sécantes (ce qui est immédiat), ce qui n'est pas le cas pour les droites OI et OJ.

L'axiome M 6 nous mène tout droit aux notions de *repère* du plan et de *coordonnées* d'un point du plan relativement à un repère.

Soit P un point du plan passant par O, I, J. Marquons le point $M = O * P$ puis les points Q et R, respectivement sur OI et OJ, tels que $M = Q * R$.

Dans ces conditions, $P = Q \oplus R$.
Or il y a un réel x tel que $Q = x \otimes I$ et un réel y tel que $R = y \otimes J$. Il en résulte :

$$P = (x \otimes I) \oplus (y \otimes J) .$$

Pour tout point P du plan passant par les trois points non alignés O, I, J, il y a un couple (x, y) de réels tels que $$P = (x \otimes I) \oplus (y \otimes J)$$

L'unicité du couple de points (Q, R) entraîne celle du couple (x, y).

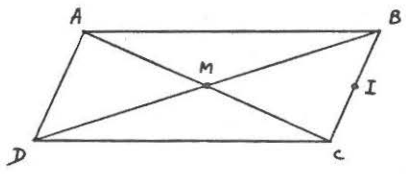
Les coordonnées d'un point sont ainsi obtenues sans référence à la notion de parallélisme au sens où deux droites parallèles sont définies comme deux droites non sécantes contenues dans un même plan. Cette définition *négative* du parallélisme ne peut, pour devenir utilisable, que s'appuyer sur le Postulat d'Euclide, lequel nous demande d'admettre ce qui se passe (ou plutôt ne se passe pas) à l'infini dans le but de démontrer ce qui se passe sous nos yeux. C'est certainement en réaction contre cette attitude quelque peu antiscientifique que des générations de chercheurs se sont échinés sur le problème de la démonstration du fameux Postulat. Une attitude scientifique eût consisté, au contraire, à chercher à prévoir ce qui se passerait hors du champ de nos activités dessinatoires, si toutefois les lois que nous avons découvertes dans les limites de ce champ sont encore valables hors de ces limites. Cette recherche eût incité, à son tour, à imaginer des expériences nouvelles "à grande échelle" qui viendraient confirmer ou infirmer ces lois, et par là, perfectionner notre connaissance de l'espace qui nous entoure. Galilée, Newton et Einstein sont, entre autres, des témoins de cette attitude scientifique.

Je ferme cette "parenthèse philosophique" pour revenir aux coordonnées d'un point.

Il importe de remarquer que le *choix de l'origine joue un rôle considérable dans tout ce qui précède.* En particulier, la définition donnée pour une droite ne vaut que si cette droite passe par l'origine. C'est la rançon de l'instauration de la structure de groupe dans l'espace : les droites n'y jouent plus le même rôle selon qu'elles passent ou non par l'origine. Ce fait est particulièrement gênant si on veut, par exemple. obtenir l'équation d'une droite ; la démonstration qu'on est amenée à faire est beaucoup plus difficile à admettre que le résultat auquel elle mène, qui est relativement simple. Aussi vais-je maintenant exposer le second point de vue auquel il a été fait allusion au début de ce paragraphe ; de ce point de vue, on laisse intact l'espace et on construit un groupe qui y opère : le groupe des *translations.*

Les translations ont déjà été rencontrées au paragraphe 2 comme composées de symétries-points et nul ne s'étonnera de les voir définies à partir du concept de milieu.

Commençons par une étude préalable du parallélogramme, qui est, comme le suggère l'avant-projet du 12 février 1977, un quadrilatère muni d'un centre de symétrie. Soit A B C D ce parallélogramme, M le milieu commun de ses diagonales AC et BD, I le milieu des points B et C.



Désignons par S_M et S_I les symétries de centre M et I respectivement.

$$A \xmapsto{S_M} C \xmapsto{S_I} B$$

$$D \xmapsto{S_M} B \xmapsto{S_I} C$$

Il y a donc une *translation* (i.e. une application composée de deux symétries-points) par laquelle deux sommets consécutifs d'un parallélogramme ont pour images respectives les deux autres sommets, chaque sommet et son image étant consécutifs.

D'une manière imagée, si on dessine deux *flèches* telles que :

les deux points de départ
les deux points d'arrivée
les extrémités de la première
les extrémités de la seconde

soient respectivement deux sommets consécutifs d'un parallélogramme, alors ces deux flèches appartiennent au schéma sagittal d'une même translation.

Une question se pose alors, quoiqu'elle puisse paraître quelque peu artificielle à nos élèves :

Si la flèche $A \longrightarrow B$ représente une même translation qu'une flèche $C \longrightarrow D$ et si la flèche $C \longrightarrow D$ représente une même translation qu'une flèche $E \longrightarrow F$, est-on sûr que la première représente la même translation que la dernière ?

Les axiomes du milieu permettent de le démontrer, et très simplement.

Notons " .... r ...." la relation "... représente une même translation que ...".

Vu ce qui précède,

$$A \longrightarrow B \quad r \quad C \longrightarrow D \quad \text{donc} \quad A*D = C*B$$
$$C \longrightarrow D \quad r \quad E \longrightarrow F \quad \text{donc} \quad C*F = E*D$$

En composant membre à membre, par la loi-milieu, ces égalités, on obtient

$$(A * D) * (C * F) = (C * B) * (E * D)$$

Les points C et D figurent de part et d'autre du signe = mais non les autres points. Regroupons-les dans une même parenthèse, grâce à l'axiome M5 :

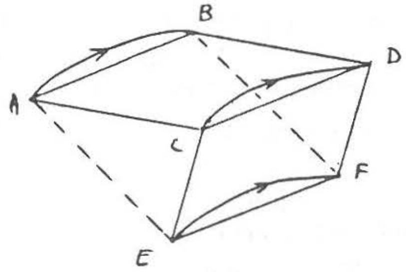
$$(C * D) * (A * F) = (C * D) * (E * B)$$

d'où, d'après M4,

$$A * F = E * B$$

ce qui entraîne

$$A \longrightarrow B \quad r \quad E \longrightarrow F$$



Au passage, on démontre que si deux parallélogrammes ont deux sommets consécutifs communs alors les quatre autres sommets sont les sommets d'un nouveau parallélogramme.

La figure précédente mérite encore notre attention car elle permet de montrer que si les flèches $B \longrightarrow D$ et $A \longrightarrow C$ représentent la même translation et si les flèches $D \longrightarrow F$ et $C \longrightarrow E$ représentent la même translation (distincte ou non de la première), alors $B \longrightarrow F$ et $A \longrightarrow E$ représentent la même translation. Or celle-ci n'est autre que l'application composée des deux premières translations.

Il devient alors très facile de montrer que les translations de l'espace (éventuellement limité au plan) forment un groupe et je n'insisterai pas là-dessus dans cet exposé.

La structure de D - module se définit sur l'ensemble des translations d'une manière analogue à ce qui fut fait naguère pour l'espace. Le gros avantage de la deuxième présentation sur la première c'est que l'on n'est plus tributaire du choix d'une origine ; l'espace garde son homogénéité. De plus, l'addition des translations étant définie comme leur composition, on est en possession de l'inestimable relation

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

dans laquelle $\overrightarrow{AB}$ désigne la translation admettant la flèche $A \longrightarrow B$ dans son schéma sagittal. (*)

Le produit par 2 de la translation $\overrightarrow{AB}$ est évidemment défini par

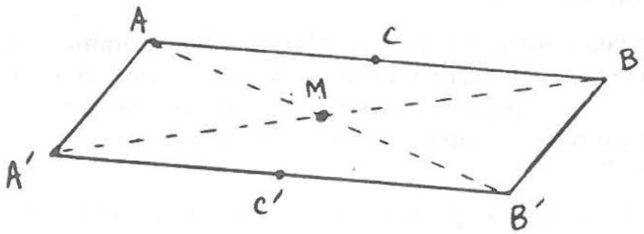
$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$$

(*) Voilà de la mathématique "moderne" ! Malgré sa simplicité, il a fallu attendre le 19e siècle pour que cette relation soit mise en évidence par Michel Chasles. Vous remarquerez que le signe + n'est plus entouré de la lettre O : l'origine n'intervient plus.

Pour le produit par $\frac{1}{2}$, on pense immédiatement à

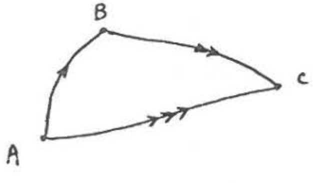
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \qquad \text{signifie} \qquad C = A * B$$

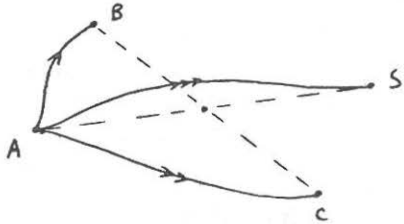
à condition, toutefois, de prouver que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $C = A * B$ et $C' = A' * B'$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



Cela revient à prouver que les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme forment avec deux sommets consécutifs de celui-ci un nouveau parallélogramme. Or, de $C = A * B$ et $C' = A' * B'$, on déduit $C * C' = (A * B) * (A' * B')$ ce qui, d'après M5, donne $C * C' = (A * B') * (A' * B) = M * M = M$ en désignant par M le centre du parallélogramme A B B' A'. Il en résulte que A C B' C' est un parallélogramme, donc aussi ACC'A' puisque B'C'A'C' en est encore un (c'est le "théorème de composition des parallélogrammes" qui joue son rôle ici).

Revenons un instant sur l'addition pour signaler que la somme de deux translations donne lieu à deux dessins intéressants :





$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$ équivaut à $A * S = B * C$

Le second dessin n'est pas sans rappeler la définition de la loi $\oplus$ dans l'espace, sauf que maintenant l'origine commune des flèches représentant les deux translations est arbitraire, ce qui donne une grande souplesse à la seconde approche (celle des translations) relativement à la première (celle de la loi $\oplus$ dans l'espace) tout en permettant de la retrouver.

De plus, la flèche C $\longrightarrow$ B représente la translation $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$:

"Si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme portent des flèches représentant chacune une translation, alors les diagonales de ce parallélogramme portent des flèches dont l'une représente la somme et l'autre la différence de ces translations".

Cette remarque jouera son rôle lorsqu'il sera question du *produit scalaire* de deux translations.

En effet, définissons le produit scalaire de deux translations comme une réel obéissant aux propriétés suivantes (*) :

1°) Si la distance de A à B est égale à 1, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$

2°) $(x\,\overrightarrow{AB}) \cdot (y\,\overrightarrow{CD}) = xy\,(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})$

3°) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

4°) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF})$

Il apparaît alors que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ est le carré de la distance de A à B et que

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Dire que les *droites* AB et AC sont perpendiculaires, équivaut à dire que le parallélogramme A B S C est un rectangle, donc que AS et BC ont même longueur.

Dans ces conditions, on dit que les translations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *orthogonales*. Ce qui précède montre alors que :

"$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonales" *équivaut à* "$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$"

(*) **Comme le produit scalaire est une *invention tout à fait artificielle*, on peut bien le créer comme on veut, sauf de manière contradictoire. Le fait que le modèle physique se prête à merveille à cette invention prouvera, après coup, qu'il n'y a nulle contradiction dans les propriétés choisies.**

L'introduction du repérage dans le plan se fait de la même façon que dans le point de vue précédemment exposé, à quelques changements de notations près. On a toutefois une notion supplémentaire : celle de *composantes* pour une translation, relativement au repère donné ; de plus, la définition de la droite passant par les points distincts A et B ne dépend plus du choix d'une origine (droite AB = $\{ M \mid \exists\ x, x \in \mathbf{R} \text{ et } \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} \}$).

L'expression analytique du produit scalaire lorsque le repère est *orthonormé* est très facile à trouver et à retenir :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = x\,x' + y\,y'$$

Cette expression fournit immédiatement les composantes (x', y') d'une translation $\overrightarrow{A'B'}$ orthogonale à une translation $\overrightarrow{AB}$ de composantes (x, y) données : il suffit de prendre $x' = y$ et $y' = -x$.

De cela découle facilement l'équation d'une droite, *toujours pour un repère orthonormé.*

La droite AB est en effet l'ensemble des points M tels que les translations $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient orthogonales. Désignons par (x, y), (a, b), (m, p) respectivement les coordonnées de M, les composantes de $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de A. Alors :

$$(x - m)\,b - (y - p)\,a = 0$$

d'où l'équation de la droite :

$$bx - ay = c$$

c étant un réel qui dépend uniquement de A et B.

J'entends d'ici les rigoristes m'accuser de mélanger les points de vue métrique et affine ! En effet, l'équation trouvée est valable non seulement pour un repère orthonormé mais pour un repère quelconque, l'orthogonalité n'a rien à faire ici.

Je réponds : eh bien tant mieux ! j'ai peut- être utilisé un marteau-pilon pour ouvrir une noix ; mais que de fois n'ai-je pas vu, à l'inverse, utiliser un cure-dent pour tenter d'ouvrir un coffre-fort ! Au reste, une bonne figure en perspective cavalière (voilà bien un "dessin raisonné" donc digne de s'appeler figure !) aura tôt fait de montrer aux enfants que l'équation d'une droite est valable aussi pour un repère oblique, et d'une manière bien plus efficace qu'une démonstration directe, du genre de celles qu'on fait aujourd'hui "pour suivre le programme" (*directe* signifie ici que l'équation de la droite est obtenue au moyen de la seule structure affine du plan, sans l'"intermédiaire" métrique que constitue le produit scalaire ; gageons que nos élèves ne la trouvent pas si directe que cela !).

Je n'ai pas l'intention, dans cet article que certains trouveront déjà beaucoup trop long, de développer davantage les quelques idées que je viens de jeter quelque peu en vrac sur le papier. Je serais satisfait si elles ont provoqué autre chose que l'indifférence du lecteur, même si c'est une certaine hostilité.

Mais pour terminer ce paragraphe j'aimerais insister sur un point. L'introduction des *vecteurs* en géométrie, soit par la loi $\oplus$ dans l'espace, soit par les translations (les vecteurs étant tantôt les points, tantôt les translations) permet de *calculer* sur des dessins et, par le fait, d'y trouver des résultats cachés. Par exemple, pour prouver que les points de coordonnées respectives, (0, 0), (13, 8), (21, 13) ne sont pas alignés, un dessin sur papier quadrillé ne suffit pas, seul le calcul est efficace. Or ce calcul est basé sur des *règles* qui sont en réalité les axiomes des espaces vectoriels euclidiens. Ces règles nous sont suggérées par des expériences que nous pouvons effectuer *à distance finie*, c'est-à-dire à l'échelle du dessin sur une feuille de papier. Une fois obtenue l'équation d'une droite (et, je le répète, sans référence au vieux Postulat d'Euclide qui intéresse l'"infiniment grand" mais plutôt à des postulats concernant la "structure fine" de **R**, c'est-à-dire, en quelque sorte, l'"infiniment petit"), on peut *démontrer* que par un point donné il ne passe qu'une droite située dans le même plan qu'une droite donnée et ne la rencontrant pas. Ce résultat paraîtra d'un intérêt assez mince à ceux qui ont coutume de l'imposer à leurs élèves, à titre d'axiome, dans leur leçon inaugurale de quatrième. Mais il rejoint les "préoccupations philosophiques" évoquées dans une parenthèse antérieure qui se trouve ainsi ouverte à nouveau.

L'un des buts assignés à l'enseignement de la géométrie est la prise de possession par l'enfant des propriétés de l'espace qui l'entoure (et dont il fait partie). Cette prise de possession ne peut se faire convenablement que par des *expériences à son échelle*, c'est-à-dire à distance finie. Ensuite se pose la question "et si je vais plus loin, si je prolonge ces droites jusqu'à l'infini ?" La réponse est que *si* les lois découvertes à notre échelle sont aussi valables à celles de l'univers, *alors* il se passe ce que vous savez. Le *si* est essentiel car aucune théorie mathématique ne peut nous dire quelles sont les propriétés de l'espace à l'échelle de l'univers.

Seule l'*expérience* peut nous renseigner et ses résultats sont tels qu'ils doivent nous incliner à la modestie : la notion de droite, pas plus que celle de parallélisme, ne peut être étendue à l'échelle de l'univers. Force est alors de reconnaître que l'attitude qui consiste à faire dépendre ce qui se passe sous nos yeux de "vérités révélées" concernant l'inacessible n'est pas raisonnable et qu'elle est même antiscientifique, puisque ces prétendues "vérités révélées" sont fausses dès qu'on atteint les dimensions du système solaire. Or cette attitude est précisément celle qui consiste à mettre à la base de l'enseignement de la géométrie affine de quatrième les "propriétés d'incidence" des droites. Qu'à l'époque d'Euclide on se soit permis, faute de mieux et non sans réticence (*), de demander de bien vouloir admettre les dites "vérités révélées", passe encore, mais au siècle d'Einstein !...

4.5. TRIGONOMETRIE

Ce qui fait la difficulté actuelle de l'enseignement de la trigonométrie, ce n'est ni le sinus, ni le cosinus, ni la tangente ni la cotangente. Non ! *C'est l'angle*, tout simplement.

Qu'est-ce qu'un angle ?

Peut-on enseigner quelques rudiments de trigonométrie sans avoir au préalable *fait le fondement* de cette notion, ce qui correspond à tenter d'injecter (non surjectivement, hélas !) dans sa classe les onze fiches qui forment les rubriques "angle" et "phase" du dictionnaire de l'APM ? (Ah ! j'allais oublier les six fiches qui constituent les rubriques "rotation" et "secteur").

Depuis qu'une grande discussion a eu lieu à propos des *angles* qui-ne-sont-pas-du-tout-ce-que-vous-pensez, l'imbroglio n'a fait que croître et embellir et le légitime effroi qui s'empare de tout honnête professeur à la seule vue de ce mot explique en grande partie le fait que la trigonométrie soit abordée le plus tard possible dans la plupart des classes :

(*) Voir Dedron et Itard, Mathématiques et Mathématiciens, p. 60 : "*Proposition 29* [...] *Il est fait appel ici, pour la première fois, à la Demande 5, au Postulat d'Euclide. On peut remarquer que, par l'utilisation aussi tardive que possible de son postulat, Euclide peut être salué comme le premier géomètre "non-euclidien".*" C'est vraiment qu'il ne pouvait pas faire autrement ! Mais si Euclide avait adopté comme définition des parallèles autre chose que la vacuité de leur intersection (qui n'est après tout qu'une propriété secondaire) la face de la géométrie se fût peut-être trouvée changée : par exemple, droites symétriques autour d'un point.

“Comment l’enseignerai-je à mes élèves ? Je ne sais plus ce que c’est ! ”.

Or de quoi s’agit-il dans le premier cycle ?

La trigonométrie c’est, étymologiquement, la mesure des triangles, c’est-à-dire de leurs angles et de leurs côtés, et, par suite, l’étude des relations qui lient ces différentes mesures.

Par exemple, je fais de la trigonométrie, certes rudimentaire, lorsque sur le terrain je mesure la distance de deux points A et B puis les angles que fait AB respectivement avec les rayons visuels issus de A et B en direction d’une certaine tour C et que je reporte ensuite ces données, à échelle réduite pour AB, sur un papier afin d’y mesurer, à la même échelle, les distances AC et BC.

L’avant-projet de programme pour la classe de troisième du 12 février 1977 contient la phrase suivante :

“On admettra l’existence et l’unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée”.

Cela signifie-t-il qu’on doit admettre que les élèves connaissent cette existence et cette unicité ? Je crois que non, ne serait-ce que par précaution. Mais alors il faudra bien, d’une manière ou d’une autre, leur expliquer ce que c’est, plutôt que de leur dire “Vous savez bien que...” et risquer qu’ils ne le sachent pas.

J’ai toujours trouvé, *et à tous les niveaux*, des élèves (et même des adultes) *allergiques au rapporteur.* Dessinez un angle au tableau, soigneusement, à la règle, et demandez à un enfant de venir le mesurer à l’aide du rapporteur. Bien souvent, et même s’il vient de voir un camarade opérer correctement, il aura, avec son rapporteur en mains, l’air d’une poule qui a trouvé un couteau ! Par contre, il en est d’autres qui savent faire avant même qu’on leur ait montré (l’inventeur du rapporteur devait être de ceux-ci !).

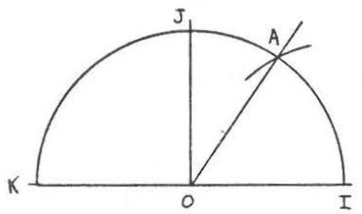
La *comparaison* de deux angles au moyen d’un tracé au compas semble poser moins de problèmes, de même que la construction d’un angle de même ouverture qu’un angle donné.

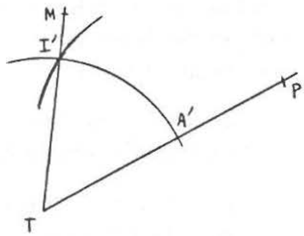
A la lumière de ces réflexions, la question de la mesure des angles peut être revue et traitée de la manière suivante qui consiste, finalement, à construire un *rapporteur fixe* sur lequel seront reportés les angles à mesurer. Du même coup, on va introduire le *demi-cercle trigonométrique.*

Voici donc un angle $\widehat{MTP}$ et un demi-cercle de centre O et de rayon 1. L'une des extrémités I du diamètre KI et le point J du demi-cercle tel que OI et OJ soient perpendiculaires formeront avec O le repère orthonormé (O, I, J).

Construisons le point A tel que l'angle $\widehat{IOA}$ ait même ouverture que l'angle $\widehat{MTP}$. Cela signifie qu'il y a une isométrie (voir paragraphe ②) qui applique l'angle $\widehat{MTP}$ sur $\widehat{IOA}$.

En particulier, il y a, sur les côtés de l'angle $\widehat{MTP}$, deux points I' et A' tels que TI' = OI, TA' = OA, I'A' = IA, d'où le tracé que résume la figure ci-après :





Pour connaître la mesure de l'angle $\widehat{MTP}$, qui est la même, à cause de l'isométrie, que celle de $\widehat{IOA}$, nous allons *graduer* le demi-cercle. Cela veut dire que nous allons faire correspondre à chacun de ses points un réel tel que le réel correspondant à un point *équidistant* de deux autres soit la *moyenne arithmétique* des réels correspondant à ces deux autres points. On reconnaît là un procédé qui a déjà été utilisé au paragraphe ④ pour le repérage d'un point sur une droite. Il s'agit ici de repérer le point A sur le demi-cercle trigonométrique. Il est d'usage de faire correspondre le réel 0 au point I et un réel p strictement positif au point K (*). Selon que la graduation est faite en tours, demi-tours, quadrants, sextants, degrés, grades, radians, millièmes, p désigne respectivement 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 180 ; 200 ; π ; 3200.

Au point J correspond le réel $\frac{p}{2}$ puisque J est équidistant de I et K. Supposons que A soit *sur l'arc* IJ (et c'est une notion *topologique* qui intervient ici, ne le cachons pas). Le réel α qui lui

(*) Il est piquant de constater que les rapporteurs du commerce sont gradués à l'envers de cet usage ou comportent deux graduations de sens opposés dans lesquelles les étourdis s'empêtrent immanquablement !

correspond est compris entre 0 et $\frac{p}{2}$.

La médiatrice des points I et J coupe le demi-cercle en un point A_1 (et *un seul*) qui est équidistant de I et J. A ce point A_1 correspond donc le réel $\frac{p}{4}$. Supposons, comme cela semble être le cas sur le dessin, que A soit sur l'arc A_1J. Le réel α est alors compris entre $\frac{p}{4}$ et $\frac{p}{2}$.

Le procédé doit être continué jusqu'à ce que le dessin ne permette pas d'aller plus loin et une discussion doit en résulter. Il vaut la peine de prendre le temps de fortifier ainsi la connaissance des réels et de leurs liens avec la réalité (relisez cette phrase, si sa fin vous paraît drôle).

Le réel α est ainsi encadré, d'aussi près que faire se peut, par des dyadiques (encore eux !).

Il est d'usage de désigner un angle par le réel α suivi du symbole de l'"unité" qui a servi à graduer le demi-cercle : ainsi, on parle d'un angle de 37°, de 41 gr, de $\frac{\pi}{6}$ rd. Dans la suite, conformément à un abus de langage universellement admis, je désignerai par α l'angle $\widehat{IOA}$ aussi bien que sa mesure, élidant ainsi le symbole de l'unité. Ainsi, l'écriture $\cos\alpha$ désignera $\cos\widehat{IOA}$ et devrait, selon le cas, être mieux orthographiée $\cos\alpha^\circ$ ou $\cos\alpha$ gr ou $\cos\alpha$ rd , ... selon l'unité choisie.

Par contre, pour des mesures *explicitement chiffrées*, l'indication de l'unité reste indispensable : cos 37 est ambigu puisque cos 37° n'est pas le même réel que cos 37 gr.

Indiquons, pour en finir avec la mesure des angles, qu'il est encore un moyen pour trouver celle-ci : supposons qu'on connaisse les réels correspondant à deux points A et B du demi-cercle ; alors la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à la valeur absolue de la différence de ces deux réels.

Maintenant que voici établie la mesure des angles, la définition des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente est immédiate :

Angle	Point du demi-cercle trigonométrique	Coordonnées

$$\begin{tikzcd} & & \cos\alpha \\ \alpha \arrow[r] & A \arrow[ur, "\text{abscisse}"] \arrow[dr, "\text{ordonnée}"'] & \\ & & \sin\alpha \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad\qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

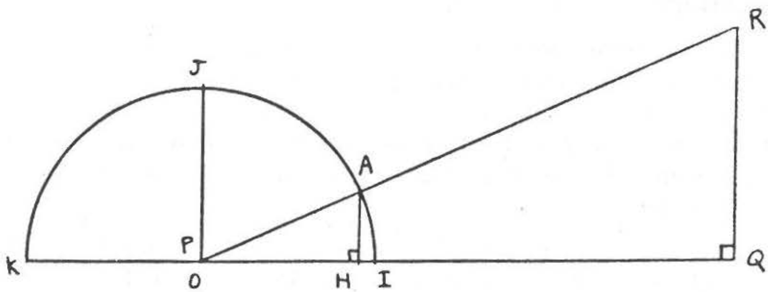
La recherche des sinus, cosinus, tangente et cotangente des "angles remarquables" que sont 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 180°, donne lieu à des remarques bien connues qui, une fois démontrées d'une manière générale sans aucune difficulté, mènent aux formules :

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$; $\operatorname{cotg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}(180° - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

Ces formules permettent l'usage des tables, lesquelles donnent, on le sait, les cosinus, sinus, tangente et cotangente des angles compris entre 0° et 45° (et, accessoirement, de 45° à 90° au moyen d'un artifice qui fait tromper plus d'un élève).

Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, par l'étude desquelles se termine l'avant-projet de programme du 12 février 1977, s'effectuent alors très simplement.

Soit PQR un triangle rectangle en Q. Rapportons le plan à un repère (O, I, J) choisi le plus convenablement possible. A cet effet, O sera en P, I sera sur la droite PQ et J sera tel que l'ordonnée de R soit positive.



Le demi-cercle de diamètre KI passant par J coupe PR en A dont le projeté orthogonal sur OI est H.

Tous les réels qui interviennent dans cette étude sont positifs, ce qui dispense des notations telles que $\overline{OH}$ que nous n'avons d'ailleurs jamais utilisées dans cet exposé.

Désignons par p, q, r les longueurs respectives des côtés QR, RP et PQ du triangle PQR.

$$\overrightarrow{PR} = q\,\overrightarrow{PA}$$

puisque les points P,A,R sont alignés et que PA a pour longueur 1.

Or $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA}$

$$\overrightarrow{PR} = r\,\overrightarrow{OI} + p\,\overrightarrow{OJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PA} = \cos\alpha\,\overrightarrow{OI} + \sin\alpha\,\overrightarrow{OJ}$$

d'où $r\,\overrightarrow{OI} + p\,\overrightarrow{OJ} = q\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{OI} + \sin\alpha\,\overrightarrow{OJ})$

L'unicité du couple de composantes de $\overrightarrow{PR}$ relativement au repère (O, I, J) entraîne alors

$$r = q\cos\alpha \quad \text{et} \quad p = q\sin\alpha$$

d'où l'on tire

$$p = r\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{et} \quad r = p\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

En particulier, si Q est en I, $r = 1$ et $QR = \mathrm{tg}\,\alpha$. Comme, dans ce cas, la droite QR est tangente en I au demi-cercle, on a l'origine de l'appellation "tangente".

4.6. REPARTITION DE CES THEMES

Et maintenant, me direz-vous, comment répartir ces thèmes en quatrième et en troisième ?

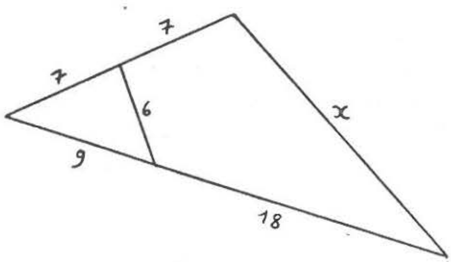
La réponse peut se discuter, d'autant plus que certains d'entre eux sont assez vastes pour être divisés en sous-thèmes dont certains peuvent être abordés dès la quatrième et les autres, plus abstraits, devraient être réservés à la troisième. Il en est ainsi du quatrième, les vecteurs, que je n'ai pas développé ici complètement, d'ailleurs.

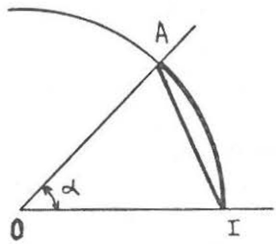
Je dois signaler que des expériences menées par les équipes OPC ont porté sur l'enseignement du théorème de Pythagore en quatrième. Je suis d'accord avec cette tentative et placerais volontiers dans la même classe les thèmes numéros (1) et (2), l'étude plus approfondie du parallélogramme débouchant, à la fin de cette classe, sur le groupe additif des translations.

La troisième serait alors consacrée au reste de l'étude vectorielle (y compris le produit scalaire) et à la trigonométrie qui, peut-être, pourrait être moins étriquée qu'actuellement, justement à cause du produit scalaire.

Pour terminer, un exercice :

Montrer comment le produit scalaire permet de calculer la longueur x dans le dessin de gauche et de prouver (dessin de droite) que $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ est une bonne approximation de $\cos \alpha$ rd (l'erreur est inférieure à 1 % pour tous les angles compris entre 0° et 37°).





Lyon, le 29 avril 1977

BROCHURES A.P.M.E.P. 1978

Pavés et bulles

par Françoise PECAUT (Avignon)

Amateurs d'axiomatique et d'abstractions, s'abstenir !

Dans "pavés et bulles" il y a surtout des résultats, ceux appartenant aux programmes de géométrie du second cycle et quelques autres ; pour l'essentiel, ce sont des mathématiques physiques, et cette physique n'est même pas moderne ; la dimension des espaces vectoriels ne dépasse pas trois, il n'y a que trente deux groupes cristallographiques. Le chapitre "groupes" ne va pas jusqu'aux sous-groupes distingués, le mot de module sur un anneau est à peine évoqué à propos des réseaux.

Les professeurs de Mathématiques de l'enseigment secondaire savent tout ce qu'il faut pour comprendre la classification des milieux cristallins et les problèmes de pavage, il ne s'agit que d'appliquer ces connaissances : quand vous aurez lu "pavés et bulles", vous regarderez d'un oeil neuf le carrelage de votre salle de bains et vous reconnaîtrez dans les objets les plus ordinaires leur groupe d'isométrie ; si vous avez des difficultés avec les espaces homogènes du chapitre III, sautez-le, et tournez-vous résolument vers le bricolage proposé dès la fin du chapitre IV, puis aux chapitres VIII et IX. De nombreuses figures et planches invitent à dessiner, découper, coller, souder : avec tout l'enthousiasme du novice, vous ferez des expériences mathématiques ; vous pourrez voir et faire voir les sous-groupes du groupe du cube sous forme de polyèdres et, dans toute l'éphémère précision des lames de savon, le centre de gravité d'un tétraèdre régulier, et même ... une bulle carrée !

Enfin, ceux que tente l'interdisciplinarité trouveront en biologie et en physique (moderne cette fois !) une motivation pour étudier les rangements d'isocaèdres : d'une part les particules de virus responsables de maladies courantes de plantes (la tomate, le navet, et la fève), ont une enveloppe à symétrie icosaèdrale ; d'autre part il existe un état de l'alliage W Al_{12} (par exemple) où douze atomes d'aluminium sont disposés aux sommets d'un icosaèdre dont le centre est occupé par l'atome de tungstène, les icosaèdres étant rangés aux sommets et aux centres des cubes d'un réseau cubique.

TABLE DES MATIERES

Algèbre de quatrième et calculateurs programmables

Cette brochure se propose de présenter un compte rendu complet de l'expérience menée, depuis 1974, par un groupe de recherche inter IREM.

Pour cette expérience, une vingtaine de professeurs ont accepté d'intégrer totalement des calculateurs programmables de différents types dans leur cours d'algèbre de quatrième. Parallèlement, un nombre égal de professeurs a dispensé un enseignement de même nature, mais sans calculateur.

Une évaluation, mise en place à l'aide de psychologues, et par le biais d'un traitement informatique, a permis d'estimer de manière assez fine l'apport du calculateur quant aux objectifs choisis.

Les maîtres du premier cycle trouveront dans cette publication :

— des extraits du matériel pédagogique élaboré à l'usage soit des professeurs, soit des élèves ;
— un exemple de méthode d'évaluation, analysée de façon critique;
— une première approche explicative des changements que peut apporter ce nouvel outil pédagogique en classe de mathématique.

PUBLICATION A.P.M.E.P.

MATHEMATIQUES
POUR FORMATION D'ADULTES

par Philippe LOOSFELT et Daniel POISSON, C.U.E.E.P.
Centre Université Economie d'Education Permanente.
Université des Sciences et Techniques de Lille.

192 pages, format Bulletin A.P.M. Prix : 15 F (avec port 18 F).

Voir ci-dessous une *présentation* de la brochure par les auteurs, et dans le Bulletin 302, pages 202 et 203, un *extrait* de la brochure.

Depuis 7 ans, le C.U.E.E.P. assure exclusivement des formations d'adultes, dans la Région Nord-Pas-de-Calais. Les formations se déroulent :
. soit en Entreprise, sur le temps de travail,
. soit en "Zone Résidentielle" : 2 zones de formation collective.

En Mathématiques, l'essentiel de l'effort a été porté sur le niveau du C.A.P. dont le C.U.E.E.P. prépare les Unités Capitalisables de tronc commun.

Deux responsables-Matière "Mathématiques" ont capitalisé les expériences de formation. La multitude d'expérimentations, d'essais, de tâtonnements que représente l'acquis de plusieurs centaines de cycles de formation d'adultes, a permis d'orienter progressivement la politique pédagogique du C.U.E.E.P. dans une direction tout à fait imprévue et imprévisible au départ.

Le premier pas de notre évolution nous a orientés vers l'exploration des thèmes de la vie réelle : impôts, salaires, fiches de gaz, etc...

Le bilan de cette tentative s'est soldé par un demi-échec ; la réalité ne provoque pas de motivations profondes au travail et elle est trop compliquée à mathématiser.

La deuxième étape de notre évolution n'a pas été choisie : il a suffi de faire le bilan de ce qui intéresse réellement les formés pour constater que le "pseudo-réel" était bien plus riche, à tout point de vue. Le "faux-réel" où la réalité est si décantée que le mécanisme sous-jacent en devient accessible, la situation tellement caricaturée qu'elle peut être totalement maîtrisée par le formé, voilà ce qui incite les formés à verser toute leur énergie dans le travail intellectuel.

Dans cet ouvrage, écrit d'abord pour aider les formateurs du C.U.E.E.P. dans leur tâche, nous essayons de montrer comment certains thèmes peuvent être utilisés, comment telle fiche s'est révélée passionnante, quels sont les échecs qui nous ont poussés à corriger certains points, etc...

Nous ne proposons pas de théories, nous disons seulement :

"Voilà un thème, voilà la structure sous-jacente à ce thème (réseau de relations, "architecturation"), voilà comment ce thème a été essayé, voilà les corrections apportées. Nous vous garantissons qu'il y a là de quoi intéresser les formés".

Pour vous procurer cette brochure, adressez-vous à votre Régionale ou Départementale.

Imprimerie Vaudrey - Lyon