

48

GÉOMÉTRIE
AU
PREMIER CYCLE
TOME I

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 21

GÉOMÉTRIE
AU
PREMIER CYCLE
TOME I

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 21

SOMMAIRE

Introduction : Mathématiques, de Jules SUPERVIELLE.....	5
Réelive, de Michel BUTOR.....	5
AVERTISSEMENT (Henri BAREIL)	6

PREMIERE PARTIE :

REFLEXIONS

1. A propos de l'enseignement de la géométrie par Raymond COUTY	9
2. Apprentissage des concepts spatiaux par Charles PEROL	16
3. Ainsi passent les programmes par André REVUZ	22
4. Le pays où l'on n'arrive jamais par Irneh LIERAB	36
5. Quelle géométrie ? par un groupe de l'I.R.E.M. de Poitiers	38
6. La position des O.P.C. sur l'axiomatique par Charles PEROL	50
7. Géométrie en premier cycle par Marie-Thérèse et Jean AYMES	56
8. Entre deux chaises ? par ROUMIEU et MICALI	58
9. Enseignants : A vos I.R.E.M. ! extrait d'un document COPREM	59
10. Ô Géométrie ... par H. B. (d'après ARAGON - Le Fou d'Elsa)	60

DEUXIEME PARTIE :

DES OUBLIES ? DES OUBLIS ?

1. ACTIVITES GEOMETRIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE	
1.1. Géométrie au C.M.2 par le groupe FOIX de l'I.R.E.M. de Toulouse	62
1.2. Géométrie à l'école élémentaire par Emile GASPARI	64
1.3. A propos de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire par Roger CREPIN	68
2. L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS LES S.E.S. par Michèle DEZAN et Henri PLANCHON	73
3. UN PREMIER CYCLE, POUR QUI ? par Henri BAREIL	75
4. OUBLIEUSE MEMOIRE... par Irneh LIERAB	77
5. UNE ILE par Jacques BREL	79

TROISIEME PARTIE :

QUELQUES DIRECTIONS DE RECHERCHE

AVERTISSEMENT, par Henri Bareil	82
1. LA RECHERCHE O.P.C.	
1.1. O.P.C. : Qu'est-ce que c'est ? ... par "un ami de l'O.P.C."	83
1.2. Progression O.P.C. Clermont (équipe Charles PEROL)	86
1.3. Toulouse - O.P.C. (équipe Henri BAREIL)	
— Principes	87
— Progression	89
— Exemple de travail de recherche en classe	90
— Extraits de fiches-élèves	92
1.4. Limoges - O.P.C. (équipe Roger CREPIN)	100
2. LE PLAN REPERE, par Pierre MOLINIER	104
2.1. Historique	104
2.2. Analyse du produit fini	109
2.3. En guise de conclusion	111
2.4. Annexe : Quelques fiches-élèves	111
3. VALORISER UNE ACTIVITE GEOMETRIQUE EN SIXIEME ET CINQUIEME	
3.1. Activité géométrique en sixième : Un exemple à partir de la sphère par J.P. MOUNIELOU, J. CL. et Mme LENOIR	123
3.2. A propos de cercles et médiatrices en sixième par G. BURGAUD, M. CHENEDE, M. GOURRET	125
4. D'ACCORD OU PAS, DITES-LE-VOUS ...	
Texte d'ALAIN (Propos sur l'éducation)	135

QUATRIEME PARTIE :

METHODES

0. Extraits de Claude DUNETON (Editeur : Le Seuil)	138
1. Redéfinition de l'enseignement des mathématiques par Henri BAREIL	140
2. Deux hommes, une femme et un bateau par Paule GIRON	148
3. Histoire d'une recherche par le groupe I.R.E.M. de Saint-Lô	152
4. Une classe à la découverte de la géométrie par Claude ROBIOLLE	156
5. Des élèves s'adressent aux élèves par Marcel DUMONT et Françoise PASQUIS	
— Objectifs de ce document	178
— Exemples de fiches	180
6. A propos de géométrie : Faire par G.H. CLOPEAU	184
Annexe : Géométrie par programmes de construction	190
7. Le problème du lion d'après R. PETER	201
Sommaire du tome II	203

INTRODUCTION

MATHEMATIQUES

Quarante enfants dans une salle,
Un tableau noir et son triangle,
Un grand cercle hésitant et sourd
Son centre bat comme un tambour.

Des lettres sans mots ni patrie
Dans une attente endolorie.
Le parapet dur d'un trapèze,
Une voix s'élève et s'apaise

Et le problème furieux
Se tortille et se mord la queue.
La mâchoire d'un angle s'ouvre.
Est-ce une chienne ? Est-ce une louve ?

Et tous les chiffres de la terre,
Tous ces insectes qui défont
Et qui refont leur fourmilière
Sous les yeux fixes des garçons.

Jules SUPERVIELLE

REELVE

“Il ne peut y avoir de réalisme véritable que si l'on fait sa part à l'imagination, si l'on comprend que l'imaginaire est dans le réel, et que nous voyons le réel à travers lui. Une description du monde qui ne tiendrait pas compte du fait que nous rêvons ne serait qu'un rêve.”

Michel BUTOR

AVERTISSEMENT

“Viens encore, viens, ma favorite,
Descendons ensemble au jardin, *bis*
Viens effeuiller la marguerite
De l'été de la Saint-Martin.

Je sais par coeur toutes tes grâces,
Et pour me les faire oublier *bis*
Il faudrait que Saturne en fasse
Des tours d'horloge, de sablier”.

Georges BRASSENS

Des tours d'horloge ? — et de programmes ... —.

Après la tempête de 1970 voici le calme revenu. En surface.
Dessous, des flux attendent leurs marées...

Des îlots, dits déductifs, émergent ça et là...

Sur les rivages de sixième et cinquième, alors que les vents
alizés éloignent des essaims de flèches et des nuées de relations
en -ives, ... les activités géométriques appellent à nouveau au bal...

Cependant de nouveaux (?) projets de programme se mi-
tonnent...

... L'A.P.M. a pensé qu'il était donc temps de faire le point
en une brochure “Géométrie premier cycle” et m'en a confié la
responsabilité.

L'ampleur de la tâche me conduit d'ailleurs, après coup, à
réaliser cette brochure en deux tomes, le seul tome 1 relevant
de la souscription initiale : Qu'on y voie le souci d'un service
mieux assuré.

... Cette brochure vient en sus du Bulletin : elle ne reprendra
donc pas les textes fondamentaux sur les mathématiques premier
cycle, parus dans le Bulletin n° 309. Que le lecteur s'y réfère
d'abord.

Je voudrais aussi rappeler l'intérêt de la circulaire ministérielle
de février 1973 sur l'enseignement des mathématiques en qua-
atrième-troisième : “circulaire historique, a dit un collègue : c'est
la première — et la seule jusqu'à présent — qui commente un
programme en faisant jouer un point de vue d'élèves, et d'élèves

variés". Cette circulaire, due pour une bonne part à l'A.P.M., peut être la base de toute réflexion et de toute pratique quant à l'enseignement des mathématiques en quatrième et troisième.

*

* *

L'A.P.M. a une "doctrine" quant à l'enseignement des mathématiques. Elle l'a explicitée dans ses Chartes (de Chambéry, de Caen, de Limoges). L'A.P.M. réclame un enseignement plus individualisé (par noyaux-thèmes), toujours plus soucieux des divers élèves. Elle souhaite que tous ceux-ci aient la possibilité de "faire" la mathématique au lieu de la "recevoir".

Elle n'a pas, pour autant, la recette-miracle de "la" potion magique permettant d'y parvenir. Voilà pourquoi la présente brochure, en ses deux tomes, propose, non des modèles, mais des expériences, des essais ; non un code de pensée, mais des interrogations.

La réforme de l'enseignement des mathématiques, si elle se fait enfin, passera par l'intermédiaire d'une formation initiale et continuée permettant à chacun de souhaiter, de prendre et d'exercer des responsabilités déterminantes. La brochure s'inscrit dans cette optique.

*

* *

Elle ne se propose point, pour autant, d'aider à prendre des vessies pour des lanternes. Le ferait qui laisserait croire qu'un horaire de mathématiques diminué laissera toutes ses chances, à travers un programme allégé (d'ailleurs le sera-t-il vraiment ?), à notre enseignement.

Les enfants des milieux populaires ont le plus grand intérêt à ce que le temps passé à l'école soit considérable..., sous réserve que :

- ils y soient actifs et s'y prennent en charge le plus possible,
- le "travail à la maison" soit allégé d'autant.

Voilà pourquoi l'A.P.M.E.P. réclame, pour les mathématiques, mais aussi pour les autres disciplines, un horaire plus important (et non pas réduit !), et appelle de ses vœux et de son action la réforme, d'un autre monde que celui d'Haby, qui donnera à l'École les moyens d'être elle-même.

Henri BAREIL

1^{ère} partie

**une brassée
de
RÉFLEXIONS
qui n'engagent
que leurs auteurs**

1 - A PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

par Raymond COUTY (Limoges)

*Le point de vue d'un géomètre sur
l'histoire de la géométrie et son
enseignement.*

La géométrie, fleuron de l'esprit humain.

“Aristippus, philosophus socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata a descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur : Bene speremus, hominum enim vestigia video” (Vitruve : De architectura, 1er siècle avant J.C.).

Donc, Aristippe, disciple de Socrate, jeté par un naufrage sur les rivages de l'île de Rhodes, apercevant des figures géométriques dessinées sur le sable, se tournant vers ses compagnons se serait écrié “nous pouvons avoir bon espoir, car j'aperçois ici des traces d'hommes”. Il voulait dire évidemment d'hommes véritables, l'activité géométrique étant pour lui l'essentiel des activités de l'homme civilisé.

Mais, “ceci se passait en des temps très anciens”. Depuis, si on a cessé de considérer que l'étude de la géométrie est l'essentiel de l'activité humaine, on a pendant longtemps rangé sous le vocable géométrie l'essentiel de l'activité mathématique. D'un bon mathématicien, on disait : “c'est un fin géomètre”. De cette situation, il reste des traces, puisque certains de nos plus illustres mathématiciens se retrouvent à la section “géométrie” de l'Académie des Sciences.

En opposition, tout récemment de bons esprits se sont sérieusement demandé s'il fallait vraiment enseigner la géométrie, “cet enseignement viendrait plus tard”, lorsque les fondements algébriques et topologiques seraient suffisamment assurés. Si mathématiquement cette attitude est parfaitement justifiée, elle ne me paraît pas raisonnable sur le plan pratique et je crois excellent de faire faire très tôt “de la géométrie”. Mais quelle géométrie ? et comment ?

Avant de répondre à cette question, je voudrais faire d'abord une très brève esquisse historique en ne retenant bien sûr que les faits qui me paraissent aujourd'hui (cela peut changer...) significatifs.

De Thalès à Bourbaki par Euclide et Hilbert

Faisons, un peu arbitrairement, commencer les choses en Egypte où les arpenteurs "mesureurs de terre" ont découvert quelques propriétés de certaines figures. Puis, vers le sixième ou septième siècle avant notre ère, arrive Thalès qui, au cours d'une visite en Egypte, invité par les prêtres qui ont reconnu en lui un esprit supérieur, se voit poser la question "Peux-tu estimer la hauteur de la pyramide du roi Chéops ?".

On connaît l'histoire ; Thalès, au grand étonnement du prêtre, par des mesures de longueurs d'ombres, va donner la réponse exacte.

Mathématiquement, sa démarche se situe à ce que l'on peut appeler le "deuxième niveau", c'est-à-dire que dans le cas concret qui lui est posé, il imagine une méthode qui lui permettra d'éviter la manipulation à faire et il est sûr, par son raisonnement, d'obtenir le bon résultat.

Les arpenteurs égyptiens, eux, se situent au "premier niveau" : ils font des expériences, des mesures, et ils regardent et constatent.

Ensuite, vers le 4ème siècle avant notre ère arrive le premier bourbakiste de l'histoire, Euclide, qui entreprend de codifier tout le savoir géométrique de son temps. Il se situe au "troisième niveau". On sait l'orgueilleuse réponse qu'il fit à Alexandrie au roi Ptolémée Philadelphe qui lui demandait s'il n'existait pas pour arriver à progresser en géométrie une méthode plus commode que les "Eléments" : "En géométrie, seigneur, il n'existe point de voie royale". Mais nous savons maintenant qu'il en existe une. En tout cas, Euclide crée une théorie axiomatisée et montre ce qu'est une démonstration mathématique.

On connaît le succès considérable de ses "Eléments" et on se souvient des discussions philosophiques qui ont suivi, sur la différence entre postulats et axiomes, la plus ou moins grande évidence des uns par rapport aux autres.

On se souvient aussi de l'enseignement de la "géométrie de papa" qui n'avait pas que des défauts, bien sûr, mais où fourmillaient les pseudo-démonstrations "lourdes d'axiomes inexprimés", car le

système d'axiomes d'Euclide n'était pas très clair ; en particulier il ne s'était pas posé les questions de minimalité et d'indépendance.

Dans la ligne directe d'Euclide, on eut en 1899 l'ouvrage capital de Hilbert, "Grundlagen der géométrie", qui donne un système d'axiomes parfaitement logique et cohérent et résout le problème de l'indépendance ; il fait une construction avec cinq groupes d'axiomes (en tout une vingtaine).

"Enfin Bourbaki vint"; un de ses plus éminents représentants s'écria un jour, en une formule demeurée célèbre: "à bas Euclide, mort au triangle".

Pourquoi ? Parce qu'il connaissait la voie royale.

En effet, l'axiomatique d'Euclide-Hilbert, basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle, "dissimule merveilleusement la structure vectorielle de l'espace et sans doute est-elle responsable du fait que des siècles durant on a ignoré la notion de vecteur". Or, c'est justement là que passe la voie royale.

La polémique Choquet-Dieudonné

En 1964 paraissent presque simultanément deux ouvrages importants à verser au dossier de l'historien de l'enseignement de la géométrie. L'un est de Dieudonné et a pour titre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", l'autre, de Choquet et s'intitule "L'enseignement de la géométrie".

Tous les deux reconnaissent que la voie royale c'est l'algèbre linéaire, mais alors que Dieudonné part de l'axiomatique "nue" de l'algèbre linéaire, Choquet pour faire admettre cette axiomatique réalise un compromis entre une axiomatique du type Euclide-Hilbert et l'axiomatique de l'algèbre linéaire.

Je ne sais ce que Choquet pense du livre de Dieudonné, mais par contre tout le monde sait ce que Dieudonné pense du livre de Choquet puisqu'il écrit "le système d'axiomes proposé par Choquet, d'une remarquable ingéniosité, témoigne du grand talent de son auteur. Mais je le tiens pour parfaitement inutile et même nuisible. Il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien : addition des vecteurs, multiplication par un scalaire, produit scalaire de deux vecteurs étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement ; or, chacun sait qu'il n'en est rien".

La voie royale

Effectivement, je pense que l'on peut assez vite commencer l'enseignement de la géométrie par la "voie royale". On sait quelles en sont les étapes essentielles :

Espace vectoriel, algèbre linéaire, groupe opérant dans un ensemble ; espace affine associé à un espace vectoriel.

Bien sûr, mathématiquement, on se rend bien compte que lorsqu'on fait une démonstration en géométrie affine on a des éléments artificiels, et on sait bien qu'en fixant un point on a une structure d'espace vectoriel et que les différents espaces vectoriels ainsi obtenus sont isomorphes. D'autre part un des premiers modèles d'espace affine est une variété linéaire affine d'un espace vectoriel (partie d'un espace vectoriel déduite d'un sous-espace par translation) ; et un théorème (dont la démonstration est loin d'être évidente...) affirme que ce modèle fournit la totalité des espaces affines, plus précisément que tout espace affine est une variété linéaire affine d'un espace vectoriel.

On pourrait donc dire, et cela a été dit, avec des raisons mathématiques tout à fait valables, que l'intérêt de l'espace affine est très limité. Cependant, pour des raisons physiques, son étude me paraît nécessaire. Alors s'introduit tout de suite la notion de variété linéaire affine associée à un sous-espace vectoriel qui est sa direction. Les questions d'intersection et de parallélisme trouvent ici naturellement leur place et le fameux postulat d'Euclide devient un théorème trivial. On passe ensuite à la notion d'application affine associée à une application linéaire et on étudie tout naturellement le groupe affine ; dans ce cadre le célèbre théorème de Thalès se trouve relégué au rang d'un petit corollaire.

Bien entendu, si on veut aller plus loin il faut ajouter d'autres axiomes. Avec l'existence d'une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel naît la structure d'espace vectoriel euclidien et on étudie alors les applications linéaires conservant cette forme ; ce sont les applications orthogonales. Signalons en passant la notion de sous-espace irréductible pour une transformation linéaire f : il s'agit d'un sous-espace V tel que $f(V) \subset V$ et tel que, s'il existe $W \subset V$ tel que $f(W) \subset W$ alors $W = \{0\}$ ou $W = V$; et un théorème affirme qu'étant donné une transformation orthogonale d'un espace euclidien, il est somme directe orthogonale de sous-espaces de dimensions un ou deux irréductibles pour cette transformation.

Grâce à ce théorème l'étude des transformations orthogonales d'un espace euclidien de dimension n est ramenée aux cas $n = 1$ ou $n = 2$; ce dernier cas conduit tout naturellement à l'étude du groupe des angles.

On peut passer ensuite facilement à l'étude des transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien de dimension n ; il n'y a pas quant aux difficultés rencontrées de différence fondamentale de nature.

Tout cela se termine naturellement par l'espace affine euclidien et le groupe orthogonal fournit tous les éléments pour l'étude du groupe des isométries. Comparé à ce que ma génération a connu, concernant par exemple les "déplacements de l'espace", la différence est saisissante. C'est un fait remarquable, mais non isolé, que le remplacement d'une axiomatique par une autre équivalente clarifie considérablement les choses.

Et nos classes ?

Maintenant quelles conclusions tirer en ce qui concerne l'enseignement effectif dans les classes, aux enseignants de le dire... je me bornerai simplement à quelques remarques.

D'abord, dans cette trilogie, enseignant, enseigné, matière enseignée, quel est l'objet pilote ? s'agissant de formation des maîtres on dira que c'est l'enseignant, car s'il n'est pas bien formé, il maltraitera les deux autres.

Mais nous nous plaçons ici dans l'hypothèse du maître parfait. Alors les discussions commencent. Admettons (ce n'est pas évident pour tout le monde) que pour ce qui nous occupe l'objet pilote c'est l'enseigné. Concrètement, pour le Second cycle des lycées, je pense qu'il n'y a pas trop de difficultés et que l'enseignement de la géométrie tel que je viens de le décrire ne pose pas de problème majeur (du moins dans les classes scientifiques).

Pour le Premier cycle, la situation est tout autre. Il y eut d'abord les programmes de 1971 construits par la commission ministérielle avec les commentaires qui les accompagnaient, destinés aux professeurs et que des éditeurs de manuels ont feint de croire destinés aux élèves. Il s'agit d'une construction mathématique irréprochable ; mais on sait très bien que cela a "mal passé". On a invoqué des raisons, par exemple que les professeurs n'étaient

pas préparés; peut-être... mais je crois surtout que la raison principale est qu'il n'y a pas eu d'expérimentation préalable comme cela s'était produit pour les programmes de sixième et cinquième. S'il y en avait eu, on se serait sans doute aperçu qu'il était prématuré de vouloir faire assimiler cette construction en quatrième-troisième.

On sait les remarques et critiques que ces programmes ont soulevées; et puis il y a eu la circulaire ministérielle du 19 février 1973. Il semble qu'elle n'ait pas eu l'audience qu'elle méritait; pourtant c'est un document qu'il faut lire et méditer car il donne aux enseignants une grande liberté et ne les enferme pas dans le carcan strict d'une construction rigoureuse.

Il me semble que dans cette affaire il faudrait retenir deux principes: d'abord la géométrie est la première théorie physique, ensuite que "l'homme n'est ni ange ni bête et qu'à vouloir trop faire l'ange, il fait la bête".

Concrètement la conséquence du premier principe est qu'il faut réhabiliter la pédagogie de la manipulation et cela très tôt, en sixième et cinquième faire des dessins, des constructions géométriques et pas simplement avec la règle et le compas (c'est paraît-il une idée de Platon), mais utiliser toutes sortes d'instruments à faire réaliser en travail manuel, instruments qui réalisent des transformations de figures: translateurs, pantographes, etc... Il ne s'agit pas ici de géométrie mais d'activités géométriques qui seront motivantes par la suite.

Le deuxième principe est qu'il ne faut pas, pour cet âge, se donner comme but exclusif l'accession au 3ème niveau et par conséquent il ne faut pas chercher à présenter d'abord une axiomatique globale de la géométrie parce qu'on risque fort de lâcher dans la vie des élèves qui n'auront même pas accédé au 2ème niveau, c'est-à-dire une certaine idée du raisonnement mathématique et un certain savoir-faire autre qu'une petite recette applicable dans un cas particulier dont on sera incapable de sortir.

Au niveau des classes de quatrième et de troisième on peut très vite introduire le vectoriel. Bien entendu, il faut des motivations. Sans entrer dans les détails qui dépasseraient le cadre de cet exposé on peut dire que des travaux sur quadrillage qui peuvent avoir été commencés en cinquième sont un bon moyen. Des expériences déjà réalisées paraissent confirmer ce point de vue. On

part des quadrillages $N \times N$ sur lesquels on pratique des chemine-
ments, des transformations ; puis on passe au plan repéré $R \times R$ et
on abandonne ensuite le repère. L'équivalence, les translations,
leur composition, la multiplication d'un vecteur par un scalaire
peuvent être présentés à partir de tracés associés à de nombreux
calculs intégrant algèbre et géométrie dans une même étude.

Cette façon de procéder, qui a l'avantage de s'insérer dans un
processus continu, prépare l'élève à admettre que l'on fonde
l'édifice algébri-co-géométrique sur des propriétés dont il lui est
possible de vérifier sur des exemples l'exactitude expérimentale.

Extrait du "P.L.O.T."

(Publication des Régionales A.P.M.E.P.
de Poitiers - Limoges - Orléans)

LE CANCRE

Il dit non avec la tête
mais il dit oui avec le coeur
il dit oui à ce qu'il aime
il dit non au professeur
il est debout
on le questionne
et tous les problèmes sont posés
soudain le fou rire le prend
et il efface tout
les chiffres et les mots
les dates et les noms
les phrases et les pièges
et malgré les menaces du maître
sous les huées des enfants prodiges
avec des craies de toutes les couleurs
sur le tableau noir du malheur
il dessine le visage du bonheur.

Jacques PREVERT
(Paroles)

2 - APPRENTISSAGE DES CONCEPTS SPATIAUX

par Charles PEROL, I.R.E.M. de Clermont

Avertissement : Ceci n'est pas un texte mis en forme. Il s'agit d'un aide-mémoire écrit de premier jet. Je demande aux lecteurs de bien vouloir m'aider à remplir les vides et à rectifier les contenus vagues ou inexacts.

Introduction : J'ai proposé à BOIS-en-RE lors d'une rencontre sur la géométrie, en 1976, une progression pour l'apprentissage des concepts spatiaux de la petite enfance jusqu'à l'Université. J'insisterai plus particulièrement sur la période de l'école moyenne. Après ce stade, dans l'état actuel de notre Société, certains adolescents ne poursuivent pas leur progression ou bien se trouvent engagés dans des voies adventices. Je n'ai parlé qu'au sujet de la ligne principale. Loin de mépriser les autres voies, je pense qu'à partir de la fin de la scolarité obligatoire, à chaque stade, les finalités et les objectifs doivent être définis de manière à pouvoir à la fois constituer un tout cohérent et une base de nouveaux départs.

J'ai fondé mes propositions sur 3 sortes de considérations que j'ai d'abord résumées.

a) *Les apports de la psychologie génétique*

Phase sensori-motrice — Phase des opérations concrètes — Phase des opérations abstraites (débutant vers 11 ans). L'ordre dans lequel les notions géométriques sont appréhendées dans les premières phases est :

Notions à caractère topologique * "dans", "bord", etc...

Notions à caractère projectif * "alignement", "convergence"

Notions à caractère affine * puis métrique *.

Cette progression est liée à une maturation physiologique, en particulier des organes des sens.

(*) Ces mots sont employés ici faute de mieux ; il faudrait dire "des faits qu'on rattacherait plus tard à ...". Cet usage abusif sera renouvelé sans avertissement plus loin.

Je ne cherche pas à distinguer dans le dernier paquet pour ne pas détourner la discussion vers un point qui n'est pas essentiel pour ce propos.

b) *Histoire de la géométrie :*

1/ Je n'ai pas de renseignements sur une phase prémathématique de prise en compte de faits géométriques si ce n'est vers la fin de cette période avec les pratiques chaldéennes et égyptiennes.

2/ La période grecque classique est intéressante à analyser :

α) du VI^e au IV^e siècle avant J.C. Développement de morceaux séparés : les sections coniques — les polyèdres réguliers — Thalès — Pythagore ...

β) Synthèse d'Euclide (fin du IV^e siècle),

3/ Géométrie projective :

α) Utilisation consciente par les peintres et les architectes (1505).

β) Desargues, 1639 seulement.

γ) Première synthèse en 1847 par Staudt puis Darboux et Enriques vers 1900.

4/ La topologie générale :

XIX^e siècle : Cauchy, Gauss, Riemann.

XX^e siècle : Fréchet, Hausdorff, H. Cartan.

Et les diverses topologies algébriques et combinatoires : Poincaré 1895, Huvericz 1935, Eilenberg 1944, Whitney 1935, Thom 1953.

Vous remarquerez que l'ordre 1), 2), 3), 4) est, en gros, l'ordre opposé à celui de l'appréhension dans la phase sensori-motrice du a).

c) *La tradition de l'enseignement de la géométrie :*

J'essaie d'abord de préciser cette notion de tradition. De la pratique récente, une partie s'incorporera à la tradition, une autre sera rejetée. A titre d'exemple, mon avis personnel est que, dans nos programmes du 1^{er} cycle de 1970, l'utilisation du langage ensembliste et de l'esprit ensembliste sera conservée, tandis que la prétention de donner un exposé axiomatique (global) de la géométrie sera rejetée. Ceci pour dire que la tradition n'est pas la photographie sans retouche des pratiques d'aujourd'hui. Je me reporte donc à une période un peu ancienne en éliminant ce qui n'a été que passager.

1/ A l'école élémentaire, description de situations simples et usage d'un langage simple.

2/ Au premier cycle : première étude déductive de la géométrie plane euclidienne. Les fondements sont mauvais (et c'est inconscient), la notion de figures "égales" s'appuie sur la superposabilité qui n'est pas analysée. Après l'obtention des cas d'égalité, dont on abuse, les choses tournent progressivement de mieux en mieux. Les points forts sont : Thalès, Pythagore, Droites concourantes liées au triangle.

On rencontre la notion de tangente à propos du cercle.

3/ Au deuxième cycle : en seconde, la tradition était de faire un retour pour mieux fonder la géométrie. L'orientation apportait une amélioration essentielle mais l'ambiguïté de la superposabilité demeurait. Des compléments (divisions et faisceaux harmoniques par exemple) s'y ajoutaient.

En première : géométrie à 3 dimensions, cinématique.

En terminale : retour sur la notion de superposabilité avec les déplacements. Le cercle vicieux est explicitement fermé mais l'éloignement dans le temps l'empêche d'être trop visible.

Les coniques (chapitre hypertrophié).

Les transformations (ponctuelles surtout).

Au cours de ce cycle (peut-être en liaison avec l'analyse) apparaît la notion de point à l'infini. La notion de tangente est affinée :

- α) dans la direction géométrie différentielle en liaison avec l'analyse et les dérivées
- β) dans la direction géométrie algébrique et projective (tangentes aux coniques).

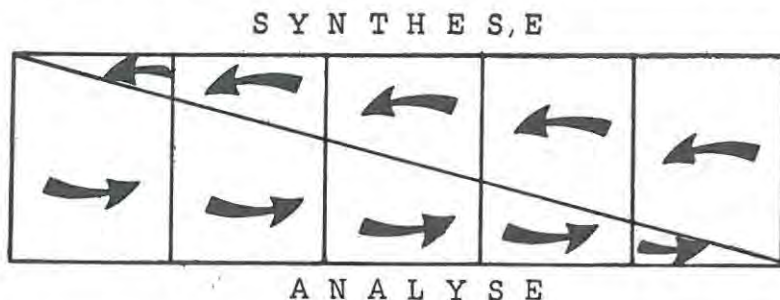
Les trois phases

Ces considérations étant posées, je propose de progresser vers la maîtrise d'une partie donnée, la géométrie euclidienne à deux dimensions par exemple, en trois phases.

Première phase : bricolage et constitution d'une collection de situations ; ce travail se fait à l'école mais aussi dans la vie courante (en jouant, en regardant la télé,...).

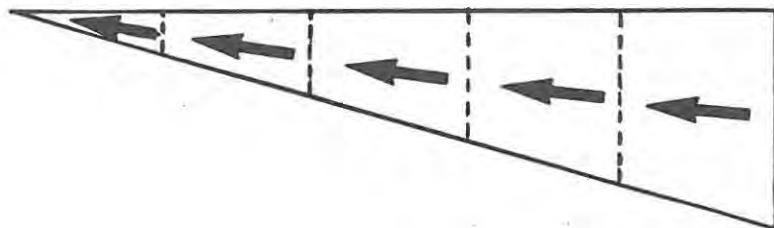
Dans l'exemple, l'essentiel de cette phase a lieu à l'école élémentaire. Elle est rappelée et homogénéisée dans le premier cycle en quatrième et troisième.

Deuxième phase : séparée de la première par quelques mois (ou par beaucoup plus de temps). C'est une phase de mise en ordre. Analyse et synthèse par morceaux au fur et à mesure de l'analyse. Progressivement, la partie analyse perd de l'importance (en durée) et la partie synthèse en prend. Je propose le schéma suivant :



Pour l'exemple, les blocs juxtaposés sont les flots successifs dans les modules de notre progression clermontoise en quatrième et troisième.

Troisième phase : séparée de la deuxième par quelques mois. C'est une phase de synthèse. Elle consiste en la présentation cohérente et globale des synthèses par morceaux de la phase précédente :



Il y a évidemment des raccords, des mises au point et des changements à faire.

Pour l'exemple, je la situe en seconde scientifique.

Le réinvestissement n'attend pas que la troisième phase soit abordée et à plus forte raison achevée mais après la troisième phase il prend une puissance infiniment supérieure.

L'organisation dans le temps des diverses parties et des phases pour chacune.

Dans quel ordre les diverses parties (topologique, projectif, affine et euclidien, différentiel, etc...) doivent-elles accéder à la mathématisation ?

Les propositions que je fais ne constituent qu'une ébauche. Je les crois conformes aux données de la psychologie génétique. Elles s'appuient sur la tradition qu'elles ne cherchent à modifier que lorsque des raisons sérieuses l'exigent (il en est peut-être ainsi pour les objectifs assignés à la période école moyenne).

Tranche d'âge zéro : avant les opérations abstraites, tout reste à la phase 1. Les notions apparaissent dans l'ordre de la psychologie génétique : topologique, projectif, affine, métrique. Ces objets se recouvrent successivement. Je veux dire que les premiers acquis sont disponibles mais comme enfouis dans le subconscient.

Tranche d'âge zéro : avant les opérations abstraites, tout reste à la phase 1. Les notions apparaissent dans l'ordre de la psychologie génétique : topologique, projectif, affine, métrique. Ces objets se recouvrent successivement. Je veux dire que les premiers acquis sont enfouis dans le subconscient.

Tranche d'âge 1 : première tranche après l'acquisition des opérations abstraites (ceci me paraît trop schématique).

La phase 2 peut débiter. Elle prend pour objets les dernières acquisitions de la tranche précédente, c'est-à-dire le métrique et l'anne (ce qui est resté conscient).

La phase 1 continue simultanément ; elle intègre, me semble-t-il, les premières notions différentielles (tangente au cercle, vitesse) (mais la vitesse n'est-elle pas disponible plus tôt ?).

Les parties enfouies de la première tranche d'âge doivent être utilisées (au niveau conceptuel élémentaire, c'est-à-dire intuitivement) sans problème (et sans réticence sous peine de refoulement).

Tranche d'âge 2 : la phase 3 débute sur les objets sortant de la phase 2.

La phase 2 prend en considération deux sortes d'objets :

- a) ceux qui viennent d'être intégrés à la phase 1 : le différentiel. La notion de tangente est précisée.
- b) celui qui est maintenant "découvert" (accessible au conscient) dans l'acquis de la tranche d'âge zéro : le projectif (notion de point à l'infini dans une direction).

La phase 1 continue. Elle intègre de nouveaux objets (peut-être les ensembles de fonctions en tant qu'espace géométrique).

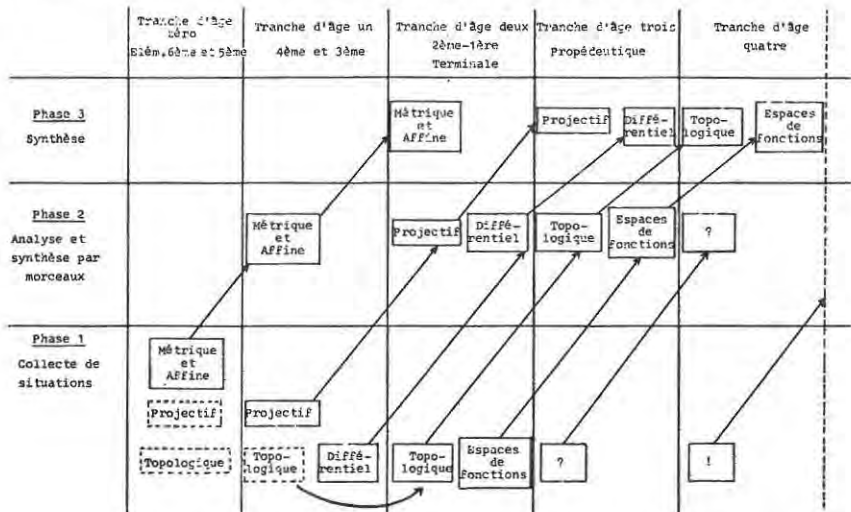
Tranche d'âge 3 : même schéma.

Macro et micro-phases (essai de science-fiction)

Les objets mathématiques synthétisés aux diverses tranches d'âge se composent eux-mêmes comme les blocs. A partir d'un moment dans la progression, une grande synthèse apparaîtra peut-être souhaitable.

De même, au cours de la deuxième phase, une observation attentive montrerait pour chaque bloc un agencement en micro-blocs suivant la même architecture.

J'ai une conscience aiguë de l'imprécision de ces propositions. Je compte sur vous pour m'aider à préciser les points obscurs.



3 - AINSI PASSENT LES PROGRAMMES

par André REVUZ

J'ai spontanément les plus grandes difficultés à me passionner pour la lettre d'un programme. Lire un programme de mathématiques me donne toujours l'impression d'entrer dans une salle de dissection. Je souhaiterais volontiers le dépérissement des programmes, à l'instar de ceux qui prévoient le dépérissement de l'Etat, si cet exemple ne me faisait craindre qu'à rechercher maladroitement le dépérissement des programmes on n'aboutisse qu'à les rendre plus rigides et plus contraignants : certaines des attaques auxquelles ont été soumis les programmes actuellement en vigueur m'ont persuadé que cette crainte n'était pas vaine. Trop nombreux sont ceux qui se sont crus contraints par ce qui n'était pas réellement contraignant, mais leur posait problème, et auraient voulu être contraints à faire ce qui leur paraissait facile. L'Etat et les programmes ne dépériront que s'il existe suffisamment de citoyens prêts à agir en responsables, et si leur dévouement potentiel n'est pas paralysé par une autorité méfiante.

Dans la situation de l'enseignement mathématique dans un pays donné à un moment donné, interviennent les programmes, les manuels qui en proposent une interprétation et les maîtres qui, au contact immédiat des élèves, ont la mission décisive de développer leur intelligence et leur liberté intellectuelle.

On pourrait être tenté de dire que de la qualité des programmes, de celle des manuels et de la culture des maîtres, c'est le dernier facteur qui est de loin tellement plus important qu'il rend les autres négligeables. La réalité est moins simple, car ces divers facteurs réagissent fortement les uns sur les autres et ce n'est que dans une perspective dynamique que l'on peut tenter d'apprécier un programme. Il est à la fois repère d'une situation moyenne et indication d'un sens d'évolution.

Il faut donc se résigner à écrire des programmes et à discuter de programmes ; mais une fois pris dans l'engrenage, on est vite amené à gravement peser la valeur des virgules et à s'interroger sur l'ordre des mots, puisque certains exégètes y vont chercher des intentions que les auteurs n'avaient pas.

Ce que l'on peut cependant faire dès maintenant, c'est récuser la conception juridique étroite des programmes, qu'elle se réfère à un droit écrit (conforme aux habitudes françaises) ou à un droit coutumier (plus fréquent dans les pays anglo-saxons). Le programme est parfois perçu comme la liste de ce que l'élève doit savoir (et par complémentarité, de ce qu'il doit ignorer, car n'est-il pas souvent considéré comme malséant de savoir ce qui est hors du programme ?). Je reste toujours perplexe devant des énoncés du type : telle question n'est pas au programme. Et si elle était la meilleure clé de certaines questions qui, elles, y figurent explicitement ? Mon expérience d'élève m'a appris que bien souvent ce n'est qu'en sortant de la lettre du programme que j'en comprenais l'esprit. D'autre part que veut dire : savoir tout le programme ? Il est toujours possible, en se tenant strictement à la lettre du programme, de poser des questions très difficiles (et ce, peut-être d'autant plus que le programme est plus élémentaire).

Autrement dit, autour du programme, texte législatif, se crée toute une jurisprudence, à base notamment de manuels et de textes d'examens, qui renvoie vers le droit coutumier la réalité du programme. Faut-il donc se contenter d'un tel statut pour les programmes : je ne le pense pas, car il est dangereux par l'immobilisme qu'il favorise. Le programme écrit, dans la mesure où il s'oppose à ce qui était en passe de devenir une routine, peut avoir un effet salutaire.

Un bon programme doit demander un effort aux maîtres, les inciter à approfondir leur culture et ne pas se laisser endormir dans les habitudes du programme "coutumier". Il doit provoquer la réflexion et la discussion. Il doit tenir compte de l'évolution de la Science qui n'est pas empilement de connaissances, mais est à la fois organisation rationnelle de l'acquis et synthèse des activités intellectuelles dont le développement doit permettre d'attaquer l'encore inconnu.

Un programme ne doit surtout pas se présenter comme définitif. S'il représente dans l'évolution de l'enseignement une position et une vitesse, il n'a qu'une valeur instantanée. Instantanée, entendons-nous bien, à l'échelle de temps du changement des mentalités. Actuellement une validité moyenne de dix ans paraît raisonnable. La commission Lichnérowicz avait souhaité une révision périodique tous les quatre ans : c'était certainement trop court. La révision qui est en court risque elle-même d'être prématurée, pour ne rien dire des circonstances dans lesquelles elle

s'effectue. La commission n'avait pas eu le temps de prévoir une procédure de révision. A vrai dire, je n'en vois pas qui puisse être pleinement satisfaisante tant qu'il n'y aura pas un échange suffisamment actif et lucide d'informations, de réflexions, de propositions concrètes à discuter et à expérimenter dans le corps de tous les professeurs de mathématiques de tous les niveaux et avant que se soient tempérés le poujadisme des uns, l'élitisme des autres, l'autoritarisme de certains et le conservatisme de presque tous, qui sous-tend les déclarations les plus contradictoires et parfois les plus apparemment progressistes.

Ces propos généraux peuvent être illustrés par l'exemple des derniers programmes de géométrie du premier cycle : celui d'avant 70 et celui de 70. Le premier est l'exemple typique du programme routinier. Sa référence à Euclide était une injure à ce dernier, dont il prolongeait les maladresses sans en préserver la solidité. Ce programme a été et demeure unanimement condamné. Il est inutile de s'y appesantir.

Celui de 70 a soulevé des discussions passionnées, dont il faut en définitive se réjouir, même si la passion s'est fréquemment déchaînée au détriment de la lucidité et si chacun a plus facilement vu les faiblesses de la position d'autrui que de la sienne, et même si, dans de nombreux cas, on peut se demander si les oppositions étaient vraiment aussi fondamentales que la vigueur de certains propos voulaient le faire croire.

Ces discussions continueront encore, mais j'espère qu'un consensus assez large et assez souple ne tardera pas trop à s'établir et que les problèmes de l'enseignement de la géométrie ne monopoliseront plus l'attention aux dépens d'autres questions non moins fondamentales (la notion d'approximation, base de toute étude sérieuse de l'analyse, la notion de probabilités, entre autres...).

J'aimerais, mais je n'en ai ni le temps, ni les moyens, ni les talents, faire un travail de sociologue sur la manière dont ce programme a été compris (c'est-à-dire aussi incompris ou mal compris) et sur l'évolution des mentalités qu'il a contribué à provoquer. Parmi les questions que je me poserais volontiers figurent : combien de professeurs en ont pris une connaissance directe (autrement que par l'intermédiaire d'un manuel) ? Comment la lettre du programme, résultat d'un laborieux compromis, a-t-elle été interprétée et comment ces interprétations ont-elles

évolué au cours du temps ? Comment, sur un certain nombre de points précis, s'est soldé le conflit entre une interprétation très littérale et une compréhension plus globale, ou entre l'aspect technique et l'aspect conceptuel ? Quels ont été les différents courants de pensée qui ont transformé les mentalités (y compris les courants immobiles !), ceux qui se sont manifestés et qu'il est assez facile de répertorier et d'analyser, et ceux qui sont restés, individuellement ou collectivement, inconscients et qui sont peut-être les plus importants ?

Le programme de 70 était, dans l'esprit de ceux que j'appellerais modestement les plus lucides de ses auteurs, un programme de transition avec un objectif immédiat : donner clairement à la géométrie le statut épistémologique qui est le sien, de théorie physique, et un objectif plus lointain : diffuser l'idée que le modèle le plus opérationnel de la réalité qu'elle étudie est celui d'un espace affine sur un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3 et muni d'un produit scalaire.

Quand je dis "donner clairement", je pense plus à l'intention, qu'hélas !, à la réalisation (1). Car la distinction qui a été proposée entre droite ou plan physique et droite ou plan mathématique n'est rien moins que claire. Et déclarer que la géométrie est une théorie mathématique a peut-être une valeur dans les querelles de boutiques entre vendeurs de mathématiques et vendeurs de physique, les uns ayant le monopole de la géométrie et les autres celui de la thermodynamique par exemple, avec des tolérances variables en ce qui concerne la mécanique ou l'optique géométrique, mais cela me paraît finalement un contresens épistémologique.

Une théorie physique est l'étude d'un modèle mathématique d'une certaine partie ou de certains aspects du monde réel. Le modèle mathématique est, pour employer un langage moderne, constitué d'un ensemble muni d'une structure. La théorie mathématique au sens strict correspond à une abstraction supplémentaire : on peut la définir commodément, en employant le langage moderne, comme l'étude d'une structure et de ses morphismes. Sans doute dans le cas de la géométrie euclidienne se trouve-t-on dans un cas particulier : il y a pour chaque dimension une seule structure

(1) Je tiens à préciser pour couper court à toute interprétation tendancieuse que si j'é mets certaines remarques critiques à l'égard du travail de la commission, cela ne signifie nullement que je veuille le moins du monde m'en désolidariser. Elle a travaillé très sérieusement, dans des conditions qui ne furent pas toujours (sinon presque jamais) faciles. Mais les attitudes simplistes qui veulent faire de son travail une Bible ou un traité de Magie noire ne seront jamais les miennes.

euclidienne, aussi peut-on dire que l'on passe dans ce cas de plain pied de la théorie physique à la théorie mathématique. Cependant, du point de vue didactique, c'est en tant que théorie physique que la géométrie fait problème et c'est le statut de vérité de ses propositions qui, lorsqu'il demeure confus (et Dieu sait si c'était le cas avec les "vieux" programmes et si cela le demeure encore dans de nombreux esprits) crée un blocage difficilement surmontable.

Je pense qu'ici quelques commentaires, qu'il faudrait peut-être développer beaucoup plus, sont indispensables. J'ai distingué plus haut trois univers dans lesquels se déploie la démarche scientifique : l'univers réel, dans sa complexité inépuisable et son opacité difficile à percer ; l'univers des modèles mathématiques ; l'univers des théories mathématiques. Il y a dans la démarche scientifique passage incessant, en va et vient, d'un univers à l'autre : on peut donner des noms à ces passages et en étudier les modalités, les obstacles, les adjuvants. Ce qu'il me paraît important de souligner ici, parce que cela demeure largement méconnu, c'est que le niveau où se place spontanément l'être humain lorsqu'il est en situation dans le monde, c'est celui des modèles (qui, certes, au départ ne sont pas très mathématiques). Observez vos semblables lorsqu'ils sont confrontés à un événement quelconque : y en a-t-il un qui n'ait sa petite explication, c'est-à-dire son petit modèle ? Bien sûr tous ces modèles spontanés sont-ils le plus souvent à la fois logiquement incohérents et peu adéquats sinon totalement inadéquats à la réalité et c'est toute la difficulté, toute l'efficacité et la noblesse de la démarche scientifique que de substituer à ces modèles spontanés des modèles qui soient à la fois plus cohérents et plus adéquats à la réalité. Confronter le modèle à la réalité, c'est-à-dire expérimenter, est une des faces de l'activité scientifique, l'autre étant de constituer des ensembles cohérents aussi vastes que possible de modèles adéquats.

L'illusion du sens commun est de ne pas distinguer le modèle, fruste ou plus élaboré, de la réalité et de croire que celle-ci se laisse appréhender directement et facilement dans sa totalité. C'est la même illusion qui se manifeste sous une forme plus élaborée, lorsque, décrivant fidèlement la démarche scientifique comme passage de l'univers réel au modèle par l'observation, du modèle à la théorie par abstraction et en sens inverse de la théorie au modèle par spécialisation et du modèle à la réalité par expérimentation, on oublie qu'originellement c'est le modèle qui est présent à la

conscience de l'homme. L'homme est une bête qui fait des théories, comme c'est le seul animal qui se soit mis des anneaux dans le nez, aux doigts, aux oreilles. On peut s'en réjouir ou le déplorer, mais le problème clé c'est d'abord de lui faire prendre conscience qu'il fabrique spontanément des théories, qui ne sont, à coup sûr, pas des descriptions fidèles de la réalité, puis de chercher comment obtenir des théories cohérentes et de plus en plus adéquates à la réalité.

Aussi est-ce se condamner à errer sans fin que de chercher des droites dans le monde physique et non pas dans sa tête à l'occasion de son action dans le monde. Et c'est aussi se condamner à errer sans fin que de vouloir définir les droites une par une et non la structure globale dans laquelle il y aura des choses qui seront des droites.

Il est bien vrai que le célèbre fil tendu nous donne l'idée d'une droite sans être lui-même rectiligne (un fil matériel dans le champ de la pesanteur et non vertical ne sera rectiligne que si sa tension est infinie, c'est-à-dire qu'il aura cassé avant !). Il s'agit donc bien de décrire clairement et de préciser les modèles que nous formons spontanément dans les situations où nous nous trouvons et de vérifier ensuite si les objets réels sont bien représentés par ces modèles : ils ne le seront jamais qu'avec une certaine marge, négligeable dans certaines circonstances, non négligeables dans d'autres. Plus la précision des mesures s'accroît, moins il y a d'objets rectilignes (les rayons lumineux eux-mêmes se courbent au voisinage des masses !), d'objets plans ou d'objets sphériques et en sens inverse les progrès technologiques permettent d'en réaliser qui se rapprochent de plus en plus du modèle idéal, sans jamais le réaliser vraiment. Il n'est pas très difficile de concevoir un plan, il est pratiquement impossible de réaliser un morceau de "vrai plan". Aussi est-ce une impasse de vouloir distinguer une droite physique et une droite mathématique et surtout, l'ayant fait, de vouloir, de ces deux prétendus concepts, fonder le second sur le premier. Cela ne veut pas dire bien sûr qu'observation et expérimentation doivent être proscrites : elles doivent au contraire être utilisées, mais encore ne faut-il pas vouloir leur faire produire ce qui n'est pas de leur ressort.

Et cela apparaît clairement quand on fait fonctionner le modèle mathématique, c'est-à-dire que l'on y découvre des propriétés dont la vérité dans le modèle est contrôlée par la démarche

déductive et auxquelles devront correspondre dans la réalité des propriétés dont la vérité est contrôlée — avec une marge d'incertitude — par l'expérimentation.

Mais on ne peut pas tout démontrer. J'ai de bonnes raisons de croire que cette vérité si banale n'est pas aussi répandue qu'on pourrait le croire et que sa méconnaissance est pour beaucoup dans les difficultés que rencontre l'enseignement élémentaire de la géométrie.

Dans une classe de quatrième, où le professeur faisait étudier les premières conséquences d'un nouvel axiome récemment introduit, j'ai perçu un malaise chez les élèves et je leur ai posé la question : "A votre avis, démontre-t-on tout en mathématique ?" La réponse unanime, immédiate et enthousiaste fut : "oui !". Je n'eus pas de peine à les convaincre que c'était impossible et qu'en remontant la chaîne des démonstrations, il fallait bien arriver à des propositions qui n'auraient pas été démontrées et qu'il fallait donc admettre. La classe m'écouta avec une attention profonde, puis demeura silencieuse. Quelques instants plus tard, une élève déclara : "Mais alors, pourquoi ne pas tout admettre ?". Admirable question (mais c'est une expérience maintes fois vécue que, lorsqu'on s'adresse honnêtement aux élèves, ils posent des questions que l'on n'aurait osé espérer !) qui leur valut la réponse que vous devinez, que ce qui était remarquable, c'est qu'en admettant certaines propriétés suggérées (et non démontrées) par l'observation, on pouvait conclure à la nécessité d'autres déjà observées ou que l'on observera. D'où la mise en évidence claire du rôle des axiomes : points de départ d'un processus déductif, arbitraire quant à ce processus lui-même, mais correspondant dans le modèle à des situations observées dans la réalité et permettant d'aboutir à des situations observées ou observables (faute de quoi, il faudrait s'interroger sur la valeur de la théorie ; mais cet aspect ne peut malheureusement, faute d'exemples, pas être facilement évoqué en quatrième).

Des expériences analogues (dont certaines dans des quatrièmes "aménagées") m'ont convaincu qu'il était relativement facile de faire comprendre aux élèves le rôle et le statut des axiomes et de les placer dans une situation épistémologique saine à l'égard de la théorie physique qu'est la géométrie. "Relativement" facile, parce qu'il paraît bien que l'intervention que j'ai décrite plus haut ne pouvait pas être programmée à l'avance. Il serait parfaitement

illusoire de la présenter comme une introduction au cours de géométrie : il faut attendre patiemment que l'occasion se présente et savoir ne pas en dire plus que la classe n'est prête à en entendre. Il n'est pas nécessaire non plus de se répandre en longs développements, si l'on sait sentir le moment où le problème se pose à la classe. La difficulté est qu'il se pose de façon inconsciente pour les élèves. Il y a un moment où la classe est réceptive, mais elle ne le dit bien sûr pas et même pour quelqu'un qui s'en tiendrait superficiellement aux signes extérieurs de l'attention, elle peut ne pas le paraître du tout.

Ma conviction largement confirmée par l'excellent livre intitulé *Jeometri*, qu'une équipe grenobloise a publié chez CEDIC, est qu'il est parfaitement possible de faire comprendre aux élèves le statut épistémologique de la géométrie, c'est-à-dire en particulier le statut des axiomes, ou, pour employer un langage moins pompeux, la différence entre ce que l'on admet "pour" des "raisons" d'une certaine nature et ce que l'on démontre "par" des "raisons" d'une autre nature. Et les objections sur le ridicule qu'il y aurait à faire démontrer des propriétés "évidentes" par des propriétés qui ne le seraient pas plus, sinon moins, reposent sur une confusion entre deux sens de l'évidence. Est-ce l'évidence d'observation ou l'évidence de déduction ? Dès l'instant que l'on a remarqué qu'il était possible de lier nécessairement certaines propriétés à d'autres, leur évidence d'observation passe au second plan, à moins qu'elle ne rende encore plus piquante l'existence d'un lien logique entre elles. Et si évident veut dire vérifiable par un dessin soigneusement exécuté, y a-t-il en géométrie plane des propriétés non évidentes ? Remarquons, en outre, que les axiomes des théories de la physique qu'il est d'usage de baptiser "principes" ou "hypothèses" sont en général des propriétés si peu évidentes qu'elles ne sont pas expérimentalement vérifiables, mais que leurs conséquences, déduites dans la théorie, sont, elles, vérifiables, donc à ce titre plus "évidentes".

Je ne suis pas sûr non plus que l'opposition faite par certains entre axiomatique globale et axiomatique locale corresponde à un problème essentiel. Car, ou bien on est resté dans la confusion entre la vérité expérimentale et la vérité au sein d'une déduction et à ce moment-là, il n'y a plus axiomatique, ni locale, ni globale ; ou bien chaque portion de théorie a reçu ses axiomes ad hoc et on peut se demander, comme l'élève citée plus haut, "Pourquoi ne pas tout admettre ?" ; ou bien la distinction a été faite et il n'est pas

plus difficile et il est à coup sûr plus rassurant pour l'esprit de connaître un certain nombre de ces propriétés fondamentales dont on peut déduire toutes les autres, même en laissant provisoirement ouverte la question de savoir si celles qui ont été retenues ne sont pas surabondantes (et elles peuvent l'être sans grand dommage), que de penser que, dans chaque nouvelle question, il va peut-être falloir introduire de nouveaux axiomes. Et si l'on me dit que l'esprit qui veut être rassuré ici est celui du mathématicien et non celui de l'enfant, je rétorquerai que c'est comme élève de seconde que j'ai pris conscience du caractère fallacieux de l'enseignement qui m'était présenté et que s'il m'est arrivé de constater des différences entre les exigences logiques des enfants et celles des adultes, ce ne fut jamais au profit des adultes. Je hais le racisme hypocrite à l'égard des enfants qui incite certains à leur parler "petit nègre" (vestige d'un autre racisme) ou à leur proposer de la "petite logique".

Pour reprendre l'exemple des classes dont j'ai parlé plus haut et dont certaines étaient officiellement médiocres, j'espère qu'elles ont acquis une vue juste de l'intérêt et des *limites* d'une théorie déductive, mais je ne prétends pas qu'elles aient acquis une virtuosité considérable, ni que la plupart de leurs élèves manifesteront jamais en géométrie une imagination exubérante. Mais ceci est un autre problème : s'il n'est pas possible de faire de tous nos élèves des mathématiciens même moyens, il me paraît capital de leur donner une vue juste sur ce qu'est une science et de leur éviter de tomber dans les mystifications du type "l'ordinateur a prouvé que..." ou "la théorie économique a prouvé que...", en leur montrant qu'une théorie déductive n'a de valeur que par sa cohérence interne et par la pertinence de ses axiomes, qui ne sont en aucun cas des vérités absolues et intangibles. Le refus de l'axiomatique ne serait-il pas une attitude profondément réactionnaire ? Je suis encore assez naïf pour m'étonner de la rencontrer chez certains collègues qui se disent de gauche.

Cette forte déclaration ne résout malheureusement pas tous les problèmes. Et en particulier celui-ci, autour duquel tournent finalement la plupart des discussions et prises de position : le bon outillage pour étudier la géométrie comprend les notions d'espace vectoriel, de produit scalaire, de groupe de transformations ; mais ces notions sont des conquêtes relativement récentes (moins de deux siècles) de l'humanité et à ce titre sont encore considérées par beaucoup comme n'étant ni "naturelles" ni "élémentaires".

D'où la préférence très répandue pour des notions réputées plus naturelles, à partir desquelles on reconstruit pas à pas les précédentes. C'est ainsi que l'aspect métrique de la géométrie euclidienne a fait l'objet, ces dernières années, notamment dans les IREM, de nombreuses études et publications où chaque auteur ou groupe d'auteurs cherchait une présentation "naturelle". Outre le plaisir qu'ils y ont pris et l'intérêt (cf. le laboureur et ses enfants !) qu'il y a toujours à retourner son champ, ces efforts ont eu le grand mérite de faire comprendre la relativité extrême de la notion de "naturel".

Le problème pédagogique clé est d'une part de donner une motivation raisonnable des notions d'espace vectoriel, de produit scalaire, de groupe de transformations, en mettant bien en évidence leur efficacité et de déterminer à partir de quel moment la déduction est vraiment enclenchée.

Plusieurs attitudes peuvent être envisagées :

1. On peut sélectionner certaines propriétés que l'on trouve "évidentes" ou "naturelles" et à partir d'elles commencer immédiatement la déduction : c'était le parti pris par les exposés inspirés d'Euclide et ce fut encore le parti pris par le programme de 70, avec cette nuance capitale cependant que le cap était mis dès le départ sur la notion d'espace vectoriel et de produit scalaire (mais avec cette restriction importante que la symétrie du produit scalaire était un peu introduite par la bande et que le programme s'est montré trop timide pour introduire explicitement le produit scalaire qu'il avait pourtant à portée de la main).

Ce qui a motivé ce choix de programme a été l'idée de préparer une transition entre les habitudes anciennes et un exposé utilisant à plein les bons outils. Un des inconvénients est de se livrer à l'édification de cet échafaudage préalable critiqué par Dieudonné et de donner à l'exposé une raideur qui conduit à l'une des deux situations suivantes :

a) traiter des propriétés affines d'abord et mettre provisoirement entre parenthèses la notion de distance

b) introduire la distance avant la structure affine et l'utiliser pour retrouver cette dernière.

Le point de vue b) était celui de programmes mis au point dans une première phase par la commission Lichnérowicz : il ne peut donner lieu à un exposé simple. La distance euclidienne dérive

d'une norme et pas d'une norme quelconque. Vouloir l'ignorer, par respect de la tradition, ou vouloir l'oublier, c'est inévitablement se compliquer la tâche.

Le point de vue a) a finalement été adopté par la commission. On peut le défendre en remarquant qu'il conduit à un exposé techniquement plus simple et qu'il permet d'introduire ensuite dans son bon cadre la distance euclidienne. On peut l'attaquer en lui reprochant de confiner le début de l'étude dans une structure pauvre. Et beaucoup ressentent comme une monstruosité la mise entre parenthèses, qui dure une année, de la notion de distance. Il ne faudrait pas oublier cependant que toute théorie scientifique procède par mise entre parenthèses d'aspects fondamentaux de la réalité : la mise entre parenthèses du temps à laquelle procède la géométrie n'est-elle pas aussi mutilante et peut-être plus grave, car elle n'est même pas signalée dans le discours habituel des cours de mathématiques et elle dure beaucoup plus longtemps dans notre pratique actuelle. Elle est, en particulier, à l'origine des confusions tenaces entre mouvements et transformations géométriques. Que penser aussi de la mise entre parenthèses du champ de gravitation, quand on se rappelle qu'étymologiquement perpendiculaire dérive de *perpendicularum* (fil à plomb) et se réfère à l'orthogonalité d'un gradient et d'une surface de niveau ?

L'acceptation ou le refus de certaines mises entre parenthèses me paraît donc plus relever d'une fidélité à une tradition qu'à une prise de conscience claire de la démarche scientifique. Est-il déraisonnable de souhaiter que ces mises entre parenthèses, qui sont un aspect indispensable de cette démarche, soient traitées sans discrimination, donc toutes tolérées, mais toutes explicitement annoncées et qu'aucune ne soit abusivement prolongée ?

2. On peut, à l'opposé, consacrer un temps important à l'observation des faits et attendre d'en avoir amassé suffisamment pour introduire les bonnes notions opératoires et être d'emblée dans la bonne situation, à la fois mathématiquement saine et fidèle à une assez riche réalité observée. C'est ce que me paraît réaliser de façon très intéressante le livre de Jeometri déjà cité, pour la structure affine. Un travail analogue pour la structure euclidienne est certainement possible et hautement souhaitable.

3. On peut aussi chercher une voie moyenne entre les points de vue 1 et 2. C'est sans doute ce que cherchent ceux qui défendent une axiomatique locale, ou ceux qui préconisent un développement du type 1, mais en admettant éventuellement de nombreux

résultats. L'avantage serait de pouvoir intéresser les élèves à des situations réputées plus riches et étudiées individuellement. L'inconvénient est le danger de tomber dans le fouillis et de ne pas avoir le temps de mettre en valeur, au moyen d'une synthèse ultérieure qui, bien sûr, demeure théoriquement possible, mais ne sera jamais ni automatique ni instantanée, les quelques idées simples et efficaces dont l'acquisition constitue la culture qu'il s'agit de donner aux élèves.

Mes préférences vont à la voie 2. Elle a l'avantage de pouvoir être préparée très directement dans les classes précédentes du premier cycle et à l'école primaire, de mettre en oeuvre d'emblée les bons outils mathématiques et d'échapper plus facilement que les autres aux ambiguïtés épistémologiques.

Le programme de 70 se voulait transitoire. S'il a péché, ce fut peut-être surtout par timidité. Les demi-audaces peuvent être plus choquantes que l'audace qui s'assume entièrement. Mais il aurait de toutes façons fait l'objet d'attaques violentes et peut-être valait-il mieux qu'il conservât des lourdeurs propres à faire souhaiter le remplacement des méthodes qu'il suggérait par de plus puissantes et de plus directes.

Que seront ses successeurs ? N'étant, cette fois, pas impliqué dans leur rédaction, je peux m'offrir le plaisir, apparemment si recherché, de donner des avis sans avoir la peine d'essayer de les mettre en application.

La nécessité d'un programme, c'est avant tout de permettre à chaque professeur de pouvoir compter sur un certain acquis chez les élèves qu'il reçoit en début d'année, à charge pour lui de rendre la politesse aux collègues qui le suivront : d'où le découpage en tranches annuelles qui correspondent à notre organisation scolaire. Mais, sur cette base "administrativement naturelle", le découpage se transforme facilement en cloisonnement, que le regroupement des années par couples atténue peut-être à l'intérieur d'un couple, mais renforce incontestablement d'un couple à l'autre et plus encore d'un cycle à l'autre (où la séparation géographique des établissements et celle des personnels ajoutent leurs poids).

Qu'on le veuille ou non le programme annuel tend à faire de chaque année un petit univers clos. Quel est le remède ?

Je pense que tous les rédacteurs, ainsi d'ailleurs que tous les lecteurs, de tous les programmes ont été plus ou moins victimes

de ce cloisonnement et qu'il ne serait peut-être pas mauvais de rédiger les programmes sous forme de tableaux carrés, dont les lignes correspondraient aux années et les colonnes au développement des idées au fil des années. Le simple tableau carré serait d'ailleurs encore trop simpliste et devrait s'agrémenter de flèches nombreuses représentant les connexions possibles ou souhaitables ; les lignes de démarcation du tableau ne devraient pas avoir la signification de cloisons étanches. Mais tout ceci, qui aérerait sans doute un peu l'atmosphère, ne serait rien sans la concertation et la collaboration de professeurs d'un même établissement ou d'établissements voisins (avec si possible des voisinages de plus en plus grands). Faciliter cette concertation est une tâche importante, qui est partiellement de nature administrative. Nombre d'I.R.E.M. s'y emploient et c'est sans doute une des parties les plus efficaces de leur travail, bien qu'une des moins spectaculaires.

Si le rôle essentiel des programmes est d'être un guide souple pour faciliter le passage des élèves d'un professeur à l'autre, il doit être rédigé de manière à laisser une véritable responsabilité à chaque professeur. C'est là une question très délicate. D'abord parce que chacun est prêt à rédiger un programme de façon à avoir la liberté de faire ce qui lui paraît bon et de dénier cette liberté aux autres. Or, il n'y a pas de question, et c'est particulièrement vrai de la géométrie, où il soit raisonnable de proposer une unique voie d'étude.

D'autre part il ne faudrait peut-être pas oublier que si l'on s'accorde à recommander une pédagogie active à l'égard des élèves, il faudrait peut-être en employer aussi une à l'égard des professeurs. Bien sûr le mot pédagogie paraît-il hors de propos lorsque les professeurs sont les destinataires du discours ; mais ne s'agit-il de la même relation humaine dans les deux cas : appel à la liberté et à l'effort individuel et collectif pour s'assimiler le meilleur du patrimoine culturel de l'humanité. Aussi tout discours dont la traduction en clair est : "vous avez complètement la liberté de penser exactement comme moi dans les plus petits détails", tout discours qui fait dogmatiquement appel à l'initiative en la canalisant étroitement, devrait-il être banni.

Et si la question est délicate, c'est qu'elle n'a pas qu'une face, qui serait, disons pour être bref, l'autoritarisme des faiseurs de programmes et des gardiens de programmes, mais c'est qu'elle en a une autre plus inquiétante.

Qui dit, en effet, liberté et initiative, dit aussi responsabilité. Or la fuite devant la responsabilité n'est pas un phénomène marginal. Quel est l'animateur d'I.R.E.M. qui n'a pas été au moins une fois confronté à la démoralisante demande d'une leçon modèle ? Le programme détaillé et contraignant a incontestablement un rôle sécurisant. Mais faut-il rentrer à fond dans ce jeu ? Ce n'est pas tant à ceux qui sont prêts à prendre leurs responsabilités que je pense, qu'à ceux qui la refusent et qu'il faudrait peut-être "jeter à l'eau", avec une bouée qui serait encore la concertation et la collaboration des professeurs, à condition qu'il s'agisse d'un véritable travail en équipe dans une atmosphère de pleine liberté intellectuelle ; c'est possible, cela existe. Tout devrait être fait pour que cela se développe.

Quant au programme lui-même, jusqu'où peut-on aller dans sa non directivité ? J'aimerais faire une enquête auprès de ceux qui participent de près ou de loin à l'enseignement des mathématiques pour connaître quelles seraient leurs réactions aux propositions de rédaction suivantes :

Première rédaction :

Quatrième : Structure affine du plan.

Troisième : Structure euclidienne du plan.

Seconde rédaction :

Quatrième et troisième : structure euclidienne du plan.

Une telle enquête serait certainement instructive et pour la rendre plus piquante à mes yeux, j'aimerais déposer préalablement chez un huissier l'éventail des réactions que je pense pouvoir escompter, en en situant l'origine. Je pourrais dès maintenant essayer de développer des arguments pour et des arguments contre, mais comme ce n'est certainement pas demain que de telles propositions risquent d'être acceptées, j'aime mieux laisser ce plaisir à mes lecteurs.

Car la réalité qui nous menace immédiatement, ce sont les horaires que vous savez, et avec eux, il ne peut y avoir de bon programme.

Pour défendre l'enseignement des mathématiques, les professeurs auront à fournir, dans ces conditions, un effort supplémentaire : s'ils le font ensemble et si la concertation active progresse, d'un mal sortira peut-être tout de même un bien.

4 - LE PAYS OU L'ON N'ARRIVE JAMAIS

Les programmes de 1970 dévoilaient aux enseignants de maths de quatrième et troisième un pays magnifique où tout n'était qu'ordre et beauté, luxe, calme... et volupté.

Beauté, volupté ?....

... La "Terre Promise" a été dure à nos élèves de quatrième et troisième, surtout pendant la première année d'application des "nouveaux programmes". Elle l'est restée partout où les professeurs ont ignoré *la circulaire de février 1973* (conquête de haute lutte par l'A.P.M. après une pétition nationale) ou l'ont sous-estimée et mal exploitée, partout où le métrique est interdit de séjour en quatrième sous quelque forme que ce soit.

Mais cela ne doit pas embellir pour autant une réalité antérieure où la géométrie de quatrième-troisième naissait dans le brouillard avec une accumulation de conventions non-explicitées et, en contre-partie, une profusion de panneaux indicateurs tout aussi sclérosante.

... Surtout, *le voyage en Terre Promise POURRAIT nous laisser quelques trésors :*

- volonté d'unité entre les enseignements de diverses branches des mathématiques ;
- attention plus réelle à la formation de l'esprit ;
- souci d'une plus grande honnêteté intellectuelle (préciser dans quel domaine on agit, ce qui est admis, posé en principe, conjecturé, démontré,...) et d'esprit critique ;
- recherche d'une mathématique à faire et non pas à imposer.....;
- certitude que les élèves les plus faibles ont aussi, et plus encore, besoin d'un tel type de formation ;
- prise de conscience qu'il s'agit prioritairement de conserver ou de donner le goût des mathématiques.

... *je dis bien "POURRAIT"...*

Il y faudrait d'abord :

- une claire définition d'objectifs opérationnels conformes au temps de la scolarité obligatoire et soucieux des diverses orientations,

- le refus d'ambitions démesurées,
- une "vraie" réforme de l'enseignement s'attaquant essentiellement aux méthodes et aux comportements,
- des "contenus mathématiques" autorisant le plus possible les élèves à agir et à faire, à concevoir et à réaliser, ce qui suppose que la quatrième-troisième se situe dans la ligne de la sixième-cinquième et de ses acquis géométriques (distance, orthogonalité,) expérimentaux,
- une individualisation de l'enseignement (Cf. Noyaux-Thèmes)

*
* *

L'Avant-projet de programme de géométrie de quatrième connu à ce jour ignore résolument, hélas, de telles espérances. (Cf. réactions A.P.M. du Bulletin n° 309).

De plus la Direction des Collèges supprime les recherches de géométrie de son ressort, les déclarant "inutiles" puisqu'il va y avoir changement de programmes...

Comme si celui-ci devait nous valoir, lui, sans l'ombre d'une hésitation, la vraie "Terre Promise", Eden où la réalité dépassera tout rêve ...!

C'est ignorer qu'un programme doit être périodiquement revu pour tenir compte :

- des bilans qui ont suivi son application
- des recherches en cours d'évaluation.

De là quelques nécessités :

- 1 *Des vagues successives de Recherches, utiles à long terme.*
- 2 *Une formation initiale et permanente qui leur soit liée, les I.R.E.M. étant le lieu privilégié de cette relation.*

Ainsi pourrait-on espérer un enseignement des mathématiques évolutif sans à-coups, toujours mieux référé à des objectifs sans cesse plus adéquats.

La Terre Promise ?

Il y faut bien des traversées de désert, et beaucoup de foi. Un chemin qui ne finit pas...

Heureux serons-nous si nos élèves "y vont vers eux-mêmes" !
Quoi d'autre ?

Irneh LIERAB
Agence de Voyages A.P.M.E.P.

5 - QUELLE GÉOMÉTRIE ?

par BARRA ; BLAY ; GRANGET ; GILBERT ; LE GUEDART ; MORIN ; RIEUX (I.R.E.M. de Poitiers)

Il semble à travers la lecture des manuels et des instructions que l'enseignement de la géométrie dans le premier cycle vise au moins deux objectifs :

— Montrer ce qu'est une théorie mathématique (et peut-être même montrer comment elle se construit) : "la géométrie née de l'expérience, devra apparaître comme une véritable théorie mathématique".

— Faire comprendre ce que sont des démonstrations.

Actuellement pour atteindre ces objectifs on opère, grosso modo, selon le schéma suivant : on part de la réalité des objets physiques (plan, droite, point) et on constate expérimentalement (et contemplativement) que ces objets vérifient certaines propriétés ; on les remplace par des objets mathématiques qui vérifient ces propriétés qu'on appelle alors des axiomes, l'argument avancé pour justifier ce remplacement étant l'imperfection des objets physiques ; on introduit les axiomes au fur et à mesure des besoins, c'est-à-dire lorsque l'adéquation du modèle mathématique à la réalité n'est pas complète ; on formalise aussitôt l'expérience faite.

On voudrait montrer ici combien la pratique courante, la pédagogie qui s'appuie sur ce schéma, ne permet pas d'atteindre les objectifs visés et qu'elle est source de grandes confusions pour l'enfant ; et on voudrait essayer de recenser les difficultés pédagogiques surajoutées par ce qui nous semble être une mauvaise présentation d'une théorie mathématique et de la géométrie en particulier.

I — CRITIQUES

1°) *Sur le fondement de la théorie ou sur objets physiques et mathématiques.*

Examinons d'abord un premier point, celui de la "réalité" des objets physiques. Si je veux savoir ce qu'est une droite physique j'apprends que c'est l'objet que j'imagine lorsque je regarde un fil

tendu supposé illimité, ou un rayon lumineux. Autrement dit il n'existe pas de droite physique dans la réalité (le rayon lumineux est aussi une abstraction) ; la droite physique est donc une abstraction dont je peux me faire une image mentale, celle suggérée par le fil illimité. Le point et le plan (physiques) n'ont pas plus de réalité. Certes on pourrait penser que la droite physique existe en réalité : n'entend-on pas des techniciens, des artisans, des ingénieurs, des physiciens, dire : tel objet est droit ? Mais sur quoi appuient-ils leur affirmation sinon sur l'idée commune que tout le monde a de la droite ou sur des définitions d'expérience : pour l'artisan un objet est un plan horizontal lorsque la bulle du niveau est bien dans le repère ; pour l'arpenteur un jalonnement est en ligne droite si visant le premier jalon avec son alidade il n'aperçoit pas les autres, etc... Mais tout physicien sait bien que le mouvement rectiligne à l'état pur n'existe pas dans la réalité, et que "les concepts de point géométrique ou de point matériel sont des abstractions mathématiques construites pour réaliser un modèle mathématique simple" comme cela est dit dans les avant-propos de livre de mécanique.

En tout cas les objets matériels, qui classiquement sont censés nous donner les notions de droite, de plan (fil tendu, mur, table...) sont des objets créés par l'homme ; sont-ce eux qui ont permis la genèse de ces notions, ou au contraire ne sont-ils pas déjà des représentations matérielles d'un concept ? Est-ce la règle qui donne l'idée de droite, ou est-ce que la règle est un instrument qui va permettre de matérialiser le concept de droite pour mieux agir sur la réalité ?

On pourrait effectivement discuter sur la manière dont l'enfant, dès son plus jeune âge, intériorise le concept de droite dont il rencontre des représentations dans son vécu quotidien. Mais cette discussion importe peu ici, car il est certain que l'élève qui arrive en quatrième a implicitement la notion de droite (n'oublions pas en plus le programme de sixième). On peut même dire que pour lui une droite, c'est l'arête d'une règle, c'est un fil tendu, etc., ce qui va compliquer notre tâche puisqu'il va falloir lui apprendre que ce qu'il appelle droite n'est pour le mathématicien qu'une représentation matérielle d'un concept.

Il paraît donc inutile et même dangereux d'essayer à ce niveau d'expliquer la naissance des concepts primitifs à partir de la réalité, car cet essai amène à développer une métaphysique dont

on ne mesure pas assez les effets néfastes sur l'esprit des enfants ; du genre : on se fait une idée du plan en imaginant une surface parfaitement plate et illimitée, ou, on se fait une idée du point mathématique en imaginant un point physique qui diminue jusqu'à évanouissement, etc... *Ce qui importe d'abord, pour nous enseignants, c'est de bien voir que la droite (mathématique, il n'en est point d'autre) est un concept (i.e. objet irréel conçu par l'homme) et qu'il n'existe pas de droite dans la réalité (où il n'existe qu'approximativement des morceaux de droites). Et la droite physique telle qu'elle est décrite dans la littérature de quatrième n'est pas une réalité, mais un modèle.*

Et si l'on commence à parler de droite physique (qui est déjà un modèle) et de droite mathématique (qui en serait un autre) comment amener les enfants à différencier ces deux modèles ? Au moyen du langage ? Les objets physiques étant les objets concrets, les objets mathématiques étant les abstraits ? Mais lorsqu'on fait de l'arithmétique, est-ce qu'on dit que ceci : 1 : est le physique, et que le *un* mathématique + le *un* mathématique égale le *deux* mathématique, ce qui physiquement se traduit par l'écriture $1 + 1 = 2$?

Tout ce langage métaphysique, toutes ces définitions tautologiques, (le plan : surface lisse et plate ...) développés pour justifier le fondement de la théorie sur la réalité, nous éloigne singulièrement de notre objectif qui est de dire que *point, droite, plan sont des concepts, et que ce qui va nous intéresser essentiellement dans ces concepts, ce n'est pas la nature physique de leurs images, mais les relations qui les lient* ; de plus il ancre chez l'élève l'idée qu'il existe deux types de droites : les droites physiques qui sont de *vraies* droites, les droites mathématiques pas ordinaires du tout ; surtout si l'on continue à entretenir la confusion au niveau de leur représentation : les traits sont des vraies droites, les patates ou les "courbes" sont des droites mathématiques (On reviendra sur cet important problème du dessin).

Sans vouloir accorder un grand crédit à des enquêtes-tests, il est permis de signaler cependant certaines réponses assez significatives.

A la question (un peu sadique, c'est vrai, mais posée dans les classes (20 classes) où les deux qualificatifs avaient été employés), donc à la question posée :

— Qu'est-ce qui différencie une droite mathématique d'une droite physique ?

on trouve que la plupart des réponses sont assez effarantes. Les réponses sont pour 50 % : la droite mathématique est courbe, la droite physique est droite; pour les autres 50 % , la droite mathématique ne peut pas se présenter, la droite physique, si l'on veut.

2°) *Sur l'argument de grossièreté avancé pour justifier la mathématisation des objets physiques.*

“Un petit point physique, vu à la loupe, est trop étendu pour qu'on l'admette comme un point modèle” ; etc...

Ce genre d'argument ne vaut rien (On pourrait d'ailleurs répondre : alors ne le regardons pas à la loupe). Il ne vaut rien parce que, on le répète, ce n'est pas la nature des objets qui nous intéresse mais les lois qui les lient. Il faut, dit-on, un homologue mathématique de ce qui est physique. Mais cet homologue pourra être n'importe quoi : ainsi un ensemble de 4 vaches peut être un plan mathématique (plan à 4 points). Une vache est-elle moins grossière que la marque d'un crayon ?

En fait, ce n'est pas tant la grossièreté des objets qui est en cause, puisque justement ces objets sont décrits, en sixième-cinquième, de telle façon que certaines de leurs qualités physiques (épaisseur, longueur,...) ne soient pas prises en considération, *mais c'est plutôt que le modèle ainsi créé n'est adapté qu'à l'étude de la géométrie et ne permet pas l'étude de situation plus générales.*

C'est lorsqu'on veut étudier des situations où interviennent des structures analogues qu'il est nécessaire de statuer et de poser les axiomes d'une structure d'incidence. Ainsi les mathématiciens du 18ème siècle utilisaient les lois des groupes dans des ensembles bien particuliers, mais n'avaient pas dégagé cette structure ; c'est lorsqu'on a perçu l'importance de la structure de groupe comme moyen efficace d'agir sur d'autres situations que l'on a défini et étudié cette structure.

Mais en quatrième on ne quittera pas la géométrie euclidienne plane. Alors est-il nécessaire de définir la structure d'incidence ? A quoi bon la présenter si on ne la fait pas opérer ? Quels problèmes résoudre dans un plan à quatre points ?

En tout cas, si l'on veut donner les définitions et axiomes d'une structure d'incidence, ce n'est pas l'argument de grossièreté qu'il faudrait développer pour justifier cette donnée et être

convaincant, mais plutôt l'impossibilité à laquelle on se heurterait si l'on voulait définir point, droite, plan indépendamment les uns des autres ; et le fait que ce n'est pas la nature des objets qui nous intéresse mais les lois qui les lient. (La droite physique dédaignée pour son imperfection sera pourtant mise lors des graduations en bijection avec \mathbb{R} , entretenant ainsi un peu plus la confusion ; c'est un ensemble puisqu'on la met en bijection, ce n'en est pas un puisqu'il a fallu lui donner un modèle mathématique).

3°) *Sur la constatation des axiomes, leur réalité, et leur place dans la théorie.*

Le résultat certain des manipulations et des "constatations expérimentales" est que l'enfant croit à la "vérité absolue" des axiomes, et croit que leurs énoncés traduisent des propriétés réelles des objets physiques. On l'oblige à constater que par deux points passe une seule droite ; que deux droites représentées par les bords d'une règle ne se couperaient jamais si on les prolongeait "indéfiniment" ; que pour l'axiome de Thalès, on a pour tout point M : $g(M) = g'(M')$, etc..., tant et si bien que l'enfant croit à la "réalité" de ces axiomes. Pourquoi alors de son point de vue axiomatiser une situation déjà idéale ? (Il a tendance à croire qu'axiomatiser consiste à exprimer en un langage compliqué la réalité).

Comment après cela peut-on lui faire comprendre la différence entre une constatation et une démonstration ? lui montrer ce qu'est une théorie mathématique ? (si le dessin donne la vérité, pourquoi démontrer ?). Franchement qui peut se vanter de constater que $g(M) = g'(M')$? qui peut dire, sinon le dessinateur lui-même, que le point qu'il place sur un trait est le point d'abscisse 1 ? Et ce n'est pas une propriété du dessin que le point choisi soit effectivement celui d'abscisse 1 : c'est le point d'abscisse 1 car le dessinateur l'a décidé (ne parlons pas du point d'abscisse $p\bar{r}$).

Est-ce une propriété du dessin que par deux points passe une seule droite ? Ou ne serait-ce pas plutôt qu'un dessin est déclaré bon parce que justement l'on y voit que par deux points passe une seule droite ? Si on prend un crayon à grosse mine pour tracer des points et un crayon à mine très fine pour tracer des droites, on peut obtenir un dessin de ce genre :



Les propriétés des objets physiques dépendent donc des crayons choisis ?

Qu'est-ce que l'enfant peut comprendre à l'axiomatisation si on ne lui dit pas que l'on ne peut constater, ni l'égalité $g(M) = g'(M')$, ni l'inégalité $g(M) \neq g'(M')$, mais simplement que $g(M)$ est très voisin de $g'(M')$? et que l'axiomatisation consiste justement à prendre d'autorité $g(M) = g'(M')$ parce qu'on se place ainsi dans une situation idéale (la commodité de l'égalité) et non contradictoire ?

Si on ne lui dit pas, de même, qu'on ne peut pas constater, qu'on ne le pourra jamais, que par deux points passe une seule droite ? que l'affirmer est autoritaire (et conforme si l'on veut à une certaine expérience) ?

L'intention de justifier *a priori* les axiomes par des manipulations expérimentales est louable ; à l'expérience cette justification si elle est mal conduite crée une difficulté supplémentaire, car l'enfant ne comprend pas toujours pourquoi il est permis de constater certaines propriétés non évidentes, et pourquoi il est défendu d'en constater d'autres beaucoup plus évidentes qu'il faut alors démontrer ; (l'égalité des rapports de projection n'est pas une évidence — on l'admet après constatations ; l'alignement de 3 points peut être d'une rare évidence avec un bon tracé ; pourquoi le démontrer ?). Bref cette mauvaise présentation des axiomes crée chez l'enfant une confusion durable entre réalité et théorie, dessin et démonstration et va donc à l'encontre des objectifs choisis.

Les axiomes sont partie intégrante de la théorie, ce ne sont pas des vérités existantes ex nihilo, vraies en dehors de la théorie. Ils existent parce que, en mathématique, on ne peut pas tout démontrer : il faut un point de départ.

4°) *Sur l'utilité des manipulations pour la découverte de l'axiome.*

Cette utilité est plus que douteuse. Si on limite notre activité à tracer des traits, on n'a certainement pas besoin de poser des axiomes. On ne découvre pas un axiome au terme de manipulations gratuites, au hasard de l'humeur vagabonde. Si on décrète que par deux points passe une droite et une seule, c'est par nécessité avec une idée derrière la tête : on aura besoin lors de démonstrations de dire : "soit la droite AB ($A \neq B$)".

Cette expression est implicitement légitimée par l'axiome "Deux points déterminent une droite et une seule". C'est donner une mauvaise idée de la façon dont se fait la mathématique que de laisser croire que le choix des axiomes résulte d'une expérience concrète *idéale et limitée* ; le choix des axiomes se fait en général alors que la théorie est constituée, les concepts dégagés et leurs rapports plus ou moins précisés.

5°) *Sur l'adéquation du modèle à la réalité*

On doute que ce soit un point sur lequel il faille insister dans la classe de quatrième. Il faut remarquer que c'est l'utilisateur d'une théorie qui décide et vérifie si la théorie choisie par lui s'adapte bien à la réalité (relative) de sa situation : autrement dit c'est par décision extra-mathématique, et néanmoins scientifique et non arbitraire, qu'un modèle est déclaré adapté ou non. Ainsi un géodésien qui a établi une triangulation dont les triangles ont des côtes de 3 à 5 km décidera selon ses besoins si ces triangles sont plans ou curvilignes. Si un utilisateur ne se satisfait pas de la géométrie euclidienne, il en utilisera d'autres (voir géométrie de la "relativité") mais il n'en sera pas moins vrai que la géométrie euclidienne restera une théorie. En somme, si on veut montrer l'adéquation du modèle à la réalité, on devrait au moins bien préciser de quelle "réalité" il s'agit.

6°) *Sur la formalisation et le manque d'exemples*

On aborde ici un point délicat, car la formalisation est une démarche normale dans la construction d'une théorie mathématique, donc souhaitable et souhaitée par le mathématicien et par l'enseignant. Mais à quel moment doit-elle intervenir ? Il ne faut pas perdre de vue qu'un concept, même simple, n'est jamais enfermé dans une définition mais se dégage à travers son fonctionnement.

L'enfant ne peut pas comprendre les définitions axiomatiques qu'on lui donne sans l'aide d'exemples et de contre-exemples, c'est la richesse des premiers exemples donnés qui fera que le nouveau concept va être correctement assimilé ou pas. Or ces exemples et contre-exemples, on ne les donne presque jamais, ou si on les donne, c'est en nombre insuffisant. Un enfant ne peut pas comprendre tout seul à travers la définition ce qu'est un plan, une droite, un point. Il ne peut pas comprendre tout seul que l'on ne peut pas les définir indépendamment les uns des autres. Si on veut

qu'il comprenne, il est nécessaire de lui montrer qu'un plan c'est en fait un couple (E, \mathcal{D}) où E est un ensemble et \mathcal{D} une partie de $\mathcal{J}(E)$ vérifiant certaines conditions ; de lui montrer qu'un choix arbitraire de \mathcal{D} dans $\mathcal{J}(E)$ ne fait pas en général de (E, \mathcal{D}) , un plan ; que (E, \mathcal{D}) et (E, \mathcal{D}') peuvent être deux plans distincts, que certains ensembles ne pourront jamais devenir des plans mathématiques, etc... Et si l'on veut donner l'exemple d'un plan mathématique ayant une infinité de points, lequel donner ?

Ainsi, si l'on veut donner la structure d'incidence (et la donner implique que l'on veuille la faire assimiler), il faudra nécessairement y consacrer plus de temps que d'habitude. Et ce n'est pas la longueur du temps passé qui chagrine, c'est la peut-être inutilité de cette action : à quoi sert qu'un élève de quatrième sache la définition d'un point mathématique ? Lui a-t-on défini le nombre 1, et malgré cela ne fait-il pas de l'algèbre ? à quoi sert de lui montrer une structure d'incidence si on ne lui en montre pas l'efficacité ?

Examiner de même tout le travail nécessaire pour "faire passer" la définition de la droite affine réelle ; et quels exemples donner ? à part \mathbb{R} lui-même, on ne connaît pas à ce niveau d'autres ensembles pouvant être mis en bijection avec \mathbb{R} . Quels exemples de graduations g et g' non compatibles (c'est-à-dire $g' \neq ag + b$) ? si bien qu'il est permis de penser : pourquoi ne dirait-on pas que le couple $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ où \mathcal{F} est l'ensemble des bijections affines de \mathbb{R} est la droite affine réelle ?

Et quels exemples donner pour un plan affine, un plan euclidien, qui sont pourtant des mots fréquemment employés ?

Lorsque les exemples ne sont pas donnés et les axiomes présentés de la manière dite plus haut, l'enfant identifie les objets physiques aux concepts mathématiques, ce que l'on voulait éviter au départ. Pour lui le plan euclidien c'est une page quadrillée. Alors à quoi bon toute cette gymnastique pour en arriver à ce résultat ?

En somme, si on veut dérouler toute la construction du modèle mathématique, on ne devrait pas se contenter de dresser des listes d'axiomes et de définitions, ce qui peut laisser croire que ceux-ci ne sont que des énoncés formalisés de propriétés physiques, mais on devrait aller jusqu'à illustrer leur fonctionnement et leur efficacité dans la résolution de problèmes pris dans des situations exemplaires. Est-ce possible à ce niveau ?

II — DES REMEDES ?

Le point d'interrogation tempèrera la prétention que nous pourrions avoir, modestes enseignants, à livrer des remèdes sûrs.

Mais si l'on examine dans le paragraphe précédent toutes les causes qui détournent du but initial on peut penser que des améliorations seraient apportées :

- 1°) Si chacun d'entre nous, on veut dire chaque enseignant, prenait bien conscience de ce qu'est une théorie mathématique déductive, de son rôle, de son utilité, de son fondement, etc...
- 2°) Si on ne créait pas une dualité erronée entre objets physiques et objets mathématiques ; la droite (mathématique, il n'en est pas d'autres) est un concept (i.e. un objet irréel conçu par l'esprit ; si l'on veut on pourra dire que ce concept est né de l'observation de la réalité) ; donc la droite est un concept que l'on ne définira pas dans cette classe.

L'élève peut très bien comprendre cette absence de définition : on ne peut pas tout définir, il faut des termes primitifs ; d'ailleurs lui a-t-on défini le nombre 1 ? Cela ne l'empêche pas de travailler avec une certaine efficacité sur les entiers (Le point et le plan sont aussi bien sûr des concepts) ; ce qui intéresse le géomètre, ce n'est pas la nature de ces objets mais les relations qui les lient.

- 3°) Si on présentait les axiomes convenablement : à savoir comme des décisions autoritaires et nécessaires prises par le géomètre (décisions peut-être inspirées d'une certaine expérience, mais inutile peut-être d'insister) et non pas comme des propriétés de la réalité ; les axiomes sont nécessaires parce que l'on ne peut pas tout démontrer, il faut un point de départ. Il faut expliquer aux enfants ce que l'on entend par démontrer. La meilleure preuve que les axiomes sont autoritaires est que l'on peut en choisir d'autres.

Les références à la géométrie de RIEMANN et à celle de LOBATCHEVSKY sont là pour montrer la "relativité" des axiomes choisis. Autrement dit, pour montrer que d'autres axiomes sont possibles et qu'ils peuvent décrire aussi bien, sinon mieux, "le monde dans lequel nous vivons". Par exemple lorsque nous marchons sur une longue route droite, il nous apparaît que les deux lignes d'arbres qui bordent la route se rejoignent (voir géométrie de LOBATCHEVSKY). La terre est presque une sphère et la géométrie de la sphère a donc de l'intérêt. On peut parler quelques

temps sur cette géométrie (les droites étant remplacées par des grands cercles) et faire remarquer que la géométrie que nous allons étudier (géométrie euclidienne) n'est bonne que "localement" c'est-à-dire à distance finie.

Ne pas croire que des discussions de ce genre sont trop ardues pour les enfants. On verra qu'avec des mots bien choisis une telle discussion menée avec toute la classe éclaire bien des ténèbres et est bien plus efficace que telle ou telle manipulation.

Le résultat à atteindre ici est de bien distinguer ce que l'on admet de ce que l'on n'admet pas, et d'expliciter les buts et les règles de la démonstration ; la difficulté est en général de répondre à la question : pourquoi n'admet-on pas tout ? On peut répondre en citant au moins deux raisons : la première est que le dessin dans des cas douteux nous amènerait à énoncer des résultats contradictoires ; la seconde est qu'il est inutile de retenir tous les résultats : je ne retiens que certains d'entre eux, les autres je puis les retrouver par déduction. Ainsi, en calcul, il me suffit de connaître les tables de multiplication de 1 à 10, pour trouver le résultat de 6431 par 2319.

4°) *Si le statut du dessin était bien défini, son rôle bien délimité, son infériorité bien prouvée.*

L'enfant peut comprendre qu'un trait droit n'est pas une droite, pas plus que le symbole 1 n'est le nombre un ; mais un trait tracé à la règle est une bonne représentation de la droite. Il existe des conventions de dessin comme il existe des conventions d'écriture : c'est par *convention* que je dis que deux traits obtenus par telle ou telle opération représentent des droites parallèles (il y a une cohérence dans ces conventions de dessin).

Le rôle du dessin est de donner une assez bonne image de la situation étudiée, de classer les hypothèses, d'apercevoir les intermédiaires qui mèneront au résultat. Dessiner n'est donc pas une activité neutre. Mais la lecture d'un dessin n'est pas une démonstration, puisqu'un dessin n'est qu'une représentation : deux droites peuvent sembler parallèles sans l'être, la jonction se faisant plus loin en dehors de l'épure, et quel dessin dira que la longueur de la diagonale est $a \cdot \sqrt{2}$? ; ensuite la vérité du dessin n'est pas universelle, ce serait une vérité particulière d'une figure ; la démonstration conduit à l'universalité.

Ce genre d'arguments, qu'il faudra développer souvent, peut être donné dans les débuts avec profit.

5°) Si on ne s'en tenait pas au verbalisme mais si on donnait aux termes mathématiques leurs sens d'actions. Par exemple, pour les graduations, c'est l'homme qui gradue, c'est la liberté qu'il se permet et les idées essentielles de ses choix qu'il faut faire ressortir plutôt que le verbalisme.

III — SUR DES REMEDES QUI SEMBLENT MANQUER D'EFFICACITE

1°) *Les manipulations* lorsqu'elles sont gratuites (sans problème apparent à résoudre) et très dirigées, car alors elles réduisent l'activité de l'élève à celle d'un exécutant. On cite ici Jean Piaget : "On a fini par comprendre qu'une école active n'est pas nécessairement une école de travaux manuels et que si, à certains niveaux, l'activité de l'enfant suppose une manipulation d'objets, à d'autres l'activité la plus authentique de recherche peut se déployer au plan de la réflexion, de l'abstraction la plus poussée et de manipulations verbales".

"La première (confusion)... est celle qui conduit à penser que toute "activité" de l'enfant se réduit à des actions concrètes, ce qui est vrai aux stades élémentaires mais ne l'est plus du tout aux niveaux supérieurs où un élève peut être entièrement actif... tout en faisant porter cette activité sur une réflexion intérieure et abstraite.

La seconde confusion consiste à croire qu'une activité portant sur des objets concrets se réduit à un processus figuratif..."

"En bref, l'image, le film, les procédés audio-visuels dont toute pédagogie voulant se donner l'illusion d'être moderne nous rebat aujourd'hui les oreilles, sont des auxiliaires précieux à titre d'adjuvants ou de béquilles spirituelles et il est évident qu'ils sont en nets progrès par rapport à un enseignement purement verbal. Mais il existe un verbalisme de l'image comme un verbalisme du mot, et confrontées avec les méthodes actives, les méthodes intuitives ne font que substituer ... ce verbalisme plus élégant au verbalisme traditionnel" (J. Piaget, "Psychologie et pédagogie").

La manipulation aura plus de sens, d'efficacité, de rôle formateur, si elle se fait pour résoudre un problème posé à l'avance. Ainsi si on pose la question : existe-t-il un point équidistant de trois points donnés ? le bricolage des élèves aura un sens.

2^o) Sur le compromis

Certains croient s'en tirer en éliminant un ou deux axiomes, en donnant les définitions en d'autres termes.

Il est difficile de bâtir une axiomatique cohérente et globale en dehors de celles du type exposé dans les meilleurs manuels ou celles de l'algèbre linéaire (mais comme cette dernière est exclue par les programmes nous n'en parlons pas). Il faut prendre garde que de vouloir enlever une seule pierre à cet échafaudage axiomatique risque de la faire écrouler complètement ; et que l'allègement du vocabulaire, même s'il ne conduit pas à des incohérences, ne résout pratiquement rien.

IV — SUR LES OBJECTIFS

On ne donne ici que des préjugés personnels sans chercher à convaincre. Faire comprendre à l'enfant ce qu'est une démonstration, l'entraîner aux raisonnements, lui apprendre à discerner hypothèses, conclusions, à ordonner ses idées, à rédiger, etc... semble être un objectif très valable ; de même que celui qui consiste à lui montrer comment on peut aborder des problèmes ouverts ou non (Il paraît même urgent que cette initiation soit faite ; en sixième et cinquième on a passé beaucoup de temps à décrire et non pas à résoudre). Il semble que la géométrie est le moyen pour atteindre ces objectifs : avec la géométrie plus qu'avec l'algèbre, on peut comprendre ce qu'est une démonstration.

Mais, pour atteindre ces objectifs, il faut disposer assez vite de situations riches et complexes sur lesquelles on puisse exercer le raisonnement. Cela implique de ne pas consacrer un temps trop long à poser des définitions et des axiomes, certains mots définis actuellement pouvant être pris avantageusement comme termes primitifs. Cela implique presque sûrement que l'on renonce à une construction globale du modèle mais qu'à partir d'une liste de termes primitifs et un noyau d'axiomes, considérés comme des vérités admises et non pas absolues, on se lance dans le jeu réglé de la déduction et de la découverte.

6 - LA POSITION DES O.P.C. SUR L'AXIOMATIQUE

(Pour une définition des O.P.C., voir la 3ème partie de la brochure)

Ch. PEROL, Animateur à l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand

"Le programme se prête à un exposé linéaire solide et rigoureux ; mais un tel exposé ne saurait être apprécié par la plupart des élèves de quatrième et troisième. Un enseignement adapté aux élèves doit considérer les possibilités concrètes de la classe, tenir compte de la diversité probable des orientations ultérieures et promouvoir le goût des élèves pour les activités mathématiques. Une mauvaise assimilation des concepts et des démarches de base risque de provoquer des blocages irréversibles, qui n'apparaîtraient que plus tard. Il importe donc de progresser avec beaucoup de prudence, de patience, d'attention aux élèves.

On pourra s'inspirer des considérations suivantes :

1. Il convient de consacrer suffisamment de temps à l'introduction d'une notion nouvelle, souvent par des approches successives dont certaines peuvent se référer à des points distincts du programme. En géométrie, une expérimentation préalable se révèle nécessaire.

2. Les diverses étapes dans l'acquisition (stade descriptif, perception du concept, formalisation et usage) seront bien marquées.

3. On se gardera le plus souvent d'épuiser un sujet au moment où on le rencontre pour la première fois.

4. La formation à l'observation, à l'analyse, à la recherche puis à l'abstraction et au raisonnement importe plus qu'une acquisition plus ou moins mécanique de connaissances. Il est plus difficile de former ainsi des esprits que de se borner à transmettre un contenu mathématique ; il convient donc de subordonner cette transmission à la tâche essentielle de formation ; mais, bien entendu, toute formation suppose un minimum de connaissances solides.

C'est pourquoi le professeur n'hésitera pas à admettre, chaque fois que cela est utile, des énoncés qui pourraient, en fait, être démontrés ; il en fera comprendre le sens à partir de considérations intuitives ou inductives. Il ménagera, d'autre part, dans l'étude du programme, des séquences de déductions bien construites à partir d'énoncés explicitement admis.

5. Il importe :

- de maintenir et d'enrichir la pratique du calcul métrique, de familiariser avec l'usage des tables ;
- de préparer aux techniques utiles aux autres disciplines ;
- de savoir poser et résoudre des problèmes (l'usage d'un théorème peut être plus formateur que sa démonstration explicite) ;
- d'utiliser, pour l'analyse d'une situation, des dessins géométriques ;
- d'user d'un langage mathématique aussi précis et simple que possible."

Instructions officielles du 19/02/1973

Le lecteur voudra bien excuser cette longue épigraphe. Je renverrai souvent à elle par le signe *.

Le premier point d'accord des équipes O.P.C. a été d'affirmer qu'au premier cycle il est inopportun d'exposer une "axiomatique globale" de la géométrie. Par axiomatique globale nous entendons une axiomatique permettant d'en déduire n'importe quelle proposition d'une géométrie. De telles axiomatiques sont nombreuses depuis celle de Hilbert (1899) jusqu'à celle que nous propose l'annexe des programmes de 1971 et qu'à la suite des manuels trop de professeurs se croient le devoir d'exposer.

Pour éviter tout malentendu au départ précisons que nous ne préconisons pas l'abandon de la déduction au premier cycle. Bien au contraire nous affirmons que l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est l'apprentissage progressif de la déduction. Mais nous insistons sur le mot progressif. A-t-on besoin d'une axiomatique globale pour pratiquer "des séquences de déduction bien construites à partir d'énoncés explicitement admis"* ? La géométrie a-t-elle attendu Hilbert pour être une science déductive ?

Dans quel ordre ces séquences doivent-elles être placées ? Pourquoi ne pas les organiser pour qu'elles constituent cet "exposé linéaire solide et rigoureux"* , même si "il ne saurait être apprécié par la plupart des élèves de quatrième et troisième"* , puisque "le programme s'y prête"* ?

Nous sommes ici à la source de tout le mal car non seulement le programme s'y prête mais tout le reste a été sacrifié à cette possibilité.

Dans la construction axiomatique d'une théorie aussi complexe que la géométrie on ne peut pas, à moins de posséder déjà l'outillage puissant de l'algèbre linéaire, se situer d'emblée

au coeur du sujet ; l'axiomatique doit être introduite successivement, les situations dont on dispose dans les débuts sont pauvres, elles fournissent peu de problèmes, les propositions que l'on démontre sont du même ordre d'évidence matérielle que celles qui sont prises pour axiomes. Tout cela semble inintéressant à l'élève qui contrairement au lecteur de Bourbaki ne "possède" pas "déjà des connaissances assez étendues" et ne peut "suspendre son jugement jusqu'à ce qu'il ait l'occasion de se convaincre de l'utilité" de ces "considérations". (Mode d'emploi du traité de N. BOURBAKI; voir références bibliographiques). Il se forgera des idées fausses de ce qu'est la mathématique et de ce que sont les professeurs de mathématique. C'est très regrettable, pour lui surtout, pour la mathématique aussi, et tant pis pour les professeurs. Peut-on intéresser les élèves de quatrième à la géométrie en commençant par l'incidence, la géométrie de la droite et puis l'équipollence et en portant interdit sur les longueurs et les angles ?

Quel prix faut-il payer pour sauvegarder cette possibilité d'un exposé linéaire reconnu pédagogiquement irréaliste ? La pauvreté du quasi-unique problème de géométrie du B.E.P.C. en donne une idée.

Ces critiques portent sur l'actuel programme officiel (j'écris le 3 avril 1977) ; malheureusement, si les programmes en préparation prétendent aussi laisser la possibilité d'un "exposé linéaire ...", il est certain que les mêmes causes donneront les mêmes effets.

Mais, me direz-vous, dans nos classes, ces énoncés explicitement admis, que sont-ils donc d'autre que des axiomes ? Ils sont effectivement axiomes, mais axiomes d'un moment. Axiomes d'une séquence déductive. Ils changeront peut-être de statut plus tard. Pour me faire comprendre, je veux prendre un exemple. Excusez-moi de le trouver dans la pratique de mon équipe, on ne peut s'appuyer que sur ce que l'on connaît bien. Il s'agit de la médiatrice ; notre privilège de classes expérimentales nous permet de l'introduire en quatrième. La propriété caractéristique de ses points ($MA = MB$) est obtenue par observation de quelques points construits à l'aide du compas. C'est d'abord une loi physique. Nous l'admettons alors explicitement et nous en déduisons quelques résultats qui intéressent les élèves : des constructions classiques, la propriété des médiatrices d'un triangle, l'existence du cercle circonscrit. Nous espérons ainsi "promouvoir le goût des élèves pour les activités mathématiques"*. Un peu plus tard, dans

une autre série de séquences déductives, nous obtenons par une nouvelle expérimentation les énoncés de Pythagore. Nous les admettons explicitement et nous en tirons entre autres conséquences la propriété des points de la médiatrice. C'est ici un théorème sous la dépendance de l'axiome de Pythagore.

Mais, me direz-vous encore, les élèves ne savent plus ce qui est axiome et ce qui est théorème. Pour ma part je considère cela comme un avantage car c'est bien ainsi que les choses sont pour le mathématicien. Tel énoncé n'est axiome que relativement à un choix de l'ordre d'exposition. Il n'est pas sain de donner à penser le contraire.

Il n'en reste pas moins que ces séquences déductives doivent s'articuler. Puisque ce n'est pas la nécessité de l'exposé synthétique de la théorie achevée qui détermine leur ordre, c'est qu'intervient une rigueur d'une autre nature. Dans nos équipes O.P.C. les réponses varient.

Permettez-moi une fois encore d'indiquer la réponse de Clermont. Elle résulte de la place que nous assignons à l'enseignement de quatrième et troisième dans l'éducation spatiale de nos élèves. Dans les années antérieures, à l'école élémentaire, en sixième et cinquième, en dehors de l'école aussi, nos élèves ont rassemblé une collection de situations, de faits d'origines multiples. L'enseignement de quatrième et troisième a pour but de mettre de l'ordre dans cet "herbier". Plus tard, pour ceux qui poursuivront des études scientifiques longues, il faudra (peut-être) s'appuyer sur cette analyse pour construire une synthèse dont il restera à décider, mais ce n'est pas notre propos ici, si elle doit être du type de celle d'Euclide, je veux dire pré-axiomatique, ou du type de Hilbert, je veux dire axiomatique. Dans une analyse et dans une synthèse les choses se présentent dans un ordre à peu près inverse. Une analyse part de la situation complexe et riche et y introduit progressivement de l'ordre. La rigueur mathématique y entre au fur et à mesure de la mise en ordre. Au début, des manipulations dominent; petit à petit leur importance diminue. La synthèse part des éléments simples dégagés par l'analyse. La rigueur y règnera d'emblée.

Ce point de vue étant adopté, il reste au maître à déterminer l'enchaînement de cette analyse car à cette échelle et à cette phase de l'éducation, la non-directivité ne pourrait conduire qu'à la banalité et à la perte de temps. Eclairés par le programme d'Erlangen

de Félix Klein, nous regardons la géométrie euclidienne comme l'étude du groupe des déplacements et de ses invariants distance et angle; c'est de là que résulte l'enchaînement de nos modules. Voir 3ème Partie, 1.2. une sorte de table des matières un peu commentée.

Ce n'est pas dans toutes nos équipes que dans cette direction l'analyse a été aussi poussée, mais toutes ont dès le début reconnu que l'objet de l'enseignement de la géométrie en quatrième et troisième ne pouvait être d'exposer une construction toute faite de la géométrie. Nous regrettons les contraintes apportées par la ligne directrice des programmes actuels. Pour ne citer qu'un exemple, presque tous nous préférons ne pas séparer l'étude du parallélisme et celle de l'orthogonalité, car ces notions s'apportent mutuellement appui.

Ces idées n'ont rien de révolutionnaire ; peut-être vous reconnaissez-vous dans ces façons de voir. La pratique courante n'allant pas dans ce sens, nous avons besoin de vous pour les faire avancer.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1) Instructions officielles du 19-2-73, BO - EN N° 8, pages 625 et 626 (voir citation en épigraphe).
- 2) Nicolas BOURBAKI : Eléments de mathématiques, mode d'emploi du traité.

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction.

Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et abstrait ; il procède le plus souvent du général au particulier. Le choix de cette méthode est imposé par l'objet principal du traité, qui est de donner des fondations solides à tout l'ensemble des mathématiques modernes. Il est indispensable pour cela d'acquiescer d'emblée un assez grand nombre de notions et de principes très généraux. De plus, les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur que s'il possède déjà des connaissances assez étendues, ou bien s'il a la patience de suspendre son jugement jusqu'à ce qu'il ait eu l'occasion de s'en convaincre.

3. Pour obvier en quelque mesure à cet inconvénient, on a inséré assez souvent, dans le cours du texte, des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs, mais qui n'ont pas encore été exposés dans le traité ; ces exemples sont toujours placés entre deux astérisques : *... La plupart des lecteurs trouveront sans doute que ces exemples leur faciliteront l'intelligence du texte, et préféreront ne pas les omettre, même en première lecture ; une telle omission, néanmoins, n'aurait, bien entendu, du point de vue logique, aucun inconvénient.

4. Le traité est divisé en Livres. Les six premiers Livres sont numérotés, et, en principe, tout énoncé du texte ne suppose connus que les résultats exposés antérieurement dans l'ordre adopté. A l'intérieur de chacun des autres Livres cette règle reste valable, mais, pour des raisons de commodité d'exposition, ces Livres ne sont plus rangés en un ordre linéaire.

- 3) F. RUSSO — Article "Géométrie" dans Encyclopedia Universalis.
- 4) Oeuvres de H. WALLON - PIAGET - BACHELARD.
- 5) Programme d'Erlangen, Félix KLEIN, 1972.
- 6) Document O.P.C. Divers.

Une brochure A.P.M.E.P. sur le calcul des probabilités et son enseignement :

HASARDONS-NOUS ...

220 pages. Prix : 25 F (port compris : 29 F).

Cette brochure est un ouvrage collectif.

S'adressant aux membres de l'A.P.M.E.P., elle se propose d'apporter un outil de réflexion et une aide pour l'enseignement des probabilités, de l'école élémentaire où de nombreuses expériences ont été poursuivies, à l'Université où il faut former de nombreux utilisateurs.

Elle doit donc intéresser à la fois les maîtres du premier degré qui y trouveront des relations d'expériences qui peuvent d'ailleurs être entreprises tout au long du premier cycle, les maîtres du second degré qui pourront approfondir leur réflexion dans une perspective différente de celle des manuels, les universitaires responsables d'un enseignement de probabilités et de statistiques, en particulier à des non-mathématiciens, les candidats aux concours de recrutement, C.A.P.E.S. et Agrégation.

7 - GÉOMÉTRIE EN PREMIER CYCLE

par Marie-Thérèse et Jean AYMÈS, Montauban

Ce texte est le point de vue d'un enseignant de premier cycle et d'un enseignant de second cycle qui a animé durant plusieurs années des groupes I.R.E.M. de premier et second cycles.

La géométrie en premier cycle : quel sujet de discussion, de réflexion, de craintes depuis six ans !

En fait, les problèmes se cristallisent autour de la quatrième ; ils se posent plus secondairement en troisième et à un bien moindre degré en sixième et cinquième. Il est déjà très significatif que l'expression essentielle de la situation passe par les niveaux scolaires : l'enfant passerait-il au second plan ? C'est la structure scolaire et ses programmes qui occupent la scène.

Les programmes actuels ne sont pas, à notre avis, établis à partir des aptitudes ou des goûts des enfants. Pour la sixième et la cinquième où la géométrie ne joue pas un rôle primordial, le changement provenant plutôt des nombres relatifs, un enseignement partant des préoccupations des enfants est parfois possible ; avec la quatrième c'en est fini : l'introduction d'une axiomatique, de la notion de démonstration, de "théorie déductive" et ce en un temps assez bref renverse la situation. C'est aberrant car cet état est ambigu en troisième par la possibilité qu'offre l'usage du calcul par le biais des repères. A vrai dire on peut (le doit-on ?) consacrer du temps en cinquième à préparer la démarche de la quatrième, mais on risque de réduire les objectifs de cette classe si on s'y préoccupe trop de celle qui vient après. C'est là qu'il faut maintenir l'observation de l'espace, la manipulation des instruments, la lecture et l'usage de dessins. Il est indispensable de conserver aux deux premières années du premier cycle le caractère non formel qu'elles ont pour la géométrie.

Le changement survenant en quatrième dans l'esprit des programmes s'explique-t-il par le développement de l'enfant ? Nous ne croyons pas. Il est trop strict pour qu'on n'y voie pas une volonté normative : l'aspect linéarisé de l'enseignement prédomine, le lien au réel s'évanouit. C'est pour beaucoup un seuil infranchissable. Comme la même situation tend à prédominer en

second cycle, on peut s'interroger sur les objectifs de la géométrie en quatrième. Certains signalent qu'il faut bien présenter un jour ou l'autre un exemple de mathématisation du réel : ... et de citer la géométrie ! Il faut distinguer développement, étude d'une théorie et mathématisation. A l'heure actuelle, l'activité de l'élève s'exerce sur des énoncés au moins aussi évidents que les axiomes : ce n'est pas une mathématisation ; on a trop tendance à réduire ces activités au développement de la théorie. Il en résulte d'une part une perception faussée de la mathématique puisque peu de véritables problèmes sont abordés, d'autre part une aggravation, au niveau de la formation des individus, de l'esprit technocratique puisque le savoir prédomine sur l'action. Il ne faudrait pas hésiter à notre avis à court-circuiter le plus souvent les constructions formelles pour faire "fonctionner" les outils géométriques dans des situations aussi variées que possible : cela suppose que l'inductif l'emporte sur le déductif. On ne chercherait pas nécessairement à définir les concepts géométriques, c'est leur fréquentation dans des problèmes qui, en permettant des comparaisons, une organisation, assurerait leur acquisition ; des phases déductives pouvant s'avérer nécessaires.

Cela ne veut pas donc dire qu'on abonnerait toute démonstration : simplement on ne chercherait pas une très grande cohérence théorique, étant bien entendu que les maîtres en seraient convaincus et l'utiliseraient dans la pratique de leur classe. La controverse des "flots déductifs" mérite une relance.

Observons par exemple la séparation affine-métrique; c'est une conception qui va à l'encontre de tous les comportements des élèves : il est aberrant qu'on ait à "censurer" certaines observations d'élèves pour avancer son cours. Pourquoi ne pas revoir ce cloisonnement et concevoir un enseignement non hiérarchisé de ce point de vue en se contentant de mettre au clair un certain nombre d'énoncés évidents pour l'élève ? Une telle démarche ne peut pas conduire à des résultats pires que ceux que l'on peut constater en seconde actuellement : beaucoup d'élèves n'ont aucune idée des concepts fondamentaux introduits en géométrie de quatrième et troisième. On peut proposer de tenir compte de cette situation en considérant la seconde comme une année de bilans et de synthèses.

Pour conclure, affirmons la nécessité d'une recherche et d'une expérimentation sur le terrain scolaire comme moteur d'une révision des conceptions actuelles des programmes.

8 - ENTRE DEUX CHAISES ?

“Le dessin technologique, la géométrie, l’axiomatique, sont des activités profondément différentes. Chacune a son utilité et sa place dans une bonne formation scientifique, mais il ne faut ni les confondre, ni les mélanger. Nous pensons que l’axiomatique n’a rien à faire dans la formation scientifique au stade de la scolarité obligatoire, avec des élèves de 13 à 15 ans. Le dessin industriel, la technologie, par contre, devraient y être développés, non seulement pour leur utilité propre, mais aussi pour la contribution qu’ils peuvent apporter à une formation scientifique équilibrée. Quant à la géométrie, elle doit retrouver entre les techniques du dessin et l’axiomatique la place irremplaçable qui est la sienne, qui nous paraît définie par un double caractère :

— l’usage du raisonnement hypothético-déductif, c’est-à-dire d’une démarche dialectique par laquelle on passe tantôt d’une conjecture à un théorème, tantôt de propriétés déjà démontrées à de nouvelles conjectures.

— le fait que le raisonnement porte sur des “figures”, c’est-à-dire des représentations symboliques imaginées d’objets mathématiques abstraits.”

[Extrait d’une publication de l’I.R.E.M. de Montpellier.
Texte de Roumieu et Micali]

triangle rectangle

J’ai fermé l’angle droit
Qui souffrait d’être ouvert
En grand sur l’aventure.

Je suis une demeure
Où rêver est de droit.

Guillevic
“Euclidiennes”
Gallimard, édit.

9 - ENSEIGNANTS : A VOS I.R.E.M. !

A propos de la mise en application des nouveaux programmes, un débat s'engage sur les facteurs réels de rénovation, ou de non rénovation, de l'enseignement des mathématiques. La pratique quotidienne des enseignants ne dépend pas seulement des libellés des programmes et des interprétations qui en sont faites par les Inspecteurs de Mathématiques, mais aussi de l'impact des manuels, de la formation initiale et de la formation continue que ces enseignants ont eues, des sujets proposés aux différents examens et de l'institution scolaire. Dans la grande majorité des cas, ces facteurs conditionnent fortement l'enseignement dispensé.

Ce conditionnement conduit généralement à :

— privilégier des objectifs utilitaires au détriment d'une formation scientifique ;

— considérer le niveau n comme une préparation au niveau $n + 1$ sans se préoccuper de ceux qui restent au niveau n ;

— organiser la progression des "cours" en fonction de la capacité à manier formellement des concepts dans des exercices scolaires "ad hoc" au lieu de déterminer ces progressions d'après la capacité de faire fonctionner ces concepts dans des activités ressenties comme motivantes et susceptibles d'approfondissement ;

— avoir des exigences prématurées de formalisation, afin de "dérouler" un enseignement linéaire, procédure de facilité pour le maître, mais dont l'efficacité est reconnue comme très médiocre.

Aussi toute rénovation de l'enseignement est subordonnée à une plus grande autonomie des enseignants, et il est clair que cette autonomie est essentiellement conditionnée par les facteurs "formation initiale" et "formation continue"...

(Extraits d'un compte rendu CO.P.R.E.M. de mai 1977)

10 - Ô GÉOMÉTRIE...

Où es-tu toi dans moi bel auteur
Toi qui flambes dans moi soudain
Et ce mouvement de ta main
Pour mettre à nos dessins... des vecteurs.

Dans mon repère normé, et même ortho,
Je t'offre mes abscisses secrètes.
Approche-toi plus près ; sois prête
Pour me translater toujours plus tôt,

Envahis-moi en bribes de logique
Prends mes lemmes, et bien dessine
Les points, les droites, les affines,
Les cercles aux rêves métriques,...

Montre-moi comme tu es belle
Autant que stats et que calculs
Mieux que les bandes à bulles
Plus que boucles* qui se rebellent

Reviens visage à mon visage
Mets droit tes formes dans mes yeux
Rends- moi les magies de tes jeux
Rends-moi, dans les maths, tes mirages.

H.B.

d'après ARAGON (Le fou d'ELSA)

* Il s'agit, bien sûr, des boucles d'informatique.

2^{ème} partie

DES OUBLIÉS ? ...
DES OUBLIS ? ...

1 - QUELLES SONT LES ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE ?

Les connaissons-nous ?

Trois textes vont essayer de réparer nos oublis éventuels.

On s'y attachera aux méthodes préconisées... Cesseraient-elles d'être valables en sixième et cinquième ?

1.1. Géométrie au CM2

Les commentaires précisent à propos de la géométrie à l'école élémentaire : "Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques".

Il est donc question d'objets géométriques, ce qui exclut toute présentation formelle et systématique de la géométrie. Au départ se trouve l'objet géométrique qu'il faut étudier, observer, ce qui permettra de dégager les éléments géométriques ; le maximum de manipulations reste donc souhaitable ; certains points pourront être adoptés en travail manuel et lorsque cela est possible il ne faut pas hésiter à faire utiliser les instruments : règle, double-décimètre, compas, équerre ; dans tous les cas le départ doit être résolument concret pour que l'enfant soit capable de maîtriser l'espace et que peu à peu il complète son bagage expérimental ; l'étude peut motiver des travaux mathématiques : savoir comment s'organisent les éléments de l'espace physique (organisation des éléments eux-mêmes, puis organisation des éléments entre eux).

En tenant compte de ces remarques préliminaires, voici quel pourrait être le programme maximum adopté au CM2.

- 1 a/ Tracé du segment : usage de la règle.
b/ Mesure de la longueur du segment :
Unités légales ; utilisation du double-décimètre et du compas (comparaison de deux longueurs).
Changements d'unités.
Recherche du milieu par pliage ou au moyen du double-décimètre.

- 2 Activités conduisant à la réalisation de droites perpendiculaires et de droites parallèles.
Pliages, utilisation de l'équerre.
Observations et constructions de bandes.
- 3 **Disque, cercle** : (utilisation difficile du compas)
Observation du disque : tracé, découpage.
Mise en évidence du centre par pliage.
Constataion : ensemble des points du plan dont la distance est inférieure ou égale au rayon.
Comparaison de différents disques.
Le cercle est la frontière du disque.
Constataion : ensemble des points à une distance donnée d'un point donné.
- 4 **Polygones** : sommets, côtés, quadrilatères, diagonale, triangle.
- 5 **Le parallélogramme et ses cas particuliers** :
Le parallélogramme est obtenu à partir de l'intersection de 2 bandes du plan.
Utilisation des instruments pour découvrir des propriétés (double-décimètre ou compas pour les côtés opposés ou les diagonales, équerre pour tracer la hauteur : largeur de la bande).
Observations du rectangle, du losange, du carré.
Mesures et calculs des périmètres.
- 6 **Le triangle** :
 - 1/ Observation : sommets, côtés, hauteur correspondant à un côté.
 - 2/ Reproduction d'un triangle connaissant la longueur de chacun des trois côtés (on peut faire d'abord l'étude à l'aide de baguettes de longueurs différentes puis passer à la construction à l'aide du compas).

Les triangles particuliers : rectangle, isocèle et équilatéral (régulier).
- 7 **Entretien des connaissances sur les quadrillages** : repérage d'un point, déplacements, reproduction de documents.
- 8 **Les aires** :
Comparaison d'aires par découpages.
Encadrement d'une aire par quadrillage.
Calcul de l'aire du rectangle, du carré.
Exemples d'autres calculs en utilisant les découpages ; évaluation de l'aire du triangle, du parallélogramme, du trapèze.

9 Les solides :

Pavé droit et cube : observations.

Evaluation de leurs volumes.

Unités légales - Changements d'unités - Capacités.

N.B. Ce document élaboré à partir d'un travail réalisé par un groupe I.R.E.M. de Foix a été mis au point au cours du colloque des 3 et 4 décembre à Toulouse avec la participation de M. Magnier et M. Viales, Inspecteurs généraux de Mathématiques, de M. Crépin, I.D.E. et de huit professeurs s'occupant de la liaison CM2 - 6e.

1.2. Géométrie à l'Ecole Élémentaire

Point de vue d'Emile GASPARI, P.E.N., Albi.

Relations géométriques

Ces objets qui nous entourent occupent des positions relatives dans l'espace. C'est une fonction essentielle de la géométrie de situer l'homme par rapport aux objets qui l'entourent, de fournir à l'individu des représentations mentales et concrètes de l'organisation des objets dans l'espace, de lui permettre d'agir réellement ou virtuellement sur les objets.

Les premières mathématisations organisent le monde environnant en fonction du vécu ; les rapports spatiaux se construisent à partir du corps propre, des déplacements, des représentations mentales dans l'imitation, le jeu.

Ces structures géométriques se construisent, selon Piaget, à partir des rapports topologiques : volume, surface, point, frontière, intérieur, extérieur, succession sur une ligne, enveloppement...

Il est assez tentant d'organiser les apprentissages selon la hiérarchie des structures de la psychologie génétique, mais il faut faire une distinction très nette entre l'organisation mentale et l'action, entre la formalisation de concepts et la perception.

Prenons par exemple l'appartenance d'un point à une droite, à une surface ; c'est une notion offrant une résistance tenace à tout apprentissage vers 10 - 11 ans ; elle suppose la constitution de la droite en tant qu'ensemble continu de points ; or, pour l'enfant, le point n'existe que s'il a été conçu, donc matérialisé ! Le langage

courant, d'ailleurs, place un point sur une droite, plutôt que d'en faire un élément de cette droite. Quel sens prend alors l'inclusion du segment dans la droite ?

Il semblerait donc plus profitable, d'une part de faire une bonne place à l'organisation de l'espace vécu, d'autre part d'être très prudent dans les constructions formelles, dont la nécessité se fait peu sentir. En particulier, on attachera peu d'importance aux notations : $A \in D$, $[AB]$, $[AB)$, (AB) ...

Dans la mesure où l'étude du plan est privilégiée, l'élément de base est la droite, les relations fondamentales sont le parallélisme, l'orthogonalité.

La pratique convainc rapidement de la franche inutilité de définitions. Pour qu'une notion soit valable, il faut et il suffit qu'elle soit opératoire, c'est-à-dire qu'elle puisse être effectivement utilisée, comme la connaissance d'un mot n'a d'intérêt que s'il peut être placé dans la conversation.

Par exemple :

— On vérifie que deux droites sont perpendiculaires en plaçant convenablement l'équerre.

— On trace deux perpendiculaires en maniant l'équerre et la règle.

— On trace deux droites parallèles ou on vérifie que deux droites sont parallèles en utilisant convenablement l'équerre et la règle.

— On peut obtenir des perpendiculaires, des parallèles par un pliage convenable.

Deux faisceaux de parallèles permettent de quadriller le plan et ainsi repérer les points avec plus ou moins de précision. Le repérage dans un système de coordonnées est un outil assez élaboré, mais qui trouve de nombreuses illustrations pratiques.

Ce sont aussi des considérations pratiques qui nous permettent d'éviter les querelles : affine - métrique. Dans la mesure où nous recherchons un outil applicable, il importe de tenir compte de la qualité effective de l'outil ; ce qui n'empêchera pas, dans la règle du jeu, de limiter l'usage des instruments. Peut-on partager un segment en 5 avec une équerre, une règle et une bande de papier ?

Formes usuelles. Constructions

On sait la profonde emprise sur la géométrie des "bonnes formes". L'idéal du carré dégénère en rectangle, losange, ... quadrilatère. Le libellé du programme engage nettement à procéder du général au particulier. C'est une bonne manière de procéder à condition d'engendrer les formes de manière à faire apparaître les particularités. Par exemple, en ce qui concerne l'étude du parallélogramme et de ses cas particuliers, la technique des bandes est intéressante en ce sens, puisque c'est le même procédé qui construit les différents objets :

- L'intersection de 2 bandes est un parallélogramme.
- Si les bandes sont isométriques (superposables), ce parallélogramme est un losange.
- Si les bandes sont perpendiculaires, ce parallélogramme est un rectangle.
- Si les bandes sont à la fois perpendiculaires et isométriques, le parallélogramme est à la fois rectangle et losange, c'est un carré.

Une fois les formes obtenues, il est bien entendu intéressant de faire apparaître les propriétés (éventuellement caractéristiques). C'est déjà un point important de remarquer que les propriétés se conservent par passage au cas particulier. L'étude des propriétés est l'occasion de mettre en oeuvre l'outillage dont nous disposons : équerre, règle, règle graduée, compas à pointes sèches.

La réalisation de constructions permet l'organisation de l'information, l'approche de problèmes d'unicité, de suffisance de conditions, la recherche de solutions multiples, la discussion d'un ensemble de données (contradiction, redondance).

Par exemple, avec deux fines bandes de papier, matérialisons deux diagonales se coupant en leur milieu. Le quadrilatère obtenu est-il un parallélogramme ? Vérifions-le à l'aide de la règle et de l'équerre.

Peut-on trouver un quadrilatère qui ait deux angles droits et qui ne soit pas un rectangle ?

Avec des bandes de papier et une équerre, cherchons un quadrilatère qui ait deux côtés opposés isométriques et un angle droit.

On voit à quel point on peut faire appel à l'imagination, à la curiosité (et si je prenais telle ou telle propriété ? Comment les matérialiser ? Que puis-je trouver ? Est-ce vrai dans tous les cas ?)

De là à retenir les propriétés... On conçoit aisément que cette mémorisation a peu d'importance face aux avantages de la découverte.

Remarquons d'autre part que nous ne refusons pas, au contraire, tous les procédés empiriques, le bricolage de toute sorte.

L'usage du compas peut donner lieu à des activités fécondes, à condition encore de rester dans un domaine essentiellement pratique. La recherche de justifications se fera progressivement.

On prête aussi à la pratique des constructions l'entraînement au soin, à la qualité du dessin. Il faut avoir perçu la difficulté immense de coordination des gestes, dans le maniement de la règle, de l'équerre, du compas, pour être convaincu de l'utilité de la chose.

Transformations

Les programmes ne mentionnent pas l'approche des transformations géométriques ; pourtant la pratique a introduit l'étude, à partir des quadrillages, de la translation, des symétries, de l'homothétie. Là encore, le sujet permet une approche dynamique des notions en même temps qu'il concrétise l'idée d'opérateur pour la translation et l'homothétie. Cette dernière trouve une illustration intéressante avec le concept d'échelle souvent utilisé en éveil.

La symétrie, la recherche d'axes de symétrie donnent lieu à des activités de pliage, de mesurage.

Compétence. Performances

De ce qui vient d'être dit veut se dégager l'idée qu'en géométrie, on peut faire beaucoup de choses et ne rien apprendre. Ce qui ne signifie pas que l'on ne devra rien savoir.

De tous les enseignements de l'Ecole Élémentaire, celui de la géométrie est certainement celui qui devrait le mieux se greffer sur l'action et le vécu. C'est celui où la conceptualisation, la mathématisation prennent tout leur sens. Il s'agit, à travers une prise de conscience globale de structures, de rapports complexes, de construire un outil mental d'appréhension de l'univers. En ce sens, la maîtrise de ces rapports sera un matériau de choix de mise en oeuvre des investigations logico-mathématiques. L'objet géométrique devient alors un instrument de construction de l'espace. L'espace est perpétuellement remodelé en fonction d'outils de plus en plus élaborés.

Par exemple, un carré :

- est construit par intersection de 2 bandes perpendiculaires et isométriques
- peut être obtenu par pliage
- pave le plan de plusieurs manières
- revient coïncider avec sa trace après certains déplacements
- engendre un cube

.....

On voit mal comment enfermer l'aspect formateur de la géométrie dans un cadre de connaissances ponctuelles; tout au plus peut-on proposer une liste de ce que l'enfant *ne* devrait *pas* normalement savoir en entrant en sixième :

- formaliser des relations d'appartenance, d'inclusion,
- réciter des définitions, des propriétés,
- mesures des angles,
- le nombre π .

Quant à ce qu'il peut savoir, un test de connaissances l'établira facilement.

1.3. A propos de l'enseignement de la GEOMETRIE à l'école élémentaire

par R. CREPIN (I.D.E.N.)

Rappelons les termes du programme de l'école élémentaire du 2 janvier 1970.

Exercices d'observations et travaux sur des objets géométriques :

au cours élémentaire : Tracés, découpages, pliages. Cube, carré, rectangle, triangle. Quadrillages.

au cours moyen : Bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangles. Disque, cercle. Pavé (parallélépipède).

Exercices pratiques de mesure et de repérage

au cours élémentaire : Usage de la règle graduée, de la balance, du calendrier. Lecture de l'heure.

au cours moyen : Longueur, aire, volume, temps, masse. Expression d'un résultat avec une unité convenablement choisie.

Ordre de grandeur. Encadrement.

Dans les Commentaires on précise :

“L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices font appel non seulement à l'*observation* mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le *goût des travaux manuels* : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire*. L'*emploi des instruments* (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin”.

I Ces indications nous permettent d'affirmer qu'à l'école élémentaire, *observation* et *travaux manuels* devraient former la base du travail en géométrie. Cela exclut certainement l'enseignement dogmatique de définitions et propriétés des formes géométriques du programme, et condamne l'enseignement verbal de résultats accessibles seulement à des enfants beaucoup plus âgés. Par contre, les enseignants sont incités à animer des séances d'activités géométriques : activités des élèves qui entraînent leurs réflexions et qui de comparaisons en comparaisons soutiennent la formation de leur esprit critique tout en leur donnant de bonnes méthodes pour leur formation scientifique.

Depuis plusieurs années, l'école élémentaire s'est penchée sur l'enseignement scientifique et l'enseignement des activités d'éveil. L'absence de textes officiels n'empêche pas de parler de la méthode préconisée pour ce dernier car elle convient fort bien aux activités géométriques.

Dans cette “méthode spiralaire” utilisée comme processus d'apprentissage, parmi les phases de ce processus, trois nous paraissent essentielles :

1/ de l'environnement à l'observation (vécue par l'enfant) : observation, manipulation, pliage, découpage ...,

2/ de l'observation à la réflexion (non organisée d'abord et structurée ensuite) : mathématisation de situations, traduction par des représentations, calcul,

3/ de la réflexion au modèle (à la communication de ce modèle par les constructions) : découverte de généralisations, projet de modèles, déductions dans un modèle.

Les "résultats" de la phase 3 ne sont pas une fin, mais un palier pour retourner aux réalités et mettre en route un nouveau cycle de l'observation affinée au projet plus précis du modèle, et ainsi de suite. La réflexion d'un enfant ne doit jamais être bloquée, par cette méthode d'enseignement ouvert.

II Essayons d'illustrer par un exemple :

Celui du "pavé"... — que l'organisateur de la présente brochure a placé dans la rubrique "Noyaux-Thèmes" (tome II).

III A l'entrée en sixième les enfants devraient savoir :

- observer,
- comparer et découvrir des analogies,
- construire.

L'acquisition de ces savoirs doit déboucher sur une appropriation de l'espace ambiant par l'enfant. Toutes les activités manuelles peuvent contribuer à cela.

(1) Les enfants pourraient avoir fait *du dessin géométrique*, afin d'acquérir une facilité d'usage des instruments et aussi des machines à transformer (équerre, règle, compas, pantographe, translateur, didagraphe, symétriseur, affinateur ...).

Par les activités d'éveil, les enfants auront utilisé les instruments de mesures pour solides, liquides et gaz (règle graduée, rapporteur, éprouvette graduée, peson ...).

Il est bon d'éviter avec eux un instrument trop complet qui ferait une trop grande économie de pensée et, dans le même temps, de les inciter à construire des instruments dont ils auraient besoin dans une situation donnée.

(2) L'usage de multiples *quadrillages* sous forme de planche à clous ou "plan pointé", de mots croisés, de carrelages, permet

- la découverte des formes géométriques tracées sur quadrillage, puis sur papier dessin,
- la découverte de l'aspect illimité du plan, de la droite, de l'espace (translation et homothétie, construction de papiers peints, de carrelages avec ou sans rythmes),
- la compréhension des mesures de surface, de longueur, de volume.

(3) Les *quadrillages codés par des nombres*, les exercices pratiques de mesures sur des objets géométriques facilitent la compréhension du calcul numérique et montrent l'unité du raisonnement mathématique, inductif et déductif, aussi bien en arithmétique qu'en géométrie. La liaison géométrie-calcul prépare les études mathématiques du premier cycle.

(4) L'observation organisée des solides déformables, des solides non déformables, la construction d'un solide (voir ci-dessus pour le pavé) précise les notions d'intérieur, d'extérieur, de frontière, de développement (pavé ou rectangle).

(5) Déjà à l'école élémentaire les enfants se créent des images mentales à partir de la réflexion, ils élaborent des stratégies, recherchent des lois, formulent des raisonnements dans des "îlots déductifs", construisent des modèles. L'école développe ou devrait développer des activités combinatoires.

Conclusion :

C'est par l'accumulation d'expériences que l'enfant augmente son aptitude à la généralisation. L'école élémentaire ne devrait en aucun cas enseigner des résultats, mais elle devrait fournir aux enfants l'occasion d'activer leur pensée dans des situations diverses et variées, le noyau se dégageant des nombreuses expériences thématiques.

triangle isocèle

J'ai réussi à mettre
Un peu d'ordre en moi-même.

J'ai tendance à me plaire.

Guillevic
"Euclidiennes"
Gallimard, édit.

la collection MOTS

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Élémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 X 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants :
chacune des trois brochures : 6 F (port compris : 9 F)

MOTS I : 100 pages. MOTS II : 108 pages. MOTS III : 136 pages.

Adressez-vous à votre Régionale ou Départementale.

2 - L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DANS LES S.E.S.

par Michèle DEZAN et Henri PLANCHON, I.R.E.M. de Toulouse

Il est peut-être abusif de parler d'un enseignement de la géométrie lorsqu'on s'adresse à des "sections d'éducation spécialisée". Et pourtant, ces élèves, qui ne sont qu'une minorité dans les C.E.S. et qui posent tant de problèmes, ont aussi droit à cet enseignement.

Il apparaît évident de concevoir, pour ces sections, un enseignement différent de celui des classes dites "normales".

Les élèves de ces dernières doivent, en effet, encore avoir toutes les chances de poursuivre des études le plus longtemps possible, alors que ceux qui nous intéressent ici voient leurs études futures fortement compromises.

Il s'agit donc de chercher à dispenser un enseignement adapté, certes, mais non dévalorisé, afin de ne pas augmenter le handicap de ces élèves ; un enseignement différent mais capable de favoriser au maximum leur épanouissement et leur intégration dans la société. Aussi sommes-nous amenés à essayer de combler, autant que possible, ce fossé qui les sépare des autres élèves, pour tenter de maintenir une certaine communication à l'intérieur d'une même classe d'âge. Nous chercherons donc à développer, chez ceux-ci, toutes les qualités en leur apportant en même temps les connaissances indispensables à une meilleure adaptation à la vie sociale, pratique et professionnelle.

Dans ce but, nous essayons de donner les moyens susceptibles de développer chez l'élève une meilleure structuration de l'espace ainsi que les éléments qui vont lui permettre de mieux appréhender l'environnement physique.

Avec un groupe de l'I.R.E.M. de Toulouse, nous avons tenté d'atteindre ces objectifs en concevant cet enseignement comme une succession d'étapes, chacune d'elles reprenant les acquis des étapes précédentes :

- entraînement gestuel,
- entraînement à la mesure,
- acquisition de vocabulaire,
- entraînement aux représentations des solides.

L'objectif de cette première étape est de faire acquérir une certaine maîtrise dans le dessin géométrique avec utilisation des instruments et même, si possible, une certaine aisance dans le tracé à main levée. Après les contraintes de soin et de précision que nous imposons ici, nous devons donner à ces élèves la possibilité de réaliser librement des constructions et de créer des dessins géométriques.

Dans la deuxième étape, il nous paraît nécessaire d'insister tout particulièrement sur les mesures de longueurs et d'angles avec utilisation des instruments et surtout d'essayer d'entraîner les élèves à donner des évaluations approximatives de longueurs et d'angles sans recours aux instruments de mesure.

Ensuite, tout en reprenant les dessins, les constructions et les mesures des étapes précédentes, nous introduisons le vocabulaire propre à la géométrie.

Dans l'étape suivante nous abordons les calculs relatifs aux figures géométriques planes déjà construites.

Enfin, nous pouvons aller à la découverte des solides pour retrouver dans la réalité les figures géométriques déjà vues. Alors, seulement, après cette démarche, nous essayons d'aborder les représentations de solides:

En conclusion, nous avons voulu concevoir ici un enseignement progressif, permettant une vue d'ensemble de cette matière et mettant en valeur les relations qui peuvent exister entre les différentes notions géométriques.

Publications A.P.M.E.P.

Les

CARRÉS MAGIQUES

Brochure de 48 pages sur un "thème vertical"

Prix : 4 F par la poste : 5,50 F

3 - UN PREMIER CYCLE, POUR QUI ?

par Henri BAREIL

Les élèves de nos classes du premier cycle ont, pour la plupart, de 11 à 16 ans : le stade "opérateur formel" y est atteint.

Cet enseignement appartient au temps de la scolarité obligatoire et s'adresse à TOUS les élèves de ces classes d'âge. Or où vont-ils ?

1 Voici, à titre d'exemple, l'orientation des 16 472 élèves de troisième de l'Académie de Toulouse en 1974-75 :

	Seconde A ou AB	Seconde C	Seconde T'	Autres secondes	Cycle court	Autres études	Redou- blements	Interrup- tion des études
% du total	29 %	23 %	9 %	1 %	21 %	3 %	9 %	5 %

Encore faut-il noter :

— que de nombreux départs "vers la vie active" ont eu lieu avant la troisième,

— que l'Académie de Toulouse est relativement *surscolarisée*, surtout au niveau du second cycle et pour les classes de seconde.

On trouve dans telles autres académies un pourcentage "cycle court" double de celui des "Secondes C", et jusqu'à 26 % en "Interruption des études".

2 Voici des pourcentages d'entrée en seconde C par rapport à l'entrée en sixième :

	Académie de Bordeaux	Académie de Limoges	Académie de Lyon	Académie de Meurthe-et- Moselle	Académie de Poitiers	Académie de Rouen
1971	18	10	21		20	15
1972	16	16	19	12	19	14
1973	14	15	18	11	16	12
1974	14	14	17	10	14	11

... Cela donnera des pourcentages de bacheliers C, par rapport aux entrées en sixième, de l'ordre de 4 %

Alors, pour qui notre enseignement du premier cycle ?

Je laisse la parole à un enseignant-romancier, Claude DUNETON, dans "Je suis comme une truie qui doute" [Edit. Le Seuil, 1976] :

"Brusquement on a ouvert les portes du secondaire à la masse, on y a fourré le peuple en tas, mais on n'a pas songé à rectifier le tir. On n'a rajusté ni la machine ni les programmes. On n'a pas donné aux enseignants l'occasion de réviser leurs idées sur la profession, sur le sens de l'instruction ou de la culture. De petites boutiques on a fait des grandes surfaces, mais c'est toujours les mêmes produits que l'on vend.

Il y a quatre ans une enseignante d'un certain âge bombardée du lycée où elle avait fait le gros de sa carrière piaillait aux conseils de classes du CES : "Mais qu'est-ce que ces élèves font chez nous ? Je vous le demande ! Ils n'ont pas leur place ici voyons !" ... On était gênés. Il a fallu lui expliquer que l'école était devenue obligatoire. Jusqu'à seize ans... Elle l'avait entendu dire mais elle n'avait pas fait le rapprochement, tiré les conclusions pratiques nécessaires : qu'ils étaient là parce qu'ils ne pouvaient pas être ailleurs, et qu'elle ne pouvait plus les renvoyer, comme au beau temps de sa jeunesse, garder les oies. Ça lui faisait un choc à la dame, elle avait cru à une erreur ! Ils n'étaient plus du tout adaptés à son cher vieil enseignement des familles, les nouveaux mouflets populaires !

N'empêche que c'est vrai : personne ne nous a avertis. Naguère les gens allaient à l'école pour changer de condition sociale, échapper à un travail manuel et devenir des petits bourgeois. Aujourd'hui on fait des études pour aller à l'usine. C'est un changement fondamental. L'école n'en a pas fondamentalement tenu compte. Elle s'est agrandie, enflée pour recevoir tout le monde, mais ses structures ont à peine bougé..."

4 - OUBLIEUSE MÉMOIRE ?

par Irneh LIERAB, ethnologue

En prévision de cette brochure, trois classes (Terminale C, Terminale A, Seconde AB) ont été interviewées.

Les élèves étaient invités à répondre à un questionnaire sur la géométrie qu'ils avaient pratiquée dans le premier cycle, le souvenir qu'ils en gardaient quant au contenu de l'enseignement, à sa forme, et aux méthodes employées.

Ce qui a frappé la plupart des élèves :

- l'insuffisance (ou l'absence) d'activités géométriques en sixième-cinquième,
- le fossé entre la cinquième et la quatrième,
- le caractère "abstrait" et pauvre en activités de la géométrie de quatrième,
- l'ampleur des connaissances à acquérir en quatrième-troisième : "En quatrième et troisième on aurait dit qu'on était à la tâche..."
- leur insuffisance, néanmoins, pour les études ultérieures en physique : ... "un gouffre"...
- la pauvreté de ce qu'il en reste, hormis des mots...
- le caractère "magistral" des cours, et le "par coeur",... "avec tout ça. on ne savait pas au juste ce qu'on faisait"... De formation au raisonnement, aucun souvenir.

Qu'en irait-il avec des élèves passés en C.E.T., ou en "vie active" dès la troisième ?

Un enseignement uniforme et ambitieux, dogmatique et imposé, plutôt inutile, tel apparaît notre enseignement de la géométrie — *aux yeux des élèves interrogés* —.

Ce serait déjà esquisser un contre-pied de ces vices que de donner le pas aux méthodes et comportements sur le contenu, que de pratiquer, dans ces divers domaines, la politique de "noyaux-thèmes" préconisée par l'A.P.M.

... Quand irons-nous vers un enseignement plus individualisé ?

A quand un enseignement dont chaque élève sera l'agent, l'acteur principal ?

“Oublieuse mémoire”...

Ne serait-ce pas celle des lamineurs d'horaires, celle des rédacteurs “de programmes de contenu mathématique”, la nôtre parfois (souvent ?), qui oublieraient... les élèves en tant que “s'éduquant, entre autres, à travers la mathématique” et les croiraient cire plus ou moins dure dont le destin serait de se laisser mouler par la mathématique... ou de la rejeter ?

Une Publication

A. P. M. E. P.

A LA RECHERCHE DU NOYAU DES PROGRAMMES DU 1^{er} CYCLE

(Savoir minimum en fin de troisième)

2ème édition

par l'I.R.E.M. de Toulouse, avec la participation d'autres I.R.E.M. et de membres de l'A.P.M.E.P.

220 pages, 39 rubriques, un index alphabétique.

Ces rubriques regroupent les termes mathématiques, notations, énoncés, “savoir-faire”, méthodes et attitudes ... qui paraissent constituer le bagage minimum d'un élève sortant du premier cycle, après y avoir suivi une scolarité la plus proche possible des conditions normales, dans le cadre des programmes de 1969 dont elle tente de limiter la surcharge.

Cette brochure est à l'usage du professeur. Elle se veut adaptée à un “enseignement pour tous”.

Elle est le fruit d'un travail d'équipe.

Prix : 15 F (port compris : 19 F).

Pour vous la procurer, adressez-vous à votre Régionale ou Départementale.

5 - UNE ÎLE...

Une île
Une île au large de l'espoir
Où les hommes n'auraient pas peur
Et douce et calme comme ton miroir

Une île
Claire comme un matin de Pâques
Offrant l'océane langueur
D'une sirène à chaque vague

Viens
Viens mon amour
Là-bas ne seraient point ces fous
Qui nous disent d'être sages
Ou que vingt ans est le bel âge
Voici venu le temps de vivre
Voici venu le temps d'aimer

Une île
Une île au large de l'amour
Posée sur l'autel de la mer
Satin couché sur le velours
Une île
Chaude comme la tendresse
Espérante comme un désert
Qu'un nuage de pluie caresse

Viens
Viens mon amour
Là-bas ne seraient point ces fous
Qui nous cachent les longues plages
Viens mon amour
Fuyons l'orage
Voici venu le temps de vivre
Voici venu le temps d'aimer

Une île
Une île qu'il nous reste à bâtir
Mais qui donc pourrait retenir
Les rêves que l'on rêve à deux
Une île

Voici qu'une île est en partance
Et qui sommeillait en nos yeux
Depuis les portes de l'enfance
Viens
Viens mon amour
Car c'est là-bas que tout commence
Je crois à la dernière chance
Et tu es celle que je veux
Voici venu le temps de vivre
Voici venu le temps d'aimer.

Jacques Brel.

PUBLICATION A.P.M.E.P.

**MATHEMATIQUES
POUR FORMATION D'ADULTES**

*par Philippe LOOSFELT et Daniel POISSON, C.U.E.E.P.
Centre Université Economie d'Education Permanente.
Université des Sciences et Techniques de Lille.*

192 pages. Prix : 18 F (sans port : 15 F).

Voir dans le Bulletin 302, pages 202 et 203, un *extrait* de la brochure.

“Depuis 7 ans, le C.U.E.E.P. assure exclusivement des formations d'adultes, dans la Région Nord-Pas-de-Calais ... Dans cet ouvrage, écrit d'abord pour aider les formateurs du C.U.E.E.P. dans leur tâche, nous essayons de montrer comment certains thèmes peuvent être utilisés, comment telle fiche s'est révélée passionnante, quels sont les échecs qui nous ont poussés à corriger certains points, etc...”

Cette brochure intéresse aussi les enseignants du premier et du second degrés ; elle peut les aider à renouveler leurs exercices, la présentation de certaines notions, etc.

3^{ème} partie

**QUELQUES
RECHERCHES
STRUCTURÉES**

AVERTISSEMENT

par Henri Bareil

Très rapidement, au fur et à mesure de leur création, les I.R.E.M. ont entrepris des recherches et expérimentations concernant la géométrie de quatrième et troisième.

Certaines dans la ligne des programmes 1970 (ainsi *Jéometri** à Grenoble), d'autres non.

Tous les I.R.E.M.S. mériteraient d'être cités.

Faute de le pouvoir, voici :

① LA RECHERCHE "O.P.C." (la seule recherche de géométrie conduite conjointement dans plusieurs I.R.E.M.S., la seule à label I.N.R.D.P. puis Direction des Collèges), dont la plupart des équipes ont remis en cause l'actuel découpage quatrième-troisième, tout en s'attachant plus aux méthodes qu'aux contenus.

② "LE PLAN REPÉRÉ", recherche initialement appuyée sur les quadrillages, et qui remet en cause l'actuelle progression $R \rightarrow Q$.

Enfin en ③ on trouvera une invite à "valoriser" LA GEOMETRIE EN SIXIEME ET CINQUIEME.

* Recherche publiée, comme cours de quatrième, aux Editions Cedic. Voilà pourquoi cette recherche, importante, n'a pu figurer davantage en cette brochure.

1 - LA RECHERCHE O.P.C.

- 1.1. "Un ami de l'O.P.C." fait l'historique de cette Recherche.
- 1.2. Progression Clermontoise (équipe Charles PEROL)
- 1.3. Progression Toulousaine (équipe Henri BAREIL)
- 1.4. Progression de Limoges (équipe Roger CREPIN)

Rennes-Vannes (équipe de Régis GRAS) ne figure pas dans le présent chapitre, mais "en chapeau", dans le chapitre "Noyaux-Thèmes", de travaux illustrant des préoccupations communes à toutes les équipes O.P.C. dans l'ordre des comportements et de l'évaluation des élèves (pédagogie par objectifs, noyaux, thèmes). On y trouvera des sujets de devoir ou d'examen, des fiches-élèves,...

Poitiers, par ses trois courants, se rattache soit à Clermont-Toulouse, soit à Limoges, soit à Vannes.

Orléans, sous la plume de CLOPEAU, précise des "façons d'agir O.P.C." dans le Chapitre "Méthodes".

D'autres équipes enrichissent l'O.P.C., notamment celle des I.R.E.M.S. de Caen et Paris-Nord.

Actuellement O.P.C. s'intéresse aussi aux activités en sixième et cinquième.

1.1. O.P.C. : QU'EST-CE QUE C'EST ?

Par un Ami de l'O.P.C.

Il est apparu très tôt que les programmes de quatrième et troisième de 1971 n'étaient pas satisfaisants en géométrie. Alors la Commission Lichnérowicz chercha des remèdes dans diverses directions. La circulaire 2 colonnes du 19/2/1973 apportait un soulagement immédiat. Pour une échéance plus lointaine, certains proposaient comme salut la recherche de nouvelles axiomatiques qui seraient plus à la portée des enfants. Quelques-uns (H. Bareil, J. Fort, Ch. Pérol) proposèrent d'entreprendre une recherche inter-I.R.E.M. dans une direction complètement différente.

Encouragé par A. Lichnérowicz, l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand lança un appel publié dans le premier bulletin Inter-I.R.E.M.. Le titre du papier était : "Offre Publique de Collaboration" (en abrégé O.P.C.). C'était l'époque de l'O.P.A. de B.S.N. sur Saint-Gobain. Voici la première page de cet appel :

* Voir tome II

“L’I.R.E.M. de Clermont-Ferrand lance une Offre Publique de Collaboration pour une expérimentation de programmes de quatrième et troisième (surtout en géométrie mais non exclusivement).

Il s’agit de préparer un éventuel changement de programme applicable après les diverses phases de l’expérimentation, donc dans quelques années. La Commission Ministérielle Lichnérowicz a, lors de sa réunion du lundi 2 avril, approuvé le principe d’une telle expérimentation.

A Clermont-Ferrand, et probablement dans beaucoup d’autres Régions, nous pensons que les programmes actuels ont de très graves défauts et que les nouvelles annexes et commentaires divers ne peuvent constituer que des palliatifs. Il faut donc songer à les remplacer et pour faire mieux, il faut cette fois, les appuyer sur une expérimentation sérieuse.

Parmi les reproches que nous pouvons adresser aux actuels programmes, relevons-en deux pour fonder sur eux nos propositions.

1°/ Les élèves qui ne poursuivront pas des études par la voie longue ont été considérés comme sans intérêt. Les tracés divers dont beaucoup auront besoin n’arrivent qu’après des chapitres plus théoriques qui leur font perdre pied. Nous soutenons que c’est, au contraire, sur leurs besoins à eux que l’enseignement doit être bâti et que l’on obtiendra ainsi, par surcroît, un meilleur enseignement pour ceux qui poursuivront des études longues de mathématiques.

2°/ La voie actuelle choisie pour l’apprentissage n’a été justifiée que par ses qualités comme voie d’exposition. En caricaturant à peine, on pourrait dire qu’a été faite pour elle la première phase du mode d’emploi de Bourbaki (le traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes). Mais nous ne pouvons pas supposer à nos élèves “une certaine habitude du raisonnement mathématique” puisque notre tâche à nous est précisément “de les rapprocher de ce but éloigné.”

Une première réunion organisée en Septembre 1973 à Clermont-Ferrand rassembla des délégués de beaucoup d'I.R.E.M. en présence de M. Legrand, Directeur de la Recherche à l'I.N.R.D.P. La vivacité des débats fut le reflet du désarroi des enseignants. Quelques équipes eurent la force de surmonter le découragement, de ne pas se laisser paralyser par les critiques seulement dissolvantes, de se lancer dans l'action. 5 I.R.E.M. au début, le double aujourd'hui.

Le titre de la recherche initialement inscrite à l'I.N.R.D.P. était : l'enseignement de la géométrie en quatrième et troisième, ses objectifs, leurs approches.

Chaque équipe a organisé son travail avec une physionomie propre. Le travail de l'Equipe de Vannes est très différent de celui de l'Equipe de Clermont-Ferrand. Cette diversité n'est pourtant pas l'anarchie. Chaque année, au cours de 4 ou 5 stages, les points de vue ont été confrontés. Le travail de chacun s'est enrichi des apports des autres. Il est arrivé que les chemins se croisent ; que sur tel point l'Equipe de Toulouse se soit ralliée à la conception de Clermont-Ferrand pendant que l'Equipe de Clermont-Ferrand se retrouvait sur celle de Toulouse.

A chaque réunion les Amis de l'O.P.C. sont heureux de se retrouver. Dans quelques-uns des articles qui suivront, c'est la foi de cette centaine de coéquipiers que nous tâcherons de vous faire partager. Au moment où la Direction des Collèges nous demande de mettre fin à notre recherche pour ne pas porter d'ombre à la mise en place de ses programmes qu'elle pense éternels, nous faisons le point. Nous constatons que nos idées ont fait leur chemin. Quelques lignes des programmes proposés semblent en être inspirées. Un peu partout nous suscitons la curiosité et souvent la sympathie. Cette brochure nous donne l'occasion de nous exprimer largement. C'est aussi l'occasion d'expliquer pourquoi dans le premier cycle nous rejetons l'exposé d'une "axiomatique globale" de la géométrie, pourquoi nous préconisons un enseignement comportant des niveaux dans l'assimilation des concepts, comment nous essayons d'étendre notre recherche de quatrième et troisième vers sixième et cinquième, pourquoi nous demandons que les objectifs de notre enseignement soient clairement précisés.

Merci à l'A.P.M. de nous donner le moyen de faire connaître notre travail.

1.2. PROGRESSION CLERMONTOISE

(Equipe Charles PEROL)

En quatrième

- Module A Révision
- Module B Calques — C'est la présentation franche au niveau manipulation de notre objet : le groupe des déplacements.
- Module C Incidence (dont parallélisme) et orthogonalité.
- Module D Décimaux
- Module E Distance — C'est notre invariant. Ce module donne lieu a une séquence déductive sur la médiatrice qui a été présentée dans la 1ère partie, 6.
- Module F Pythagore — Ce module associe étroitement du numérique (carrés - racines carrées - approche de \mathbf{R}) et du géométrique. Il conduit à la comparaison perpendiculaire — oblique et à l'étude classique des positions relatives d'une droite et d'un cercle.
- Module G Nombres réels (modestement).
- Module H Repérage (sur la droite et dans le plan).
- Module I Proportionnalité — Agrandissement. Réduction — Thalès.
- Module J Trigonométrie — Il s'agit d'utiliser simplement les rapports trigonométriques d'un secteur aigu.

En troisième

- Module A Fonctions et applications : monomes, polynomes, valeur absolue, racines carrées.
- Module B Symétrie droite avec retour préalable sur la médiatrice, bissectrice (et la propriété classique de ses points), triangle isocèle.
- Module C Une inconnue (problèmes — équations — inéquations).
- Module D Deux droites de symétrie. Rectangle — Losange — Triangle équilatéral. A propos du rectangle, ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite donnée et équidistants de 2 droites parallèles.
- Module E Repérage — Ce module sera supprimé en troisième car nous l'avons reporté en quatrième.

Module F	Symétrie centrale (elle apparaît par la composition de 2 symétries droites d'axes perpendiculaires) et parallélogramme.
Module G	Translations (Elles apparaissent en composant 2 symétries - point) et vecteurs.
Module H	Groupe additif des vecteurs et des translations, produit par un entier (positif ou négatif).
Module I	Loi externe — Homothétie — Fonction $y = ax$ et $y = ax + b$ (Graphiques).
Module J	Deux inconnues.

Nous traitons largement l'ensemble des contenus actuels de quatrième et troisième mais avec beaucoup moins d'ambition au début. Notre expérimentation s'étend maintenant à sixième, cinquième dans le cadre des programmes officiels. Nous en attendons une aide importante en quatrième et par contre-coup en troisième.

1.3. TOULOUSE - O.P.C.

(Equipe Henri BAREIL)

— En classe des situations sont données, des recherches et activités organisées.

— Pour "la maison" au moins, en quatrième-troisième, 8 fascicules de fiches, auto-correctives pour la plupart.

1.3.1. Principes

L'équipe a essayé, et essaie :

- 1 de *partir de l'acquis de sixième-cinquième*, d'abord conforté et mis en ordre, sur parallélisme, orthogonalité, distance, angles,... dès le début de la quatrième.

De là des "règle du jeu" du domaine mathématique, en nombre impressionnant (40 ? 50 ?) sans chercher à minimaliser. Ainsi évite-t-on les démonstrations "d'évidences" et a-t-on d'emblée des situations riches.

- 2 d'utiliser à fond les *instruments de dessin et les "transformations"*. Ceci permet une géométrie où l'élève est actif et découvre.

- 3 néanmoins, de *séparer* domaine “expérimental” et domaine “mathématique”.
- 4 de faciliter l’acquisition des concepts par une *approche* “*en spirale*”. Les concepts sont peu à peu pratiqués et enrichis : (Dans la progression nous citerons l’exemple des parallélogramme, rectangle, losange).
- 5 ayant toujours un point de départ expérimental, de *revenir au dessin* pour illustration ou contrôle.
- 6 de *développer l’art de conjecturer* mais, simultanément, *celui de critiquer et de “douter”*,
- 7 de *doubler les procédés “géométriques” par l’analytique*, et de lier le plus possible algèbre et géométrie.
- 8 de *multiplier les exercices de recherche*
- 9 de *dégager un “noyau”* de connaissances ou de méthodes, signalé par la typographie ou la couleur du papier, des “compléments” ou des “démonstrations” étant présentés en fin de chapitre, après les “exercices”.
- 10 *Prioritairement, d’apprendre à organiser une recherche ou une activité :*
 1. — analyse d’une situation et proposition de “problèmes”, recherches ou activités (motivations...)
 - tentative de “réduction” s’il y a lieu à un problème plus simple, ou déjà traité,...
 - recherche d’informations,
 - multiplication d’exemples ou étude expérimentale. Conjecture.
 - recherche de démonstrations et souci des “réciproques”.
 - recherche et localisation d’erreurs éventuelles. Auto-contrôle. Auto-correction.
 - éventuellement : recherche de documentation sur l’utilité pratique des conclusions obtenues.

● Cette organisation doit permettre à chaque élève de “faire” quelque chose. Elle doit essayer de donner à tous plaisir de la réussite et goût de l’effort.

Si l’on exclut les pages de titres, d’exercices, de compléments, on trouve (environ), pour l’ensemble des fascicules,

- 45 % des pages consacrées aux démarches expérimentales
- 47 % aux études dans “le domaine mathématique”
- 8 % à des synthèses d’ordre logique.

• La part expérimentale, quasi exclusive pour le fascicule 1, très forte à nouveau dans le dernier (symétrie orthogonale,...), l’est beaucoup moins au niveau de l’exploitation des acquis théoriques.

- Les synthèses logiques portent notamment sur :

la possibilité de réduire le nombre d’axiomes, l’égalité, les négations, les conjectures et démonstrations, les réciproques (et les contraposées) et leur utilisation, les organigrammes, l’art de choisir des repères et de les utiliser,...)

*

* *

1.3.2. Progression Toulouse-O.P.C. (pour quatrième et troisième)

① Géométrie dans le domaine physique :

(parallélisme, orthogonalité, distance, angles, positions relatives de deux cercles, d’une droite et d’un cercle, application à des tracés, médiatrice, aires, coordonnées dans le plan, PYTHAGORE).

② Passage au domaine mathématique :

(règles du jeu “initiales” : tous les résultats rencontrés en ① “Somme des angles” d’un triangle — Première étude des quadrilatères ou triangles particuliers — Thalès (facultatif à cet endroit) — Symétrie centrale (Idem) — Etude expérimentale d’applications non classiques du plan dans lui-même (pour “déconditionner” et motiver).

③ Angles et distances :

Première étude des cosinus, sinus, tangentes (de 0° à 90°).

④ Translation. Vecteurs.

(Définitions à l’aide de “direction”, “sens”, et distance, ou avec coordonnées).

Norme et orthogonalité des vecteurs.

Nouvelle étude des quadrilatères particuliers.

Addition des vecteurs.

- ⑤ *Homothétie. Produit d'un vecteur par un réel.*
Dessins. Pantographe. Retour sur la proportionnalité.
Produit d'un vecteur par un réel. [Deux définitions, avec ou sans coordonnées]. Homothétie. Symétrie centrale (s'il y a lieu).
Applications. (Thalès s'il y a lieu ...)
- ⑥ *Angles et distances*
Deuxième étude des cosinus, ... (de 90° à 180°)
- ⑦ *Fonctions linéaires et affines*
- ⑧ *Equations, inéquations, systèmes ...*
- ⑨ *Symétrie orthogonale et isométries.*

*
* *
* *

1.3.3. Un exemple d'activité en classe (Toulouse - O.P.C.)

Résumé d'un travail de recherche en classe.

(Exemple pris en classe de troisième, après l'étude du produit d'un vecteur par un réel et celle du centre de gravité, donc aussi — compte tenu de notre progression — après diverses caractérisations du parallélogramme, du triangle rectangle (par médiane...), orthogonalité des vecteurs, ...)

Situation donnée :

Soit un triangle ABC ; les points B et C sont fixes.

Problèmes dégagés :

1. La variation de A est précisée par les élèves, par groupes : tantôt sur un cercle fixe, tantôt sur une droite fixe,
2. Cela étant, les élèves s'intéressent à ce qu'il advient de divers points (centre de gravité, milieux des côtés, pieds des hauteurs, orthocentre, ...), de certaines longueurs et de l'aire du triangle ABC.

Travail effectué :

1. Chaque groupe d'élèves étudie, pour son cas, ce qu'il advient du centre de gravité, des milieux des côtés, des pieds des hauteurs.

- d'abord en multipliant les positions de A et en conjecturant (tous les élèves en sont capables)
 - ensuite en démontrant (les conjectures aident beaucoup).
2. Pour les autres problèmes soulevés, les difficultés rencontrées conduisent à simplifier le problème. Ainsi, pour l'orthocentre, les élèves se limitent :
 - dans le "cas du cercle", à un cercle passant par B et C
 - dans le "cas de la droite", à une droite soit parallèle à (BC), soit...
 3. Le cas de l'orthocentre est alors l'objet de bonnes conjectures, issues de démarches expérimentales (avec multiplication des positions de A).
 4. Les élèves veulent alors "démontrer".

Dans le "cas de la droite" un groupe d'élèves choisit un repère orthonormé et découvre (entre les coordonnées de l'orthocentre) une relation du type $y = ax^2 + c$. [Question : "C'est quoi" ?]

Dans le "cas du cercle",

 - la simplification $(AB) \perp (AC)$ l'est vraiment trop
 - le choix d'un repère conduit à des calculs considérés comme lourds (pour lesquels un "coup de pouce" sera nécessaire à diverses reprises), souvent abandonnés.
 - la comparaison avec le cas particulier où $(AB) \perp (BC)$ (par exemple) donne aussitôt deux séries de deux droites perpendiculaires à une même troisième. D'où la démonstration, alors "facile".
 5. Les élèves rédigent, puis se servent de leur rédaction pour communiquer aux autres le fruit de leurs recherches.
 6. Ceci donne lieu à contrôle, critique et contestation. Démonstration et rédaction sont, à leur lumière, reprises et améliorées. Des "réciproques" sont analysées.
 7. Recherche de situations du même type que celles étudiées, par exemple, pour l'orthocentre et "le cas du cercle", avec un cercle de centre B...

L'étude expérimentale (par certains élèves) se double alors par l'étude simultanée (par d'autres élèves) à partir d'un repère orthonormé. (La conclusion de cette seconde étude laisse perplexe, la première est plus "parlante" !)

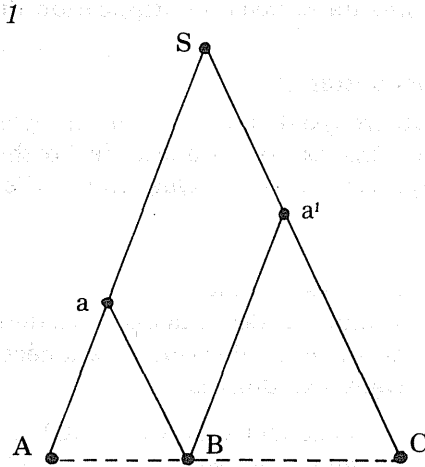
8. Ca pourrait durer ...
 ... De quoi épiloguer, pour nous, enseignants, sur "le temps perdu" (ou non ...)

*
* *
* *

1.3.4. Extraits de fiches-élèves

I — Pantographe

(Extraits de la fiche)



● Dessine, schématiquement, un pantographe.

● Que remarques-tu dans ce dessin d'un pantographe ?

● Utilise ton pantographe. Complète le tableau ci-dessous :

2 Pour les divers usages de l'appareil :

Utilisation	point fixe	pointe lectrice	pointe traçante
Agrandissement
Réduction
...	B	C (ou A)	A (ou C)

● Exercices proposés :

1. Reproduis des "figures géométriques" (carrés, cercle,...)

2. Reproduis des “personnages” ou figures de la feuille suivante.

3 Une utilisation “imprévue”

- Monte les articulations a et a' de façon à ce que les nombres correspondants soient différents.

- Que se passe-t-il alors pour A,B,C ?

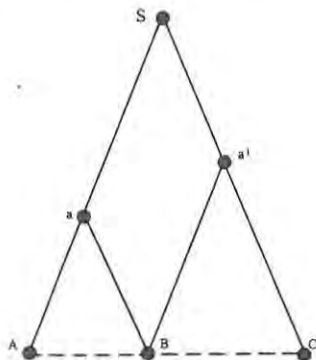
- Reprends alors les transformations des figures ou dessins du paragraphe précédent.

4 Constatations

Compare, pour les §2 et 3, les dessins initiaux aux dessins obtenus.

Prends des axes de coordonnées qui passent par le point fixe
Compare des coordonnées....

Compléments (extraits)



3 Justification du pantographe.

3.1 Soit, par exemple, A le point fixe.

- Tu sais que :

1 : A,B,C, sont alignés

2 : $\overline{AC} = \overline{AB} \times r$,
r étant un réel constant.

- Pourquoi ?

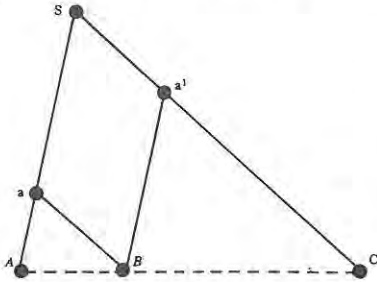
- Ce nombre r correspond-il à des graduations utilisées pour a et a' ?

Pourquoi ?

3.2. Justifie également l'utilisation du pantographe avec B point fixe.

4 Sujet de recherche n° 2

Obtiendrais-tu encore des figures homothétiques avec un instrument ainsi fabriqué :

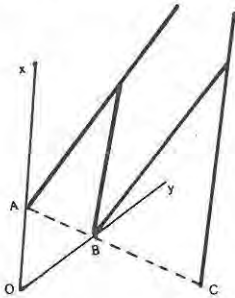


(Cette fois on n'a pas des triangles isocèles).

Procure-toi des tiges de "Mecano"...

A défaut dessine les transformés de nombreux points. Essaie de justifier par un raisonnement.

5 Autre sujet de recherche



[Ox et [Oy sont fixes.

Déplace le pantographe :

A sur [Ox, B sur [Oy, la direction de (AB) invariante.

Quel est l'ensemble des points C ?

III — Dessins "à l'échelle"

(Extraits de la fiche)

- 1
 - Rappelle-toi ce que sont des dessins "à l'échelle". Pense aux cartes de géographie, aux plans de maison, aux plans de villes, etc...
 - Les photos sont-elles "à l'échelle" par rapport aux objets photographiés ?
 - Soit un dessin \mathcal{D} . Soit \mathcal{D}' un homothétique de \mathcal{D} .
 \mathcal{D}' et \mathcal{D} sont-ils à l'échelle ?
 - *Réciproquement* :
Soit un dessin \mathcal{D} .
Soit un dessin \mathcal{D}' , à l'échelle de \mathcal{D} .
 \mathcal{D}' est-il homothétique de \mathcal{D} ?

(Tu peux avoir, par exemple :



(Essaie de joindre, au *crayon*, des points de \mathcal{D} à leurs images sur \mathcal{D}').

Les pages précédentes énuméraient des propriétés de deux figures \mathcal{D} et \mathcal{D}' quand \mathcal{D}' est homothétique de \mathcal{D} .

Parmi ces propriétés lesquelles sont toujours vraies pour la figure ci-dessus ?

2 Vers des homothéties ...

2.1. Reprends les dessins précédents. Calque \mathcal{D} . Fixe-le.

Problème : Calque \mathcal{D}' . Essaie de le placer pour qu'il soit, apparemment, homothétique de \mathcal{D} .

Combien as-tu de solutions (façons de le placer) ?

Ceci te convient-il ? :

Figure 1 :

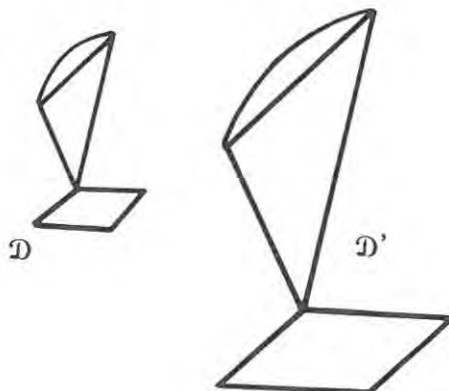
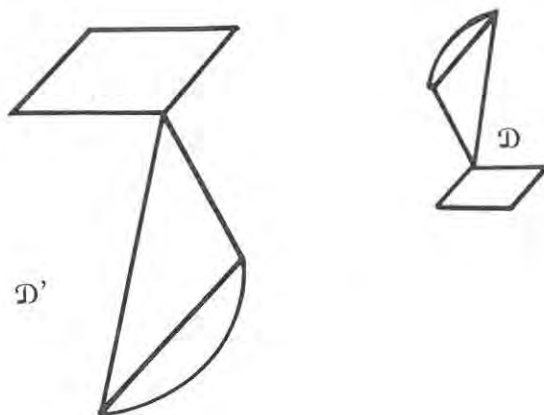


Figure 2 :



Soit divers points de M de \mathcal{D} et leurs images M' de \mathcal{D}' .
Trace, chaque fois, la droite (MM') .

Retrouves-tu le point fixe O du pantographe ?

Retrouves-tu les propriétés établies pour l'homothétie ?

Quelles seraient les valeurs de r pour les deux figures ci-dessus ?

*
* *

[Fiche de la Série "Raisonnements et logique" — Géométrie de quatrième —]

Des conjectures vers les démonstrations

(Début de la fiche)

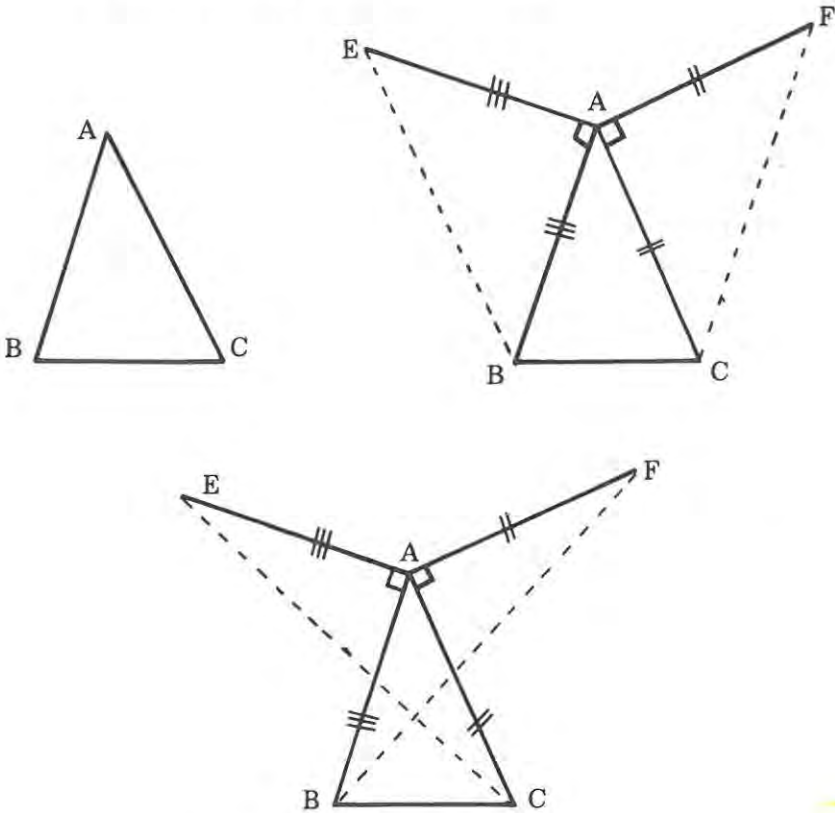
I — Conjectures

Tes dessins illustrent un "jeu", un "domaine" mathématique.

Ils pourront te suggérer des propriétés de ce "jeu", de ce "domaine".

Exemple 1 :

Tu réalises peu à peu la figure suivante :



Le dessin suggère que : $(BF) \dots$

Essaie avec d'autres triangles ABC. Le dessin suggère toujours que ...

De là une CONJECTURE : A partir de tout triangle ABC, si E et F sont construits comme indiqué, alors ...

Rien n'est encore "démonstré", et c'est peut-être faux (cf. page bleue sur les négations).

Exemple 2 :

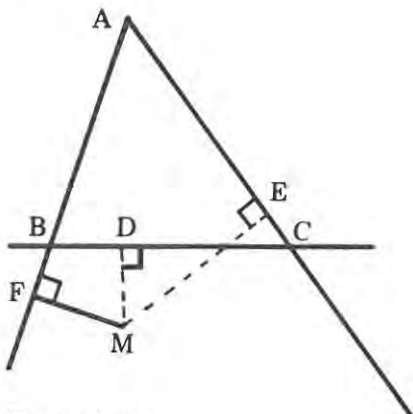
Soit deux points fixes A et B.

Considère un demi-plan de frontière (AB) .

Essaie de placer, dans ce demi-plan, des points M tels que $\widehat{AMB} = 50^\circ$.

Tous ces points semblent appartenir à C'est une conjecture

Exemple 3 :



Le triangle ABC est donné.

Essaie de placer M pour avoir D,E,F alignés.

Les essais suggèrent que D,E,F sont alignés si et seulement si M appartient

Rien n'est démontré. C'est une conjecture.

Exemple 4 :

Soit deux points fixes A et B.

Nous avons cherché des points équidistants de A et de B et CONJECTURÉ qu'ils appartiennent à une certaine droite (précise ... !)

II — Conjecturer ne suffit pas.

Exemple 1 :

Tu pourrais avec de très nombreux triangles conjecturer que l'orthocentre est à l'intérieur. Mais c'est faux : essaie avec un triangle qui a ...

Exemple 2 :

Compare des nombres : 3 ; 6 ; 15 ; 20 ; ... à leurs carrés.

Tu pourrais en conjecturer que tout nombre est inférieur à son carré. Or c'est faux : essaie avec ... ; ... ; ... ; ...

Exemple 3 :

Soit la somme $x + y$.

Tu multiplies x par 2 et y par 5.

Tu voudrais savoir par quoi $x + y$ est multipliée.

Pour cela tu fais des essais en prenant d'abord :

Fais en rouge, ou en vert, ou ...,
le dessin obtenu à partir de celui-ci comme il est indiqué plus
haut.

[Une table d'inverses est fournie]

1.4. GEOMETRIE EN CLASSE DE QUATRIEME & TROISIEME.

Equipe O.P.C. Limoges (équipe Roger Crépin)

La présentation qui suit du programme de géométrie de quatrième et troisième nous paraît présenter deux avantages principaux : elle permet d'entreprendre des activités de géométrie dès le début de l'année de quatrième et de ne pas dissocier ces activités du domaine numérique qui est familier aux enfants.

Le travail dans les classes est mené à l'aide de fiches. Ces fiches, élaborées en groupe, ne constituent en aucune façon un enseignement programmé. Elles essaient de prévoir la réaction des élèves et sont modifiées, l'année suivante, en fonction de ces réactions.

La rédaction des fiches laisse à chaque professeur toute latitude quant à leur utilisation au niveau de chaque classe. Certaines fiches sont des points de départ vers une notion mathématique. D'autres permettent la consolidation de notions présentées oralement par un enseignement collectif et actif. Les élèves plus lents ont besoin d'un travail préparatoire organisé par le professeur avant d'aborder la fiche avec profit.

Quatrième

Fiche a : Cette fiche étudie d'emblée la notion de coordonnées d'un point d'un quadrillage régulier $Z \times Z$. Elle a été préparée par des manipulations en cinquième, où l'étude de relations dans N puis dans $N \times N$ a permis d'établir qu'un ensemble de points d'un quadrillage représentait, avec certaines conventions, un sous-ensemble de $N \times N$. L'extension à $Z \times Z$ est aisée. Par ailleurs, des exercices ont été faits, toujours en cinquième, sur les cheminements, le choix et codage du chemin réduit entre deux points d'un quadrillage. Il a semblé avantageux de démarrer en quatrième sur la notion de coordonnées d'un point dans un quadrillage "entier" ou "décimal".

Cette fiche a pour but de faire sentir aux enfants l'aspect infini de $Z \times Z$, et qu'il est utile de choisir astucieusement le repère

si on veut pouvoir représenter sur une feuille la situation limitée décrite dans le texte.

Fiche b : Etude expérimentale des translations. Pavages du plan. Papiers peints. Translateur.

Fiche c : Extension de la notion de coordonnées dans \mathbb{Q} . Puis étude expérimentale de diverses transformations, translations ou symétries. Réalisation de tables de composition.

Fiche d : On travaille désormais avec \mathbb{R} . Cette fiche est fondamentale puisqu'elle présente la notion de vecteur sur laquelle est basée toute la suite de l'étude. Cette notion est liée à celle de translation déjà familière aux élèves, à celle d'équipollence jusqu'à intuitive qui est précisée.

La compréhension de cette fiche a été grandement facilitée par la construction des rationnels comme classes d'équivalence qui avait été menée en algèbre, en parallèle avec une révision de la construction de \mathbb{Z} . L'analogie entre les deux constructions avait été fortement soulignée. Les élèves ont établi eux-mêmes un parallèle entre \mathbb{Q} et l'ensemble des vecteurs du plan au sujet des notations : un même vecteur a autant de notations que de bipoints équipollents, comme un même rationnel a autant de notations que de couples équivalents. Les élèves se sont sentis en terrain familier, donc solide. On peut espérer que l'habitude de chercher l'écriture la plus avantageuse pour un rationnel (dans un exercice donné) pourra être reconduite dans le vectoriel.

Fiche e : Etude de la symétrie centrale. Première utilisation de l'outil vectoriel. Compositions de symétries centrales. Pavages de plan. Isométries du parallélogramme. Utilisation du pantographe.

Fiche f : Cette fiche étudie le parallélogramme : liaison entre équipollence, milieu d'un bipoint, symétrie centrale. Elle présente en outre les premières démonstrations vectorielles. Elle nécessite un travail collectif.

Fiche g : Addition des vecteurs, liée à la composition des translations.

Fiche h : Relation de Chasles. Des exercices sur l'addition de vecteurs dont on ne connaît pas les composantes "dans un repère". Là encore il est nécessaire de guider les élèves pour les premières démonstrations.

Fiche i : Multiplication par un réel d'un vecteur dont on connaît les composantes "dans un repère". Cette fiche débute par de nombreuses manipulations qui permettent aux élèves d'admettre que si $\vec{u} = k \vec{v}$, l'existence et la valeur du réel k ne dépendent pas du repère choisi. Ces manipulations préparent en outre la fiche suivante.

Fiche j : Propriété caractéristique de l'ensemble des points d'une droite. Droites parallèles. Directions de droites (encore des classes d'équivalence !). Énoncé d'Euclide. Equations d'une droite. Graduations d'une droite.

Cette dernière fiche paraît à certains collègues trop difficile pour être étudiée en quatrième. Ils pensent que son étude pourrait être repoussée en classe de troisième et remplacée avantageusement par des manipulations sur la distance, l'orthogonalité et Pythagore. En fait, il en est souvent ainsi faute de temps (et sans qu'elle soit remplacée par quoi que ce soit). Son étude en début de troisième apparaît alors comme révision et consolidation du programme de quatrième, et permet de déboucher sur l'énoncé de Thalès.

Classe de troisième

Fiches a et b : Elles reprennent et approfondissent le contenu de la fiche *j* de quatrième : Vecteurs — Points alignés — Droites parallèles. Equations de droites — Graduations de droites — Théorème de Thalès.

Fiche c : Des manipulations sur papier millimétré permettent de sensibiliser les enfants aux notions d'orthogonalité, de distance et à la propriété de Pythagore. Une étude de la multiplication scalaire permet d'introduire les définitions de la distance et de l'orthogonalité.

Fiche d : Cette fiche lie les notions de distance et d'orthogonalité par l'étude du théorème de Pythagore, puis se poursuit par une étude du cercle et du triangle rectangle inscrit dans le cercle.

Fiche e : Des vecteurs orthogonaux aux droites perpendiculaires.

Des droites perpendiculaires aux directions orthogonales.

Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Médiatrice d'un segment. Symétrie orthogonale.

La symétrie orthogonale est une isométrie.

Fiches f et g : Trigonométrie.

Définitions des lignes trigonométriques dans le quart de cercle.
Utilisation dans le triangle rectangle.
Lecture de tables. Exercices.

Il semble important de ne pas sacrifier la trigonométrie qui sera nécessaire aussi bien aux élèves qui iront en seconde qu'à ceux qui iront en C.E.T.

Fiches h, i et j : Ces fiches réutilisent les notions étudiées précédemment dans l'étude de figures particulières : triangle isocèle et équilatéral, et parallélogrammes particuliers.
Recherches d'isométries.

(En troisième comme en quatrième, les fiches d'algèbre alternent avec les fiches de géométrie).

N.B. à l'attention du lecteur : Si vous êtes intéressé par les fiches, vous pourrez les demander à l'adresse suivante :

O.P.C. — I.R.E.M. de Limoges
128, rue Albert Thomas
87100 LIMOGES

2 - LE PLAN RÉPÈRE

Une présentation de la géométrie de quatrième :

par l'équipe de Lucien Bénéteau et Line Mailhos, I.R.E.M. de Toulouse.

Cet article se compose de quatre parties

- I Historique du travail
- II Analyse du produit "fini" — niveau quatrième —
- III En guise de conclusion
- IV Annexe : quelques pages de l'ouvrage pour illustration.

2.1. Historique du travail

Ⓐ Les textes officiels :

● Publiés le 29 juillet 1971, applicables en septembre de la même année, les nouveaux programmes de quatrième sont accompagnés, dans le B.O. du 2 décembre 1971,

- a) d'un commentaire explicatif "pour faciliter la tâche des professeurs"
- b) d'annexes rédigées par la Commission ministérielle.

● Retenons que le Commentaire constitue "un mode de présentation du programme" et que "d'autres modes de présentation pourront faire l'objet de nouvelles annexes accompagnées de commentaires appropriés". En 1977, tout le monde sait qu'une seule retouche importante a été apportée, sous la poussée de l'A.P.M.E.P., et concrétisée par des Instructions du 19 février 1973, donnant un tableau "deux colonnes" — activités importantes / acquisitions nécessaires.

Ⓑ Les faits

● En septembre 1971, les professeurs appliquent donc ces programmes, après, pour certains, deux journées de travail sous la direction d'un Inspecteur Pédagogique Régional. Ils essayent de suivre les fameux commentaires et annexe, ou plus prosaïquement les rares ouvrages publiés à cette date.

● Les résultats ne se font pas attendre : "La mise en vigueur du nouveau programme de quatrième/troisième s'est accompagnée

d'interprétations et de développements mathématiques qui ont généralement soulevé un grand nombre de difficultés”*

La circulaire du 19/2/73 est très explicite : “La présentation de la géométrie de quatrième a donné lieu à des inquiétudes, voire à des erreurs, sur la nature des développements à prévoir, sur l'ordre à y instaurer, sur le temps à leur consacrer”.

Ⓒ *L'équipe de Toulouse*

● En octobre 1973, Lucien Bénéteau décide de diriger un groupe de stagiaires — I.R.E.M. Le groupe se donne comme objectif la mise sur pied d'une présentation originale des programmes de géométrie de quatrième et troisième, faisant sienne l'idée de “procéder sans hâte à une approche des notions à acquérir, approche prudente et concrète, s'appuyant sur des exemples familiers, susceptibles de généralisation : calculs numériques sur les décimaux ... dessins utilisant les instruments classiques”.

● Son but sera de faire distinguer nettement :

plan physique — plan mathématique
et plan affine — plan euclidien.

Le groupe aura pour cela la possibilité de “poursuivre l'emploi des fiches composées à l'initiative des professeurs” ou parues dans le commerce...

● Au cours des ans, la composition de l'équipe sera stable, si l'on excepte un changement de leader : Mme Mailhos remplaçant Bénéteau, éloigné de Toulouse malgré lui, changement qui aura des répercussions avalisées par Bénéteau à son retour dans le groupe.

Ⓓ *Evolution du produit*

1° / ● L'année 73/74 est consacrée à une analyse des programmes sous l'angle contenu et pédagogie. Se mettant rapidement au travail, l'équipe, ayant fixé ses objectifs, entame l'élaboration de fiches destinées aux élèves et expérimentées dans 5 C.E.S. — ceux où exercent les membres du groupe — soit dans 10 classes regroupant 262 élèves.

* Cf. Plaquette A.P.M.E.P. de décembre 1974.

- Cette édition comporte deux parties :

- la droite et ses graduations
- le plan et ses vecteurs.

- a) Pour la droite, il est rédigé 36 fiches :

2 fiches se rapportant au vocabulaire de base (de droite graduée à rapport d'un quadruplet)

13 fiches pour 40 exercices portant sur ces notions.

21 fiches sur les familles de graduations, avec la répartition suivante :

fiches \ leçons	Axe	Droite Euclidienne	Droite Affine	Synthèse
d'approche	2	2	4	
de résumé	1	1	1	2
d'exercices d'application	2	4	2	

Ce qui représente 51 exercices.

- b) Pour le plan, il est rédigé 28 fiches :

1 fiche se rapportant au vocabulaire de base (de plan repéré à barycentre).

2 fiches pour 12 exercices portant sur ces notions

25 fiches sur translations et vecteurs avec la répartition suivante :

fiches \ leçons	Translations , vecteurs	Composition, addition	Produit d'un vecteur par un réel
d'approche	2	4	2
de résumé	2	2	2
d'exercices d'application	4	2	5

ce qui représente 33 exercices.

- *Remarques :*

- Les 64 fiches sont monofaces avec un format 29,7 × 21

- Parfois la fiche permet à l'élève d'y inscrire ses réponses
- Deux devoirs de contrôle ont été rédigés par l'équipe, en plus des 136 exercices dont on vient de donner la répartition.
- Thalès est envisagé comme étant une conséquence de
$$(a + b) \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

2° / ● L'année 74/75 voit l'édition d'un deuxième tirage des fiches sus-mentionnées, tirage se traduisant par des modifications, des allègements "imposés" par la réaction des élèves et portant sur les exercices d'approche et d'application de la partie consacrée à la droite. Ce paragraphe se trouve réduit à 24 fiches au lieu de 36.

● Pendant ce temps nous mettons en chantier les fiches du cours de troisième, suite naturelle du précédent cours et destinées, théoriquement, aux élèves que nous avons eus l'an passé puisque l'expérience continuait malgré quelques difficultés d'ordre administratif, au niveau de certains C.E.S.

- Ce cours de troisième comporte :

6 fiches sur déterminant et vecteurs colinéaires et 25 exercices

19 fiches sur les droites du plan (définition, positions relatives, équation d'une droite, parallélisme) et 23 exercices

5 fiches sur norme d'un vecteur, distance de 2 points, avec 10 exercices

8 fiches sur produit scalaire, vecteurs orthogonaux et 17 exercices

6 fiches sur droites perpendiculaires avec 18 exercices

2 fiches sur symétrie centrale avec 4 exercices

12 fiches sur médiatrice, cercle, distance d'un point à une droite et 10 exercices

9 fiches sur projection et théorème de Thalès (problème du transport des graduations) avec 11 exercices.

11 fiches sur projection orthogonale, trigonométrie et 4 exercices.

● A ces 78 fiches renfermant 122 exercices, ajoutons 5 devoirs de contrôle, dont 2 du niveau de l'entrée à l'École Normale (partie géométrie).

3° / ● A la rentrée 1975, nous entamons une nouvelle phase de notre travail.

Pour le niveau quatrième, l'expérience nous a amenés à modifier notre démarche : en effet, l'étude a priori de la droite, indépendamment de tout plan qui la contienne, nous a paru nécessiter un effort sans commune mesure avec le profit que pouvait en tirer l'élève moyen.

- Une édition, sous forme de fiches séparées, conserve l'idée directrice, à savoir l'intérêt évident de l'outil analytique. A partir du Z — quadrillage utilisé en sixième et cinquième, nous mettons en évidence la notion de translation, de Z — vecteur et de noeuds alignés. Le désir de faire apparaître la droite physique nous conduit à affiner le quadrillage ; l'aspect "continu" des droites nous amène à utiliser D . Puis les propriétés d'intersection nous montrent la nécessité d'aller jusqu'à utiliser Q . Cela nous permet de définir le plan rationnel comme un ensemble en bijection avec Q^2 . Ce plan possède toutes les propriétés affines souhaitées par le programme de 1971.

- Pourquoi vouloir définir une bijection avec R^2 alors qu'il est clair que dans une classe de quatrième, en dehors de l'exhibition des suites décimales non périodiques, rien ne nécessite l'introduction des réels ?

Quand en troisième se poseront des problèmes de distances et d'angles, il apparaîtra alors que cet ensemble en bijection avec Q^2 n'est pas une bonne mathématisation du plan physique et on affinera une fois de plus le quadrillage pour considérer un ensemble en bijection avec R^2 . Ainsi, pensons-nous, se fait de façon naturelle la distinction entre notions affines et notions euclidiennes, distinction absolument masquée par l'introduction a priori de R^2 .

- Cette nouvelle version de quatrième conserve la présentation en trois phases :

a) exercices d'approche, destinés à éveiller l'intérêt de l'enfant, à solliciter son intuition de façon à lui faire sentir la nécessité d'un nouvel outil ou d'une nouvelle technique.

b) mise en place — sous forme de cours assez succincts — des notions découvertes lors des exercices d'approche. Nous n'avons pas rédigé les démonstrations, lorsqu'elles sont hors de portée d'un élève moyen de quatrième.

c) exercices d'application nombreux et à difficultés graduées.

● Par ailleurs, nous avons essayé de montrer que le repérage du plan était un outil commode et efficace, mais non un but. Et chaque fois que cela devenait possible nous avons fait faire des exercices “sans coordonnées”.

2.2. Analyse du produit “fini”

● Nous ne ferons pas l’analyse des fiches de quatrième expérimentées avec les élèves durant l’année 75/76, car pendant les vacances d’été un comité restreint mettait au point une présentation, une mise en page, permettant la parution en septembre 1976 d’un ouvrage en trois fascicules, mis entre les mains d’élèves au cours de l’année scolaire 76/77.

● Quand ce compte rendu paraîtra, une nouvelle édition, opérationnelle pour la première fois dans le grand public, sera publiée sous forme d’un volume broché se contentant de regrouper les 3 fascicules et accompagné d’une pochette de fiches non brochées.

C’est cette édition que nous allons analyser maintenant.

Ⓐ La pochette

Elle renferme :

13 fiches d’approche permettant aux élèves d’aborder toute notion nouvelle, difficile, au moyen de manipulations sur des quadrillages joints (papier bleu)

- vers la somme de deux \mathbf{Z} - vecteurs
- vers le produit par un entier relatif
- noeuds “alignés”
- intersection d’ensembles de points “alignés”
- propriété caractéristique de deux vecteurs colinéaires non nuls
- symétrie centrale
- droites dans le plan rationnel
- changement de repère
- positions relatives de deux droites
- changement de graduations sur une droite
- projection
- théorème de Thalès
- équations de droites.

4 fiches de dessins (papier saumon)

- il n'y a pas que les translations
- sommes de Z — vecteurs
- symétrie centrale
- projections

ⓑ *Le volume broché* (148 pages) composé d'un cours (papier blanc) et d'exercices d'application (papier jaune) présente un plan en 6 parties et 2 annexes.

I — Géométrie dans un Z — quadrillage

Repérage, translation, Z — vecteurs, parallélogramme ($\mathcal{U}, +$), multiplication d'un Z — vecteur par un entier, avec 50 exercices.

II — Etude du plan rationnel.

Définition, translation, vecteurs, bases, vecteurs colinéaires, milieu d'un bipoint, symétrie centrale, étude du triangle et du parallélogramme, avec 44 exercices.

III — Droites dans le plan rationnel

Définition de la droite $D(A, \vec{u})$, rôle de A et de \vec{u} , détermination d'une droite, positions relatives de 2 droites, direction de droites, propriétés liées au parallélisme, avec 28 exercices.

Annexe 1

● *Un abrégé historique* (papier vert) pour les adeptes du plan repéré - Premier cycle -

IV — Graduations d'une droite : définitions, changements de graduations, avec 26 exercices.

Annexe 2

● *Vocabulaire de base* utilisé en géométrie du premier cycle.

V -- Théorème de Thalès

Projection, étude de la figure formée par deux droites sécantes coupées par des parallèles, théorème de Thalès, réciproque ; avec 15 exercices.

VI — Equations de droites

Rappels, équations de droites, cas des parallèles, avec 21 exercices.

2.3. En guise de conclusion

1°/ L'année 76/77 est consacrée, en outre, à la *rédaction de fiches de troisième*, prenant la suite de l'ouvrage de quatrième analysé dans le paragraphe précédent. Ce cours fera l'objet d'une publication dans le courant de 77/78, puisque l'IREM peut maintenir en vie ce groupe, né en 1973.

2°/ Nous espérons, après 5 ans de travail, livrer un *ouvrage original*, montrant qu'il y avait bien une autre voie que celle des commentaires, une voie à la portée des élèves.

3°/ Nous pensons avoir utilisé au maximum les *techniques opératoires* mises entre les mains des élèves et par le biais de cette vue "analytique" avoir contribué à développer ce savoir.

4°/ Notre démarche permet *d'aborder la géométrie de quatrième dès la rentrée* et cela constitue à nos yeux un avantage supplémentaire, l'étude de la géométrie pouvant être étalée dans le temps, les élèves ayant une plus longue familiarité avec l'outil vectoriel.

5°/ L'avant-projet publié en 1977 par le Ministère montre que nous avons vu juste :

- l'étude de Q est localisée en quatrième
- le programme de géométrie n'est pas fondamentalement bouleversé.

Notre enthousiasme est si grand que nous entamons (avril 76) un livret d'Algèbre qui tiendra plus particulièrement compte des besoins exprimés par "notre" géométrie.

2.4. Annexes : exemples de fiches (voir pages suivantes)

2.4.1. Approche ③ où l'on découvre les noeuds alignés, une partie finalement assez originale.

2.4.2. Approche ⑦ : droites dans le plan rationnel pour éclairer l'extrait du cours.

2.4.3. Cours : droites dans le plan rationnel.

2.4.4. Exercices d'application en relation avec le cours de 2.4.3. pour montrer que nous pouvons résoudre des exercices n'utilisant pas le repère.

Fait à Toulouse, avril 77,
par MOLINIER Pierre
Historien Archiviste de l'Equipe.

2.4.1. Fiche 3

I – Dans un \mathbb{Z} – quadrillage de repère (O,I,J) , placer les points :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

* Que constate-t-on sur le dessin pour la position des points A, B, C ?

* Calculer les coordonnées des \mathbb{Z} – vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

* Existe-t-il un entier a tel que $\vec{AC} = a \vec{AB}$?

II – Soit \vec{u} le \mathbb{Z} – vecteur de représentant (A, B) . Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer les coordonnées du point M_1 tel que : $\vec{AM}_1 = 2\vec{u}$

Calculer les coordonnées du point M_2 tel que : $\vec{AM}_2 = 3\vec{u}$.

Placer les points M_1 et M_2 (à l'encre bleue) sur la figure.

2°) Si a est un entier, $a\vec{u}$ est un \mathbb{Z} – vecteur et il existe alors un point M tel que : $\vec{AM} = a\vec{u}$

Pour chaque entier a on obtient ainsi un seul point M .

Appelons D_1 l'ensemble de tous ces points M :

$$D_1 = \left\{ M \in \mathcal{E} / \vec{AM} = a\vec{u}, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Trouver les coordonnées de cinq points M de cet ensemble D_1 en complétant le tableau ci-dessous :

a_n	$a_3 = 0$	$a_4 = 4$	$a_5 = -1$	$a_6 = -3$	$a_7 = -4$
$a_n \vec{u} = \vec{AM}_n$	$\vec{AM}_3 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\vec{AM}_4 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\vec{AM}_5 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\vec{AM}_6 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\vec{AM}_7 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$
M_n	$M_3 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_4 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_5 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_6 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_7 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Placer ces points M sur le quadrillage en utilisant un crayon bleu.
Que constate-t-on sur le dessin ?

Peut-on marquer directement sur la figure d'autres points (bleus) de l'ensemble D_1 ?

3°) Trouver les égalités que doivent vérifier les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un point M de \mathcal{E} pour qu'il soit élément de D_1 .

III - 1°) Placer le point $E \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. A partir du dessin, peut-on dire que $E \in D_1$?

Il faut démontrer ce résultat. Pour cela :

* calculer les coordonnées du \mathbb{Z} -vecteur \vec{AE} .

$$\vec{AE} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

* chercher si l'on peut trouver un entier a tel que $\vec{AE} = a\vec{u}$.

- { si a existe, alors $E \in D_1$
- { si a n'existe pas, alors $E \notin D_1$.

2°) Faire le même travail pour les points :

$$E_1 \begin{pmatrix} -9 \\ -22 \end{pmatrix} \quad E_2 \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad E_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad E_4 \begin{pmatrix} 23 \\ 42 \end{pmatrix}$$

3°) Conclusions :

IV - On considère le \mathbb{Z} -vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble D_2 de tous les points N de \mathcal{E} tels que $\vec{AN} = b\vec{v}$, $b \in \mathbb{Z}$:

$$D_2 = \left\{ N \in \mathcal{E} \mid \vec{AN} = b\vec{v}, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

1°) Trouver les égalités que doivent vérifier les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un point N de \mathcal{E} pour qu'il soit élément de D_2 .

2°) En utilisant les résultats précédents, chercher les coordonnées de six points N de D_2 .

b_n	$b_0 = 0$	$b_1 = 1$	$b_2 = 2$	$b_3 = 3$	$b_4 = -1$	$b_5 = -2$
N_n	$N_0(\quad)$	$N_1(\quad)$	$N_2(\quad)$	$N_3(\quad)$	$N_4(\quad)$	$N_5(\quad)$

Placer ces points N sur le quadrillage en utilisant un crayon rouge. Que constate-t-on sur le dessin ?

Peut-on marquer directement sur la figure d'autres points (rouges) de l'ensemble D_2 ?

Comparer les ensembles D_1 et D_2 .

V - Soit \vec{w} le \mathbb{Z} -vecteur de coordonnées $(3 ; 6)$. On considère l'ensemble D_3 de tous les points P de \mathcal{E} tels que :

$$\vec{AP} = c\vec{w}, c \in \mathbb{Z}.$$

$$D_3 = \left\{ P \in \mathcal{E} / \vec{AP} = c\vec{w}, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

1°) Trouver les égalités que doivent vérifier les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un point P de \mathcal{E} pour qu'il soit élément de D_3 .

2°) En utilisant les résultats précédents, chercher les coordonnées de six points P de D_3 .

c_n	$c_0 = 0$	$c_1 = 1$	$c_2 = 2$	$c_3 = 3$	$c_4 = -1$	$c_5 = -2$
P_n	$P_0 (\quad)$	$P_1 (\quad)$	$P_2 (\quad)$	$P_3 (\quad)$	$P_4 (\quad)$	$P_5 (\quad)$

Placer ces points P sur le quadrillage en utilisant un crayon vert. Que constate-t-on sur le dessin ?

Peut-on marquer directement sur la figure d'autres points (verts) de l'ensemble D_3 ?

Comparer les ensembles D_1 , D_2 et D_3 .

VI - On donne le point $R \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ et le \mathbb{Z} -vecteur $\vec{t} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Soit D_4 l'ensemble des points S de \mathcal{E} tels que $\vec{RS} = d\vec{t}, d \in \mathbb{Z}$

$$D_4 = \left\{ S \in \mathcal{E} / \vec{RS} = d\vec{t}, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

1°) Trouver les égalités que doivent vérifier les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un point S de \mathcal{E} pour qu'il soit élément de D_4 .

2°) En utilisant les résultats précédents, compléter le tableau ci-dessous, pour trouver les coordonnées de six points S de D_4 .

d_n	$d_0 = 0$	$d_1 = 1$	$d_2 = 2$	$d_3 = 3$	$d_4 = -1$	$d_5 = -2$
S_n	$S_0 (\quad)$	$S_1 (\quad)$	$S_2 (\quad)$	$S_3 (\quad)$	$S_4 (\quad)$	$S_5 (\quad)$

Placer ces points S sur le quadrillage en utilisant un crayon noir. Que constate-t-on sur le dessin ?

Peut-on marquer directement sur la figure d'autres points (noirs) de l'ensemble D_4 ?

2.4.2. Fiche 7

(§ III. A. Définition)

Exercice 1 : Dans le plan rationnel (\mathcal{F}, f) de repère (O, I, J) , on donne :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble D_1 tel que :

$$D_1 = \left\{ M / M \in \mathcal{F} \text{ et } \vec{AM} = a \vec{u}, a \in \mathbb{Q} \right\}$$

- Trouver les coordonnées de sept points de cet ensemble en complétant le tableau suivant :

a_n	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 3$	$a_4 = 0$	$a_5 = \frac{1}{2}$	$a_6 = -\frac{1}{6}$	$a_7 = -1$
$\vec{AM}_n = a_n \vec{u}$	$\vec{AM}_1 (\quad)$	$\vec{AM}_2 (\quad)$					
$M_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$M_1 (\quad)$	$M_2 (\quad)$					

- Placer les points M_n obtenus dans un quadrillage de repère (O, I, J) . Que constate-t-on ?
- Trouver les égalités que doivent vérifier les coordonnées (x, y) d'un point M de \mathcal{F} pour être un élément de D_1 .

- On donne les points :

$$M_8 \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad M_9 \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M_{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad M_{11} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Placer ces points sur le dessin précédent.

- Calculer les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{AM}_8, \vec{AM}_9, \vec{AM}_{10}, \text{ et } \vec{AM}_{11}$$

- Pour chacun de ces cas chercher s'il existe un rationnel a_n tel que :

$$\vec{AM}_n = a_n \vec{u}$$

- Parmi les points M_8, M_9, M_{10} et M_{11} , quels sont les éléments D_1 ?

(III.A. Définition — Remarque 3) Soit (O, I, J) repère de (\mathcal{F}, f) tel que : $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

Exercice 2 : On donne l'ensemble \mathcal{K} tel que :

$$\mathcal{K} = \left\{ M / M \in \mathcal{F} \text{ et } \vec{OM} = a^2 \vec{i} + 2a \vec{j}, a \in \mathbb{Q} \right\}$$

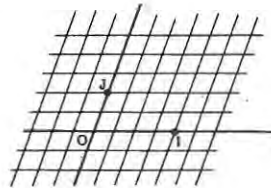
Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{K} \\ a \longmapsto M \end{array} \right.$$

- Compléter le tableau ci-dessous :

a	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$M_1 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_2 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_3 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_4 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_5 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_6 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$M_7 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

- Placer les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ et M_7 dans le quadrillage ci-contre de repère (O, I, J) .
- Peut-on trouver dans \mathcal{K} un point M image de deux rationnels distincts ?
- L'application f est-elle une bijection entre \mathbb{Q} et \mathcal{K} ?



Exercice 3 : On donne l'ensemble \mathcal{D} tel que :

$$\mathcal{D} = \left\{ M / M \in \mathcal{T} \text{ et } \overrightarrow{OM} = 2a \vec{i} - 3a \vec{j}, a \in \mathbb{Q} \right\} .$$

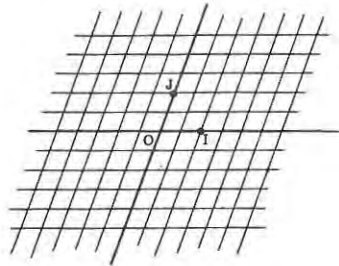
Soit f l'application définie par :

$$f \begin{cases} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{D} \\ a \longmapsto M \end{cases}$$

- Compléter le tableau ci-dessous :

a	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$M_1 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_2 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_3 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_4 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_5 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_6 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$	$M_7 \left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \right)$

- Placer les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ et M_7 dans le quadrillage ci-contre de repère (O, I, J) .
- Peut-on trouver dans \mathcal{D} un point M image de deux rationnels distincts ?
- L'application f est-elle une bijection entre \mathbb{Q} et \mathcal{D} ?



2.4.3 Droites dans le plan rationnel (\mathcal{T}, f)

III.A. Définitions

(Voir exercices d'approche fiche 7 (1))

- *Définition :*

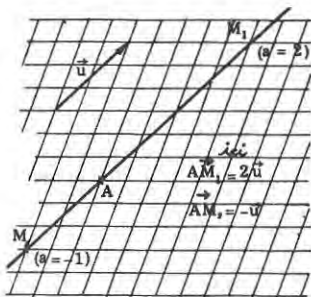
Soit un point A de (\mathcal{T}, f) et un vecteur \vec{u} , non nul.

On appelle droite D l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}a$, a décrivant l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} .

• *Notation :*

La droite D ainsi définie par le point A et le vecteur \vec{u} (non nul) est notée :

$$D(A, \vec{u})$$



$$D(A, \vec{u}) = \left\{ M / M \in \mathcal{T} \text{ et } \vec{AM} = a\vec{u}, a \in \mathbb{Q} \right\}$$

Définition : On dit que des points sont alignés s'ils appartiennent à une même droite.

• *Remarques :*

1) Si $\vec{u} = \vec{O}$, l'ensemble des points M de \mathcal{T} tels que $\vec{AM} = a\vec{u}$ se réduit au seul point A . En effet :

$$\vec{u} = \vec{O} \implies a\vec{u} = \vec{O} \implies \vec{AM} = \vec{O}$$

C'est pourquoi, dans la définition de la droite, on suppose \vec{u} non nul.

2) Si $a = 0$, $\vec{AM} = \vec{O}u = \vec{O}$ d'où $M = A$; donc A est un point de la droite D . On dit que la droite D passe par A ou contient A .

3) Il y a bijection entre la droite $D(A, \vec{u})$ et l'ensemble des rationnels. Voir exercices d'approche Fiche 7(2).

4) Les équivalences suivantes traduisent la définition de $D(A, \vec{u})$.

$$\begin{aligned} M \in D(A, \vec{u}) &\iff \vec{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \\ M \in D(A, \vec{u}) &\iff \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \end{aligned}$$

2.4.4. Exercices d'application

III.A. Définitions

Exercice 95 : Dans le plan rationnel (\mathcal{T}, f) de repère (O, I, J) , on donne les points :

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En plaçant trois ou quatre points pour chacune d'elles, dessiner les droites :

$$D(A, \vec{u}) ; D(A, \vec{v}) ; D(B, \vec{u}) ; D(B, \vec{v}) ; \\ D(C, \vec{u}) ; D(C, \vec{v}) ; D(E, \vec{u}) \text{ et } D(E, \vec{v}).$$

Exercice 96 : Dans le plan rationnel (\mathcal{T}, f) de repère (O, I, J) , on donne les points :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 6,5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs :

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°) Tracer les droites :

$$D(A, \vec{v}_1) \quad D(B, \vec{v}_3) \quad D(E, \vec{v}_3) \\ D(A, \vec{v}_2) \quad D(C, \vec{v}_4) \quad D(E, \vec{v}_1).$$

2°) Les points suivants appartiennent-ils à la droite $D(A, \vec{v}_2)$?

$$C \begin{pmatrix} 6,5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad N \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad R \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 97 : Dans le plan rationnel de repère (O, I, J) , on donne le point :

$$A \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et le vecteur } \vec{u} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1°) Calculer les coordonnées des points B et C tels que :

$$\vec{AB} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{BC} = \frac{5}{2} \vec{u}$$

Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

2°) On donne le point $E \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$. Démontrer que E est un point

de la droite $D(A, \vec{u})$. Que peut-on dire des points A, B, C et E ?

Exercice 98 : Dans le plan rationnel \mathcal{R} , repère (O, I, J) , tracer la droite D déterminée par :

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1°) Démontrer que le point $B \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite D .

2°) Montrer que tout point M de la droite D a des coordonnées (x, y) telles que :

$$x = -3 + 5k \quad y = 2 + 3k \quad k \in \mathbb{Q}$$

III.F. Propriétés liées au parallélisme.*

Exercice 115 : Dans le plan rationnel (\mathcal{F}, f) , on donne un parallélogramme $ABCD$ et on appelle s la symétrie de centre C . Soient : $B' = s(B)$; $D' = s(D)$ et $A' = s(A)$.

1°) Démontrer que les droites (BD) et $(B'D')$ sont parallèles.

2°) Démontrer que $ABD'C$ est un parallélogramme.

3°) Démontrer que $ABD'A'$ est un trapèze.

Exercice 116 : Dans le plan rationnel (\mathcal{F}, f) , on donne un parallélogramme $ABCD$. Soit M le milieu du bipoint (A, B) . On appelle E le point symétrique de C par rapport à M .

1°) Démontrer que les points D, A et E sont alignés.

2°) Démontrer que $BCDE$ est un trapèze.

Exercice 117 : Dans le plan rationnel (\mathcal{F}, f) , on donne un triangle ABC . Soient A', B' et C' les milieux respectifs des bipoints (B, C) , (A, C) et (A, B) .

* Pour que le lecteur goûte comme nous aux joies du sans-repère.

1°) Démontrer que $C' B' C A'$, $C' B' A' B$ et $C' A' B' A$ sont des parallélogrammes.

2°) Montrer que les médianes du triangle $A B C$ sont aussi les médianes du triangle $A' B' C'$.

Exercice 118 : Dans le plan rationnel (\mathcal{T}, f) , on donne un triangle $A B C$. Soit A' le point symétrique de A par rapport à C et soit N le milieu du bipoint (A', B) .

Les droites (AN) et (BC) se coupent en S .

Démontrer que la droite $(A'S)$ passe par le milieu du bipoint (A, B) .

Exercice 119 : Soit $A B C$ un triangle du plan rationnel (\mathcal{T}, f) . On appelle D le point symétrique de B par rapport à A et on appelle E le point symétrique de B par rapport à C .

1°) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

2°) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe la droite (DE) en un point M . Démontrer que M est le milieu du bipoint (D, E) .

3°) Les droites (BM) et (DC) se coupent en un point L .

Démontrer que les points E, L et A sont alignés.

Exercice 120 : Soit $A B C D$ un trapèze du plan rationnel (\mathcal{T}, f) ayant pour bases (AB) et (CD) . Les côtés non-parallèles (AD) et (BC) se coupent en F .

Soit A' le point symétrique de A par rapport à F , et soit B' le point symétrique de B par rapport à F .

Démontrer que $A' C D B'$ est un trapèze.

Exercice 121 : Dans le plan rationnel (\mathcal{T}, f) , on donne un triangle $A B C$.

Soient R et M les points définis par : $\vec{AR} = \frac{1}{3} \vec{AB}$
 et : $\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB}$.

La droite contenant R et parallèle à (BC) coupe (AC) en S .

La droite contenant M et parallèle à (BC) coupe (AC) en N .

Démontrer que le point M est le milieu du bipoint (R, B) et en déduire que le point N est le milieu du bipoint (S, C) .

Exercice 122 : Dans le plan rationnel (\mathcal{J}, f) , on donne deux bipoints (A,B) et (C,D) équipollents. Les droites (AD) et (BC) se coupent en M . La parallèle à (AB) contenant le point M coupe les droites (AC) et (BD) respectivement en E et F .

1°) Démontrer que les points E et F sont les milieux respectifs des bipoints (A,C) et (B,D) .

La parallèle à (AC) contenant le point M coupe les droites (AB) et (CD) respectivement en G et H . Démontrer que les points G et H sont les milieux respectifs des bipoints (A,B) et (C,D) .

2°) On donne :

$$(AD) \cap (EG) = \{D'\}$$

$$(EF) \cap (GD) = \{E'\}$$

$$(GH) \cap (ED) = \{G'\}$$

Démontrer que les points D' , E' et G' sont les milieux respectifs des bipoints : (E,G) , (G,D) et (D,E) .

3°) On suppose que le repère de (\mathcal{J}, f) est (C,D,A) .

Quelles sont les coordonnées des points M , G , D et E ?

Calculer la somme : $\vec{MG} + \vec{MD} + \vec{ME}$.

perpendiculaire

Facile est de dire
Que je tombe à pic.

Mais c'est aussi sur moi
Que l'autre tombe à pic.

Guillevic "Euclidiennes"
Gallimard, éd.

3 - VALORISER UNE ACTIVITÉ GÉOMÉTRIQUE EN SIXIÈME ET CINQUIÈME

3.1. ACTIVITE GEOMETRIQUE EN SIXIEME

Des activités géométriques en sixième dès la rentrée scolaire permettent l'utilisation éventuelle du langage des ensembles et des symboles \in , \subset , \cap , \cup , ϕ . Avec les mesures des segments, les nombres décimaux sont introduits rapidement. Des élèves faibles en calcul reprennent courage avec la géométrie. L'utilisation des instruments de dessin permet comme au CM2 de développer le goût du travail soigné. La réalisation de pavages, de mosaïques, aide les enfants à une meilleure structuration, à une meilleure adaptation à l'espace physique et aux objets qui le peuplent.

Mais il ne faut pas que ces activités géométriques ne soient qu'un prétexte pour faire des activités de calcul numérique. L'enfant doit affiner petit à petit le concept de tel être géométrique, il doit faire agir le modèle étudié, l'observer, le manipuler, ensuite le définir. Alors il sera prêt pour attaquer les programmes de quatrième et de troisième dans de bonnes conditions.

UN EXEMPLE : A PARTIR DE LA SPHERE.

I — Activité manuelle

Dès le début de l'année, construction d'une sphère en carton suivant le plan ci-joint.

— Utilisation des instruments : règle graduée, compas, équerre, rapporteur.

II — Activité mathématique

Ⓐ Segments

- Unités ; mesures ; encadrements.
- Segment \rightarrow demi-droite \rightarrow droite.

ⓑ Cercle

- Périmètre ; arcs de cercle.
- A propos de π .
- Aire du disque.

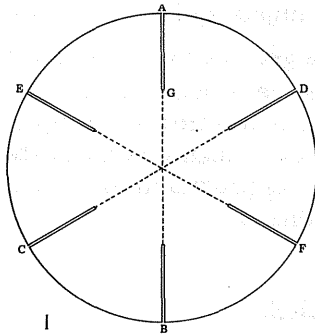
ⓒ Angles

- Mesures ; unités.

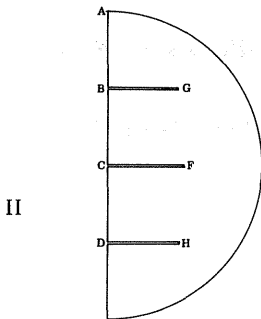
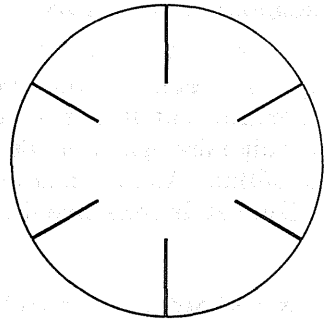
ⓓ La sphère terrestre

- Méridiens ; parallèles (travail qui précède les leçons faites ensuite par le professeur de géographie).
- Utilisation de "médecine-ball" fourni par les professeurs d'E.P.S.
- Calcul de distances sur les méridiens (mille marin, noeud).

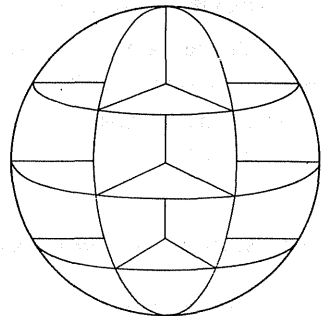
Ce thème a été exploité pendant tout le premier trimestre essentiellement pendant les T.D. pour la phase manipulation en liaison avec le travail effectué par le professeur de géographie.



III



IV



J.P. Mouniérou, prof. de mathématiques
J. Cl. Lenoir, prof. de mathématiques

Mme Lenoir, prof. de géographie
I.R.E.M. de Toulouse

3.2. A PROPOS DE CERCLES ET MEDIATRICES... EN SIXIEME

Quelques exemples d'activités proposées en sixième dans le cadre d'une recherche à l'I.R.E.M. de Rennes.

C. Burgaud, M. Chenede, M. Gourret.

En faisant des *manipulations* et des *dessins*, les élèves ont étudié l'ensemble des cercles de rayon donné passant par un point, puis l'ensemble de tous les cercles passant par ce même point.

Ils ont ensuite envisagé la même question avec deux points : ceci fut l'occasion d'une nouvelle rencontre avec la caractérisation de la médiatrice d'un segment qui a été exploitée ensuite pour le cas de trois points, alignés ou non, [la première rencontre avec la médiatrice a eu lieu lors d'une étude des quadrilatères (diagonales du losange)]. Il est à noter qu'à ce stade le problème posé est passé à un autre niveau : au problème initial d'analyse et de construction s'est ajoutée la possibilité d'un petit raisonnement déductif : à savoir que le point d'intersection de deux médiatrices d'un triangle appartient aussi à la troisième. A ce sujet, notons qu'il est difficile, même pour des enfants ayant apparemment "trouvé et compris", de discerner ce qui les a véritablement convaincus du résultat :

en quoi intervient le raisonnement proprement dit ?

en quoi intervient la matérialité du résultat ?

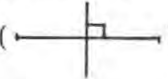
Ne regrettons pas cet aspect "dessin" qui entacherait soi-disant le pur raisonnement ; il est probable au contraire que c'est par la répétition de telles situations où le raisonnement est visualisé et appuyé par des choses assez concrètes que la notion de preuve finira par se faire jour. C'est précisément là un des intérêts de la géométrie non axiomatique de sixième.

Plutôt que d'autres discours... voici quelques exercices (un "contrôle" et des exercices de recherche) avec des réactions d'élèves, permettant d'apprécier en partie jusqu'où va leur compréhension.

EXERCICE 1 : C'est une partie de contrôle proposé après l'étude qui vient d'être décrite, sans aucune préparation:

Enoncé du problème : Divers dessins de quadrilatères sont proposés aux élèves qui doivent chercher s'ils peuvent ou non être inscrits dans un cercle. Ils doivent dessiner le cercle quand il existe.

But du problème :

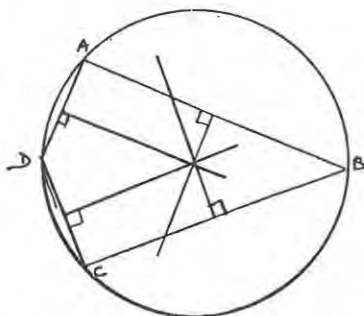
— En faisant en sorte qu'il y ait à réaliser *plusieurs* tracés sur un même dessin et dans des *configurations inhabituelles*, obliger les élèves, d'une part à une bonne précision dans le dessin, d'autre part à ne pas se contenter de reproduire l'image traditionnelle de la médiatrice : () mais d'en comprendre la véritable signification.

— En proposant des quadrilatères de "même forme", les uns inscrits et les autres non, éviter des généralisations hâtives et obliger à "faire fonctionner" la notion de médiatrice pour pouvoir conclure correctement.

Travaux d'élèves : Bons, Assez bons, ou Mauvais, et Commentaires.

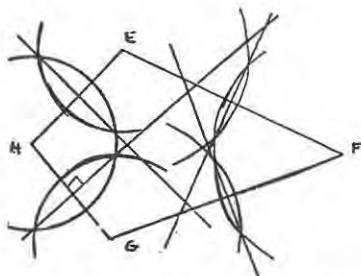
Deux approches du problème par des élèves qui semblent avoir "trouvé et compris".

CERF-VOLANT N° 1



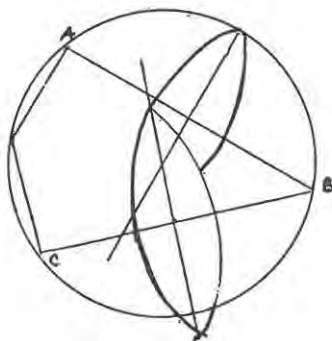
Explication : On peut faire le cercle car les médiatrices se coupent en un seul point : le centre du cercle.

CERF-VOLANT N° 2



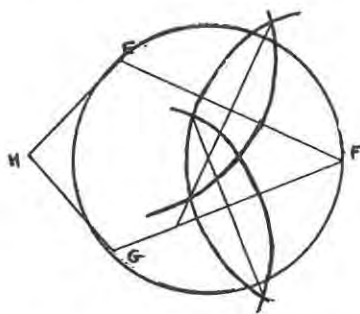
Explication : Le cercle est impossible à réaliser car les médiatrices ne se croisent pas en un seul point.

CERF-VOLANT N° 1



Explication : Je trace les médiatrices de AB et CB je pique au milieu et je remarque que je peux faire un cercle passant par tous les points.

CERF-VOLANT N° 2

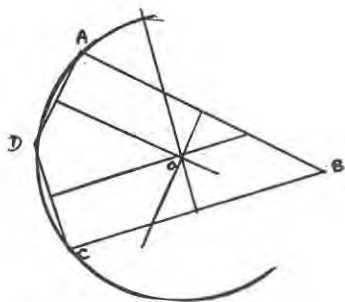


Explication : Je trace les médiatrices de EF et de FG et je pique au milieu mais il n'y a pas de cercle passant par tous les points.

* *
*
*

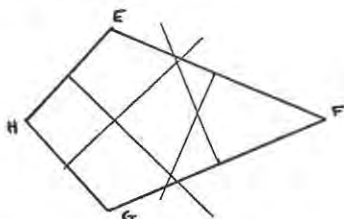
Ci-dessous, sur les trois premiers exemples, on pourrait croire que l'élève a maîtrisé la notion de médiatrice, mais en fait cette compréhension n'est pas assez profonde pour résister à l'attrait d'une symétrie et d'une sorte de "centre" qui s'impose à lui dans le dernier trapèze.

CERF-VOLANT N° 1



Explication : Je trace les médiatrices de tous les côtés et je remarque que le point où elles se croisent est à la même distance de A, de B, de C, de D. Donc, on peut tracer le cercle.

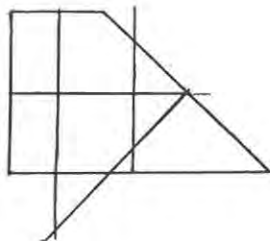
CERF-VOLANT N° 2



Explication : Je trace les médiatrices et je remarque qu'elles ne se coupent pas toutes en un même point, donc le quadrilatère n'a pas de centre précis pour le cercle.

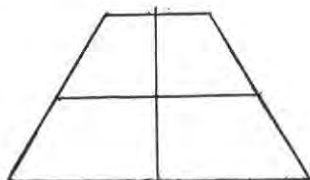
Trapèze rectangle

Explication : Pareil qu'au n° 2.



Trapèze isocèle.

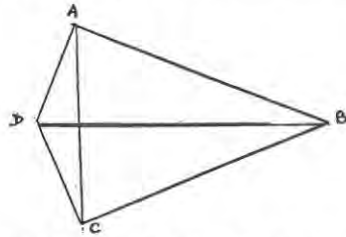
Explication.



*
* * *

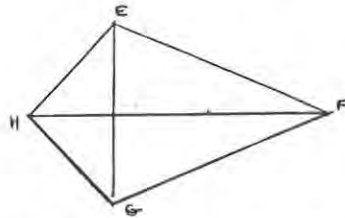
Cet élève, n'ayant pas du tout compris le problème posé, cherche malgré tout à "faire quelque chose", en tentant de "compléter" les dessins.

CERF-VOLANT N° 1



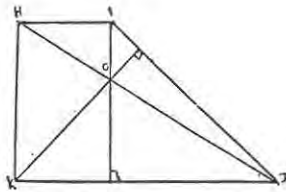
Explication : Les diagonales ne se coupent pas en leur milieu donc on ne peut pas faire un cercle. Les diagonales n'ont pas même mesure.

CERF-VOLANT N° 2



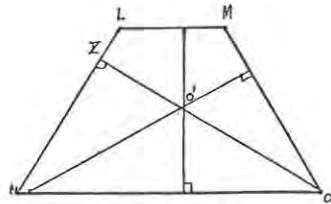
Explication : Les diagonales ne se coupent pas en leur milieu donc on ne peut pas faire un cercle. Les diagonales n'ont pas même mesures.

TRAPEZE RECTANGLE



Explication : On ne peut pas faire le cercle car (OH) n'est pas deux fois plus petit que (OJ) .

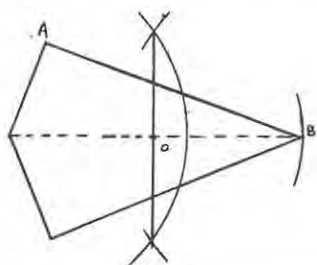
TRAPEZE ISOCELE



Explication : On ne peut pas faire le cercle car $(o' o)$ n'est pas 2 fois plus grand que Z .

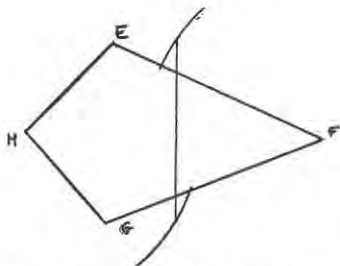
Cet élève ne sait tracer que l'image traditionnelle de la médiatrice, ce qui l'amène à chercher où il peut reproduire son schéma type sans tenir compte du problème posé.

CERF-VOLANT N° 1



Je trace le milieu du cerf-volant que j'ai fait en piquant B avec une mesure et ensuite D. Je prends le milieu et je trace le cercle.

CERF-VOLANT N° 2



Explication : Impossible. On ne peut pas parce que le point E et le point G est trop en arrière par rapport au point H.

EXERCICE 2 : "RECHERCHE COLLECTIVE"

Énoncé

Des enfants ont constaté auparavant que certains quadrilatères et certains seulement peuvent s'inscrire dans un cercle.

1) Le problème est tout d'abord de savoir quelles propriétés ont ces quadrilatères, et pas les autres ...

2) Si un quadrilatère a les propriétés trouvées, est-il possible de l'inscrire dans un cercle ? Comment ?

But de l'exercice

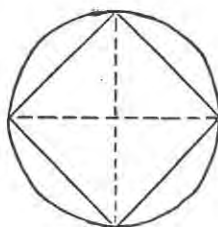
C'est un exercice de recherche, plus ouvert que le précédent. Il s'agissait de faire découvrir une propriété générale en restant au stade intuitif : on pourra remarquer qu'ici aucune raison évidente

et aucune "preuve" de leur conjecture ne pouvant être trouvée, le doute subsiste chez les élèves, la simple répétition de vérifications sur quelques exemples ne leur suffit pas, ce qui prouve leur besoin d'une certaine notion de "preuve".

Ici un des buts recherchés était de faire "fonctionner" la notion de médiatrice après coup : pour tester la conjecture et construire la solution quand elle existe.

Réactions d'élèves :

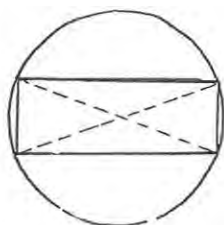
La plupart des enfants proposent :



le carré (construit à partir de ses diagonales). C'est le seul losange qui convient, dit S.

N. avait encore des problèmes pour construire son carré dans un cercle.

*
* *
*



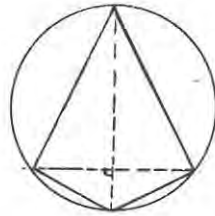
S.T. n'a pas proposé le carré car c'est un rectangle et on a vu en contrôle que le rectangle "ça marche"...

Conclusion hâtive de Thierry qui n'était pas de bonne humeur :

— C'est simple, il suffit que les diagonales aient même longueur et se coupent en leur milieu.

Des protestations :

- Moi j'ai trouvé que le cerf-volant, ça marche, dit Chantal.
- Moi je trouve que ça ne marche pas, dit Caroline.
- Si certains conviennent et pas d'autres, on ne s'en sortira jamais...



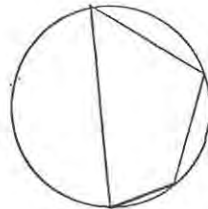
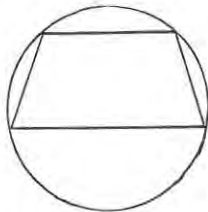
Chantal dessine au tableau un cerf-volant inscrit dans un cercle.

Thierry n'est pas content (peut-être parce que J. Marc a la solution...) :

“Moi je n'ai pas trouvé, mais je trouve que vous prenez ce problème à l'envers ; j'ai d'abord construit des quadrilatères et ensuite cherché le cercle...”

J'essaye de lui faire comprendre qu'on analyse d'abord la situation et qu'ensuite on essaiera de construire le cercle ... quand il existe.

Je propose alors un trapèze isocèle. Jean-Marc leur propose autre chose :



Qu'ont-ils de commun ?

On regarde les diagonales — rien
 on regarde les côtés — rien
 on regarde les angles — certains ont une idée. Il faut la vérifier.

On n'a pas parlé de médiatrice...

Dans l'heure qui a suivi, les enfants ont découvert (peut-être certains ont-ils été aidés...) que la somme des mesures des angles opposés était 180° ... amusement, étonnement... et c'est toujours vrai dans ce cas et pas autrement... on doute un peu.

On veut contrôler : Ils proposent de construire toutes sortes de quadrilatères qui répondent à la question et des autres... et de regarder ce qui se passe (C.B. parle d'utiliser les médiatrices des côtés). Ce n'est pas facile car :

1) certains dessinent toujours des trapèzes ou des cerfs-volants ;

2) c'est facile de tracer la médiatrice d'un segment mais quand il y en a beaucoup... on mélange tout ... et puis :

3) *si le dessin n'est pas précis, ça ne marche pas !*

EXERCICE 3

Voici un morceau d'assiette cassée,
trouve le centre de l'assiette...



Deux bonnes solutions ont été trouvées par environ une moitié des élèves d'une bonne sixième. Pour le reste de la classe, nous avons été conduits à faire une récapitulation rapide de quelques propriétés du cercle :

- a) — nombre de cercles passant par 1 point
- b) — nombre de cercles passant par 2 point distincts
- c) — nombre de cercles passant par 3 points
 - alignés
 - non alignés.

Ceci n'a bien entendu posé aucun problème, mais dans b) il faut noter la remarque de Y :

— “Si je traçais tous les cercles sur le tableau, il serait tout blanc”.

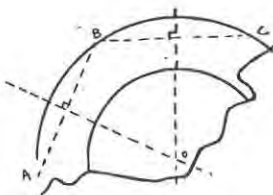
Je lui demande de préciser un peu sa pensée. P. l'aide un peu et ils concluent que par chaque point du plan il passera un cercle.

Ch. remarque tout de suite que le milieu de $[AB]$ ne peut pas convenir.

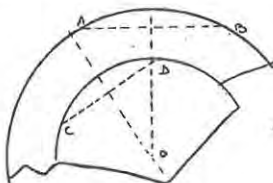
Ch. voit alors que $[AB]$, sauf A et B, ne convient pas non plus ; elle pense qu'il y a toute une bande autour de (AB) qui ne convient pas. C. lui prouve que ce n'est pas vrai et S. trouve que seuls les points $[AB] - (\{A\} \cup \{B\})$ ne conviennent pas.

Solutions trouvées :

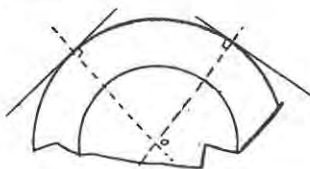
- 1 Prendre trois points A,B,C sur le bord. Chercher le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.



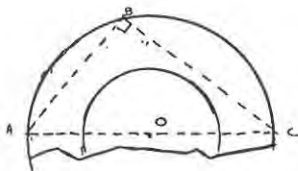
- 2 A et B sur le cercle extérieur, C et D sur le cercle intérieur. (AB) non parallèle à (CD).
O \in médiatrice de [AB] et O \in médiatrice de [CD] .



- 3 Tracer 2 tangentes au cercle extérieur par tâtonnement. Le rayon passe par le point de contact et est perpendiculaire à la tangente en ce point.



- 4 .S'il reste plus d'une demi-assiette... on peut songer à y inscrire un triangle rectangle ABC. O est alors le milieu de [AC].



4 - D'ACCORD OU PAS, DITES-LE VOUS...

“En sciences de même. Je ne veux point les dernières découvertes ; cela ne cultive point ; cela n'est pas mûr pour la méditation humaine. La culture générale refuse les primeurs et les nouveautés. Je vois que nos amateurs se jettent sur la dernière idée comme sur la plus jeune symphonie. Votre boussole, mes amis, sera bientôt folle...

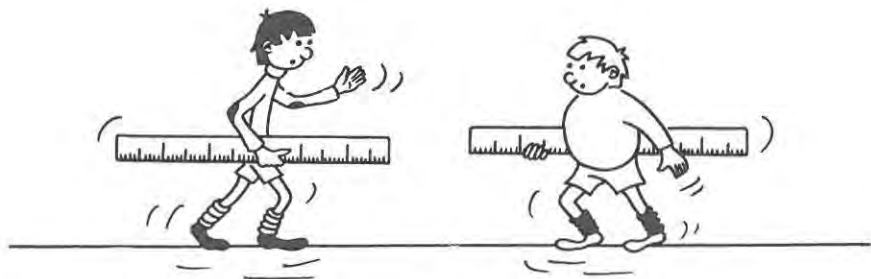
Et je vous conseille, si vous voulez être sérieusement physicien pour vous-même, d'ouvrir quelque mémoire de ce genre sur une grande table et de réaliser, de vos propres mains, les expériences qui y sont décrites. Une après l'autre, oui, ces vieilles expériences dont on dit : “Cela est bien connu”, justement sans les avoir faites. Travail ingrat, qui ne permet point de briller à quelque dîner de Sorbonnages. Mais patience. Laissez-moi conduire pendant dix ans mes rustiques travaux et mes lectures hors de mode, et les Sorbonnages seront loin derrière.”

ALAIN, *Propos sur l'éducation.*

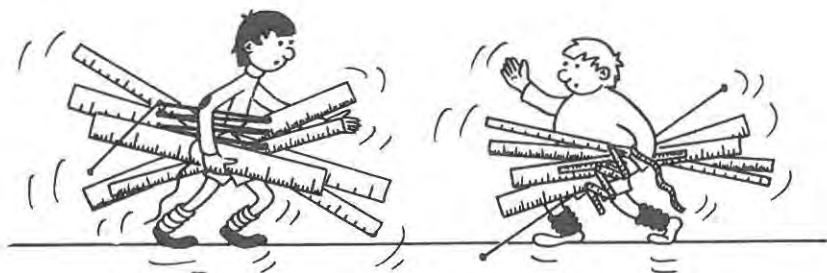
" POUR UNE INFANTE DE FUNTE "

La Géométrie de la Droite en 4^è

par Mat & Matic



Structure de droite euclidienne



Structure de droite affine



Structure d'axe

4^{ème} partie

MÉTHODES

0 - EXTRAITS DE CLAUDE DUNETON

“Je suis comme une truie qui doute”

1976 - Editions du Seuil

La société a prodigieusement changé en quelques décennies, chacun le sait, le répète, presque tous les comportements se sont modifiés : affectifs, intellectuels, sexuels, alimentaires. Et nous essayons d'enseigner à la manière du XIXème siècle ! On demande aux gosses, alors qu'ils sont, eux, les plus touchés par ces transformations, de réagir comme leurs grands-parents qui vivaient dans un silence millénaire. Certains jours l'attention des enfants est totalement dispersée ; il faut répéter trois fois la même chose à une petite classe pour être entendu. C'est un des aspects épuisants qui mettent la plupart des profs en fureur. Ce qui me frappe le plus, personnellement, c'est que les gosses parlent tout seuls, entre eux, sans se cacher. Cela sans agressivité aucune, même s'ils s'intéressent à ce que vous dites pendant le même temps. Ils trouvent naturel de bavarder, ouvertement, sous votre nez, en toute amitié.

Après bien des récriminations je me suis aperçu qu'ils sont sincères. Ils ne comprennent pas que leurs bavardages puissent déranger. C'est que leurs habitudes ont changé : ils transportent en classe la manière dont ils regardent la télé... Attention : il ne s'agit pas d'accuser une fois encore la télévision mais d'observer un comportement pratiquement irréversible et le décalage qui en résulte avec nos façons de procéder. Nous avons à présent des générations pour lesquelles le discours plus ou moins continu est apparu pour la première fois de leur vie au petit écran — fût-ce sous la forme de Nounours. Il en résulte qu'ils ont grandi avec le sens de la parole différée et qu'ils n'ont pas acquis le même rapport de personne à personne que nous avons dans le déroulement du discours. Autrement dit, ils confondent quelque part la voix du prof avec celle du type qui cause dans la boîte. La notion d'insolence qui nous conduisait à nous cacher pour transmettre une impression au voisin, bouche couverte par la main, leur est

étrangère. Cela d'autant qu'ils ont acquis l'étrange faculté — que nous n'avions pas — de suivre une émission et de faire autre chose en même temps :

... ..

On serine trop les choses à l'école, on mâche trop, on est trop pressé. On annonce tous les virages, trois heures avant... Attention à ce verbe ! Il est tordu ! Vous accrochez pas à cet adjectif, il est pourri ! ... Après la troisième proposition tournez à droite dans la principale ... Comptez trois points et embrassez la métaphore ! — Non, il faut se paumer une bonne fois, tout seul, avec angoisse, pour se mettre à repérer les lieux, pour acquérir le sens de l'orientation. Si les campagnards ont tant d'attention, à part le silence, c'est peut-être parce que la campagne ne porte ni flèches ni écriteaux.

On n'a pas le temps ni les moyens dans une classe traditionnelle de faire du profond, de laisser mûrir, de donner confiance, peu à peu, à petites doses d'encouragement, pour que les élèves culturellement démunis trouvent leur propre expression, prennent leur pensée à leur propre compte. Ce serait de la sociologothérapie, en passant par la psycho du même nom. Tout le contraire du bourrage. Dans l'état actuel des choses ça n'est pas possible : on trie, on note lesté, on classe, on oriente ... Et on part en congé.

... ..

La pédagogie c'est de la merde. Je le dis tel que je le pense, du moins celle que nous pratiquons. Je le dis en homme qui a suivi un entraînement pédagogique intense, des stages, des classes d'application avec des champions du coupage de cheveux en quatre. En homme qui a passé quinze années de sa vie à disséquer des éléments de structures anglaises, à les présenter un par un comme les éléments d'un jeu de construction, à les empiler chaque fois de façon plus rationnelle et plus attrayante... C'est du bluff ! De la poudre aux yeux.

1 - POUR UNE REDÉFINITION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES PENDANT LES FORMATIONS DE BASE

(des C.P. aux classes de seconde)

par Henri BAREIL

(extraits d'une plaquette du 28/12/74)

Pistes de réflexion,
Propositions d'objectifs,
Suggestions de recherches.

INVENTAIRE DE DIVERS MODES D'APPROPRIATION D'UNE ACTIVITE MATHÉMATIQUE

1	APPROPRIATION FORMELLE	1 Observer (une activité réalisée par d'autres) 2 Commenter (une activité réalisée par d'autres) 3 Reconnaître (une activité réalisée par d'autres) 4 Exécuter en obéissant à des instructions précises 5 Reproduire (hors de tout apport personnel original)
2	APPROPRIATION STRUCTURELLE	6 Situer (savoir quand et où cette activité peut ou doit intervenir) 7 Adapter (une activité connue) 8 Programmer (une fois le plan imaginé ou reçu) 9 Réaliser (hors de la simple répétition) 10 Maîtriser (réaliser rapidement et sûrement) 11 Décrire (exposer, présenter) une activité réalisée par soi-même

3	APPROPRIATION RELATIONNELLE	12 13 14 15 16 17 18	Motiver Préparer Contrôler (le déroulement de l'activité) Dominer (expliquer, justifier, critiquer ce déroulement) Illustrer Interpréter Admirer
4	APPROPRIATION AMPLIFIANTE	19 20 21 22	Optimiser Exploiter Généraliser Prolonger
5	APPROPRIATION CREATRICE	23 24 25	Imaginer Aimer Intégrer

- *S'étonnera-t-on de trouver ici (18 et 24) des modes d'appropriation affectifs ?*
L'admiration intègre mieux au tissu relationnel dont on dispose déjà.
A plus forte raison le fait d'aimer qui conduit à une connaissance "de l'intérieur", toujours plus profonde, sûre et féconde. C'est à partir de là seulement que peut s'exercer l'imagination.
- *Les CINQ CATEGORIES induisent une hiérarchie vers les modes de plus en plus "critiques" et de plus en plus créateurs.*
- *On constatera qu'en classe les élèves se limitent généralement aux modes de l'appropriation formelle, quand ils ne se contentent pas — ce qui est déjà fréquent — "d'assister à" une activité du maître ... Mais peut-il en être autrement quand les programmes sont excessifs et les horaires réduits ?*

QUELQUES APERCUS SUR CES MODES

1 Chez le même élève, en un certain laps de temps, une même activité mathématique, à propos d'une situation déterminée, pourrait susciter tous (ou presque) les 25 modes d'appropriation signalés.

Il y aura lieu de choisir !

2 2.1. *Les modes d'appropriation majeurs* (dans l'ordre ascendant 3, 4, 5) sont ceux qui, simultanément, permettent la plus solide et la plus transférable appropriation de l'activité et donnent la meilleure formation de l'esprit.

2.2. *Mais, plus on y vient tardivement*, plus ils réclament du temps et sont difficiles à faire pratiquer. Face à des élèves mal préparés et peu réceptifs les réactions sont alors de deux sortes : ou bien on essaie de susciter de telles appropriations (ainsi 18 (admirer), ou 12 (motiver), etc...), et on constate généralement que les élèves "perdent leur temps", ou bien/et on renonce à ces modes d'appropriation (sauf, dans les meilleurs cas, aux 14 (contrôler) et 15 (dominer : expliquer, ...)).

C'est oublier qu'on ne bâtit rien sans fondations : Pour que les modes d'appropriation majeurs soient du domaine de tels élèves, il faudrait ne point avoir précédemment sclérosé ceux-ci en les limitant longtemps, sous prétexte d'efficacité, aux modes d'appropriation formels.

Qu'on se souvienne de l'esprit inventif du jeune, tout jeune enfant, de ses capacités à "optimiser", "généraliser", "prolonger", "imaginer", "aimer" et "intégrer"... ! Une des premières tâches de l'école est, d'emblée, d'exercer ces modes d'appropriation majeurs, et de les préserver !

Si, à un certain stade, un enseignement dogmatique a sclérosé ces modes-là, faut-il, sous prétexte d'efficacité, en prendre son parti et enfoncer l'élève dans ses carences ?

Il reste que, si on veut bien prendre le parti inverse, la médecine devra être bien dosée, patiente et progressive : on ne recouvre pas en un tournemain l'usage d'une capacité perdue, pas plus au mental qu'au physique.

2.3. *On ne peut faire fi de l'intérêt ou du désintérêt de l'élève.*

Après d'élèves de troisième, une enquête de l'I.R.E.M. de Rennes proposait, entre autres questions : — "Qu'attendez-vous des mathématiques ? ", et : — "Fondez-vous votre conviction (d'un fait mathématique) sur la parole du professeur ? " (six autres modes de conviction étaient proposés par ailleurs). Les très nombreux élèves qui ont répondu "RIEN" à la première question ont tous répondu "OUI" à la seconde. Belle corrélation ...

Par un mode d'appropriation majeur, l'activité marquera d'autant plus l'élève. L'intérêt qu'il en éprouvera consolidera tous ses acquis, lui donnera du goût pour les mathématiques, et enrichira ses possibilités du "devenir".

3 Les modes mineurs sont valorisables par d'autres

Ainsi, le 5 (reproduire) par le 15 (expliquer, ...).

Mais chaque maître se borne trop souvent à des conjugaisons privilégiées (ainsi les 5-14-15)... qui conviennent trop peu aux modes majeurs et finissent par interdire les plus créateurs...

4 Les modes d'appropriation ne peuvent se conjuguer dans n'importe quel ordre

Ainsi le 5 peut succéder aux 23-8-9, alors que la réciproque n'est pas vraie.

Dès lors, considérons une activité, sur une situation donnée, pour un élève donné. Il se peut, qu'au niveau n (d'âge et de capacités personnelles) qui est alors le sien, les modes d'appropriation majeurs ne puissent jouer, alors qu'ils le pourraient probablement à un niveau $n + 1$ (ou $+ 2$, ...) qu'il a toutes chances d'atteindre un peu plus tard ...

Lui proposer quand même, à ce niveau n , cette activité sur cette situation, le limitera aux modes mineurs. Sera alors empêché ultérieurement l'exercice là-dessus d'un mode créateur, voire d'un simple mode majeur s'il y a eu "mécanisation" et "bachotage". Ainsi de "bons" élèves d'un niveau déterminé semblent peu à peu sous des couronnes (mortuaires à l'insu de tous) de bonnes notes.

Cette réflexion peut donner sens à la consigne : "Ne déflorez pas au niveau n ce qui sera traité au niveau $n + 1$ ", alors que, dans le tissu de l'enseignement dogmatique coutumier, elle n'en a aucun.

5 Le souci de multiplier les activités et d'accumuler des connaissances de contenu mathématique peut conduire à privilégier les modes formels 4 et 5. La fréquence du procédé est dangereuse. Or, "tout" y pousse ...

Si divers modes d'appropriation peuvent cohabiter dans la même classe (ou se succéder chez le même élève selon le temps) à

propos d'une activité mathématique donnée, *tout doit être mis en oeuvre, pour chaque élève, pour le faire accéder fréquemment aux modes d'appropriation les plus critiques et les plus créateurs*. Il faut "qu'il en prenne l'habitude"...

6 Aucune comparaison biologique ne saurait établir que l'apprentissage mathématique de l'individu doit reproduire celui (réel ou supposé !) de l'espèce.

Une telle loi, hélas fort en honneur parfois (Cf. attaques* contre les mathématiques dites "modernes", coupables d'attenter à un ordre traditionnel soi-disant vécu par l'espèce), relèverait d'une idéologie conservatrice et castratrice (ce qui pourrait expliquer les alliances politiques fréquemment associées au refus des "maths modernes").

Un "apprentissage historique" doit céder le pas à un souci primordial : celui du "devenir". Et les clés de ce devenir sont dans les modes d'appropriation majeurs, surtout le 5.

7 Mode 25 : "INTEGRER"... C'est être capable de vivre pleinement une activité. Par là, de s'ouvrir "au devenir", de se rendre capable d'une préhension renouvelée, toujours plus chaleureuse, de toutes les activités humaines, de tous les désirs humains.

Qui jugera cette ambition démesurée ? Pas moi ! ... Tant la mathématique relativise le vrai, tant il n'y a de borne ni à la capacité de création ("L'essence des mathématiques, c'est la liberté") ni à la provocation à l'émerveillement devant la multiplicité des formes, des beautés et des champs d'action de la mathématique ...

La mathématique est ainsi semence et terreau d'humanisme (au plein sens du terme), sauf à la pratiquer, le plus possible, sous la forme d'activités appropriées selon les modes majeurs.

Ce qui exige une révolution dans les objectifs et les méthodes actuels. Sinon, il n'y aura de vraie mathématique qu'au niveau d'une maternelle bien faite ou, en fin du Supérieur, pour les quelques rescapés qui auront pu préserver jusque là (ou ressusciter alors) leur fraîcheur d'esprit ...

* Je ne range pas dans cette catégorie les protestations contre des programmes ou des "commentaires" des programmes.

INVENTAIRE DE FACTEURS DONT DEPENDENT LES MODES D'APPROPRIATION

Le tableau ci-dessous ne présente aucun classement hiérarchique.

<i>L'institution scolaire :</i>	Objectifs de l'enseignement en général. Sélection vers une hiérarchie sociale. Contrôles et examens de connaissances. Orientations généralement négatives (90 % des cas).
<i>L'institution enseignement mathématique actuel :</i>	Programmes de connaissances. Programmes linéaires. Niveaux de la voie royale (vers les "Taupes" et l'X) assujettissant tous les niveaux inférieurs. Sections autres que C démarquant la section C.
<i>L'établissement-école :</i>	Nombre d'élèves. Atmosphère de l'établissement. Conditions matérielles (salles, matériel, ...). Accès (ou non) des élèves aux responsabilités.
<i>La classe :</i>	Comme ci-dessus, et aussi : existence ou non d'une équipe pédagogique, prise en charge éventuelle de l'élève par lui-même (ou en équipe), ...
<i>Le professeur :</i>	Objectifs. Méthodes. Etat de santé. Equilibre psychologique. Capacités d'attention à chaque élève. Disponibilité (temps ...). Capacités intellectuelles (formation initiale et formation continuée). Histoire personnelle ... Prestige personnel ...
<i>Des considérations psychologiques :</i>	Liens affectifs professeur(s)-élèves. Parents. Autres élèves. Modes de sanctions... Insertion dans la vie sociale. Attitude des uns et des autres face à l'avenir...
<i>L'histoire de l'élève :</i>	Comportement et méthodes d'enseignement antérieurs. Habitudes de tous ordres... Histoire affective de l'élève... Situation matérielle, état de santé... Volonté ... Centres d'intérêt ... Ambitions.
<i>La richesse des connexions intellectuelles de l'élève :</i>	Aptitude à un mouvement pluridialectique : "auto-interrogation - analyse - conjecture - synthèse - communication - "
<i>La richesse des connexions entre les activités de l'élève :</i>	Un succès à propos d'une autre activité (même d'une autre discipline, ou dans la vie courante) est souvent un facteur de déblocage et de succès dans une activité donnée.

UN CHOIX PERSONNEL — UN PROBLEME GENERAL

Un enseignement des mathématiques relève de plusieurs domaines :

- (1) *le contenu mathématique* du programme,
- (2) *des activités mathématiques* organisées à partir
 - (2a) de situations,
 - (2b) de projets mathématiques généraux,
 - (2c) d'activités mentales à mettre en jeu.
- (3) *les modes d'appropriation de ces activités mathématiques.*

Actuellement, le (1) décide. Le (2b) s'introduit subsidiairement. Les (2a) et (2c) arrivent comme ils peuvent ... Quant au (3), la lourdeur et l'ambition des programmes (compte tenu du temps disponible et des possibilités des élèves), le dogmatisme qui en découle (compte tenu des habitudes d'enseignement et d'examens), la rareté actuelle des "problèmes" ou sujets d'étude libres, limitent aux modes d'appropriation les moins créateurs. Renchérissant, le bachotage restreint aux modes formels.

Un changement radical semble nécessaire. Les choix fondamentaux sont à décider à partir des (2) et (3). Partout le (1) apparaîtra : la pensée ne peut pas fonctionner à vide ! Mais il ne sera que le substrat, non la référence, et pas l'objectif déterminant.

Les programmes, instructions, manuels, travaux de groupes I.R.E.M., I.N.R.D.P., ou ministère... devraient alors proposer :

a) la conjugaison des (2) et (3) destinée à être l'objectif majeur de l'enseignement à un niveau et pour une classe considérés,

b) des matériaux de contenu mathématique ("noyau" très réduit à mémoriser, et "thèmes" nombreux) en indiquant, pour chacun, les activités mathématiques qu'il permet et les modes d'appropriation les plus créateurs qui peuvent être suscités chez les élèves.

C'est à ce prix que nous aurons un enseignement vivant, fait par et pour des hommes capables d'assumer toujours plus de liberté et de responsabilité. Ce qui suppose que l'homme soit capable d'inventer et de proposer ses propres chemins. Sans oublier que, "démocratiser l'enseignement", c'est, sur le plan de l'intelligence, favoriser pour tous l'accès aux activités et aux modes d'appropriation les plus "critiques" et les plus créateurs ... et avoir pour tous cette ambition.

En mathématiques, cela nous concerne aussi !
... "Et tout le reste est littérature" ...

Losange

Un carré fatigué
Qui s'est laissé tirer

Par ses deux angles préférés,
Lourds des secrets.

Losange maintenant,
Il n'en finira plus
De comparer ses angles.

— S'il allait regretter
L'ancienne préférence ?

Guillevic
"Euclidiennes"
— Gallimard, édit.

2 - DEUX HOMMES, UNE FEMME ET UN BATEAU

Cela se passait en Bretagne. Il faisait beau, et la météo avait annoncé que cela durerait. Eux, les hommes, naviguaient plutôt bien. Elle, plutôt mal. Qu'à cela ne tienne, on allait lui apprendre. Il n'est pas inutile de rappeler que cette petite croisière de quelques jours avait été décidée dans un but de débranche. Parenthèse de mer, de silence, de soleil, de juste le bruit du vent, au milieu des encombrements, des horaires et des odeurs d'essence.

Le bateau quitte le port. On vérifie l'horizon ; pas un nuage. Les alentours ; pas un rocher.

“Prends la barre, lui disent-ils.

— Merci, répond-elle”.

Un temps, un tout petit temps de silence et d'euphorie. Le temps de se sentir exister, là, avec l'eau, la voile, la brise très légère et salée qui glisse sur les joues ...

“Ton foc faseye.

— *Oui.*

— Borde-le un peu.

— *Oui.*

— Tire un peu la barre vers toi.

— *Oui.*

— Non, pas tant ; oui, là ça va. Et tiens ton cap ! 145 degrés, c'est 145 degrés !

— *Oui.*

— Si tu tires trop la barre, tu vas virer ! Redresse !

— *Oui.*

— Et ton foc ?

— *Quoi, mon foc ?*

— Tu ne vois pas qu'il faseye ? Un foc, ça ne doit pas faseyer.

— *Ah bon !*

— Parce que, tu comprends, le vent arrive dans les voiles comme ça. Ca pousse le bateau comme ça (*Gestes explicatifs*). Si nous étions vent de travers, le vent arriverait comme ça, et, du coup, tes voiles seraient comme ça (*Gestes explicatifs différents*).

— *Ah oui ! dit-elle (tout en pensant : je n'ai rien compris du tout).*

- Alors, et ton cap ? Tu le surveilles ?
- *Oui.*
- On te laisse un moment : on va faire le point”.

Ils entrent dans la cabine et font leur point pendant qu'elle fait le sien. Fais pas ci, fais pas ça, mouche ton nez, dis bonjour, tiens-toi droite, tends la main. Ils appellent cela “la plaisance”. Il faut croire que le plaisir pour les hommes n'a pas le même sens que pour les femmes. Organiser, prévoir, expliquer, enfourner des ordres dans la tête des néophytes pour que le métier rentre. Crier quand cela n'entre pas assez vite.

REBELLION !

Elle pense que la voile défoule chez les hommes le petit gradé frustré de ne pas assez commander dans la vie courante. Définition du plaisir mâle : prendre un débile, de préférence une femme, en tout cas quelqu'un de passif et de facile à manipuler. Lui enfourner dans la tête tout un bazar d'informations diverses. Recommencer régulièrement l'opération et s'attendre qu'il en sorte un vrai petit matelot compétent à l'image de son génial papa. Quand ça marche, s'attendre à une récompense. Cette petite-là, si elle se débrouille bien en navigation, c'est parce que c'est moi qui lui ai appris. Sourire complice de la nouvelle recrue.

Une tête surgit de la cabine.

“Tu ne remontes pas assez au vent. Remonte plus, tu vois bien qu'on traîne !

— *M..., dit-elle.*

La seconde tête surgit à son tour.

— Rébellion ?

— *Rébellion.*

— Et comment comptes-tu apprendre, si tu ne fais pas ce qu'on te dit ?

— *Autrement.*

— Explique-nous, que l'on rigole ! Ah ! mon vieux ! les bonnes femmes à bord, c'est gentil, mais il faut se les faire ! Elles veulent savoir, mais elles ne veulent pas apprendre !

— *Je veux apprendre seule. Je veux découvrir, je veux m'amuser, je veux que vous vous taisiez, que vous me fichiez la paix et me laissiez me tromper tranquillement.*

— Eh bien, mon vieux, on n'est pas arrivés !

— *Et je n'ai pas non plus envie d'arriver. J'ai envie de naviguer.*

— *Bon, bon''.*

Ils rentrent dans la cabine en se tordant de rire. Et pour mieux communier dans la solidarité masculine, qui fait front devant l'incohérence des femmes, ils s'offrent un verre de vin.

Elle barre enfin en paix. Et si je fais ceci, que se passe-t-il ? Tiens, on marche moins vite. Et si je pousse la barre ? Tiens, on repart. Et comme cela ? On gîte un peu. Comment faire pour gîter moins ? Comme cela ? Non, c'est pire. Comme ceci ? Oui, c'est mieux. Elle s'amuse, enfin. Que le plaisir soit source de connaissance, voilà une donnée qui échappe complètement aux hommes. Les enfants, eux, le savent, qui apprennent en jouant. Les enfants et les femmes. Et si je virais de bord ?

Surgit derechef une tête.

“Mais tu vires de bord ? Qu'est-ce que tu fabriques ?

— *Tu viens de le dire. Je vire.*

— *Et ton cap ?*

— *Pas de cap. Je m'amuse.*

— *Elle s'amuse à faire des zigzags ! Encore un verre mon vieux, faut se soutenir ! ”.*

Pour ces gestionnaires, fonctionnels, rationnels, ces obsédés de la ligne droite, faire des zigzags et vouloir apprendre en jouant, quel casse-logique. On ne casse pas impunément cette logique masculine sans courir le risque d'être accusé d'inconscience grave.

“C'est bien joli, mais, dans un équipage sérieux et par gros temps, les revendications sont impensables ! Cela peut mener à expédier un homme à la mer ou à aller s'écraser sur un rocher ! ”

CERTITUDES

Suit une description dantesque de tous les malheurs qui peuvent arriver en cas de désobéissance d'un équipier. Les exploits du cap Horn sont dûment évoqués ; l'horrible fin de tel navigateur qui s'écrasa par distraction sur un récif qu'il n'avait pas repéré. Bref, le droit de s'amuser ne pouvait amener qu'au radeau de la Méduse.

“Je vous rappelle, dit-elle, que nous sommes en baie de Quiberon, qu'il fait un temps magnifique et que la météo est optimiste.

— C'est marrant de voir comme les femmes peuvent être agressives quand elles ont tort, dit l'un.

— Allez ! dit l'autre, viens prendre un verre, on ne t'en veut pas. Mais si, un jour, tu veux vraiment apprendre, il faudra que tu sois plus docile, sinon c'est impossible ! ”

Devant les écrasantes certitudes du pouvoir mâle, il ne reste plus qu'une échappatoire : s'allonger sur sa couchette et s'endormir. Ce qu'elle fit en songeant que cet univers d'hommes était bien surprenant.

Il ne manque qu'une seule chose à une telle perfection, c'est d'être intelligent. Et c'est très grave un monde d'hommes qui maîtrisent tout et ne sont pas intelligents.

“Le Monde”

Chronique du 7-8 juillet 1974

(de Paule GIRON)

*

* *

Bien entendu, tout rapprochement entre l'attitude des hommes du bateau et notre attitude de pédagogue serait dénué de tout fondement ...

L'extrait suivant de "La Godasse" n° 6, Bulletin de l'I.R.E.M. de Caen, montre à quel point la Recherche peut être parfois erreur ou tâtonnements ... Nos élèves sont-ils là-dessus "déculpabilisés" ? Et nous-mêmes ? ?

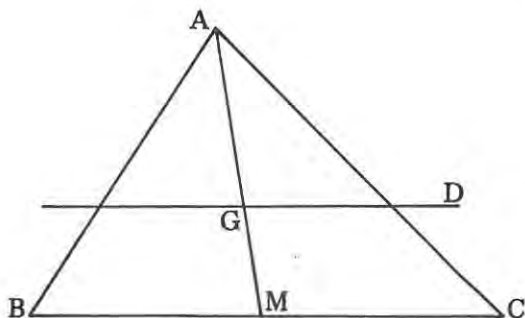
3 - HISTOIRE D'UNE RECHERCHE

Dans le groupe I.R.E.M. de Saint-Lô, nous nous sommes intéressés au problème posé par J. Lecoq dans le "Sabo" n° 29 :

"On donne un triangle ABC et un point P du côté AB. Il s'agit de construire une droite passant par P et coupant le triangle en deux domaines de même aire".

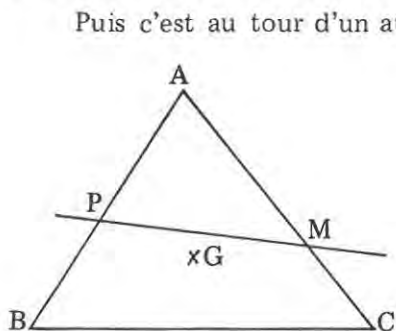
Dès que le sujet a été proposé au groupe, chacun a recherché dans la direction qui lui semblait essentielle. Après une réflexion d'une dizaine de minutes, nous avons tous acquis la certitude que la droite devait passer par le centre de gravité. En effet, nous avons conclu (mais bien hâtivement) que les domaines de même aire correspondaient à des poids égaux donc qu'en plaçant le triangle sur le bord d'une table, la droite serait la trace laissée par le bord de cette table quand le triangle sera en équilibre instable (nous nous souvenions des expériences classiques permettant de trouver le centre de gravité d'une figure plane). Il ne nous restait plus qu'à démontrer le bien-fondé de notre intuition. Et chacun se mettait de nouveau au travail.

"Mais ce n'est pas possible ! La droite ne passe pas par le centre de gravité". Bon, voilà un "empêcheur de tourner en rond"



qui remet en cause notre belle certitude. Et il présente son contre-exemple : la droite D parallèle à (BC) passe par le centre de gravité G donc partage [AM] donc [AB] dans le rapport $\frac{2}{3}$. Les deux domaines ont par

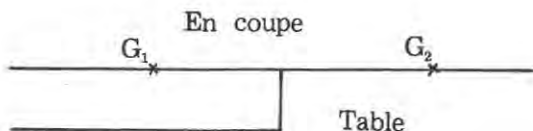
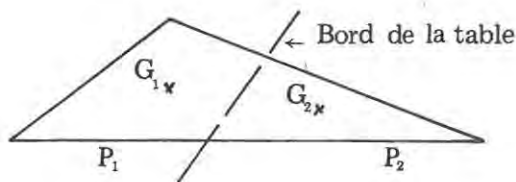
conséquent leurs aires dans le rapport $\frac{4}{9}$. Poliment, on lui a répondu qu'apparemment c'était vrai mais qu'il avait dû se tromper, tant nous étions persuadés que le centre de gravité appartenait à la droite. Nous ne l'avons donc pas cru.



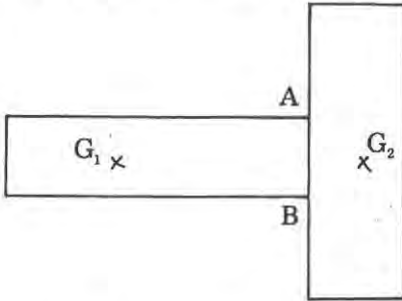
Puis c'est au tour d'un autre camarade qui vient de prouver par la méthode analytique que le point n'appartenait pas à la droite (PM), les vecteurs \vec{PM} et \vec{PG} n'étant pas colinéaires. Mais les calculs étaient compliqués, il avait dû faire une erreur. Lui non plus n'était d'ailleurs pas sûr de son résultat.

Alors, nous en sommes restés là ... Au cours des séances de travail suivantes où nous faisons autre chose, la question parfois revenait dans les débats. Quelqu'un avait trouvé, après de multiples constructions, que les droites passaient "presque" au centre de gravité. Un autre s'impatientait et demandait que J. Lecoq nous donne la réponse pour départager les partisans de G et ceux qui voyaient dans le centre de gravité un élément de diversion qui engageait les recherches dans une fausse piste.

La situation durait depuis près de deux mois quand un élément nouveau nous fit réexaminer le problème. La discussion opposait de nouveau les deux camps lorsque soudain l'un d'entre nous prononça "moments des forces". Et nous avons alors compris.



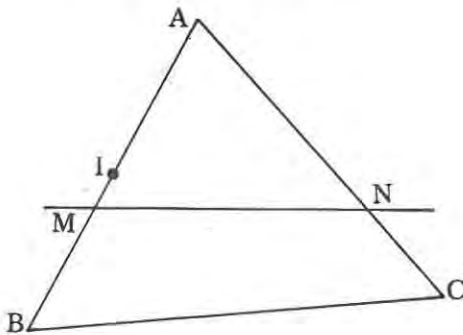
Si l'on veut que les deux parties P_1 et P_2 soient en équilibre, il faut que les deux moments des forces par rapport à l'axe soient égaux, ce qui n'implique pas nécessairement que les poids soient égaux, donc que les aires des deux domaines soient égales. La trace laissée par le bord de la table sur le triangle est effectivement une droite passant par le centre de gravité. Mais ce n'est pas celle que nous recherchons. Il a suffi d'un exemple évident pour nous en convaincre.



Dans la figure en T ci-contre, les deux surfaces rectangulaires ont même aire ; la droite cherchée passe alors par A et B mais le centre de gravité de l'ensemble n'est pas à l'intersection de (AB) et de $(G_1 G_2)$.

Et nous sommes repartis de zéro. Des tâtonnements ont encore été nécessaires, en particulier pour nous apercevoir qu'il était préférable de rechercher la droite telle que l'un des domaines ait pour aire la moitié du triangle plutôt que de rechercher la droite telle que les deux aires soient égales.

Voici notre solution :



Soit (A, B, C) le triangle ; $d(A, B) = c$, $d(A, C) = b$. Soit I le milieu de (A, B) . On place M sur le segment $[IB]$, on sait que la droite coupera le segment $[AC]$ (c'est une recherche que nous avons faite).

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin \theta$$

$$s = 1/2 \cdot xy \cdot \sin \theta \quad (x = d(A, M), y = d(A, N)) ;$$

$$s = 1/2 S ; \text{ donc :}$$

$$xy = 1/2 bc$$

$$y = \frac{bc}{2x}$$

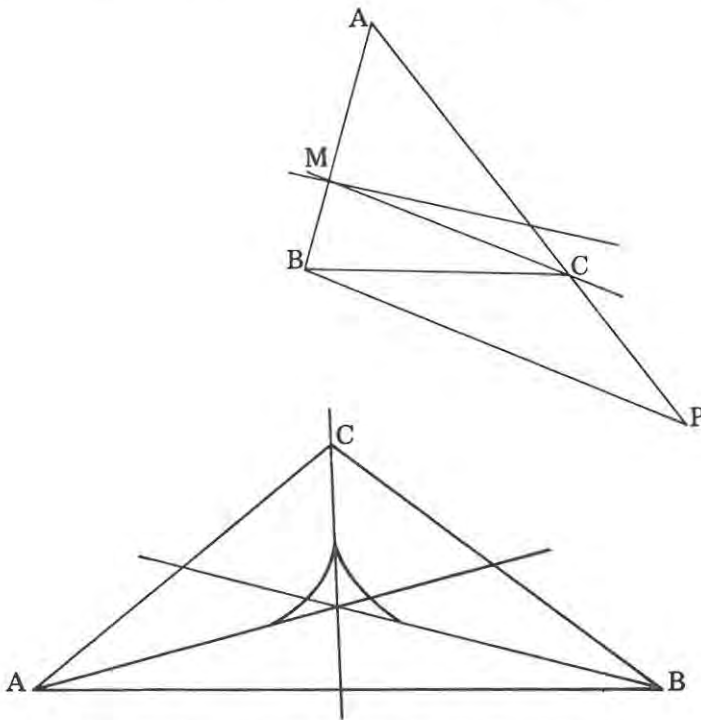
Nous déterminons ainsi la distance (A,N) , nous savons donc placer N . Pour ce faire, on construira de la manière suivante : On "prend" la formule sous la forme $\frac{x}{c} = \frac{b}{2y}$; $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AP}$;

$AP = 2y$, N est le milieu de $[AP]$.

Remarques complémentaires :

Si $M \in [AB]$, l'enveloppe des droites est constituée de deux morceaux d'hyperbole dont les côtés du triangle sont les asymptotes.

Les équations de ces hyperboles sont $Y = \frac{bc}{8X}$ ou $Y = \frac{ac}{8X}$.



Dans ce travail, ce n'est pas le résultat qui nous paraît important, c'est la recherche qui nous l'a fait trouver. En ayant vécu une telle expérience, nous serons peut-être mieux disposés à accepter le tâtonnement et les erreurs de nos élèves avant d'atteindre le résultat attendu. Nous avons "vu" dans quels méandres s'enlise parfois la pensée avant d'emprunter la "voie royale".

Le groupe de Saint-Lô
de l'I.R.E.M. de Caen

4 - UNE CLASSE A LA DÉCOUVERTE DE LA GÉOMÉTRIE

par Claude ROBIOLLE, Coutances.

Des enfants dans une classe peuvent être perçus comme des élèves dont le rôle essentiel est d'apprendre ce que le maître leur enseigne. Mais on peut aussi voir dans chaque enfant un individu, avec sa potentialité, ses besoins, ses intérêts. Dans ce dernier cas, il est très difficile, sinon impossible, de penser les mathématiques à lui enseigner comme un contenu à faire ingurgiter. On se demande plutôt en quoi les mathématiques peuvent répondre aux aspirations profondes des enfants.

C'est dire dès maintenant par ce préambule que les techniques pédagogiques dont je parlerai par la suite ne cherchent pas à faire passer au plus vite et de la façon la plus rentable un programme. Là n'est pas mon objectif. Les connaissances mathématiques ne sont qu'un support, qu'un ensemble d'outils de pensée permettant à l'enfant de développer sa personnalité et d'accroître ses possibilités d'action sur le monde qui l'entoure.

Autant par les thèmes abordés que par les méthodes de travail, il s'agira de respecter la personnalité de chacun. Quand un travail est en cours, dans un petit groupe ou dans la classe entière, sans cesse il faut s'interroger : répond-il à la question soulevée ? favorise-t-il la construction de nouveaux concepts ? correspond-il aux intérêts du moment ? la forme de travail adoptée s'accorde-t-elle aux caractères des élèves, à leurs possibilités, etc... ?

Les thèmes étudiés ne sont pas proposés par le maître parce qu'ils permettraient des activités mathématiques riches et variées. Ces thèmes apparaissent au cours de discussions, d'échanges ; ils naissent du vécu des élèves, des problèmes rencontrés dans la vie courante ou parce qu'un travail précédent provoque de nouvelles questions. Si on laisse les enfants se donner effectivement les moyens de leur apprentissage mathématique, on constate que les sujets étudiés sont assez différents de ceux que nous pourrions leur soumettre : ils ne s'intéressent pas aux mêmes objets que nous ; dans le premier contact avec la situation, ils proposent une approche plus globale.

Si le thème étudié répond, tout au moins à son origine, aux réelles questions posées par l'enfant, la forme de travail doit également répondre à l'attente des élèves, elle doit s'accommoder de leur passé scolaire, elle doit satisfaire chacun. Les techniques de travail sont nombreuses. La plupart d'entre elles privilégient le travail individualisé ou le travail par groupe restreint. Elles sont utilisées par les élèves soit pour permettre de revenir sur des notions déjà abordées mais mal assimilées, soit pour faire son propre tâtonnement dans l'apprentissage d'un mécanisme ou dans l'exploration d'une situation. A d'autres moments, ceux où l'on souhaite la participation de tous, on recherchera collectivement, favorisant ainsi un climat d'échanges et d'entraide dans la classe.

De telles techniques de travail non seulement doivent contribuer à l'épanouissement de la personnalité, mais aussi inciter les élèves à prendre leurs responsabilités face à leur savoir, en créant les conditions permettant aux élèves de gérer eux-mêmes l'étude des notions mathématiques et le temps consacré à chacune de ces notions. Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire d'envisager une organisation de la classe différente de l'organisation traditionnelle où l'on se contente de cours suivis de séances de travaux dirigés.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Une conception de l'enseignement des mathématiques (et de l'enseignement en général) telle qu'on l'a définie plus haut est contraire à une présentation linéaire des connaissances. C'est à partir des apports de chacun, des recherches individuelles ou par petits groupes, dans des secteurs mathématiques variés, que nous construisons le savoir. Et si, par cette démarche, la construction de l'univers n'est pas aussi rigoureuse que le souhaiteraient les mathématiciens, pourquoi ne serait-elle pas cependant aussi enrichissante pour nos élèves du premier cycle pour lesquels on doit se soucier avant tout d'éducation ?

Les recherches faites par les enfants seront présentées à l'ensemble de la classe sans souci d'ordre. Cependant, chaque fois que cela est possible, la notion exposée est reliée aux notions préalablement étudiées. Pour communiquer son travail à toute la classe, le groupe ou l'élève prépare un affichage sur de grandes feuilles (chutes de rotatives d'un hebdomadaire local). Avant l'étude collective, on laisse une période de quinze jours environ

entre le moment de l'affichage et l'exploitation du travail. Le débat ne porte bien souvent que sur un point précis. L'expérience montre en effet que les élèves qui n'ont pas participé ne peuvent assimiler rapidement l'ensemble des résultats ; il faudrait pour chacun un moment de réflexion et de tâtonnement pour espérer atteindre le même niveau d'abstraction. De plus, les élèves s'expriment assez difficilement sur leur recherche parce qu'il leur manque sans doute le recul suffisant pour analyser leur démarche. Le point à étudier est retenu, soit parce qu'il est jugé intéressant par le groupe, soit parce que le groupe s'interroge et souhaite la participation de tous, soit encore parce qu'il permet d'aborder une notion inscrite au programme. Les techniques de retransmission sont variées : le problème pourra être photocopié sur une feuille de classeur de l'élève et permettre ainsi, d'une part une meilleure lecture du sujet à examiner, d'autre part un travail individuel de réflexion pendant la séance collective. On pourra aussi proposer une étude préalable la veille ou quelques jours avant par un exercice de réflexion. Quelquefois, si le sujet à étudier est plus abstrait ou moins familier, on peut proposer une fiche-guide à laquelle chacun répondra avant le débat, etc...

En dehors des séances collectives, les élèves consacrent leur temps à des activités plus individualisées. Dans ces moments d'individualisation, la part réservée à la recherche libre est sans aucun doute la plus passionnante et la plus profitable pour l'élève : elle développe son imagination, elle dynamise son action, elle lui offre l'occasion de créer et de découvrir, elle le prépare aux apprentissages futurs.

Mais le travail individualisé est aussi un moyen mis à la disposition de l'enfant pour parfaire ses apprentissages à partir des informations reçues lors des séances collectives. Il peut éprouver le besoin de revenir sur certains points abordés pour effectuer son propre tâtonnement, améliorer l'assimilation d'une connaissance et la transformer peu à peu en un véritable outil de pensée. Dans cette tâche, le maître peut l'aider en prévoyant une fiche programmée par exemple. C'est une fiche à plusieurs volets : dans une première partie, on indique d'une manière globale la ou les pistes à suivre ; si cette présentation sommaire s'avère insuffisante pour atteindre le but fixé, l'élève peut prendre successivement une, deux ou trois fiches complémentaires qui affinent progressivement les explications. Il est bien entendu souhaitable que la première fiche suffise car les informations fournies sur les fiches suivantes,

devenant de plus en plus précises, laissent de moins en moins de liberté dans le choix des moyens à utiliser pour arriver au but, et limitent donc peu à peu l'initiative dans la démarche. Seul le tâtonnement personnel conduit à un meilleur apprentissage.

A d'autres moments, quand l'objectif est précis (acquisition d'un mécanisme par exemple) ou quand il faut gagner du temps (!), on construit une fiche-guide : elle se présente sous la forme d'une liste de questions ; l'élève répond à une question avant de passer à la suivante. Là, la liberté dans la démarche n'existe pas.

La compréhension d'une notion, la création dans les recherches ne suffisent pas à assurer un apprentissage mathématique complet. Les mécanismes de calcul en algèbre, les applications d'axiomes et de théorèmes en géométrie nécessitent le développement d'automatismes libérant la pensée pour des activités créatrices et lui fournissant les outils pour approfondir les connaissances. Des exercices appropriés contribuent à cette automatisation. Ils peuvent être choisis en commun en fonction des demandes de la classe. Ils peuvent être aussi proposés aux élèves dans des livrets auto-correctifs que les élèves prennent selon leurs besoins, permettant ainsi à chacun de contrôler ses propres acquisitions et d'accroître son autonomie face au savoir. Ces livrets se contentent d'apporter le minimum indispensable pour installer les mécanismes, ils ne contiennent pas de sujets de recherche.

Le travail individualisé oblige l'élève à se prendre en charge. Ce sera à lui de doser, en fonction de ses intérêts et de ses besoins, les moments de recherche et les moments de strict apprentissage. Ce sera à lui de choisir le contenu de son travail. Cette sélection dans les moments et les sujets ne peut se faire spontanément, au début de chaque séance de travail individuel. L'expérience montre encore que l'élève est souvent désemparé devant le travail à accomplir s'il n'y a pas eu programmation préalable des tâches. Les prévisions seront donc établies pour une période d'environ six semaines. Selon le cas, 10 à 12 séances sont réservées au travail individualisé, soit 40 à 50 % du temps global de travail. Chacun organise en début de période son emploi du temps en prévoyant le nombre de séances pour chaque activité. Un élève qui a des difficultés passagères devant les contenus introduits dans la classe pourra établir son emploi du temps de la façon suivante :

recherche	3 séances
fiches	4

auto-correction	4
test	1

Un autre plus à l'aise devant les notions nouvelles étudiées pourra inscrire :

recherche	7
fiches	1
auto-correction	4
test	2

Dans ce second cas, la part consacrée à la recherche est plus importante que celle réservée à l'apprentissage. Le contenu des fiches, des livrets auto-correctifs, des tests, est établi par débat collectif précédant la mise en place du plan de travail. Le test revient sur les notions présentées : c'est un contrôle permettant à l'élève de s'évaluer par rapport au contenu et de déceler ses manques.

Comment, dans une telle organisation de la classe, les enfants vont-ils découvrir et apprendre la géométrie ?

QUELQUES INVARIANTS

L'exploration du plan et de l'espace physique par les élèves eux-mêmes conduit à des recherches variées et originales. Pour un même objet, l'interrogation peut être très différente : elle est fonction de la personnalité de celui qui pose la question ; elle dépend des moments et des besoins. Cependant, on peut relever à travers les productions de plusieurs années quelques lignes de forces, quelques tendances qui pourraient être prises en compte par un nouveau programme de mathématiques, si son souci majeur était réellement l'expression et la satisfaction des besoins des élèves, la construction d'une pensée riche et personnelle.

Parmi les recherches menées par les enfants, on retrouve très souvent des *activités combinatoires*. Est-ce par jeu ? Est-ce par besoin naturel ? Est-ce pour tenter de trouver une réponse au problème de l'infini ? Il faudrait une analyse rigoureuse pour apporter des réponses. Ce qu'on peut par contre affirmer, c'est que ce type de recherches passionne. Beaucoup de ces recherches conduisent à la découverte de la formule

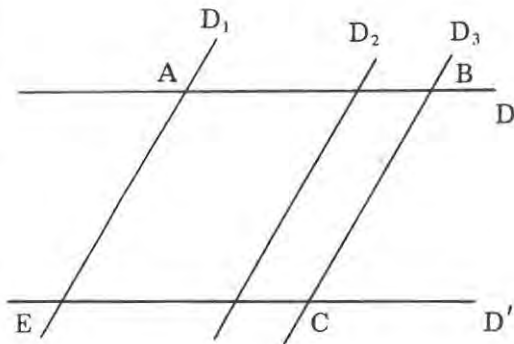
$$1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Voici quelques exemples parmi ceux rencontrés depuis la rentrée : "Par deux points, il passe une droite ; et par trois points distincts ? Et par quatre points ? "

“Deux droites distinctes non disjointes se coupent en un point. Et trois sécantes ? Et quatre sécantes ... ?”

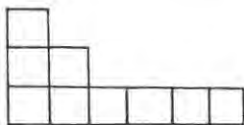
“Deux points distincts appartenant à une droite déterminent un segment de droite ; Et trois points de la droite ? Et quatre points de la droite ? ...”

“ D et D' sont deux droites disjointes de direction d ; D_1 et D_2 deux droites disjointes n'appartenant pas à d ; D , D' , D_1 et D_2 déterminent un parallélogramme (A, B, C, E).

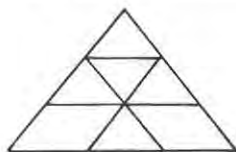


Soit une troisième droite D_3 telle que $D_3 \parallel D_2$. Combien forme-t-on de parallélogrammes ? Et avec une quatrième droite D_4 ? ...”.

De telles recherches en géométrie où l'on retrouve une action de dénombrement sont assez souvent inspirées par le quadrillage du cahier. Presque chaque année, on rencontre des constructions comme



ou



Les élèves cherchent à déterminer le nombre de carrés (ou de triangles) sur la première ligne, puis sur la deuxième ligne (ou sur les deux premières lignes), etc...

Une autre remarque peut être faite à propos de ces activités de dénombrement en géométrie : les élèves évitent assez fréquemment les cas particuliers. Ce n'est pas toujours facile. Ainsi, dans le premier exemple cité, on comprend qu'au bout d'un certain nombre de points choisis dans le plan, il devient très difficile de faire en sorte que trois points quelconques ne soient pas alignés. L'un des groupes qui s'était intéressé à cette question avait trouvé une solution : les points appartenaient tous à un même cercle !

Lorsque le groupe a présenté cette "astuce" à la classe, il y a eu des réactions et certains élèves disaient qu'il aurait été préférable d'examiner toutes les possibilités pour n points dans le plan. C'est ainsi qu'un nouveau groupe a mené une recherche sur toutes les positions des points dans le plan : les résultats ont été portés dans un tableau.

3 points	alignés non alignés	1 droite 3 droites
4 points	alignés 3 alignés non alignés	1 droite 4 droites 6 droites
etc		

Mais assez vite, la situation est devenue inextricable et impossible à continuer, d'autant plus qu'aucune formule générale n'apparaissait (nous reparlerons de ce travail un peu plus loin).

Je relève, à travers mes expériences, une deuxième tendance parmi les activités des élèves : la géométrie sous son *aspect dynamique* ; je veux dire qu'on examine surtout des "transports de figures".

On se demande par exemple quel dessin réaliser pour obtenir un triangle "semblable" à un triangle donné ou pour obtenir un triangle "plus grand". Que faut-il faire pour transformer un parallélogramme en un triangle ? Pour le réduire en un point ? etc... Donc, au lieu de se donner une figure géométrique et d'en étudier les propriétés, on préfère s'intéresser à des transformations, à des mouvements dans le plan. D'ailleurs, on rejoint là le premier type de recherches : quand les élèves ajoutent progressivement des points ou des droites ou des carrés ..., ils transforment la situation initiale.

Il y a ici, il me semble, une observation susceptible d'aider à définir un programme de géométrie, non pas seulement en termes de contenu mais aussi en tenant compte des activités fondamentales (comme celles décrites plus haut) indispensables à la construction de l'individu et préliminaires à l'étude de la mathématique.

Quand les élèves explorent une situation, ils s'intéressent beaucoup à son côté *curieux* sinon *magique*. Combien de fois dans les classes de tous niveaux on a étudié l'écriture des nombres dans

le système décimal pour y découvrir des points curieux, inattendus ? Cet aspect passionne ; on est très satisfait quand on a pu trouver une formule ou une construction inexplicable au premier abord. En géométrie, les réussites dans ce domaine sont moins spectaculaires. Cependant, on peut observer que les élèves recherchent le bizarre, le mystérieux quand ils construisent une figure géométrique. D'ailleurs, s'ils découvrent un phénomène un peu curieux, ils le considèrent volontiers comme inexplicable. On ne recherche pas la solution, ou des éléments de réponses même provisoires, on dit : "c'est normal !". Et je remarque dans de nombreux cas où il y a apparemment quelque mystère une déception quand, à la suite d'un travail d'approfondissement, les élèves fournissent une explication logique au phénomène observé.

Cette tendance doit certainement trouver une signification dans le contexte psychologique de l'enfant ou de l'adolescent. Sans doute pourrait-on affiner, par une étude plus scientifique, l'observation de ces invariants et aussi en dégager d'autres. Ceci permettrait de proposer aux élèves, à partir de contenus appropriés, un travail mathématique plus proche de leurs besoins et de leurs intérêts.

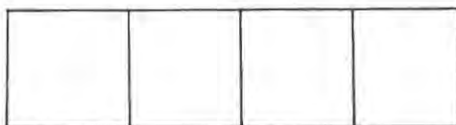
DEUX RECHERCHES

Lorsqu'on parle de "recherches" faites par des élèves, il ne s'agit pas d'imaginer sous ce terme des travaux avec plan de travail soigneusement élaboré et but clairement explicité. Ces recherches sont essentiellement des tâtonnements à partir de questions plus ou moins spontanées. Parfois, dans une seconde étape, un objectif se dégage et ce n'est qu'à compter de ce moment que les travaux seront plus nettement orientés. Donc, dans la plupart des cas, les productions résultant de ces travaux seront le témoignage d'instantanés de recherches. Il n'y a pas lieu ici d'émettre un jugement de valeur sur la présentation des travaux ou sur la rigueur de la démarche suivie. Ce qui est important, c'est le fait que les élèves aient pu vivre des activités formatrices pour leur personnalité et pour un apprentissage mathématique à venir.

Cependant, il arrive parfois qu'un travail démarré par un groupe ou par un individu conduise à une recherche bien structurée et à la découverte d'une notion mathématique importante. En voici un exemple.

Deux élèves, Jacques et Thierry, s'intéressent au jeu de dé. Je leur fournis donc un dé mais, après un moment de concertation, ils émettent le souhait d'en avoir un deuxième. Je n'en avais pas d'autre immédiatement à ma disposition. Après discussion entre nous, les deux élèves décident de construire rapidement un cube en carton et de représenter sur chaque face les points du dé.

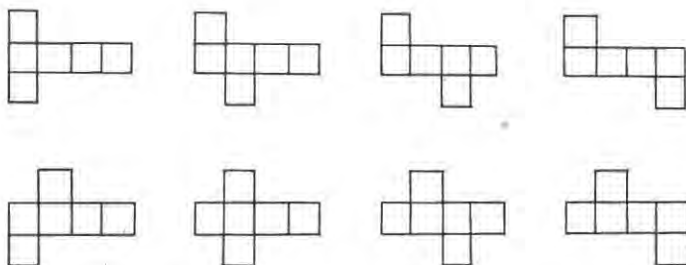
La construction du cube pose quelques problèmes. Les élèves essaient de se souvenir de ce qu'ils faisaient en CM2 mais n'y parviennent pas. On fait appel à toute la classe. Il apparaît alors indispensable aux yeux de tous de commencer par représenter quatre carrés "alignés". Il suffit ensuite de placer les deux dernières faces de part et d'autre de la bande. On peut noter que la classe élimine aussitôt les autres possibilités de construction du cube.

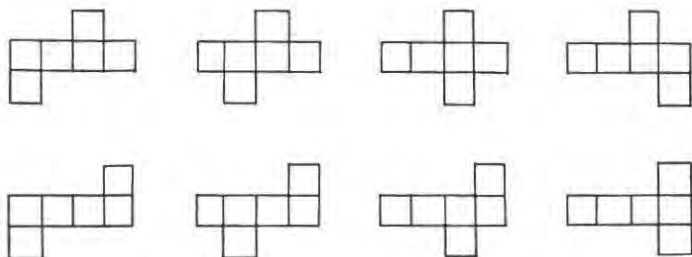


La solution dégagée ne met pas un terme aux discussions. Certains affirment que les deux dernières faces peuvent être placées de manière quelconque de part et d'autre de la bande ; d'autres pensent qu'elles doivent être opposées. Finalement, il est décidé de passer à la réalisation du développement du cube ; le collage sera effectué par les deux élèves qui sont à l'origine de ce travail ; ils pourront choisir entre les modèles proposés.

Bien entendu, chacun se rend compte par une vérification rapide que toutes les solutions permettent la construction du cube.

Nos deux élèves n'ont que l'embarras du choix devant les différents développements.





Ils peuvent passer immédiatement à la construction de leur dé. Mais une observation les arrête. Les modèles ne sont pas aussi différents qu'il y paraît. Un tri est rapidement fait et les découpages sont classés en six "paquets" (voir classement ci-après).

I	II	III	IV	V	VI

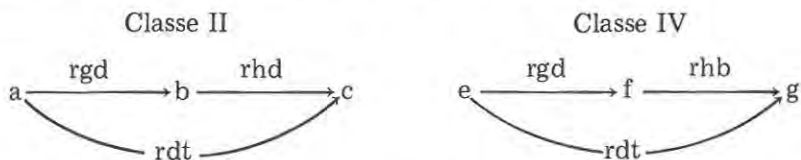
Une manipulation des modèles et un examen approfondi amènent Jacques et Thierry à comprendre les "passages" d'un modèle à un autre d'une même classe, expliquant ainsi leur ressemblance. Pour obtenir b à partir de a, il suffit d'opérer "un retournement de gauche à droite"; de a à c, on effectue une "rotation d'un demi-tour dans le plan"; de a à d, on effectue "un retournement de haut en bas" (les expressions qualifiant chacune des trois transformations ont été données par les élèves).

Les deux élèves passent un temps assez long pour contrôler leurs observations dans chacune des classes. Pour rassembler leurs expériences, ils réalisent un tableau : ce tableau leur servira de support pour la présentation à toute la classe de leurs remarques.

modèle	retournement g. à d. (rgd)	retournement h. en b. (rhb)	rotation d'un demi-tour (rdt)

L'exposé soulève dans la classe un certain intérêt : d'une part parce que toute la classe a déjà contribué à cette recherche, d'autre part parce que les remarques faites sont surprenantes et attisent la curiosité.

Un débat très animé s'installe : des manipulations sont recommencées devant tous et affinent la prise de conscience. On s'aperçoit peu à peu que si on effectue sur un même patron deux ou plusieurs mouvements consécutifs, on retrouve un patron de la même classe. Puis il apparaît que dans deux classes différentes, deux ou plusieurs transformations consécutives conduisent au même résultat. Au tableau, de façon un peu désordonnée donc confuse, on établit des schémas comme ci-après :



Il faut attendre un certain temps pour qu'apparaisse la nécessité de rassembler dans une table de Pythagore les conclusions de la recherche collective :

	rgd	rhb	rdt
rgd		rdt	rhb
rhb	rdt		rgd
rdt	rhb	rgd	

- Pourquoi certaines cases restent-elles vides ?
- “ Parce qu’il ne se passe rien ! ”.

Les élèves décident d’appeler d’une manière paradoxale cette transformation qui nous ramène au point de départ: “mouvement sur place”.

La table de Pythagore complète est enfin réalisée :

	rgd	rhb	rdt	msp (1)
rgd	msp	rdt	rhb	rgd
rhb	rdt	msp	rgd	rhb
rdt	rhb	rgd	msp	rdt

(1) “mouvement sur place”.

Il nous semblait alors aller de soi d’exploiter le résultat obtenu pour dégager la notion de groupe, en proposant aux élèves une fiche-guide avec questions précises et en procédant à une vérification collective pour l’associativité.

Il est illusoire d’espérer bâtir tout le travail mathématique d’une classe pendant toute une année uniquement à partir de recherches de ce type. Des recherches aussi élaborées avec cette dialectique petit groupe — groupe-classe sont rares. Elles nous satisfont intellectuellement, elles dégagent par une démarche originale mais logique une connaissance mathématique précise et appartenant au système que nous connaissons et que nous sommes chargés d’enseigner.

Cependant, ce type de recherches n’apporte pas nécessairement aux élèves plus d’enrichissement que des recherches brèves, que des tâtonnements apparemment désordonnés qui offrent l’occasion de manipulations fondamentales pour la construction de l’esprit. Il n’en reste pas moins vrai que la recherche sur le cube est un révélateur des possibilités créatrices et imaginatives de nos élèves, que nous avons le devoir de développer et non d’éteindre par un contenu trop abstrait et trop contraignant.

A côté de ces recherches où l’ensemble de la classe est mobilisé sur un même thème, d’autres travaux démarrés par

certaines donnent naissance à des recherches variées et à objectifs différents, tout en s'inspirant de la même situation initiale.

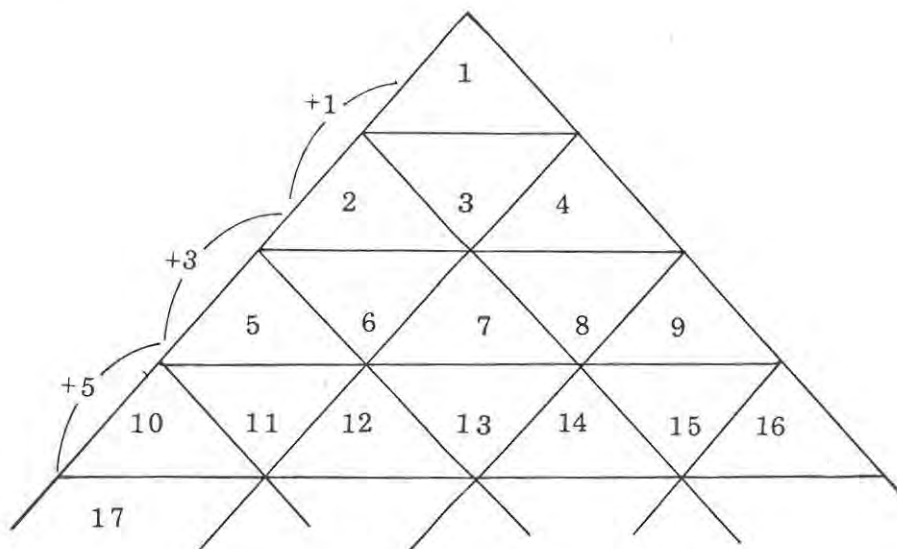
J'ai déjà dit combien le quadrillage du cahier était incitateur de recherches. Ainsi, un groupe d'élèves construit le schéma suivant :



Il place dans chacun des triangles des naturels consécutifs de haut en bas et de gauche à droite (schéma ci-après). Il remarque que les naturels inscrits sur le côté droit du triangle constituent la suite des carrés des naturels. Il constate aussi que la suite des naturels inscrits sur le côté gauche s'écrit :

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots$$

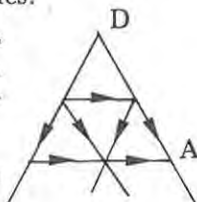
Il calcule la somme des naturels inscrits sur chaque ligne, sur les premières lignes, etc...



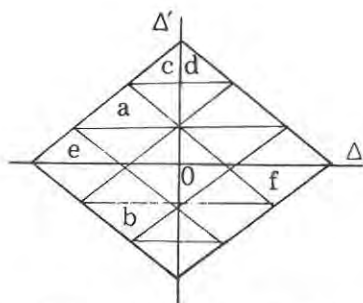
La présentation à toute la classe suscite un certain intérêt et, au cours des jours suivants, on peut voir plusieurs petits groupes se former pour étudier le même schéma. Peu d'élèves reprendront l'idée d'inscrire des naturels dans chaque triangle. Par contre,

d'autres pistes de recherches seront découvertes. On cherche par exemple à colorier les triangles en se donnant n couleurs puis un minimum de couleurs, de telle sorte que deux triangles adjacents soient de couleurs différentes. On est ainsi amené à étudier la relation "est adjacent à" dans l'ensemble des triangles.

Un autre groupe s'intéresse aux cheminements possibles en empruntant les côtés des triangles : en partant de D, quels chemins peut-on prendre pour atteindre A ?



D'autres élèves poursuivent la construction du schéma et découvrent différentes symétries.



a correspond à b dans une symétrie orthogonale par rapport à Δ ; c a pour image d dans une symétrie orthogonale par rapport à D' ; e a pour image f dans une symétrie centrale de centre O, etc...

Si des idées de recherches ne naissent pas spontanément autour d'un thème qui me paraît riche, je relève la situation telle que l'a présentée le groupe et je propose moi-même quelques pistes dans le fichier de recherches. Des élèves intéressés peuvent, s'ils le souhaitent, reprendre cette fiche au cours d'une séance de travail individualisé.

Ces deux exemples de recherches peuvent apporter une réponse aux questions des enseignants sceptiques qui pensent que les élèves ne peuvent d'eux-mêmes proposer un travail de recherche et, de plus, l'étudier volontairement, sans contrainte extérieure. Il est vrai qu'on ne peut obtenir de travail libre de la part des élèves si on leur pose, sans préparation préalable ni sans un certain climat de confiance et d'écoute, la question : "Que voulez-vous chercher ?". Les idées de recherches, dans un premier temps, celui du démarrage, sont assez naïves, simples, en-dessous généralement des possibilités de la classe mais, peu à peu, elles s'enrichissent grâce aux apports de tous et à l'organisation du travail. En cours d'année, quand la classe a su trouver son équilibre et sa forme de travail, les recherches entreprises sont rarement étrangères aux travaux qui les ont précédées, soit parce qu'une

question abordée pendant un exposé est restée sans réponse, soit parce qu'un sujet intéresse, soit encore parce qu'on souhaite refaire son tâtonnement autour d'une notion mal comprise, etc...

Si les deux recherches présentées démontrent qu'il est possible de faire des mathématiques à partir des activités proposées par les élèves, elles ne doivent pas pour autant nous masquer la réalité, à savoir l'obligation qui nous est faite d'appliquer un programme, c'est-à-dire de faire étudier une certaine somme de connaissances.

LES RECHERCHES LIBRES ET LE PROGRAMME

Il n'est pas possible de dissocier, sans nuire à l'ambiance de la classe, à l'imagination, à la créativité, à un certain goût du travail, les séances dites libres des séances plus directives visant à introduire les connaissances officiellement exigées. La mathématique doit former un tout dans l'esprit des élèves, donc la forme de travail doit tendre à respecter et si besoin renforcer cette conception de l'enseignement mathématique.

Les recherches libres présentées par les élèves à la classe peuvent n'avoir aucun lien avec le programme ; elles seront étudiées collectivement, pour elles-mêmes, pour satisfaire la curiosité manifestée, pour répondre à une demande précise du groupe, et aussi pour valoriser le travail individualisé. En revanche, d'autres recherches introduisent ou utilisent une notion mathématique imposée au programme ou fournissent une occasion d'étudier cette notion. Sans négliger ou restreindre la part de recherche collective provoquée par la présentation du document, on profitera des circonstances pour étudier en détail la situation et dégager le concept ou la technique de calcul. Bien entendu, l'exploitation d'un travail d'élève ne peut servir de prétexte à l'étude de tout un chapitre du programme.

Parmi les recherches qui ont donné lieu depuis le début de l'année scolaire à un travail collectif assez important bien que non inscrit au programme, citons :

— "L'écriture des puissances des naturels" : c'est une recherche qui a permis de dégager les conclusions suivantes :

$$n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad \begin{array}{l} 1^n \quad \text{se termine par } 1 ; \\ 2^{4^n} \quad \text{se termine par } 6 ; \quad 3^{4^n} \quad \text{se termine par } 1 ; \\ 2^{4^{n+1}} \quad \text{se termine par } 2 ; \quad 3^{4^{n+1}} \quad \text{se termine par } 3 ; \end{array}$$

2^{4n+2} se termine par 4 ; 3^{4n+2} se termine par 9 ;
 2^{4n+3} se termine par 8 ; 3^{4n+3} se termine par 7 ;
 etc...

— “La multiplication et l’ordre dans D ” : certains élèves ont pensé qu’on restreignait le problème en ne s’intéressant qu’à la multiplication membre à membre d’inégalités de même sens ne contenant que des décimaux positifs. Un petit groupe a souhaité examiner tous les cas. Après une recherche assez abstraite et difficile, on a su trouver les neuf possibilités :

Exemple : $a \geq b$ et $c \geq d$,
 si $a \in D^+$, $b \in D^+$, $c \in D^-$, $d \in D^-$,
 alors $bc \geq ad$,
 ou si $a \in D^-$, $b \in D^+$, $c \in D^-$, $d \in D^-$,
 alors $bd \leq ac$.

etc...

— “La multiplication par 11, 111, ...” : on établit ici quelques formules :

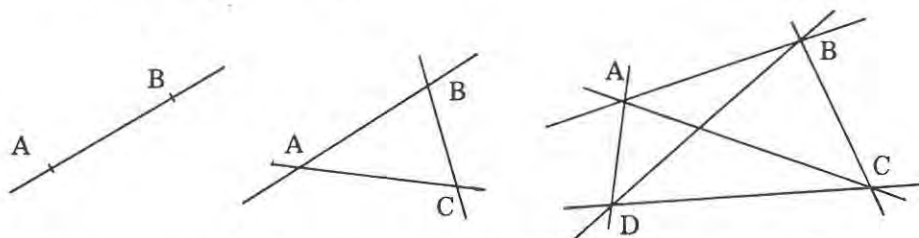
$$\begin{aligned} /a/b/ \times 11 &= /a/a+b/b/; \\ /a/b/ \times 1111 &= /a/a+b/a+b/a+b/b/ && \text{pour } a+b \leq 9. \\ /a/b/c/d/ \times 11 &= /a/a+b/b+c/c+d/d/ && \text{pour } c+d < 10, \\ &&& b+c < 10, \\ &&& a+b < 10. \end{aligned}$$

(dans $/a/b/$, a indique le chiffre des dizaines et b celui des unités).

A côté de ces recherches hors des limites du programme, d’autres travaux d’élèves ont permis d’aborder des notions demandées. Si l’on attend effectivement les situations apportées par les élèves selon leurs motivations, l’ordre traditionnel de présentation des connaissances sera bouleversé. La mathématique y perdra peut-être un peu de sa rigueur dans sa construction, mais l’enseignement gagnera en dynamisme et efficacité.

Parmi les recherches réalisées dans la classe de quatrième cette année, en voici quelques-unes qui ont fourni l’occasion de traiter avec plus d’insistance un point du programme.

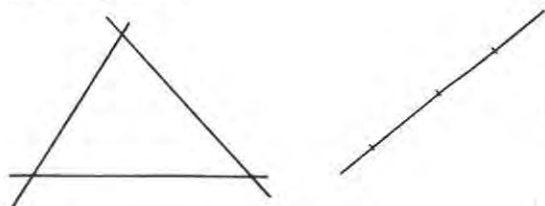
“Droites, sécantes, droite passant par deux points” : la recherche se rapportant à ce sujet a déjà été décrite. Quelques élèves essayaient de déterminer le nombre de droites passant par n points du plan non alignés trois à trois.



Notre travail en classe a consisté à dégager deux axiomes d'incidence de la figure I, à décrire les autres figures pour montrer par exemple que l'intersection de deux droites distinctes est un singleton, et pour définir ce qu'on appelle droites parallèles.

“Plan, demi-plan, demi-droite, segment de droite” : on se rappelle que l'exposé du travail précédent avait soulevé quelques réactions dans la classe : certains élèves voulaient étudier le cas où trois, puis quatre points..., étaient alignés. Pour exprimer chaque cas, il était nécessaire de préciser la position de chaque point par rapport aux autres. Devant les difficultés rencontrées par le groupe, il a été décidé de définir collectivement les régions du plan et de la droite permettant de situer un point, d'où les définitions du demi-plan, de la demi-droite et du segment de droite.

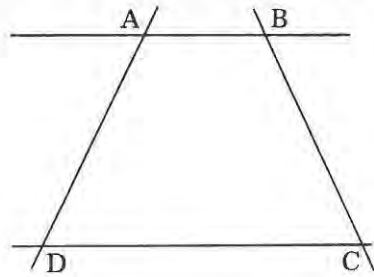
Pour 3 points :



Pour 4 points :

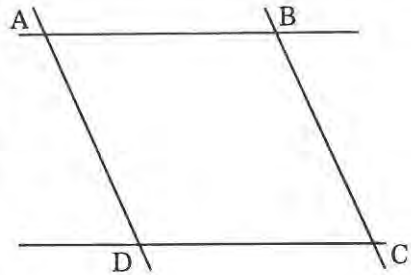


“Trapèzes et parallélogrammes” : un autre groupe s’est intéressé plus spécialement aux “figures géométriques”, essayant de retrouver les définitions de ces figures à partir des premiers éléments de géométrie étudiés en classe. C’est ainsi que le trapèze (A,B,C,D) a été défini à l’aide de droites sécantes et disjointes :



$$(AB) \parallel (DC) ; (AD) \cap (BC) = \{M\} ;$$

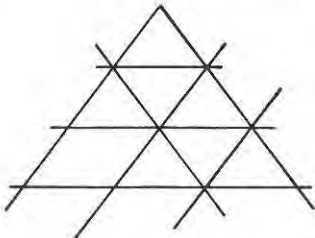
Puisque la symétrie centrale n’avait pas encore été abordée, nous avons dû adopter pendant un certain temps, pour le parallélogramme, la définition proposée par le groupe : c’est un quadruplet déterminé par deux couples de droites disjointes appartenant à deux directions distinctes. Les élèves écrivent :



$$\begin{aligned} &(AB) \parallel (CD) ; (AD) \parallel (BC) ; \\ &(AB) \cap (AD) = \{A\} \quad (AB) \cap (BC) = \{B\} \\ &(BC) \cap (CD) = \{C\} \quad (CD) \cap (AD) = \{D\} \end{aligned}$$

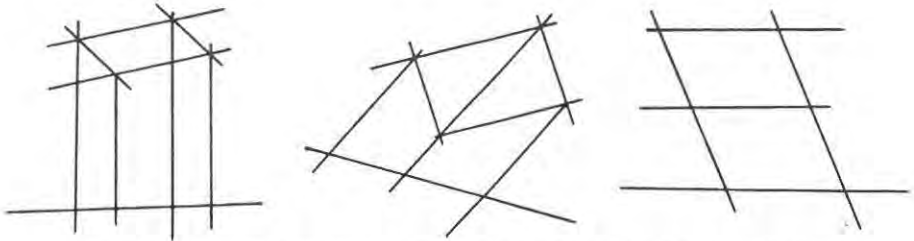
Pendant la recherche en petits groupes ou pendant son exploitation collective, il n’est pas apparu, d’une part que le parallélogramme ainsi défini est un trapèze particulier, d’autre part qu’il existe des parallélogrammes propres et des parallélogrammes aplatis.

Cette définition du parallélogramme présentée rapidement à la classe a donné l’idée à quelques-uns de compter les parallélogrammes contenus dans la construction ci-contre et d’établir, mais en vain, une formule donnant le nombre de parallélogrammes en fonction de la ligne n .



Nous avons indiqué plus haut l’intérêt manifesté par les élèves par

l'aspect dynamique de la géométrie. Yannick et Vincent ont voulu "transformer" un parallélogramme, le "réduire" à quatre points alignés, puis trois, puis deux. C'est cette recherche qui nous servira à distinguer parallélogramme propre et parallélogramme aplati.

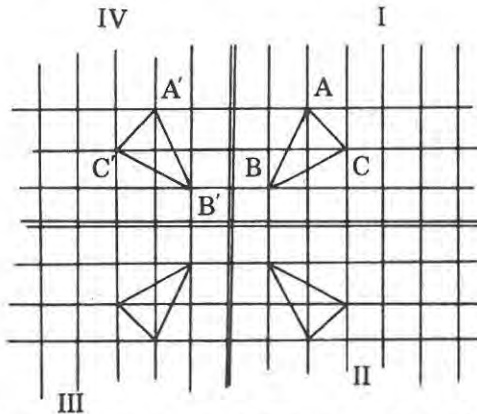


"Symétrie centrale" : Sophie, Nadine, Marie-Claire réalisent un quadrillage dans le plan à partir d'un système d'axes. Puis, elles placent trois points A, B et C :

$$A(2, 3) ; B(1, 1) ; C(3, 2) .$$

(Voir figure ci-après)

Elles découvrent qu'il est possible de représenter dans le quadrant IV un triangle (A',B',C') identique au premier en choisissant pour A', B', C' les mêmes ordonnées respectivement que celles de A, B et C mais des abscisses opposées.



Les quadrants II et III seront complétés en faisant subir aux coordonnées de A, B et C d'autres transformations.

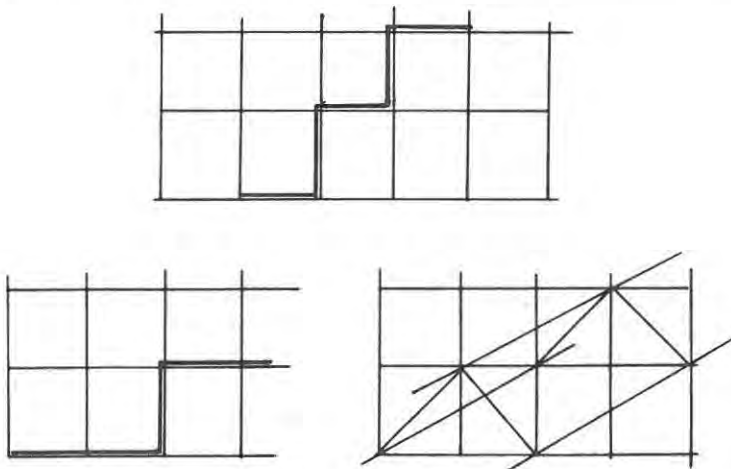
$$\begin{array}{l}
 \text{I} \longrightarrow \text{III} \\
 A(2,3) \longleftarrow A'''(-2,-3) \\
 B(1,1) \longleftarrow B'''(-1,-1) \\
 C(3,2) \longleftarrow C'''(-3,-2)
 \end{array}$$

	I \longrightarrow IV	I \longrightarrow II	
A(2,3)	\longrightarrow A' (-2, 3)	A(2,3)	\longrightarrow A'' (2, -3)
B(1,1)	\longrightarrow B' (-1, 1)	B(1,1)	\longrightarrow B'' (1, -1)
C(3,2)	\longrightarrow C' (-3, 2)	C(3,2)	\longrightarrow C'' (2, -3)

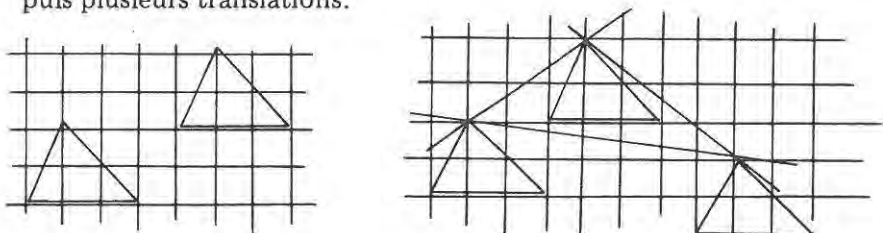
Les élèves s'aperçoivent rapidement que la relation qui permet de passer du quadrant II au quadrant IV est du même type que celle qui, au quadrant I, associe le quadrant III. D'autres remarques ont également été formulées à propos des relations entre deux quadrants adjacents, II et III, III et IV, IV et I, etc...

Evidemment, bien d'autres transformations de (A,B,C) auraient pu être découvertes en agissant sur les coordonnées des points. Le groupe ne l'a pas fait car d'autres centres d'intérêt attiraient les élèves. Mais nous avons à notre disposition une situation illustrant la symétrie orthogonale et la symétrie centrale. Collectivement, nous avons examiné ces deux symétries en faisant des remarques intéressantes, notamment sur les compositions de symétries, puis nous avons approfondi l'étude de la symétrie centrale.

"Translation dans le plan": Béatrice, Marie-Hélène et Nathalie ont découvert la translation dans le plan. Comme beaucoup de leurs camarades, elles ont utilisé le quadrillage du cahier. Elles se sont intéressées aux cheminements possibles sur ce quadrillage ; elles ont réalisé divers dessins.



Après cette période de manipulations variées sans objectif précis, nos trois élèves ont observé que les déplacements dans le plan et les transports de dessins, s'ils ont lieu régulièrement, correspondent à un même cheminement. L'idée est alors lancée d'indiquer quel cheminement on réalise, donc de le coder. On se déplace dans quatre "directions" : vers le haut, vers le bas, à gauche, à droite. Dans le premier cas, on va à droite 1 fois et en haut 1 fois. Dans le second cas, on avance à droite 2 fois et on monte 1 fois, d'où le couple (2d, 1h). On retrouve là des activités fréquemment vécues en classe de cinquième mais Béatrice, Marie-Hélène et Nathalie vont, en codant leurs déplacements, associer à chaque translation un couple unique. Le petit groupe poursuit ses manipulations sur le quadrillage et en particulier compose deux puis plusieurs translations.



$t_2 \circ t_1 = t_3$, ce que les élèves traduiront en écrivant :

$$(3d, 2h) + (4d, 3b) = (7d, 1b) .$$

D'autres remarques sont faites : elles portent sur le parallélisme d'une droite et de son image et sur la conservation des distances (les figures sont superposables, affirme-t-on).

L'exposé de ce travail à la classe nous a permis dans un premier temps de visualiser la translation dans le plan et ce qu'on appelle vecteur du plan, avant de donner des définitions plus rigoureuses et de déduire par raisonnement certaines propriétés découvertes par le groupe de recherche.

Malgré ces nombreuses expériences réalisées en géométrie dans des domaines variés, des points du programme restent dans l'ombre. Dans la classe en question, aucune recherche n'a porté jusqu'à présent sur l'axiome de Thalès ou les graduations de droites. Ce n'est pas surprenant. Nous avons dit que les recherches entreprises sont l'expression d'un besoin ou d'un intérêt. Pourquoi des enfants de 13-14 ans s'intéresseraient-ils davantage aux notions d'un programme qu'à toute autre activité mathématique ? Si nous avons pu, à partir des travaux de groupe, introduire des parties du

programme, c'est seulement parce que le compte rendu fait par le groupe autorisait une telle étude.

Des compromis seront donc inévitables. Notre rôle est de les rendre aussi peu contraignants que possible et surtout de proposer l'étude de ces points obligatoires sous une forme qui soit en accord avec la technique de travail adoptée par la classe. Il serait trop long de recenser tous les moyens à notre disposition pour maintenir un climat de recherche et d'écoute malgré des situations arbitraires. On peut cependant indiquer qu'un travail préparatoire, à partir d'une fiche-guide par exemple, est généralement bien reçu des élèves, car il laisse le temps aux tâtonnements, assurant ainsi une meilleure approche du concept. Le travail en classe prend alors plus l'allure d'un débat que d'un cours traditionnel.

CONCLUSION

Dans cette présentation du travail d'une classe, deux points sont à souligner.

Si l'on se donne pour unique référence les mathématiques telles que les textes ou les livres les présentent, il est fort probable que de nombreux reproches peuvent être formulés quant aux définitions des êtres mathématiques et à l'enchaînement des notions. Mais quel est notre objectif ? Notre fonction d'éducateur nous fait obligation, par delà les apprentissages scolaires indispensables, de proposer à nos élèves des formes de travail libératrices et formatrices. C'est à nous de créer les conditions de vie dans la classe qui favoriseront l'expression des besoins, les tâtonnements individuels et les échanges entre membres du groupe-classe. C'est encore à nous de faire en sorte que chacun se sente responsable de son savoir, l'élabore lui-même pour mieux s'en servir et acquière ainsi une certaine autonomie, que chacun trouve sa technique de vie.

Des programmes peuvent-ils prendre en compte de tels objectifs ? Si oui, la forme à leur donner ne peut être la forme actuelle. D'abord, ils devraient être rédigés en fonction des activités fondamentales que des enfants doivent faire pour préparer le terrain des apprentissages ultérieurs, et non en fonction des contenus définis arbitrairement par des adultes. Il serait dans ce cas urgent de recenser, à travers toutes les expériences, ces activités dites fondamentales. Ensuite, de tels programmes seraient à définir sur un temps assez long, quatre années peut-être, pour laisser la possibilité aux élèves d'apporter eux-mêmes, selon leurs recherches et leurs questions, les thèmes mathématiques à étudier.

5 - DES ÉLÈVES S'ADRESSENT AUX ÉLÈVES

(Elèves, de 10-12 ans, de Marcel DUMONT et Françoise PASQUIS)

Ce sont essentiellement des fiches-problèmes inventées par des enfants pour d'autres enfants, extraites d'un gros fichier paru en février 1977 (U.E.R. de Didactique de Paris VII).

Elles n'ont ni valeur d'exemples, ni valeur de contre-exemples. Il faut simplement les considérer comme des faits expérimentaux soumis à la critique et destinés à susciter de nouvelles recherches mieux adaptées aux objectifs de ce que pourrait être une éducation réelle. Une telle éducation devrait faire appel à ce qui caractérise l'être humain : c'est-à-dire essentiellement l'invention, l'imagination, l'initiative, l'interrogation, le doute, l'élargissement des contextes et ceci par opposition aux caractères de dressage (ou programmation), d'accumulation d'informations (mémorisation forcée) qui sont du ressort de la machine.

OBJECTIFS DE LA PUBLICATION DU FICHER

Il s'agit de montrer que :

1. a) Le potentiel d'"intelligence" d'un être humain (enfant ou adulte) existe toujours, mais qu'il est plus ou moins bloqué par des facteurs affectifs. Lorsqu'on parvient à le débloquent, alors se révèlent des possibilités insoupçonnées qui font paraître ridicules nos programmes actuels.
- b) Le travail libre partant d'une motivation profonde, interne, stimule toutes les facultés de l'enfant, ceci par opposition au travail forcé, exécuté sous la contrainte de menaces ou récompenses qui créent ainsi de véritables complexes anti-sociaux (égocentrisme en particulier).

- c) Toute évaluation ne tenant pas compte de ces deux facteurs (affectivité et motivation interne) est faussée dès le début par les conditions dans lesquelles s'effectue l'enseignement.
2. a) Les problèmes ne pré-existent pas dans les situations. Ce sont les observateurs qui, face à ces situations, peuvent se poser ou ne pas se poser de problèmes.
- b) On n'a jamais fini d'explorer une situation. Si un problème est résolu, il suffit de passer au niveau supérieur et analyser les méthodes, systèmes d'écriture, etc., ou le comparer à d'autres, pour susciter de nouveaux problèmes.
- c) Les concepts mathématiques peuvent ainsi apparaître au gré de l'observateur dans les situations les plus variées, mais à des niveaux d'analyse plus ou moins élevés, selon les expériences antérieures. (Ceci implique qu'il n'y a pas, d'une part des situations mathématiques, d'autre part des situations non mathématiques : avec un peu d'imagination on peut toujours faire apparaître n'importe quelle situation — mais le niveau d'“abstraction” exigé sera plus ou moins grand selon le niveau d'“évidence des perceptions”).
3. a) Il est possible de combler le fossé séparant les concepts mathématiques purs des problèmes pratiques de l'environnement, fossé artificiellement entretenu par un enseignement coupé des réalités.
- b) Il n'y a pas de cloisons rigides entre les diverses disciplines. Dans l'étude d'une situation, des objectifs divers relevant de disciplines différentes peuvent très bien coexister pour des raisons psychologiques de motivation et ... pour respecter aussi la réalité de l'existence.

En résumé ce document se propose :

- 1) de susciter une réflexion sur les méthodes et contenus grâce à un climat de libre curiosité, de libre critique, de libre initiative ;
- 2) de replonger l'enseignement des mathématiques dans les réalités quotidiennes de l'environnement, grâce à la curiosité des jeunes enfants.

EXEMPLES DE FICHES

Jérôme Barszer

PLAN POUR FABRIQUER UN CARRE



Voici le
morceau A

Voici le
morceau B

Il y a d'autres morceaux

semblables à B : $(B)^1$ $(B)^2$ $(B)^3$ $(B)^4$

DEROULEMENT DU PLAN DE CONSTRUCTION

1°) prendre le carré

(A)

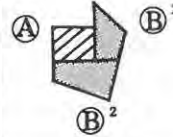


2°) ajuste comme
ceci le morceau

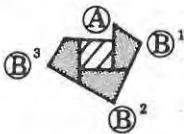
$(B)^1$



3°) continuer avec
le morceau $(B)^2$

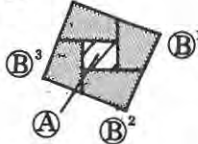


4°) placer mainte-
nant le morceau $(B)^3$



5°) et enfin ajuste
le dernier morceau

$(B)^4$



A se retrouve au centre

CONCLUSION : J'ai agrandi mon carré en utilisant d'autres formes.

1°) Essaie maintenant avec un cercle (de taille moyenne) d'en former un autre avec d'autres formes. Est-ce possible ? Essaie avec un triangle, un rectangle, un losange.

2°) Explique par une phrase bien distincte comment j'ai fait et pourquoi en partant de ce carré A j'en ai obtenu un plus grand.

- 3°) Même question avec le triangle, le rectangle, le cercle et le losange.
 4°) Calcule et mesure chaque pièce, les angles, leurs surfaces, en prenant comme base un carré de 4 cm de côté.

CONSEIL

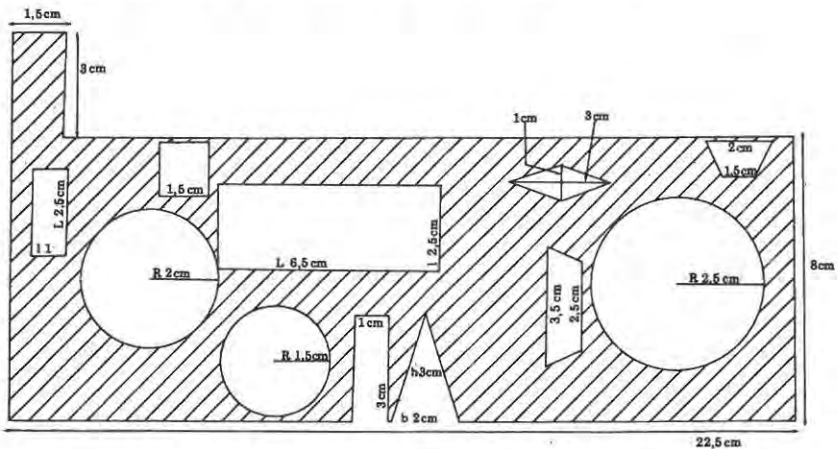
POUR REpondre A LA TROISIEME QUESTION IL FAUT D'ABORD COMPRENDRE LE SYSTEME DE MONTAGE DU CARRE. CELA T'AIDERA PEUT-ETRE DANS TA REponse (Jérôme).

*
* *
*

CALCUL DE SURFACES

Laurent Houdebine
 Jacques Simon
 Christophe Chomant

Il est interdit de faire cette fiche avec machines.



Calculer la surface hachurée.

René Frion

GEOMETRIE

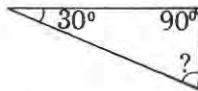
- 1 — Essayer de joindre tous les points ci-dessous SANS LEVER LE CRAYON. Trouver deux façons (ce n'est pas impossible). Trouver d'autres façons. Faire un ruban d'ordre pour faire toutes les façons que vous avez trouvées.



Inventer à partir de ça d'autres problèmes (éventuellement faire une fiche).

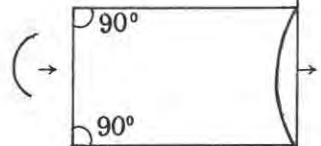
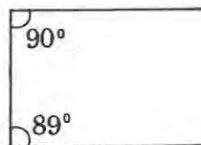
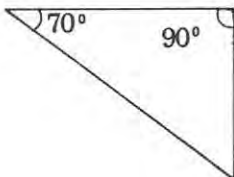
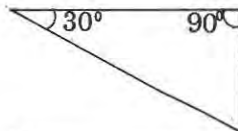
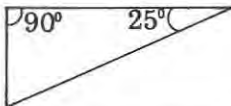
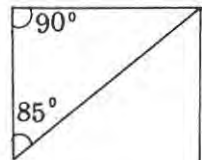
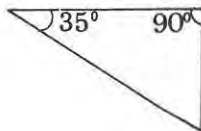
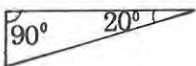
- 2 — Trouver (à l'aide d'un rapporteur si l'on veut) la règle pour trouver avec seulement deux chiffres le troisième (dans un triangle).

Exemple :



Trouver tous les troisièmes nombres des triangles ci-dessous.

(Pour le dernier trouver le troisième chiffre et quand les droites se rejoindront).

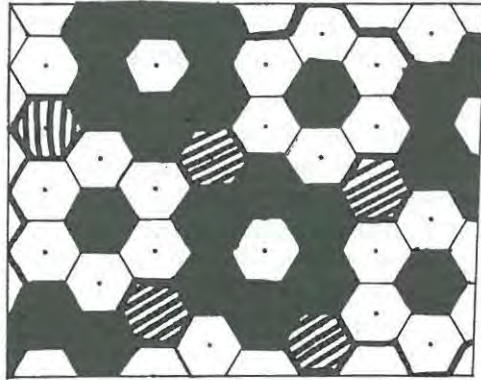


Anne Maisonneuve

LE MOTIF DE BASE

Mon père veut paver la cuisine qui fait 6 mètres de longueur sur 5 mètres de largeur.

- 1°) Quelle est la forme de base de ce pavé ?
- 2°) Calcule la surface de la cuisine puis la surface d'un pavé.
- 3°) Trouve le nombre de pavés qu'il me faudra pour paver la cuisine.



Je te donne un morceau du pavage.

BON COURAGE !!

6 - A PROPOS DE GÉOMÉTRIE : FAIRE

par G.H. CLOPEAU

“Le professeur de mathématiques
doit rester un professeur d'action”

Henri Lebesgue

On peut penser que le progrès de l’“abstraction” et de la “pureté” en mathématique, correspond à l’effort fourni par les mathématiciens pour rendre leurs discours intemporels. On ne s’intéresse qu’à ce qui est vrai de toute éternité.

Ainsi, en analyse, le “tend-vers” est explicité par la considération d’un filtre défini hors du temps. La tangente en un point A d’une courbe C n’est plus conçue comme position *atteinte* par une sécante rencontrant C en A et M, *lorsque* le point M se rapproche de A et *vient* se confondre avec A. Dans des problèmes de mécanique, desquels on ne saurait éliminer le temps, on le représente par une variable t dont on s’arroge la liberté de considérer les valeurs dans un ordre quelconque, ou même toutes les valeurs à la fois.

Cela résulte sans doute d’une exigence de rigueur. Mais on n’atteint pas d’emblée cette rigueur, et il est en revanche de nombreux exemples de réussites pédagogiques dues justement à l’utilisation du temps ; voire même, comme pour les “nombres machines” (même si on les élève verbalement à la dignité d’opérateurs) à l’introduction du temps dans un domaine où il ne s’impose pas “par nature”.

Et je me demande si certains manques d’intérêt, manifestés par certains enfants pour (certaines) mathématiques, ne viennent pas justement de ce que la mathématique est trop ressentie comme un monde immense mais parfaitement figé et qu’on ne fait que découvrir. Observer un paysage où tout est immuable est sinistre, car c’est un paysage mort. Vie et mouvement sont indissociables ; “vivre” c’est provoquer volontairement des mouvements ; c’est agir. Des enfants qui s’ennuient quand on leur parle de ce qui est, retrouvent leur vivacité quand on leur propose d’agir. Sans doute, progressivement, l’action pourra n’être que pensée, puis même elle

pourra être "objectivée", mais une saine pédagogie est d'abord active, au sens "incarné" du terme. Mais laissons aux philosophes compétents le soin d'approfondir et de discuter ces considérations philosophiques pour aborder le brûlant problème de l'éducation géométrique.

* * *

Tout le monde s'accorde sur la nécessité d'éduquer le "sens de l'espace". Tout le monde s'accorde aussi pour reconnaître que le sens de l'espace est une intuition globale qu'il faut apprendre à organiser. Autrement dit, il faut projeter sur cette intuition un modèle mathématique rigoureux. Mais lorsqu'il s'agit de choisir ce modèle des divergences apparaissent selon les finalités que l'on attribue à cet enseignement. Pour les uns, il s'agit d'être capable de concevoir une porte — et ce n'est pas si simple, soit dit en passant, pour ceux de nos collègues qui ne pratiquent pas l'enseignement de la technologie. Pour d'autres il s'agit de ... "délectation conique". Pour d'autres encore il s'agit de mettre en place les structures de l'algèbre linéaire qui utilise le langage géométrique. Pour certains, il s'agit de logique. Pour quelques-uns peut-être, d'un simple moyen de sélection ... J'en passe, et des meilleurs.

Et si, au lieu de se fixer a priori un objectif précis pour l'éducation géométrique, on visait (seulement) à épanouir l'enfant ? Alors, on apercevrait sans doute que la finalité attribuée a priori à l'éducation géométrique n'influe que très peu (je n'ose pas dire "pas du tout" faute d'enquête précise à ce sujet) sur l'enthousiasme et le succès des élèves. Par contre, on bute toujours sur un désintérêt général dès lors que l'on présente, comme postulait le programme, "une véritable théorie mathématique". Faut-il donc renoncer à cette "qualité" de l'enseignement, en décrétant que "les enfants de quatrième ne sont pas mûrs pour cela" ? Qu'il me soit permis de formuler une hypothèse, que j'ai déjà testée positivement, mais que je ne puis cependant, faute d'expérimentation complète, présenter encore autrement que comme hypothèse : *"Beaucoup d'enfants "décrochent" parce qu'on leur assène trop tôt des discours descriptifs d'objets abstraits, statiques, et pré-existant de toute éternité. Par contre, ils s'intéressent à des discours descriptifs d'actions créatrices"*.

Examinons ce qui se passe actuellement. Chez les petits, l'éducation du "sens de l'espace", la formation du schéma corporel, se font dans l'enthousiasme. Voici par exemple un exercice, sorte de "jeu de Kim", dont l'idée revient à Colmez, et qui me semble caractéristique de cette étape : on bande les yeux d'un

enfant et on lui donne un solide à palper ; puis on lui retire le solide ; après quoi on lui retire le bandeau et il doit reconnaître le solide parmi plusieurs autres posés devant lui sur une table. Des exercices analogues et variés font que les objets sont d'abord reconnus, puis identifiés, et enfin nommés (pour certains). De sorte que les élèves acquièrent d'abord une certaine culture et un certain vocabulaire (cube - triangle - rectangle - cercle - etc...).

C'est après seulement qu'on s'occupe des propriétés ("le rectangle a des angles droits", "le cube a 12 arêtes égales"). Pour l'enfant, ces "propriétés" sont "découvertes" sur le rectangle ou sur le cube, données premières. Plus tard, il faudra qu'il admette qu'une de ces propriétés est la définition, et que les autres, grâce à la théorie, "s'en déduisent". Cependant, toutes les propriétés continueront toujours à être rédigées de la même façon, comme décrivant des choses éternelles d'un monde totalement étranger.

Le goût de démontrer étant si mal motivé, comment s'étonner que "l'enfant de quatrième ne soit pas mûr pour participer à la construction d'une théorie mathématique de l'espace" ? Seuls, en fait, seront sauvés ceux qui ont un courage exceptionnel ou ceux dont la motivation principale est d'obtenir une meilleure note que le voisin.

Ne serait-il pas plus sage d'en rester aux ambitions du programme de cinquième (il s'agit d'une simple description ...) ? Mais qu'est-ce que "décrire" une droite ? Sans doute faut-il entendre qu'il s'agit d'énoncer des propriétés constatées sur certains objets. Ainsi, ce n'est pas la droite qui est à "décrire", pas plus que le point ; mais on peut énoncer qu'un point est sur une droite, qu'une droite passe par un point, ou coupe un plan, etc... Cette conception ne permet cependant pas d'aller bien loin — sauf dogmatisme exagéré —. L'épanouissement de l'enfant exige qu'on lui apprenne à raisonner. Et puisqu'on le fait en de multiples domaines — et en particulier en algèbre — il est regrettable de ne pas le faire à propos d'une expérience aussi commune que l'intuition de l'espace.

Or, l'hypothèse formulée plus haut, si elle se vérifiait, offrirait une solution. Au lieu de parler des objets géométriques, comme peuplant l'espace de toute éternité, au lieu de parler des propriétés de ces objets, comme si l'on découvrait des faits éternels, considérons seulement des "objets fabriqués". La définition d'un tel objet c'est un *programme de fabrication* ou, pour être plus classique, *programme de construction*.

Dans cette optique, choisir une géométrie, c'est choisir un certain nombre de procédures permettant d'énoncer les programmes de construction. Concrètement, ces procédures seront liées à certains instruments que l'enfant pourra manipuler. Par exemple, la géométrie traditionnelle relevait de trois instruments : la table, la règle, le compas, à partir desquels *tous* les objets considérés pouvaient être construits. La géométrie du nouveau programme en quatrième peut s'obtenir à partir d'un seul instrument, un peu plus sophistiqué, le "translateur". A d'autres conceptions de la géométrie correspondraient d'autres instruments.

Une fois précisé le choix des instruments, les programmes de construction prennent d'eux-mêmes, par nécessité et non par dogmatisme pédagogique, une valeur "abstraite" caractéristique de la mathématique. En effet, entre les *objets réels* fabriqués, la relation d'équivalence mathématique : "l'objet A *est construit conformément au même programme que* l'objet B" ne peut, au mieux, que définir des "classes approximatives" d'objets réels. De sorte que concevoir un objet "idéal", dont on sait bien qu'on ne peut pas le réaliser, mais qui est exactement conforme au programme, s'impose comme économie de pensée. Et bientôt même, au lieu de comparer des objets, on compare des programmes. Le raisonnement se sépare de l'observation. On pense pour prévoir. Et une démonstration consiste à établir, par un discours, que deux programmes distincts conduisent à une même classe d'objets abstraits. On ne cherche pas à savoir si deux traits dessinés sont deux droites parallèles ; on sait que des traits ne sont pas des droites et donc pas des droites parallèles. Mais on dit que le dessin représente deux droites parallèles si la liste des opérations matérielles effectuées pour l'obtenir (programme de construction) est identique (en ce cas on "utilise" la "définition") ou équivalente (en ce cas on "utilise" un "théorème") au programme de construction de deux droites parallèles. De même, si on parle de triangle isocèle, ce qui est isocèle, c'est le programme (ou encore l'objet idéal strictement conforme à ce programme), mais ce n'est certainement pas le dessin.

Rien n'empêchera les élèves poursuivant des études supérieures d'"objectiver" les éléments des programmes de construction, et ainsi d'éliminer le temporel. Ils aboutiront alors, mais sans avoir contracté d'écoeurement aux mathématiques, à une véritable

théorie mathématique intemporelle, tandis que leurs camarades qui n'iront pas en seconde n'auront cependant pas perdu leur temps. Ils auront une méthode de raisonnement applicable à l'action.

* * *

La stratégie pédagogique de l'éducation géométrique que je propose est en résumé la suivante :

1° *Phase intuitive* : identification de quelques objets, attribution de quelques noms, description de situations données, les discours sont du type "description de choses". Les dessins figurent les choses à la manière d'un tableau de peintre, ou d'une photographie. Ils "illustrent" le discours.

2° *Phase constructive* : les seuls objets considérés sont des objets construits. Le discours est du type "description d'actions". On peut introduire le raisonnement dans l'éducation géométrique. Les dessins deviennent des schémas ou des épures, plus ou moins figuratifs pour la commodité de la mémoire, mais nettement distingués des choses dont on parle.

3° *Phase théorique* : les "actions" sont considérées elles-mêmes comme objets (éléments d'ensembles). On construit une théorie complète. La généralité des structures reconnues conduit à exporter, dans divers domaines, le langage géométrique, qui suggère toujours des images propres à aider la mémoire, ou à créer des intuitions.

Il me semble qu'il est généralement peu souhaitable de dépasser la première phase en classe de sixième. La deuxième phase pourrait être préparée en cinquième, systématisée en quatrième, exploitée en troisième. Il n'est pas évident que la troisième phase puisse commencer en seconde. Et cependant, c'est en fonction de la théorie souhaitée que l'on doit choisir les instruments nécessaires à la deuxième phase. A ce sujet, il semble heureusement que l'accord soit à peu près fait entre les mathématiciens et les physiciens de haut niveau. Aussi ne discuterai-je pas qu'il s'agisse de projeter, sur notre espace expérimental, la structure d'espace affine euclidien. Notre problème est donc de choisir des instruments qui conduiront à cette structure.

Le livre de Vissio et Zadou-Naisky, "A la conquête de l'espace" (O.C.D.L.) offre une solution que, grâce à l'aide de Vissio, je me suis efforcé d'adapter aux élèves de quatrième et de

troisième (voir à ce sujet les Bulletins de l'A.P.M.E.P. n^{os} 275/76, 279, 284).

Cette solution éviterait sans doute les plus graves inconvénients de la seule annexe au programme publiée à ce jour (en dépit des promesses faites pour que nous votions le programme conçu comme liste non ordonnée d'objectifs), à savoir :

1° élaborer une théorie auxiliaire peu utile ou inutile à la suite du cours, qui constitue un très long détour avant la structure vectorielle, détour pendant lequel les enfants ne voient pas bien "pourquoi on joue à ça" ;

2° imposer d'emblée un discours du type "description d'objet abstrait" auquel les enfants, dans leur majorité, ne peuvent s'intéresser. Toutes les confusions objet abstrait-objet réel, tous les blocages du genre "pourquoi démontrer ce qu'on voit", dont souffraient les anciens programmes, se retrouvent ici ;

3° introduire trop tôt une théorie qui fonctionne de façon autonome, et consacrer ainsi un divorce complet entre géométrie et technologie (Paradoxalement, si on trouve des liens entre mathématiques et technologie, c'est en algèbre qu'il faut les chercher exclusivement).

Pour finir, je voudrais insister sur l'importance que je crois devoir attribuer aux sources techniques de la géométrie. Même dans la géométrie "du translateur", tous les objets matériels ne sont pas construits. La fabrication du translateur lui-même suppose connus le plan et la droite matériels. Par exemple, on ne peut construire une droite à l'aide du translateur que comme traduite d'une autre droite.

Il est remarquable que pour construire une surface dite plane, le technicien n'utilise aucune machine. Deux surfaces planes matérielles se fabriquent d'"elles-mêmes", par rodage avec une troisième. Quant à la "droite" technique, elle est l'intersection de deux plans techniques. Telle est la clef de tous les guidages en translation rectiligne, qui fondent le principe de fonctionnement du translateur, comme toute la précision mécanique industrielle !

Or, cette auto-fabrication du plan ne réussit pratiquement qu'avec des matériaux "durs" et "homogènes". Mais ces mots "durs" et "homogènes" n'ont pas reçu de définition mathématique préalable.

Ainsi, il apparaît clairement que la réalité matérielle n'est pas totalement mathématisée. La théorie porte sur des objets idéaux, qui possèdent avec exactitude les propriétés que l'on reconnaît approximativement aux objets réels. Et la rigueur d'une démonstration n'est que la rigueur d'une étape. Un problème "philosophique" reste ouvert... Il vaut mieux en être conscient.

ANNEXE
GEOMETRIE PAR PROGRAMMES DE CONSTRUCTION
(exposé présenté à l'Assemblée générale de la Régionale A.P.M.E.P.
à Tours le 17 Novembre 1974)

par G.H. Clopeau

L'intuition de l'espace n'est pas
une lecture des propriétés des
objets, mais une action exercée
sur eux.

PIAGET

Le programme actuel de géométrie en quatrième et troisième est appelé à changer. La commission Lichnérowicz avait voulu le réduire à une liste d'objectifs à atteindre. Mais les *diverses* annexes destinées à l'éclairer ont été subtilisées et la seule annexe publiée a été interprétée souvent comme étant le programme lui-même. Aussi, l'actuel programme de géométrie en quatrième et troisième ne peut-il plus être considéré comme un élément de la nouvelle conception de l'enseignement des mathématiques. Il a retrouvé les principaux inconvénients du programme antérieur : lien mal établi avec le réel, absence de motivation (généralement appelée "abstraction"), dogmatisme de l'enseignement ; de plus, le "modèle" imposé n'est pas utilisé par les autres disciplines, et la coupure mathématique-technologie s'accuse plus gravement encore qu'au temps du précédent programme.

C'est dire que si, à la faveur de la nouvelle réforme de l'enseignement, de nouveaux programmes doivent être préparés, la conception actuelle de la géométrie en quatrième et troisième ne trouvera pas plus de défenseurs parmi ceux qui ont appelé le mouvement que parmi ceux qui ont prêché l'immobilisme.

Mais que proposer alors ? Il faut reconnaître qu'aucune doctrine n'est encore solidement constituée, si ce n'est justement celle qui affirme la nécessité d'expérimenter avant de légiférer (Les I.R.E.M. sont plus que jamais indispensables !). Il est donc tout à fait indispensable que nous réfléchissions au problème posé par l'enseignement de la géométrie. Or, quelle que soit la doctrine, je crois possible de conserver l'idée d'une géométrie de "construction", idée que le PLOT n° 1 a commencé à présenter, et que je propose maintenant de préciser un peu.

Rappelons d'abord l'ambiguïté de la géo-métrie, qui confronte une intuition de l'espace physique réel avec un modèle intellectuel construit à partir d'axiomes. Affirmer que l'espace physique réel est conforme au modèle, c'est un *postulat*. S'il n'y a plus de postulats dans la géométrie enseignée aujourd'hui, c'est le signe qu'on se place "dans le modèle", qu'on se préoccupe seulement de la logique interne du discours ; ainsi la théorie, construite logiquement sur des axiomes, se développe avec une totale pureté, coupée du réel.

Mais il ne suffit pas, dans un discours ancien, de remplacer le mot postulat par le mot axiome pour en faire un discours "moderne". Et surtout, ce pseudo-modernisme, qui ne tient pas compte du développement de l'esprit de l'enfant, est tout à fait contraire à nos conceptions. Baptiser axiomes les postulats, c'est, pour celui qui n'a pas encore parfaitement assimilé la nature de l'édifice mathématique, renforcer cette grave erreur qui consistait à dire "les postulats (ou axiomes) énoncent des vérités évidentes indémonstrables". Le postulat consiste seulement à affirmer que dans le monde réel, l'axiome est vrai. Une telle affirmation ne peut être qu'une hypothèse de recherche (au sens des sciences expérimentales). Le destin d'un postulat est d'être un jour contredit par l'expérience. Alors qu'un axiome est hors de l'expérience.

Mais, à tenir trop tôt des discours de mathématique pure, tout en laissant croire qu'ils décrivent avec exactitude des réalités physiques, on compromet gravement le développement ultérieur de l'esprit, comme la compréhension de la science physique. Justement, la géométrie de construction se présente comme une étape *intermédiaire* entre une phase descriptive (ou intuitive), où les mots servent à décrire ce que l'on constate par expérience, et une phase théorique, où les mots s'organisent en un discours logique indépendant de l'expérience. Cette géométrie de construction est

d'ailleurs peut-être un peu plus qu'un moyen pédagogique pour passer de l'intuition à la théorie. Assurant le contact des deux, elle ouvre le domaine de l'action efficace ou pour être plus précis : de l'action à efficacité contrôlée.

* * *

Pour mieux situer ce domaine assez étroit, je relaterai l'expérience pédagogique qui m'a conduit à cette conception. Il s'agissait, au départ, d'obliger les élèves à distinguer clairement l'hypothèse de la conclusion. Pour cela, nous interprétions l'hypothèse au fur et à mesure que nous la lisions en effectuant une *construction* de la figure. Cela conduit à fixer l'attention sur le programme de construction, plus que sur le dessin obtenu. La conclusion disait en somme que la même figure aurait pu être construite en suivant un autre programme.

On s'aperçoit alors que *les axiomes du raisonnement expriment les propriétés que l'on attribue aux instruments utilisés*. Ainsi, la règle et la table donnent les axiomes d'incidence ; le compas fournit les axiomes de la distance, etc... Ce point de vue conduit d'ailleurs à réorganiser l'exposé traditionnel. Par exemple, on constate *d'abord* expérimentalement les divers cas possibles pour l'intersection de deux cercles et on énonce *après* que : " $\forall (A, B, C) \quad AB \leq AC + CB$ " ; alors que la plupart des cours "démontraient" toutes les propositions qu'expriment les "cas possibles" pour deux cercles.

On est conduit ensuite à distinguer nettement la définition d'une figure de ses diverses propriétés démontrées. Parmi tous les programmes qui permettent de construire une figure, l'un d'eux est présenté comme arbitraire et les autres comme conséquents. "Isocèle" signifie "qui a deux côtés égaux". Les deux énoncés : "tout triangle isocèle a deux côtés égaux" et "tout triangle isocèle a deux angles égaux" sont donc de nature différente. Le premier signifie "tout triangle qui a deux côtés égaux a deux côtés égaux". Il s'agit d'une plate évidence. Aussi n'est-il pas adroit de s'exprimer de cette façon. Il est préférable d'énoncer "tout triangle qui a deux côtés égaux est appelé isocèle" ou encore "un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux". Le second énoncé signifie que "tout triangle qui a deux côtés égaux a deux angles égaux". Le fait que tout triangle "qui a deux côtés égaux" ait aussi deux angles égaux n'est pas — ne peut être — évident. On démontre donc, en enchaînant des axiomes ou des théorèmes précédemment démontrés, que tout triangle construit avec deux côtés égaux se

trouve avoir deux angles que l'on pourrait construire avec le même programme. Ce théorème se distingue aisément de sa réciproque, puisque, pour la réciproque, on ne commence pas à considérer le même programme de construction et qu'on n'utilise pas le même enchaînement de propositions. Cela est tellement clair pour les professeurs que bien souvent ils ne comprennent pas ce qui empêche leurs élèves de les suivre. Se donner le temps d'effectuer matériellement les constructions, *pour savoir par quel bout on commence*, est un procédé pédagogique extrêmement efficace.

Remarque : Le même sens de l'ordre, lié à la signification des mots, se retrouve en algèbre. Le carré de la somme de deux termes est un programme de calcul distinct du programme de calcul carré d'un premier terme, plus carré d'un second terme, plus double produit des deux. Le fait que le premier programme, appliqué à deux termes quelconques, donne le même résultat que le second, appliqué aux deux mêmes termes, n'est pas une évidence (Et l'on n'est pas obligé d'employer systématiquement le second programme lorsque le premier est proposé).

Mais raisonner sur les programmes de construction ne va pas sans quelques précautions.

Par exemple le programme ci-contre est ambigu. Le point A' n'existe peut-être pas et, si A' existe, il existe peut-être un autre point ayant la même définition.

Nous dirons qu'un tel programme n'est pas "univoque".

Enoncer les conditions pour qu'un programme soit univoque est un problème ouvert que je n'ai pas résolu.

- 1° choisir un point A
- 2° choisir un réglage de compas r
- 3° tracer le cercle de centre A et de rayon r
- 4° choisir deux points B et C extérieurs au cercle (A, r)
- 5° désigner par A' un point commun au cercle (A, r) et à la droite (BC) .

Mais si l'on sait qu'un programme est univoque, alors la relation entre deux figures : "être construites selon le même programme" est une relation d'équivalence. Et généralement, le programme comportant quelques choix arbitraires, l'ensemble des figures constructibles par ce même programme n'est pas réduit à un seul élément.

D'autre part, il était très important dans l'esprit de l'ancienne géométrie de donner un sens à l'adjectif "pareilles" (1), appliqué à deux figures (ou à deux maisons). Préciser cela revient à considérer que tout programme doit être assorti :

— d'une donnée préalable : l'unité de longueur. Ce qui revient à dire que tous les réglages de compas sont donnés ;

— de trois choix arbitraires et d'aucun autre choix arbitraire, à savoir :

- le choix du premier point
- le choix de la première demi-droite issue de ce point
- le choix du premier demi-plan admettant pour bord le support de la demi-droite.

Effectuer ces choix se dit "choisir la position". Le fait que les figures obtenues (avec un même programme satisfaisant à ces conditions) soient "pareilles" peut se dire "l'espace est homogène et isotrope".

Remarque : Si on laissait arbitraire le premier réglage de compas, au lieu d'obtenir une géométrie "à un déplacement près", on obtiendrait une géométrie "à une similitude près".

Ainsi cette expérience conduit aux conclusions suivantes :

1° — ON PEUT ASSOCIER UNE GEOMETRIE A CERTAINES PROCEDURES PERMETTANT D'ENONCER DES PROGRAMMES DE CONSTRUCTION.

2° — CES PROCEDURES FONT REFERENCE A DES INSTRUMENTS DONT LES PROPRIETES TRADUISENT LES AXIOMES DE LA GEOMETRIE.

3° — EN OUTRE, LA GEOMETRIE CONSIDEREE EST ASSOCIEE A UN CERTAIN TYPE DE PROGRAMMES DE CONSTRUCTION QUI PRECISE DES DONNEES PREALABLES ET DES CHOIX ARBITRAIRES.

* * *

Puisque les savants mathématiciens et physiciens se sont trouvés d'accord pour estimer que nous devons d'abord enseigner la géométrie affine, nous rechercherons quels instruments nous devons utiliser, et quelles conditions nous devons imposer aux programmes de construction, pour qu'ils correspondent à cette géométrie.

(1) *Remarque* : Les figures iso-constructibles, c'est-à-dire constructibles selon un même programme, ne pourront être dites isométriques que lorsqu'une métrique adéquate aura été définie.

L'idée directrice vient de la définition d'un espace affine : le groupe des translations y joue un rôle tout à fait privilégié. D'où l'idée d'utiliser comme instrument privilégié le translateur, appareil qui, étant donnés trois points A, B, C, permet de construire D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ par exemple.

Bien entendu, nous ne présentons ainsi qu'une interprétation physique (parmi d'autres possibles) de la translation, mais il faut bien être conscients à ce sujet de ce que :

1° l'ancienne géométrie ne présentait qu'une interprétation physique (parmi d'autres possibles) du groupe des déplacements ;

2° il est vain de rechercher une correspondance bi-univoque entre une image physique et une géométrie théorique. Quand on a peiné à échafauder un modèle mathématique d'une situation physique donnée, on s'aperçoit bien vite que d'autres situations physiques correspondent tout aussi bien au même modèle.

Cette remarque est importante car on a laissé croire à certains moments que la "droite affine" avait une nature physique, et que cette nature physique était différente de la nature physique de la droite métrique.

C'est-à-dire qu'on a nagé en pleine confusion entre une réalité qui ne peut être qu'approximée et un modèle mathématique qui jouit de son autonomie logique.

Je ne reviendrai pas ici sur le principe du translateur. En géométrie plane, il peut être réalisé par une plaque dont un bord rectiligne est mis en contact avec une règle. Le "parallex Minerva" est un translateur vendu dans le commerce, très pratique pour dessiner des parallèles. Le translateur peut aussi être réalisé à l'aide d'une feuille de papier calque portant une droite dessinée que l'on mettra au contact d'une droite dessinée sur le plan de figure. On portera un point du calque sur le plan de figure, en perforant le calque avec une aiguille. Des inventeurs ingénieux trouveront sans doute des dispositifs beaucoup plus sophistiqués. L'important est de permettre les constructions fondamentales suivantes :

1° - A, B, C étant donnés, construire D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

2° - A, B, C étant donnés, construire la droite passant par C et admettant \overrightarrow{AB} comme vecteur directeur (cette construction comprend comme cas particulier la construction de la droite (AB) elle-même).

3° — A, B étant donnés, construire C, D ... M, tels que $\vec{AC} = 2 \vec{AB}$, $\vec{AD} = - \vec{AB}$, ..., $\vec{AM} = z \vec{AB}$ avec $z \in \mathbb{Z}$.

Il n'est pas non plus dans mon propos, aujourd'hui, de développer l'axiomatique, encore qu'il soit intéressant de montrer que cette axiomatique peut être induite de la manipulation du translateur. Mais il me faut revenir aux procédures à inscrire dans les programmes de construction. On utilisera certes les constructions fondamentales, mais il faut préciser, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, quelles seront les données préalables et les choix arbitraires.

Or, de même que la géométrie traditionnelle étudiait les propriétés invariantes par le groupe des déplacements (les choix arbitraires traduisant le choix de la "position"), la géométrie affine s'attache aux propriétés invariantes par toute transformation affine.

Cela conduit, dans le plan, à considérer que tout programme commence par :

- le choix du premier point
- le choix d'un premier vecteur
- le choix du premier vecteur non linéairement dépendant du précédent.

Remarque : On peut dire aussi qu'on choisit arbitrairement le premier triplet de points non alignés.

Ainsi toutes les figures construites selon le même programme univoque se correspondront par transformation affine. Elles auront toutes les mêmes propriétés affines.

Supposons qu'un énoncé débute par "Soit une droite \mathcal{D} et deux points P et Q hors de cette droite ...". Pour construire la droite \mathcal{D} , il faut que l'on choisisse arbitrairement un point A (de \mathcal{D}) et un vecteur \vec{V} (directeur pour \mathcal{D}). On peut encore placer arbitrairement P hors de \mathcal{D} , cela équivaut au choix du vecteur \vec{AP} , linéairement non dépendant de \vec{V} . Mais Q ne peut plus être placé arbitrairement, c'est-à-dire que, dans toute la suite du problème, il faudra pouvoir exprimer par exemple \vec{AQ} en fonction de \vec{V} et de \vec{AP} , faute de quoi toutes les figures iso-construites n'auraient pas les mêmes propriétés affines. Ainsi, le souci de construire des figures ramène l'attention sur l'importance de la base (ou du repère), importance souvent mal ressentie par les élèves de quatrième ou même de troisième.

Pour terminer, examinons, sur deux exemples, ce que le point de vue "géométrie de construction" apporte dans quelques démonstrations.

1er énoncé : On donne une droite (\mathcal{D}) et deux points A, B n'appartenant pas à \mathcal{D} . Quel est l'ensemble des points M tel que (MAPB) soit un parallélogramme et que P soit un point de \mathcal{D} ?

A la lecture d'un tel énoncé, le "fort en math" traduit tout de suite "(MAPB) parallélogramme" par "M symétrique de P par rapport au milieu de AB", ce qui permet de conclure rapidement. Mais j'ai souvent observé que ce genre de solution ... "géniale" (?) n'enthousiasme que quelques élèves et plonge les autres dans l'humilité. D'où l'idée de proposer d'abord une stratégie expérimentale ; dessiner les données et chercher à *construire* plusieurs points M, pour voir, c'est-à-dire pour mieux s'imprégner des hypothèses.

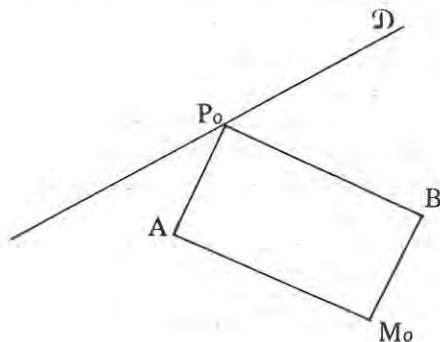
On tâtonne d'abord :

a) On imagine M n'importe où, on trace (MA) et (MB), puis la parallèle en A à (MB) et la parallèle en B à (MA). Le point P obtenu n'est pas sur \mathcal{D} .

b) On trace deux demi-droites issues de A, etc...

Ces tâtonnements conduisent à prendre conscience d'un ordre dans la construction de la figure (ordre que certains énoncés donnent d'emblée, explicitement). Autrement dit, l'idée de chercher plusieurs points M conduit à un programme de construction pour M :

- 1° choisir P sur \mathcal{D}
- 2° joindre PA et joindre PB
- 3° mener par B la parallèle à (PA)
- 4° mener par A la parallèle à (PB)
- 5° appeler M l'intersection des deux précédentes droites (on peut au passage se demander si M existe toujours).



Ce programme, exécuté plusieurs fois à partir de plusieurs points P : P_0, P_1, P_2, \dots , conduit à plusieurs points M : M_0, M_1, M_2, \dots . Le dessin, surtout s'il est exécuté avec soin,

conduit à une hypothèse (au sens des sciences expérimentales, c'est-à-dire à une supposition qui doit être soumise à l'épreuve). "Les points M sont sur la parallèle menée à \mathcal{D} par le point M_0 ". Reste à imaginer l'épreuve à laquelle on va pouvoir soumettre cette supposition. C'est la définition de la parallèle menée par M_0 à \mathcal{D} qui nous conduit à rechercher si le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est bien (conformément à la supposition) linéairement dépendant d'un vecteur de (\mathcal{D}) (1). En définitive, nous calculerons $\overrightarrow{M_0M}$ et trouverons $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{PP_0}$ (2) ce qui établit le résultat.

2ème énoncé : (ABCD) désigne un parallélogramme non aplati, de centre O. Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = 1/3 \overrightarrow{AB}$ et F le point défini par $\overrightarrow{CF} = 1/3 \overrightarrow{CD}$. Démontrez que les points E, O, F sont alignés.

J'admets que l'on sait, après avoir eu cent fois l'occasion de revenir à la définition de la droite, que démontrer l'alignement de trois points, cela revient à établir que deux vecteurs déterminés par certains de ces trois points sont linéairement dépendants.

Mais pour l'élève qui n'est pas habitué à construire, il y a bien des façons de considérer deux vecteurs déterminés à l'aide de trois points, et leur calcul ... à l'aveuglette risque de ne mener à la conclusion qu'après de longs détours.

La construction de la figure à l'aide du translateur conduit à prendre conscience du rôle privilégié des bipoints (A,B) et (A,D) (par exemple), qui ont été choisis arbitrairement alors que (B,C) et (D,C) sont construits de façon que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

En outre, la construction de E à partir de (A,B) est identique à la construction de F à partir de (C,D). D'où l'idée de la symétrie par rapport à O. C'est donc parce qu'on a conçu la construction de

(1) Vecteur de (\mathcal{D}) : expression abrégée pour vecteur représenté par un bipoint de (\mathcal{D})

(2) L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AM}$ n'est pas directement intéressante puisqu'on n'y voit pas figurer de vecteur de (\mathcal{D}) . On peut donc chercher "à l'aveuglette" à remplacer les écritures $\overrightarrow{M_0A}$ et \overrightarrow{AM} par d'autres (compte tenu de l'hypothèse "(MAPB) parallélogramme" on peut remplacer l'écriture $\overrightarrow{M_0A}$ par l'écriture $\overrightarrow{BP_0}$ et l'écriture \overrightarrow{AM} par l'écriture \overrightarrow{PB} ...). Ou bien on peut écrire une autre égalité introduisant un vecteur de (\mathcal{D}) , et après divers essais infructueux arriver à $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0B} + \overrightarrow{BM}$ qui, compte tenu de $M_0A = BP_0$ et $AP = MB$, donne $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{PP_0}$.

la figure conformément aux hypothèses que l'on choisit de calculer les vecteurs \vec{OE} et \vec{OF} , dans la base (\vec{AB}, \vec{AD}) ; de plus, effectuer la construction fait comprendre que, \vec{OE} étant exprimé en fonction de \vec{AB} et \vec{AD} , \vec{OF} sera exprimé de la même manière en fonction de \vec{CD} et \vec{CB} . Mais puisque $\vec{CD} = -\vec{AB}$ et $\vec{CB} = -\vec{AD}$, $\vec{OF} = -\vec{OE}$, ce qui établit la conclusion.

Même si quelques élèves ne sont pas tout à fait convaincus par ce raisonnement, ils effectueront les calculs effectifs sans se perdre :

$$\vec{OE} = \vec{AE} - \vec{AO}$$

Mais (théorème) $\vec{AO} = 1/2 (\vec{AB} + \vec{AD})$ et (hypothèse) $\vec{AE} = 1/3 \vec{AB}$

$$\text{Donc : } \vec{OE} = 1/3 \vec{AB} - 1/2 \vec{AB} - 1/2 \vec{AD}$$

$$\vec{OE} = -1/6 \vec{AB} - 1/2 \vec{AD}$$

$$\text{De même : } \vec{OF} = \vec{CF} - \vec{CO}$$

$$\text{avec : } \vec{CO} = 1/2 (\vec{CD} + \vec{CB}) \text{ et } \vec{CF} = 1/3 \vec{CD}$$

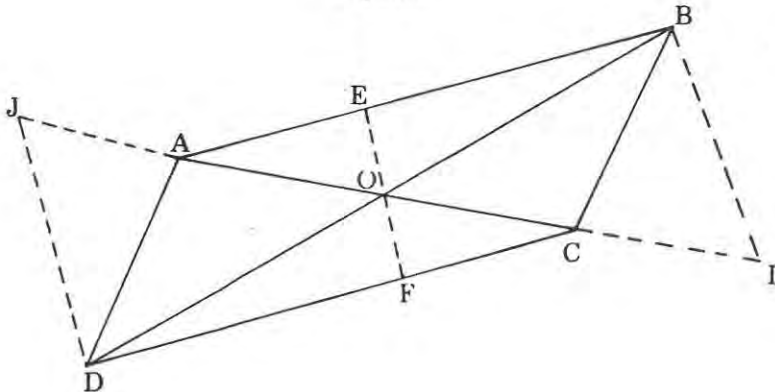
$$\text{d'où : } \vec{OF} = 1/6 \vec{CD} - 1/2 \vec{CB}$$

$$\text{Mais } \vec{CD} = -\vec{AB} \text{ et } \vec{CB} = -\vec{AD}$$

$$\text{Donc : } \vec{OF} = 1/6 \vec{AB} + 1/2 \vec{AD}$$

$$\text{ou } \vec{OF} = -\vec{OE}.$$

c.q.f.d.



Ceux qui répugnent au calcul pourront pousser plus loin le goût de la construction. Pour obtenir le point E, il est classique de construire une graduation régulière sur une demi-droite issue de A et distincte de (AB). Cette graduation est commencée sur (AC). D'où l'idée de prolonger AC de CI tel que $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AO}$, de joindre BI et de mener par O la parallèle à BI, qui coupe (AB) en E. De même, pour construire F on prolonge CA jusqu'en J tel que $\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CO}$ et on construit (OF) parallèle à (DJ).

Mais la construction fait que le point O, milieu de [BD], est aussi milieu de [IJ]. Donc (BIDJ) est un parallélogramme et les droites (BI) et (DJ) sont parallèles. Par suite, les droites (OE) et (OF) sont parallèles, et puisqu'elles ont un point commun ...

Ces exemples montrent bien que la "géométrie de construction" n'est pas une nouvelle théorie mathématique. Elle est une méthode pour s'initier au raisonnement, méthode applicable à toute théorie, et qui devrait permettre à des élèves d'accéder à la théorie au lieu d'en être a priori rebutés, et à d'autres, qui n'accéderont pas à la théorie, de ne pas perdre leur temps.

7 - LE PROBLÈME DU LION

Problème : Il y a un lion au Sahara. Il s'agit de le capturer.

Méthode du physicien : Le physicien verse le Sahara sur un tamis ; les trous laissent passer le Sahara et retiennent le lion.

Méthode du mathématicien : Le mathématicien, lui, procède de façon plus méthodique. Deux cas sont à distinguer.

Premier cas. Le lion est immobile. Construisons une cage sans fond assez grande pour contenir un lion. Ensuite, partageons le Sahara en deux : le lion se trouvera certainement dans une des deux parties ainsi obtenues (s'il est sur la ligne de partage, il appartiendra aux deux parties à la fois). Considérons maintenant le demi-Sahara ainsi obtenu. Partageons-le en deux : notre lion se trouvera à coup sûr dans une des deux moitiés. En continuant à procéder ainsi, nous obtenons des surfaces emboîtées les unes dans les autres : tôt ou tard, nous arriverons à une surface inférieure à celle du fond de la cage. Posons celle-ci sur cette surface : nous sommes sûrs de tenir le lion.

Deuxième cas. Le lion bouge. Il suffit alors de renvoyer le problème au physicien.

Comme disait je ne sais plus qui, "Que celui qui a des oreilles pour entendre entende" ...

*D'après Rózsa PETER
"Jeux avec l'infini"
— Editions du Seuil —*

P.S. 1. Comparer au problème de la casserole (et du clou).

P.S. 2. Il y a bien d'autres méthodes pour capturer le lion. Indiquons-en brièvement trois :

a) le chasseur se met dans une cage (sphérique) ... et opère par inversion !

b) méthode du diététicien : Nourrir le lion aux épinards et disposer d'un aimant ...

c) votre méthode ...

(pour un art poétique) et pour un tome II !

Prenez un mot prenez-en deux
faites cuire comme des oeufs
prenez un petit bout de sens
puis un grand morceau d'innocence
faites chauffer à petit feu
au petit feu de la technique
versez la sauce énigmatique
saupoudrez de quelques étoiles
poivrez et puis mettez les voiles.

Où voulez-vous donc en venir ?

A écrire

vraiment ? à écrire ?

Raymond QUENEAU, *L'instant fatal*
Gallimard, éd.

GEOMETRIE AU PREMIER CYCLE

Tome 2

Cette brochure, de 240 pages environ, complètera le présent tome 1 ; elle sera proposée aux abonnés dans le bulletin de commande de 1978 (lors du renouvellement d'abonnement), et envoyée aux intéressés soit en juin 1978, soit à la rentrée 1978. Voir le sommaire de ce tome 2 :

CINQUIEME PARTIE :

MATERIEL

1. De deux choses lune, l'autre c'est le soleil
(— fonctions de l'enseignement des maths
— agents de cet enseignement, en géométrie 1er cycle)
par Christiane ZEHREN
2. Les manuels scolaires
par Henri BAREIL
3. Le rétroprojecteur
par Michèle DEZAN et Henri PLANCHON
4. Tables traçantes
par les I.R.E.M. de Nancy et Poitiers
5. Calculateurs programmables
par Henri PONTIER
6. Translateur
par G.H. CLOPEAU
7. Le fil à couper le beurre
par Charles PEROL
8. Films de géométrie
par Marie-Claire DAUVISIS
9. Une affaire de locaux
par Henri BAREIL

SIXIEME PARTIE :

COMPORTEMENTS (des élèves — des maîtres)

1. LA NOTATION ET SES VARIABILITES
par Marie-Claire DAUVISIS
2. ETUDE SUR LA STABILITE DE LA GEOMETRIE EN FIN DE TROISIEME
(Résultats de deux enquêtes à modalités auprès d'élèves de troisième)
par Claire DUPUIS, Raymond DUVAL, François PLUVINAGE.
3. A L'ECOUTE DE MARCEL DUMONT
Introduction
- 3.1 Un peu d'histoire ... (de 1969 ... à 1975)
- 3.2 Un Q.D.P. dans l'eau
- 3.3 Quelques suggestions ... plus sérieuses

4. **LES BLOCAGES EN GEOMETRIE CHEZ LES ELEVES ENTRANT EN C.E.T.**
 par Claude PAGANO
- 4.1 Perception de l'espace physique
- 4.2 Les instruments de tracés géométriques et de mesures

SEPTIEME PARTIE (environ les 3/4 de la brochure, soit 180 pages)

NOYAUX-THEMES

AVERTISSEMENT par Henri BAREIL

1. VARIETES

- 1.1 Le pavé (au C.M.)
 par Roger CREPIN
- 1.2 Triangle équilatéral, trillages (de la sixième vers la quatrième)
 par Magdeleine MOTTE
- 1.3 Technologie et mathématiques
 — Trigonométrie et essai de dureté (I.R.E.M. de Rouen) Classe de troisième
 — Trigonométrie et métaux en feuilles (I.R.E.M. de Rouen) Classe de troisième
 — Exemples de liaison techno-maths (Classes de quatrième-troisième)
 par Gérard CONVERSEY
- 1.4 Un thème maritime (à propos d'orientation) (Classe de sixième)
 par l'I.R.E.M. de CAEN
- 1.5 Le papier peint (sixième, cinquième, troisième)
 par Danièle BOISNARD, M.-Th. LE CAM, Daniel CARRIOT
- 1.6 Affine ou métrique ? (quatrième-troisième)
 par André MYX
- 1.7 Somme des angles d'un triangle
 par Pierre GAGNAIRE
- 1.8 Quelques autres exercices de recherche
 (Groupe du CLAIN, de l'I.R.E.M. de POITIERS)
 — Cinq points au hasard
 — Cercles et quadrillage
 — Pentagone régulier et noeud de serviette
 — Colorons la sphère
 — Cheminement sur un quadrillage et organigramme
 — Les probabilités par l'image
- 1.9 Convergence et tablette de chocolat
 par Rosza PETER
- 1.10 Trigonométrie et calculateurs programmables
 (Equipe BASTIER - NOEL...)
- 1.11 Géométrie "naturelle" (avec de larges emprunts à "Matematica nella realta"
 d'Emma Castelnuovo)
 par Henri BAREIL
- 1.12 Usage de la géométrie dans les professions (automatismes, ...)
 par Claude PAGANO

2. DE L'EXPERIENCE O.F.C. A LA RECHERCHE SUR PROGRAMMES ET EVALUATION PAR OBJECTIFS

- par Régis GRAS, I.R.E.M. de Rennes
- 2.1 Lignes de force
- 2.2 Pour une pédagogie par objectifs
 Exemples de couverture des noyaux de programmes actuels ou de "programmes"
 de comportements, grâce à des thèmes et des activités

2.3	<i>Pour une évaluation par objectifs</i>	
	Exemples commentés "d'épreuves B.E.P.C.", de sujets de recherche, etc...	
	proposés par les équipes O.P.C. de Rennes-Vannes, Clermont, Limoges, Poitiers, Toulouse, Caen, Paris-Nord	
2.4	Annexe — <i>Fiche-élève rédigée et commentée par l'équipe O.P.C. Vannes</i>	
	(A PROPOS DE LA TRANSLATION).	
	Six parties :	
	— Eléments de motivation	
	— Schématisation. Représentation	
	— Travaux pratiques	
	— Mathématisation et exercices graphiques	
	— Translation et vecteur (étude théorique)	
	— Aspect numérique de la translation	
3.	GEOMETRIE "NATURISTE"	
	par Gilbert WALUSINSKI	
	Premier essai : Comment mesurer de grandes distances.	
	Deuxième essai : Formes, répétitions, déformations	
	Troisième essai : Géométrie animée.	
	D'autres essais	
4.	CINQ THEMES	
	proposés (et traités) par Pierre GAGNAIRE	
	Introduction	
	— Variations sur une figure simple	
	— Les quadrilatères et leurs symétries	
	— Pythagore	
	— Les vecteurs	
	— Trigonométrie	

**UNE COLLECTION DE L'A.P.M.E.P.
POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE**

ELEM-MATH

ELEM-MATH I (56 pages)

regroupe quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Élémentaire parus dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Voici le sommaire :

ROUQUAIROL (IREM de Paris) : Recherche dans l'enseignement élémentaire : code de navigation dans les chenaux.

LECOQ (E.N. de Caen) : Induction et récurrence.

P. LEGOUPIL (Instituteur, Valconville) : Recherche à partir d'un jeu télévisé dans une classe rurale à trois cours (CE2, CM1, CM2).

B. COLLIN (C.E.S. Saint Laurent de la Salanque) : Fonction sélective des exercices.

Travaux du Séminaire APMEP, Lyon, Septembre 1974 : Noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire.

A. FOULIARD (Instituteur, Ecole Decroly, Saint-Mandé) : Pliages et modèles mathématiques (article reproduit de la revue *Activités Recherches Pédagogiques*).

M. CARMAGNOLE (CM2, Pierrefeu du Var) : Le précédent et le suivant.

Prix : 3 F (port compris : 4,50 F).

ELEM-MATH. II (56 pages) :

LA MULTIPLICATION DES NATURELS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jusqu'en 1969, voici comment les programmes de l'école primaire évoquaient la multiplication :

- au cours préparatoire : *"multiplication par 2 et 5"*
- au cours élémentaire : *"table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication ... dans des problèmes simples empruntés à la vie courante"*.

Les instructions limitaient ensuite le contenu de l'étude. Tout d'abord : *"l'apprentissage de la table de multiplication est un des objets du cours élémentaire"* ; ensuite, elles indiquaient une progression pour l'acquisition de la technique opératoire.

Ce point de vue excessivement pragmatique était justifié par une savoureuse définition : *"en fait, dans les cas les plus fréquents, la multiplication est une convention commerciale"*.

Les programmes et commentaires du 2-1-70 n'imposent plus cette orientation (liaison directe avec la pratique commerciale et réduction de la multiplication à une simple technique opératoire). Au contraire ils permettent de présenter aux enfants des activités variées contribuant à une meilleure connaissance de cette opération mathématique fondamentale.

C'est dans cette perspective que ce livret rassemble des idées et des suggestions centrées sur la multiplication des naturels. Y voir une éventuelle progression pour telle ou telle classe ou des modèles de leçons serait un contresens. L'idée directrice est plutôt celle d'une mathématique vivante élaborée à partir d'expériences diverses. En osant une comparaison géographique, disons que c'est un essai de description du paysage multiplicatif du CE à la classe de sixième.

Les idées présentées dans ce livret ne sont pas originales. Elles sont le fruit de la réflexion qui s'est développée dans les Ecoles Normales depuis quelques années et des échanges réalisés à l'occasion des nombreuses rencontres organisées tant par l'A.P.M. que par les I.R.E.M. Elles ont été, à coup sûr, influencées par les travaux de recherche mis en oeuvre dans les I.R.E.M. en particulier ceux de Guy Brousseau et de son équipe de l'I.R.E.M. de Bordeaux. Si ce fascicule a quelque intérêt le mérite leur en revient.

Prix : 3 F (port compris : 4,50 F).

Pour vous procurer ces brochures, adressez-vous à votre Régionale ou Départementale.

Disponible : ELEM-MATH III : la division à l'école élémentaire

