Quelques apports de l'INFORMATIQUE à l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

N° 20

Quelques apports de l'INFORMATIQUE à l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 20

AVERTISSEMENT AU LECTEUR ...

Nous avons choisi des textes existants (souvent remaniés et actualisés par leurs auteurs pour cette brochure) et rédigé des articles entièrement nouveaux. Nous les avons classés, organisés en "chapitres" pour en faciliter la lecture et l'utilisation, faisant ainsi œuvre "collégiale" avec le souci de refléter au mieux la diversité des directions de recherche - sans prétendre à l'exhaustivité dans un domaine aussi riche en innovations.

Et maintenant, avec l'espoir d'avoir préparé un document susceptible de vous intéresser, nous vous souhaitons "Bonne Lecture" - et serions heureux de recevoir vos critiques, vos avis, vos suggestions, concernant les apports actuels ou futurs de l'informatique à l'éducation mathématique.

L'énorme travail de correction des épreuves, de mise au point définitve et de montage du texte et des dessins a été assuré par Jean CLERJON, Louis DUVERT et Paul SUBTIL.

André DELEDICQ

et l'équipe de rédaction: Jean BETREMA (de NANTES)
M. BRESSON (de CLERMONT)
Jean CLERJON (de LYON)
Rachel HEBENSTREIT (de PARIS
Roger LE ROUX (de RENNES)
Germaine LOPATA (de VANVES)
Jean MANDRILLE (de REIMS)
Jean Claude ORIOL (de GRENOBLE)
Paul SUBTIL (de LYON)
Claude VIEULES (de TOULOUSE)
Jean Pierre VILLAIN (de STRASBOURG)

La rédaction de la brochure a donné lieu à de nombreuses discussions au sein de la Commission Informatique de l'A.P.M.E.P. . Nous avons préféré laisser ses responsabilités à chaque rédacteur ou groupe de rédacteurs et nous avons donc indiqué leurs noms.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Pourquoi cette brochure ?

"Il apparaît dès maintenant que l'informatique (en tant que mode de pensée et par les différents outils qu'elle utilise: ordinateur, calculateur de bureau ou de poche) est un constituant important de la civilisation actuelle.

Vis-à-vis d'elle, les enseignants de toutes disciplines, mais plus spécialement ceux de mathématiques, ont à se considérer:

a) comme utilisateurs potentiels.

b) comme des arbitres, des conseillers et des critiques au cours de la diffusion des méthodes de pensée informatique et des méthodes d'utilisation des matériels. Dans ce rôle, ils sont irremplaçables.

c) comme des "préformateurs à l'informatique" de l'ensemble des nouvelles générations. Au cours des années qui viennent, les professeurs de mathématique auront à dégager les retombées de l'informatique sur le contenu même et la pédagogie de tout l'enseignement mathématique. "

Cet extrait du compte rendu des activités du groupe A 70 des Journées de l'A.P.M.E.P. à RENNES (septembre 1976) montre l'étendue des problèmes que pose, aux professeurs de mathématique, le développement de l'informatique.

Ce même compte rendu insiste sur la nécessité de faire circuler l'information (les nombreux travaux valables ne recevant qu'une diffusion restreinte) et souhaite, entre autres, dans ce but, la publication d'une "brochure A.P.M.E.P. exposant l'ensemble des problèmes informatiques".

Le but de cette brochure est de répondre à ce souhait de faire circuler l'information, sans prétendre toutefois exposer l'ensemble du problème informatique.

Elle a été rédigée par une équipe de professeurs de mathématique enseignant à différents niveaux, de formations informatiques diverses (parfois autodidactes), et consacrant à l'informatique une partie, au moins, de leur service.

Cette brochure fait largement appel à des comptes rendus d'expériences, passées ou en cours de réalisation, à des publications de différents I.R.E.M. . Les notices bibliographiques permettront aux lecteurs intéressés de trouver une documentation plus détaillée; en particulier, les brochures N° 54 et N° 75 de "Recherches Pédagogiques" publiées par l'I.N.R.D.P. font le bilan, en 1972 et 1975, de l'expérimentation menée dans les lycées et collèges, par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P. .

Il n'est nullement question de faire ici un cours d'informatique; bien au contraire, toute la partie technique a volontairement été écartée. Il s'agit de voir, au travers d'exemples, qu'un calculateur peut être intégré dans une classe, qu'il peut renouveler l'art du calcul et modifier notre pédagogie, qu'il peut aider le professeur de mathématique dans les différentes branches de son activité (Géométrie, Analyse, Probabilités, Statistiques, Algèbre), qu'il peut conduire plus généralement à d'autres formes d'analyse des problèmes, à d'autres façons de s'exprimer.

COMMENT MAITRISER LES PROBLÈMES POSÉS PAR LE DÉVELOPPEMENT DE L'INFORMATIQUE ?

Le développement de l'informatique, le nombre de plus en plus élevé d'ordinateurs en service dans des branches d'activités de plus en plus nombreuses, sont des réalités que nul ne peut contester. Des décisions pouvant parfois modifier notre style de vie sont prises après traitement par ordinateur de données statistiques.

L'influence de l'informatique au XXème siècle peut être comparée à celle de l'invention de l'imprimerie au XVème siècle.

Face à la machine qu'il croit toute puissante, l'individu non averti se sent écrasé; il se considère comme victime de l'informatique et est parfois prêt à se révolter. L'ordinateur qui devrait être un auxiliaire est considéré comme un ennemi.

Comment préparer nos élèves à vivre dans ce monde "informatisé" ?

Il s'agit avant tout de démystifier l'ordinateur, de comprendre et de faire comprendre comment il fonctionne, quelles sont ses limites d'utilisation, quelle confiance on peut accorder aux résultats que donne la machine. Seule une utilisation réfléchie de la machine peut permettre d'atteindre ce but.

"A côté des besoins en spécialistes, il est apparu nécessaire d'une part d'introduire une large initiation à l'informatique pour donner accès à l'outil à tous ceux qui auraient à se servir de l'informatique dans leur activité professionnelle ultérieure, sans pour autant être informaticien; d'autre part ces formations à l'informatique devraient s'appuyer sur une large sensibilisation à l'informatique, destinée à contribuer à la culture générale des citoyens, et à préparer les esprits à l'introduction de l'informatique dans un nombre sans cesse croissant d'activités humaines d'un pays moderne".

Cet extrait d'un rapport sur "*L'expérience française d'introduction de l'informatique dans l'enseignement secondaire*" rédigé par W. MERCOUROFF, directeur scientifique du C.N.R.S., fixe des objectifs; ce rapport précise le cadre de la réalisation de ces objectifs:

"La formation de culture générale à l'informatique se place tout naturellement au niveau de l'enseignement secondaire général, où sont formés les futurs citoyens d'un pays. Elle a pour but, non pas d'apprendre l'informatique, mais d'apprendre que l'informatique existe, à quoi elle peut servir, ce qu'elle ne peut pas faire, quelles sont ses limites, quels sont les aspects économiques qui lui sont associés."

Ce même rapport précise encore comment l'informatique peut s'intégrer dans l'enseignement du second degré:

"L'informatique ne devrait pas être eneignée dans l'enseignement secondaire général comme une discipline autonome, mais au niveau de toutes les disciplines traditionnelles comme méthode de raisonnement et d'analyse, en illustrant l'apport qu'elle pourrait avoir, tant par ses démarches intellectuelles (algorithmique, organigramme, ...), que par ses méthodes (analyses de problèmes, structuration des données, ...) ou par ses techniques (traitement sur ordinateur).

Il y a à ce choix un certain nombre de raisons. Il ne paraît d'abord pas souhaitable d'introduire une discipline nouvelle dans un enseignement déjà suffisamment chargé. Il est clair, ensuite, que l'objectif de l'enseignement secondaire général n'est pas de donner une quelconque spécialisation, mais une culture générale et que c'est dans ce cadre de sensibilisation que doit se situer l'informatique. Mais la raison la plus profonde est sans doute la suivante: l'apport de l'informatique est beaucoup plus riche que l'acquisition d'une simple technique permettant de se servir d'un outil; l'essentiel de cet apport réside dans les méthodes de raisonnement et d'analyse qu'elle requiert et qui sont applicables à l'ensemble de nos connaissances. "

Les objectifs définis, le cadre de leur réalisation choisi, leur intégration dans ce cadre fixée, d'autres problèmes restent à régler: la mise au point de la pédagogie et des programmes d'enseignement, le choix du matériel utilisé et le financement des achats et surtout le problème majeur, la formation des enseignants.

L'ACTION ENTREPRISE

Nous ne parlons ici que de l'action entreprise sur le plan national: elle se situe à deux niveaux:

- celle menée par le Ministère, avec deux types de formation, "lourde" et "légère"
- celle conduite par les I.R.E.M. .

A - L'action du Ministère

Nous reprenons, dans l'article de W. MERCOUROFF cité plus haut, le compte rendu de cette expérience.

"L'action entreprise par le Ministère de l'Education Nationale à partir de 1970 a été menée par la Mission à l'Informatique, créée en mars 1970 auprès du Ministre de l'Education Nationale.
L'ensemble des actions entreprises ont été menées en s'appuyant sur les avis d'un Comité Pédagogique, constitué des principaux responsables intéressés du Ministère de l'Education Nationale, des représentants de l'Inspection Générale de l'Instruction Publique de toutes disciplines,

et d'un certain nombre de spécialistes universitaires. Les diverses actions menées s'imbriquent naturellement étroitement les unes aux autres, mais elles ont été déclenchées successivement; il s'agit essentiellement de la formation des enseignants, de l'élaboration d'une pédagogique associée et de la définition et de l'implantation du matériel.

1. La formation des enseignants est évidemment le problème majeur, car l'option retenue pour l'enseignement sous-entend que l'ensemble des professeurs (ou en tout cas une grande part d'entre eux) de l'ensemble des disciplines soit capable d'assurer la sensibilisation à l'informatique. Il ne s'agit pas de former des professeurs d'informatique, mais d'apprendre l'informatique à des enseignants de toutes disciplines. Afin de multiplier au maximum cet effort considérable, deux types de formations ont été mises sur pied:

a) Une formation dite "approfondie" d'une année scolaire à temps plein. Démarrée en 1970-1971 avec la collaboration de constructeurs d'ordinateurs, cette formation a été poursuivie à partir de 1971-1972 dans un contexte universitaire dans quatre centres (PARIS - E.N.S. Saint Cloud, GRENOBLE - I.M.A.G. , TOULOUSE - I.U.T. , NANCY - I.U.T.) auxquels est venu s'ajouter en 1973-1974 un cinquième centre (RENNES - Université). Ces stages d'une année scolaire sont rendus possibles par un contingent de 80 postes qui sont répartis entre les différents centres, et qui sont également utilisés pour les besoins d'encadrement. A PARIS, une formation à mi-temps a permis de démultiplier les possibilités ouvertes par ces postes. Entre 1970 et 1975, 429 professeurs ont ainsi été formés, soit au total plus de 4‰ du corps professoral en poste.

Répartition du nombre total de professeurs ayant suivi la formation "approfondie" entre 1970 et 1975 par disciplines.

Disciplines	*Nombre de professeurs formés*	*Fraction du nombre de professeurs dans la discipline*
Sciences économiques et sociales	38	10,2 ‰
Mathématiques	118	9,1 ‰
Sciences Physiques	70	8,5 ‰
Philosophie	12	4,6 ‰
Lettres	64	2,9 ‰
Histoire et géographie	30	2,7 ‰
Techniques industrielles	14	2,3 ‰
Divers	15	

b) Une formation dite "légère" par correspondance. Elle est prise en charge matériellement par le Centre National de Télé-Enseignement. Un cours a été élaboré spécialement à l'intention des enseignants par un Comité technique composé de spécialistes de l'informatique. Le but recherché est de présenter l'Informatique non comme la science des ordinateurs ou comme une branche des mathématiques appliquées, mais comme une méthode d'analyse et de traitement des connaissances. Ce cours qui comprend par ailleurs un certain nombre de travaux écrits corrigés a pu être complété par un ou deux courts stages dans un centre de calcul universitaire permettant aux professeurs d'approcher le matériel et d'avoir un rapide aperçu des techniques de programmation. Cette formation largement ouverte (un paiement symbolique est simplement demandé comme à tous les élèves du C.N.T.E.) a touché plus de 5 000 professeurs entre 1970 et 1975, soit au total plus de 5% du corps professoral(1).

L'idée de ces deux degrés de formation est d'utiliser les professeurs formés à plein temps, non seulement à leur tâche habituelle d'enseignement, mais également pour animer des sessions d'information ou de formation au niveau local à l'intention de leurs collègues et en particulier de ceux qui auront suivi le cours par correspondance, et d'avoir de la sorte un effet de "boule de neige".

2. L'élaboration d'une pédagogie adaptée a été confiée aux professeurs formés en leur accordant, une fois revenus dans leurs établissements d'origine, des décharges de service pour mener cette recherche pédagogique, en même temps qu'ils pouvaient en faire l'expérimentation dans leurs classes. La coordination de cette action a été confiée à L'Institut National de Recherche et de Documentation Pédagogique, *qui a créé une section Information et Enseignement en 1971. Cette section a depuis cette date assuré la coordination et l'animation de l'activité en créant dès 1972 un Bulletin de liaison où sont publiés les rapports d'expériences, et en lançant en 1973 des fiches pédagogiques, en organisant les rencontres nationales ou régionales, en animant des équipes de recherche par disciplines.*

---

(1) Tout professeur de l'enseignement public peut maintenant s'inscrire directement en en faisant la demande au C.N.T.E. de Vanves (formation en deux ans).

3. Une consultation technique était lancée dès 1971 auprès des principaux fabricants d'ordinateurs français, et devait aboutir en 1972 à deux propositions de fournisseurs, l'une bâtie autour de l'ordinateur T 1600 de la Télémécanique, l'autre autour de l'ordinateur MITRA 15 de la C II. Deux ordinateurs de chaque type étaient commandés et installés dans le courant de l'année 1972-1973 dans quatre lycées proches de centres de formation. Onze systèmes ont été installés en 1973-1974. En 1974-1975, quinze autres systèmes devraient être installés. Le prix unitaire de ces matériels est inférieur à 300 000 F ."

Le choix du matériel semble avoir été dicté par des considérations économiques. Il ne paraît pas indispensable d'attendre de pouvoir disposer d'un tel matériel pour commencer une initiation dans la classe !

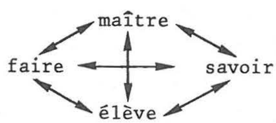
B - L'action menée par les I.R.E.M.

Elle a été résumée par le rapport en date du 23 juin 1975 de la Commission Nationale des I.R.E.M. :

" 1. *Finalités*

Parmi les multiples finalités qui ont conduit les I.R.E.M. à faire de l' "informatique" une des composantes importantes de leurs politiques, citons:

- *l'entrée de l'informatique dans la vie scolaire*
- *l'utilité de la démarche informatique dans l'apprentissage des concepts scientifiques*
- *nouvelles relations pédagogiques:*



et notamment la participation active des élèves et l'individualisation des processus d'apprentissage

- *entrée de la vie dans l'école provoquée par l'aspect expérimental concret des problèmes résolus par les techniques algorithmiques et informatiques.*

2. *Secteurs d'intérêts*

Des activités des différents I.R.E.M., il ressort que les grands axes suivis sont:

- *initiation des professeurs à l'algorithmique et à l'informatique*
- *réflexion sur l'apport des concepts algorithmiques et informatiques à l'enseignement des mathématiques*
- *utilisation de calculatrices programmables et de mini-ordinateurs en classe dans le cadre du cours de mathématiques et des activités pluridisciplinaires (il est important de noter que l'introduction de moyens informatiques dans les classes s'est avérée être un catalyseur pour la mise en œuvre d'activités pluridisciplinaires souhaitées depuis longtemps, mais si difficiles à réaliser).*

3. *Public avisé*

Essayons de classer, au travers des différents cycles de l'enseignement pré-universitaire , l'ensemble des personnes touchées:

- *Ecoles primaires: seule une petite minorité de normaliens et d'instituteurs ont pu être sensibilisés à l'algorithmique, mais cette action doit s'intensifier.*
- *Collèges: il semble que c'est essentiellement pendant le cours de mathématiques que les expériences ont été menées.*
- *Lycées: les expériences ont largement débordé le cadre du cours de mathématiques, puisque de nombreuses réalisations concernant les diverses disciplines scientifiques ont vu le jour; le seul point obscur est dû aux difficultés que les mathématiciens ont éprouvées à travailler en liaison avec les littéraires.*
- *C.E.T. et Lycées Techniques: la réalisation d'expériences dans les classes a grandement été facilitée par le type même des problèmes à aborder (citons par exemple les problèmes de construction mécanique et de commande numérique dans le secteur secondaire et les problèmes de gestion et de comptabilité dans le secteur tertiaire), et la présence, dans certains cas, de sections informatiques.*

4. *Personnel*

Personnes impliquées aux divers niveaux de ces diverses activités:

- *professeurs de l'enseignement secondaire de différentes disciplines ayant suivi à temps plein ou à mi-temps, pendant une année, la* *formation approfondie*

- *professeurs de l'enseignement secondaire qui se sont formés à l'informatique en autodidactes*
- *professeurs de l'enseignement secondaire stagiaires ou anciens stagiaires IREM; à titre d'information, dans la totalité des IREM, 600 stagiaires (en majorité mathématiciens), ont travaillé pendant l'année 1974-1975, à raison de 1h 30 hebdomadaire en moyenne (remarquons que ces stagiaires sont tour à tour enseignés et enseignants).*

5. *Matériel*

La politique des IREM en la matière a été et reste:

- *recherche de prêts des constructeurs*
- *l'utilisation de tout matériel existant (matériels des établissements de l'enseignement secondaire, de la "Mission à l'informatique", des universités, ...)*
- *achats de matériels légers peu chers, qui pourront être utilisés de façon optimale.*

6. *Recherches*

Les recherches sont menées soit en liaison avec l'enseignement programmé et l'audio-visuel, soit de façon ponctuelle sur les thèmes mentionnés dans le paragraphe des pôles d'intérêt, soit encore sur programme national comme la recherche IREM - INRDP, qui comporte trois groupes:

- *Algèbre en classe de quatrième:*

  La recherche expérimentale porte sur l'introduction de calculateurs programmables dans les classes de mathématiques de quatrième. Le problème posé est de savoir si celle-ci développe une meilleure approche des notions de "variable" et de "constante", en particulier de tout ce qui concerne l'écriture de formules littérales, la manipulation de symboles, ...

- *Récursivité:*

  Les difficultés rencontrées (notamment la teneur des programmes scolaires) font que la recherche en est encore au stade de l'innovation: après avoir étudié de nombreux exemples pour éclairer les concepts mathématiques et les techniques informatiques recouverts par les mots "récurrence", "induction", "récursivité", le groupe prépare la mise en place d'une expérimentation en rédigeant des documents utilisables d'une part au cours de la formation des enseignants, d'autre part en classe.

- *Simulation, table traçante:*
  Au stade de l'innovation. Après avoir recherché de nombreux exemples utilisables à différents niveaux, une première classification en a été faite. Une prérecherche expérimentale a été lancée dans le premier cycle (Quatrième, Troisième) en géométrie, l'ordinateur étant utilisable comme "boîte noire".
  Préparation de la mise en place d'une expérimentation en géométrie pour le deuxième cycle. Le débroussaillage se poursuit en analyse et activités de clubs.
  Les problèmes de simulation sont traités le plus souvent en liaison avec les autres disciplines (physique, chimie, biologie, géographie, économie, etc ...). "

LES CALCULATEURS AU SERVICE DE L'ENSEIGNANT

La formation "lourde" est actuellement interrompue; et l'équipement des lycées en moyens matériels semble aussi arrêté en raison, sans doute, du coût de cet équipement. C'est regrettable, de même qu'est regrettable la mise en sommeil de la mission à l'Informatique et l'abandon du soutien de l'I.N.R.D.P. à certaines recherches. Malgré les efforts non négligeables de ceux qui continuent (IREM, CNTE, ...), nous sommes donc encore loin de l'introduction dans chaque établissement scolaire d'une véritable culture informatique.

Alors ? Peut-être faut-il, sans pour autant abandonner les voies d'approche expérimentées, se tourner vers d'autres voies, moins onéreuses et plus faciles à mettre en œuvre et à exploiter dans chaque lycée ou école. A cet égard, l'apparition de calculatrices électroniques peut être une solution. Programmables ou non, elles bénéficient d'année en année des progrès de la technologie (poids, encombrement, autonomie, performances, ...) et des lois de la concurrence, qui en feront très bientôt un outil suffisamment bon marché.

Devant un tel phénomène, la réaction des pouvoirs publics peut être très différente selon les pays:

- En Suède, la calculatrice de poche fait partie du bagage de l'écolier depuis la dernière rentrée scolaire. C'est l'état qui prend en charge son financement, comme il le faisait déjà pour les livres et autres fournitures scolaires.

- En Autriche, le Ministère de l'Education a, depuis 1976, interdit l'utilisation des calculatrices dans les écoles ... !!
- En France, les programmes des classes scientifiques de lycées comportent, depuis 1969, "l'usage ... de machines à calculer". Une récente mise au point du Ministère de l'Education signale: "Interdite lors du déroulement des examens, l'utilisation des calculatrices n'est nullement obligatoire, ni même généralisée dans les classes"; et ce qui n'est pas obligatoire n'est pas interdit ...

En réalité, nous nous trouvons déjà devant un état de fait, qu'il vaut mieux canaliser qu'interdire: les calculatrices existent dès maintenant au lycée. Le seul problème qui subsiste est de savoir comment les utiliser, et surtout comment les intégrer au cours.

Il ne s'agit pas de substituer à l'apprentissage du calcul l'utilisation systématique du calculateur, mais bien d'employer d'une façon rationnelle et intelligente un instrument beaucoup plus riche qu'il n'y paraît.

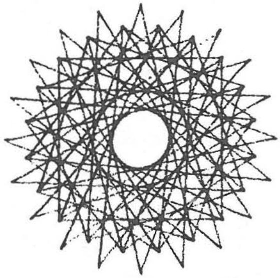
Or les premières recherches, tant en France qu'à l'étranger, font apparaître qu'il peut devenir au sein d'une classe un outil *pédagogique* important en mathématique. Et surtout un courant d'opinion de plus en plus fort se dégage pour mettre l'accent sur ce qui pédagogiquement est l'essentiel: ce courant a été fort bien défini et exprimé au récent Congrès International de KARLSRUHE par A. ENGEL:

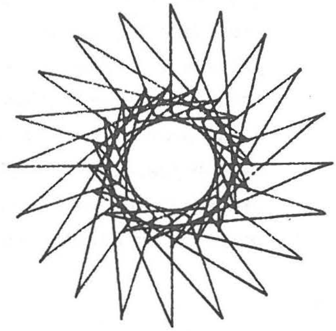
"Nous faisons nôtre cette devise: les algorithmes sont plus importants que les ordinateurs ...
Les algorithmes ont déjà joué un rôle important dans les mathématiques scolaires. Mais comme on n'avait aucun instrument de travail efficace pour réaliser les algorithmes, on n'a pas pu développer de compréhension algorithmique. On n'a presque jamais créé et analysé d'algorithmes. Au lieu de cela, les enfants étaient utilisés comme des calculateurs, programmés à la résolution de quelques algorithmes types avec lesquels ils devaient se familiariser, avant même de pouvoir bien les comprendre.
C'est pour cette raison que les algorithmes tombèrent en discrédit auprès des professeurs de mathématiques. Sans compréhension algorithmique, le professeur ne peut utiliser l'ordinateur que superficiellement. C'est pourquoi le domaine entier des mathématiques scolaires devrait être

restructuré en fonction de cette optique algorithmique. Une machine à calculer de poche suffit à retrouver la démarche algorithmique ...
Son emploi dans la classe implique un léger changement dans le contenu du cours, et un remarquable changement dans le point de vue du professeur:

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES DANS L'OPTIQUE ALGORITHMIQUE.

En 1908, Félix KLEIN prépara les voies d'une réforme des cours de mathématiques. Le mouvement de réforme avait comme slogan "Penser en fonctions". Les réformateurs demandaient que la manière de penser en fonctions pénétrât tous les domaines de l'enseignement des mathématiques. Ce que l'étudiant devrait avoir appris pendant ses cours de mathématiques, c'est de penser en fonctions. La réforme a transformé les cours de mathématiques de façon déterminante, et aujourd'hui, les professeurs acceptent que les mathématiques soient les études des fonctions et de leurs applications. Le temps d'une nouvelle réforme avec pour slogan "Penser en algorithmes" est arrivé. La pensée algorithmique doit pénétrer tous les domaines mathématiques. Cela devrait être clair pour les professeurs de mathématiques que l'activité principale de la classe devrait être la création et l'analyse des algorithmes. Les algorithmes ne sont pas des mécanismes triviaux qui simulent un certain processus. Les étudiants doivent apprendre à créer des mécanismes et à analyser des mécanismes qui ont été créés par d'autres. "





CHAPITRE 1

RENOUVEAU DE L'ART DU CALCUL

Question:

Avec l'apparition des calculatrices et, en particulier, des calculatrices de poche, les élèves sauront-ils encore "calculer" ?

Réponse:

Oui et mieux qu'avant, si le professeur de mathématiques utilise ce matériel pour renouveler l'art du calcul.

En effet:

- d'une part la machine donne au "calcul" un regain d'intérêt que l'on peut mettre à profit
- d'autre part les techniques d'organisation du calcul sur machine ont d'importantes retombées sur les techniques de calcul écrit et mental (quand elles n'en sont pas issues !).

L'objet de ce chapitre est d'expliciter quelques-unes de ces retombées en proposant quelques thèmes simples permettant de montrer, à la fois, les avantages et les limites des calculatrices.

I - GROSSES OPERATIONS

a) Quelle que soit la machine que l'on utilise, et en particulier les machines de poche, la technologie limite le nombre de chiffres exacts dans le résultat d'une opération (en notation habituelle cette notion recouvre celle de *capacité* de la machine).

Les enfants (ceux qui le sont et ceux qui l'étaient) découvrent seuls et très vite les opérations *trop grosses* pour la machine utilisée (Sur la totalité des modèles connus de petites machines, un signal de dépassement est affiché).

Cet obstacle va permettre d'introduire une dynamique nouvelle dans les comportements vis-à-vis de la calculatrice: de la consommation d'opérations plus ou moins élémentaires, on passe à la résolution d'un problème à l'aide d'un matériel donné.

L'argument: "*Si* on n'arrive pas à faire avec une machine ce qu'on peut faire à la main, *alors* c'est qu'on se sert mal de la machine" trouve ici toute sa force.

Choisissons une machine qui fasse des opérations sur des nombres de 8 chiffres et essayons de faire une addition de plusieurs nombres (de plus de 8 chiffres).

A = 123 456 789 101 112

B = 112 233 445 566 778

C = 111 222 333 444 556

D = 444 455 556 666 777

E = 666 667 777 788 888

On "découpe" chaque nombre en tranches de n chiffres $(n < 8)$ et l'on fait les sommes dans chaque colonne (sans oublier les retenues éventuelles).

Pour deux nombres A et B, cela donne:

$$A = A_1 + A_2 \times 10^n + A_3 \times 10^{2n}$$

$$B = B_1 + B_2 \times 10^n + B_3 \times 10^{2n}$$

$$A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \times 10^n + (A_3 + B_3) \times 10^{2n}$$

Ce qui donne la feuille de calculs suivante:

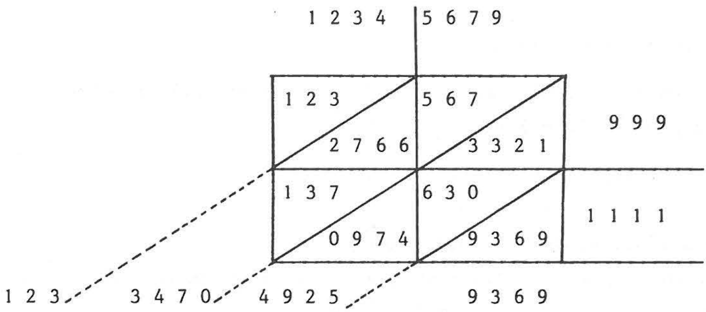
	Retenue		Retenue	
	1 2 3	4 5 6 7 8 9		1 0 1 1 1 2
	1 1 2	2 3 3 4 4 5		5 6 6 7 7 8
	1 1 1	2 2 2 3 3 3		4 4 4 5 5 6
	4 4 4	4 5 5 5 5 6		6 6 6 7 7 7
	6 6 6	6 6 7 7 7 7		7 8 8 8 8 8
1 4 5 8	2	0 3 5 9 0 2	2	5 6 8 1 1 1

Résultat : 1 458 035 902 568 111

(La largeur maximale de chaque tranche est majorée par la quantité de nombres que l'on veut additionner).

b) Nous emploierons une méthode analogue pour les multiplications entraînant un dépassement de capacité.

Rappelons la disposition suivante, dite "arabe", que nous pouvons naturellement utiliser ici :



12 345 679 × 9 991 111 = 123 347 049 259 369

Remarques

1) Avec une machine à 8 chiffres, on se limitera à des tranches de 4 chiffres évidemment.
2) D'autres dispositions de la multiplication seront posées pour ne pas se fixer sur une représentation.
3) Ne pas oublier les retenues dans les additions.
4) Cette activité passionne les jeunes élèves ...

(II) - PETITES DIVISIONS

Le gadget calculatrice de poche ayant une tendance (quasi exponentielle) à se répandre parmi les élèves, et ceux-ci en faisant parfois un usage aussi immodéré qu'aberrant, force est bien de réagir.

Inutile de chercher à convaincre que l'instrument est superflu: quand bien même ce serait vrai, nos pâles exhortations pèseraient peu face au déferlement de publicité et à l'invasion du marché.

Une autre voie à tous égards préférable consiste à utiliser les possibilités qu'offrent ces instruments pour des manipulations ou des expériences que les calculs manuels ne permettraient pas.

a) *Utilisation optimale de la machine*

Si l'on dispose d'une machine sans facteur de cadrage (puissance de 10) et affichant 8 chiffres, et si l'on veut obtenir, par exemple, le quotient 17 / 236 avec le maximum de précision, on aura intérêt à frapper au clavier: 17 : 2,36 et à diviser le résultat par 100.

17 : 236 = fournit en effet: 0,072 033 8

alors que 17 : 2,36 = fournit: 7,203 389 8 : on gagne deux décimales !

b) *Quotients avec un grand nombre de décimales*

Supposons que l'on veuille obtenir les 25 (ou 40 ou 50 ou ...) premières décimales du développement décimal de 17 / 43 .

1ère étape : on frappe au clavier:

17 : 4,3 =

ce qui donne à l'affichage: 3,953 488 3 ;

un premier résultat approché (tronqué, étant donné la machine ici utilisée) est donc : 0,395 348 83

Nous pouvons améliorer ce résultat en reconstituant le reste de la division correspondant au quotient provisoire 0,395 348 :

2ème étape : on frappe au clavier :

$\boxed{0{,}395\ 348}\ \boxed{\times}\ \boxed{43}\ \boxed{=}\ \boxed{-\ 17}$,

ce qui donne successivement à l'affichage :

16,999 964 puis - 0,000 036 .

Ce qui signifie que

$$17 = 0{,}395\ 348 \times 43 + 0{,}000\ 036 .$$

3ème étape : on frappe :

$\boxed{36}\boxed{:}\boxed{4,3}\boxed{=}$,

ce qui fournit à l'affichage:

8,372 093 0 .

D'où un deuxième résultat approché :

0,395 348 837 209 30

On continue de même en calculant le nouveau reste et en le divisant par 4,3. Il faut seulement prendre garde à ne conserver que 6 décimales afin que le produit intermédiaire ne comporte pas plus de huit chiffres et soit ainsi complètement affiché.

Frappe :	$\boxed{0,837\ 209}\boxed{\times}\boxed{43}\ \boxed{=}\ \boxed{-\ 36}$	Affichage:	- 0,000 013
Frappe :	$\boxed{13}\boxed{:}\boxed{4,3}\boxed{=}$	Affichage:	3,023 255 8
Frappe :	$\boxed{0,302\ 325}\boxed{\times}\boxed{43}\ \boxed{=}\ \boxed{-\ 13}$	Affichage:	- 0,000 025
Frappe :	$\boxed{25}\boxed{:}\boxed{4,3}\boxed{=}$	Affichage:	5,813 953 4

On obtient pour l'instant le quotient approché suivant :

0,395 348 837 209 302 325 581 395 34

(Il semble qu'on ait une période de 21 chiffres. Ce n'est pas une certitude. Pour avoir cette certitude on peut:

- soit poursuivre le calcul jusqu'au 43$^{\text{ième}}$ chiffre décimal, ce qui est faisable dans cet exemple, mais n'est pas généralisable !
- soit taper au clavier:

  $\boxed{0,581}\ \boxed{\times}\ \boxed{43}\ \boxed{=}\ \boxed{-\ 25}$ ce qui affiche - 0,017 ;

  le 22$^{\text{ième}}$ reste partiel est donc 17 , et l'on revient au calcul primitif de 17/43).

<u>Intérêt de ce "jeu" :</u>

- compréhension du principe de la division euclidienne
- étude de la périodicité dans le développement décimal des rationnels.

II - RACINES CARREES

Le problème de la racine carrée, en classe de quatrième, est une des questions pour lesquelles l'aide de la calculatrice est particulièrement appréciée.
En effet, sans calculatrice, la complexité des calculs prendrait trop de temps, lasserait vite les élèves, ou fixerait leur attention sur autre chose que l'essentiel.

a) *La machine la plus simple va effectuer rapidement, à votre place, des calculs fastidieux*

Recherche des racines carrées approchées d'un nombre A.

Exemple : A = 5 850

L'objectif est d'obtenir, par tâtonnements, une suite d'encadrements de plus en plus fins de 5 850 , par des carrés de décimaux.

Sachant que: (calcul mental, tables, ... ou machine)

$$76^2 \leqslant 5\,850 < 77^2$$

la méthode consistera à obtenir un chiffre significatif supplémentaire en calculant successivement $76,1^2$ $76,2^2$ .....

jusqu'à ce que l'on ait :

$$(76,4)^2 \leqslant 5\,850 < (76,5)^2$$

et ainsi de suite ......

- La machine n'aura dans cet exercice pas d'autre but que de faire à la place de l'élève des multiplications longues et fastidieuses.
- On organisera au mieux le calcul de façon à éviter trop d'essais inutiles. On ne fera pas de balayage systématique de l'intervalle, mais des essais "raisonnables" avec une valeur "moyenne"; par exemple, au lieu de 76,1 on essaiera immédiatement 76,5 et on prendra des valeurs inférieures ou supérieures suivant le besoin pour l'essai suivant.
- Sur ce type d'exercice, on peut maintenir l'attention des élèves beaucoup plus longtemps et beaucoup plus efficacement que s'il fallait faire tous les calculs "à la main".
- On note également que, délivré du souci du calcul, l'élève se livre à une réflexion plus approfondie sur le problème, fait des prévisions sur l'ordre de grandeur, apprend à organiser un calcul.
- Pour faire ce type de travail, la calculatrice la plus élémentaire est suffisante (4 opérations seulement, pas de mémoire).

b) *Recherche d'une méthode plus rationnelle pour avoir des encadrements*

Peut-on, sans tâtonnement, obtenir une suite d'encadrements de A par des carrés de décimaux ?

C'est la méthode employée - sans machine !! - par Héron d'Alexandrie au premier siècle (?) avant notre ère avec

$$A = 720 \quad .$$

On se propose de déterminer un nombre X positif tel que

$$X^2 = A$$

ou encore tel que $$X = \frac{A}{X} \quad .$$

Prendre un nombre positif *quelconque* X_0 , calculer $\frac{A}{X_0}$.

L'intervalle dont les bornes sont X_0 et $\frac{A}{X_0}$ constitue un encadrement de $\sqrt{A}$ (le faire montrer en exercice).

Prendre X_1 au centre de cet intervalle :

$$X_1 = \frac{1}{2}\left[X_0 + \frac{A}{X_0}\right] \quad ;$$

calculer $\frac{A}{X_1}$.

Le nouvel intervalle dont les bornes sont X_1 et $\frac{A}{X_1}$ est aussi un encadrement de $\sqrt{A}$.

On pourra montrer aussi que ce deuxième intervalle est inclus dans le précédent.

Avec 720 pour A et 27 pour X_0 (valeurs utilisées par Héron), on obtient:

n	X_n	$\frac{A}{X_n}$	$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left[X_n + \frac{A}{X_n}\right]$
0	$X_0 = 27$	$\frac{A}{X_0} = 26{,}666\ 666$	$X_1 = 26{,}833\ 333$
1	$X_1 = 26{,}833\ 333$	$\frac{A}{X_1} = 26{,}832\ 298$	$X_2 = 26{,}832\ 815$
2	$X_2 = 26{,}832\ 815$	$\frac{A}{X_2} = 26{,}832\ 816$	$X_3 = 26{,}832\ 815$
3	$X_3 = X_2$		

- On pourra comparer - au point de vue vitesse - cette méthode à la méthode précédente. Il pourra être intéressant d'organiser une course entre deux groupes: l'un travaillant avec une méthode, l'autre avec une autre ... (on permutera les méthodes, pour une seconde manche).

- Toujours au point de vue organisation des calculs, les élèves observeront vite qu'un "bon" choix de X_0 fait gagner du temps, d'où l'intérêt d'un petit calcul mental préalable.

- Si la machine utilisée possède une mémoire, on essaiera d'utiliser celle-ci pour ne pas frapper à nouveau, en cours de calcul, un des nombres que l'on vient d'obtenir; sinon, on perd du temps et on risque de faire une faute de frappe.
  C'est un bon exercice que de déterminer - en fonction du type de la machine avec mémoire utilisée - la suite des touches à frapper pour effectuer, sans réintroduire un nombre déjà calculé, une boucle du calcul.
  De façon plus précise, avec quelles touches traduire le programme suivant ? (En désignant par a le nombre figurant à l'affichage)

  (1) mettre X_0 en a

  (2) calculer $\frac{A}{a}$ et le noter

  (3) calculer $\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$ et le noter

  (4) revenir en (2) (puisqu'il y a à l'affichage la valeur X_1)

- Après avoir tâtonné, les élèves sentent vite la nécessité d'organiser méthodiquement un travail répétitif.

- Ils sentent de même combien il serait agréable d'avoir une machine qui ferait seule ce travail et qui imprimerait les résultats.
  Pour leur donner satisfaction, envisager l'achat d'une calculatrice programmable avec imprimante ... et de la brochure APM correspondante, *si elle existe*. (Sinon, demander à votre IREM de vous prêter du matériel).

c) *Sur le même thème : Itérations - Algorithmes*

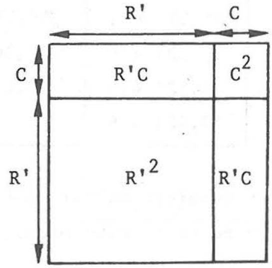
Quelle méthode universelle, aisée à mettre en œuvre , peut-on proposer dès la Seconde à nos élèves pour extraire n'importe quelle racine carrée ?
En voici une qui a le mérite de préparer la voie à - en Seconde - ou d'utiliser - en Première - la notion d'application linéaire tangente.

Si je cherche $R = \sqrt{A}$ et que j'en connais une valeur approchée R' , la correction (opposé de l'erreur) est

$$C = R - R'$$

d'où $\quad A = R^2 = (R' + C)^2 = R'^2 + 2\,R'\,C + C^2$

On constate expérimentalement (est-ce hérétique ? !) ou visuellement (schéma ci-contre) que, si C est faible par rapport à R', on a l'égalité approchée:



$$A \simeq R'^2 + 2\,R'\,C$$

et donc $\quad C \simeq \dfrac{A - R'^2}{2\,R'}$

Ayant ainsi une valeur approchée de la correction, on obtient une meilleure valeur approchée de $R = \sqrt{A}$.

- Cette méthode peut, bien sûr, être utilisée sans machine, et, même ainsi, elle est plus rapide que beaucoup d'autres, surtout si l'on dispose déjà au départ d'une assez bonne valeur approchée.
- A la machine, il suffit d'exécuter l'algorithme suivant (le fait que la machine ne fournisse que des valeurs approchées n'est pas gênant; même une erreur accidentelle ne tire pas à conséquence: la correction de l'itération suivante rétablit les choses ...) jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte.

<u>Algorithme</u> :

(1) Afficher la meilleure approximation connue R' de $\sqrt{A}$

(2) Calculer R'^2

(3) Calculer $A - R'^2 = D$

(4) Calculer $(D : R') : 2 = C$

(5) Remplacer R' par R' + C ; si précision insuffisante, aller à (2)

(6) Sinon écrire R' . FIN

<u>Exemple</u> : Calcul de $\sqrt{307}$ à 10^{-6} près .

On remarquera que l'on est assez vite bloqué par des questions de capacité, au moins à l'affichage, la correction ne modifiant plus, à partir d'un certain moment, le nombre affiché.

R'	R'^2	$A - R'^2 = D$	C
17	289	18	0,529 411 7
17,529 411	307,280 25	− 0,280 25	− 0,007 993 7
17,521 418	307,000 08	− 0,000 08	− 0,000 002 2
17,521 416	307,000 01	− 0,000 01	− 0,000 000 2
17,521 416			

La dernière valeur de C obtenue permet de retenir 17,521 415 8 .
On ne peut faire mieux, de cette manière, sur cette machine.

d) *Encore une autre méthode :*

Si P est une valeur approchée de $\sqrt{A}$, disons que :

$$A = P^2 + Q$$

Comme nous l'avons vu dans b) , $\frac{1}{2}\left(P + \frac{A}{P}\right)$ est proche de $\sqrt{A}$; puisque $\frac{A}{P} = P + \frac{Q}{P}$, $\sqrt{A}$ est proche de $P + \frac{Q}{2P}$.

D'où une méthode de calcul très rapide :

P approche $\sqrt{A}$
Calculer $Q = A - P^2$
$P + \frac{Q}{2P}$ approche mieux $\sqrt{A}$.

Exemple :

15 approche $\sqrt{200}$

$Q = -25$

$\frac{Q}{2P} = -\frac{25}{30} = -0{,}83$

14,17 approche mieux $\sqrt{200}$

IV - ARITHMETIQUE EXPÉRIMENTALE

a) $a = bq + r \qquad 0 \leqslant r < b$ *connais pas !*

En règle quasi-générale, la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ n'est pas "connue" des matériels de calcul existants.
En demandant un résultat entier (affiché ou imprimé) pour la division de 47 par 3, on obtiendra 16, arrondi de 15,666..., et "ce" 16 multiplié par 3 donnera quand même 47 .

Pour obtenir q, il faudra

- soit passer par la partie entière de $\frac{a}{b}$

- soit comparer les multiples successifs de b à a .

Dans les deux cas, on calcule ensuite $r = a - bq$.

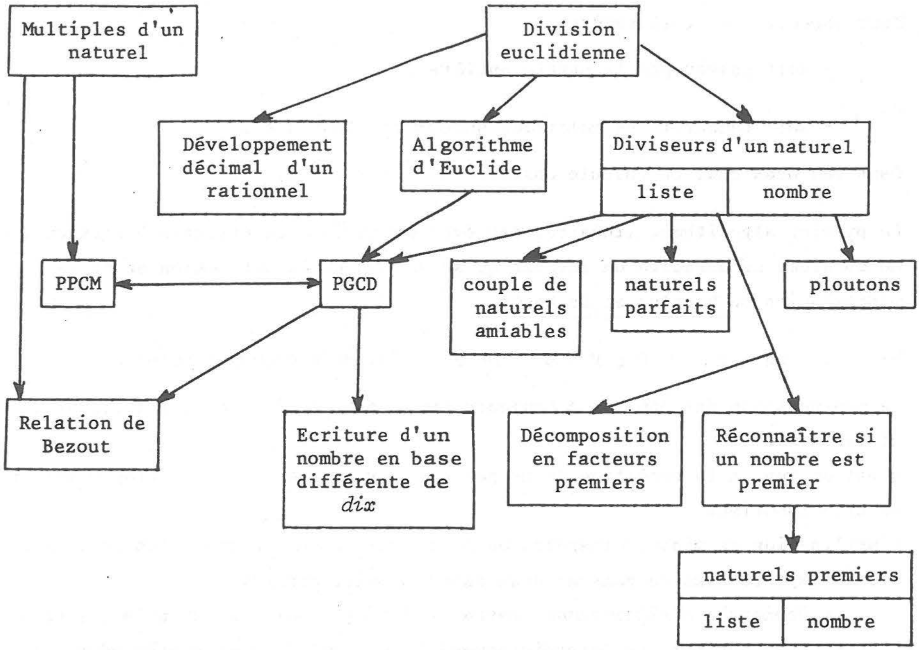
Le premier algorithme, linéaire, est évidemment le plus efficace à l'exécution. Le deuxième ne présente un intérêt qu'au niveau de la définition et de la manipulation de boucles et de tests.

b) $a = bq + r \quad 0 \leqslant r < b$ *on connaît, mais pourquoi faire ?*

La manipulation des nombres a toujours eu un côté magique chez les élèves... et les adultes.
C'est un jeu, à la condition de ne pas sombrer dans des calculs trop nombreux et trop laborieux.
L'utilisation de mini-ordinateurs ou de calculatrices (surtout les programmables) comporte dans ce domaine deux aspects intéressants:

- *Recherche d'algorithmes:* cette recherche, leur mise au point, l'écriture schématisée (organigrammes) permettent de bien appréhender, et souvent par des méthodes différentes, les problèmes posés. La comparaison des performances au niveau de l'exécution est une motivation supplémentaire pour les élèves. D'autre part, la modification, parfois minime, d'un algorithme, peut déboucher sur la résolution d'un autre problème.
- *Conjecture et Recherche:* la possibilité d'itérations qu'offre le matériel programmable permet de se dégager des calculs répétitifs, fastidieux et démobilisants, pour se consacrer aux résultats et aux réflexions pouvant en découler.

c) L'arithmétique est un véritable gisement pour de telles recherches. Nous ne développerons pas ici les programmes correspondants que le professeur de mathématiques pourra retrouver lui-même.
Nous donnons simplement quelques thèmes organisés selon un progression qui semble avoir fait ses preuves et nous ajoutons quelques remarques sur chacun d'entre eux.



d) *Quelques remarques :*

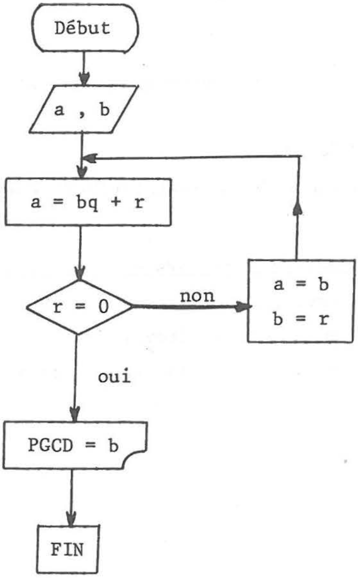
. a et b étant deux naturels, après avoir fait la division euclidienne (a = bq + r) , on peut itérer :

- le remplacement de a par 10r et on obtient le développement décimal de a/b .
- le remplacement de a par b et b par r (c'est l'algorithme d'Euclide) et on obtient le PGCD de a et b.
- le remplacement de b par b+1 et on recherche les diviseurs de a.

Voici un exemple de manipulation de l'organigramme relatif à l'algorithme d'Euclide :

De petites (?) modifications de l'organigramme I ci-après débouchent sur d'autres problèmes (II, III) :

I

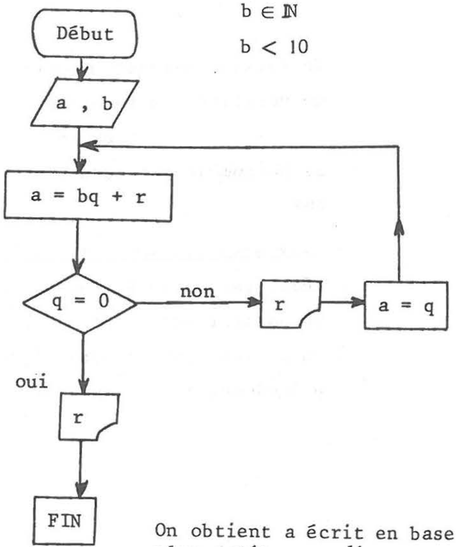


II

$a \in \mathbb{N}$

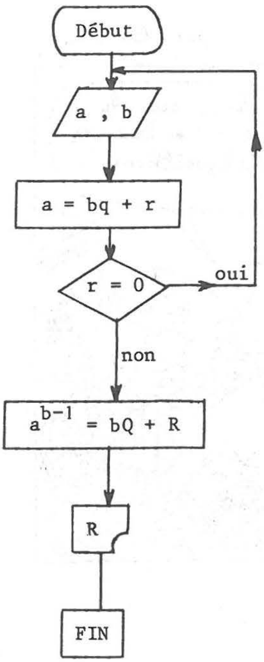
$b \in \mathbb{N}$

$b < 10$



On obtient a écrit en base b plus petite que *dix*

III



b premier

$a^{b-1} \equiv 1 \qquad (b)$

Fermat avait prévu que $R = 1$

- En faisant balayer $\mathbb{N}^2$ par le couple (u, v) on verra qu'il en existe un vérifiant la relation de Bezout :

$$au - bv = PGCD\,(a, b)$$

Le phénomène est assez surprenant lorsque a et b sont premiers entre eux.

- Deux naturels sont *amiables* si la somme des diviseurs de l'un, sauf lui-même, est égale à l'autre et inversement, par exemple 220 et 284.
Un naturel est *parfait* s'il est auto-amiable, par exemple 28.
Un *plouton* est un naturel qui a plus de diviseurs que tous ceux qui le précèdent, par exemple 12.

Mat & Matic par GILL

(V) - UNE APPLICATION CURIEUSE

Soit un naturel a, $\overline{u_1 u_2 \ldots\ldots u_n}$ son écriture en base *dix*.

Désignons par f l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}_* \longrightarrow \mathbb{N} \\ a \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} \end{array} \right.$$

On notera f^p l'application $f \circ f \circ \ldots\ldots \circ f$ avec p composants égaux à f .

Exemple

1) $1975 \mapsto 156 \mapsto 62 \mapsto 40 \mapsto 16 \mapsto 37 \mapsto 58 \mapsto 89 \mapsto 145 \mapsto 42 \mapsto 20 \mapsto 4$

On constate que $f^{12}(1975) = f^4(1975)$

Notons A l'ensemble $\{16 ; 37 ; 58 ; 89 ; 145 ; 42 ; 20 ; 4\}$ que nous appellerons "puits de diamètre 8" pour rappeler qu'il contient huit éléments.

Pour tout naturel p supérieur ou égal à 4 :

$$f^p(1975) = f^{p+8}(1975) \qquad \text{et} \qquad f^p(1975) \in A$$

2) $1976 \mapsto 167 \mapsto 86 \mapsto 100 \mapsto 1$

Pour tout naturel p supérieur ou égal à 4 :

$$f^p(1976) = 1$$

On obtient cette fois un "puits de diamètre 1" .

3) $14\ 390 \mapsto 107 \mapsto 50 \mapsto 25 \mapsto 29 \mapsto 85 \mapsto 89 \mapsto 145 \mapsto 42 \mapsto 20 \mapsto 4$

$16 \mapsto 37 \mapsto 58 \mapsto$

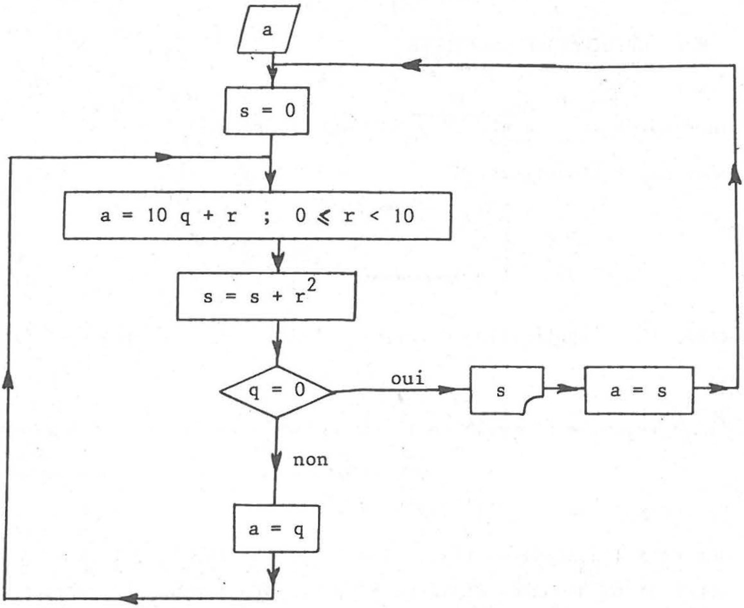
Pour tout naturel p supérieur ou égal à 6 :

$$f^p(14\ 390) = f^{p+8}(14\ 390) \qquad \text{et} \qquad f^p(14\ 390) \in A$$

On retrouve le puits de diamètre huit du premier exemple.

Programmation

L'organigramme suivant permet le calcul de la somme des carrés des chiffres d'un naturel a. Une fois cette somme calculée, on remplace a par f(a) et on recommence.



Remarque : La machine est condamnée aux travaux forcés à perpétuité ...
Il convient d'observer les résultats obtenus et d'arrêter le déroulement du programme lorsqu'on observe un "puits".

Résultats : On constate que, quel que soit le naturel a, on tombe dans l'un des deux puits ci-dessus :

P 1

Quel que soit le naturel a, il existe un naturel p tel que $f^p(a) = 4$ ou $f^p(a) = 1$

Démonstration:
Montrons d'abord qu'un nombre fini d'essais permet de démontrer P1 .
Cherchons pour cela à quelle condition f(a) est inférieur à a .

Soit a un naturel de n chiffres:

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n \qquad \text{et} \qquad a = \overline{u_1 u_2 \ldots\ldots u_{n-1} u_n} \quad (\text{base } \mathit{dix})$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^{\,2} \leqslant n \times 9^2$$

Pour que f(a) soit inférieur à a , *il suffit que* $n \times 9^2 < 10^{n-1}$, soit:

$$\log n + 2 \log 9 < n - 1$$

$$1 + 2 \log 9 < n - \log n$$

Or $\qquad 1 + 2 \log 9 \simeq 2{,}908\ 485\ 0$

donc $\qquad 2{,}91 < n - \log n \implies f(a) < a$

Pour résoudre l'inéquation ci-dessus, on peut utiliser une méthode graphique, en étudiant la fonction g :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto n - \log n \end{array} \right.$$

$$g'(n) = 1 - \frac{1}{n \operatorname{Log} 10} \quad \text{donc} \quad g'(n) > 0 \iff n > \frac{1}{\operatorname{Log} 10}$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{Log} 10} \simeq 0{,}43 \right)$$

n	0		$\frac{1}{\operatorname{Log} 10}$	1	2	3	4	5	6	7	8	+∞
g'(n)	‖	-	0				+					
g(n)	‖ +∞	↘	0,796...	↗ 1	↗ 1,70	↗ 2,52	↗ 3,40	↗ 4,30	↗ 5,22	↗ 6,85	↗ 7,09	↗ +∞

Cette étude montre que

$$n \geqslant 4 \implies 3 < n - \log n$$

donc

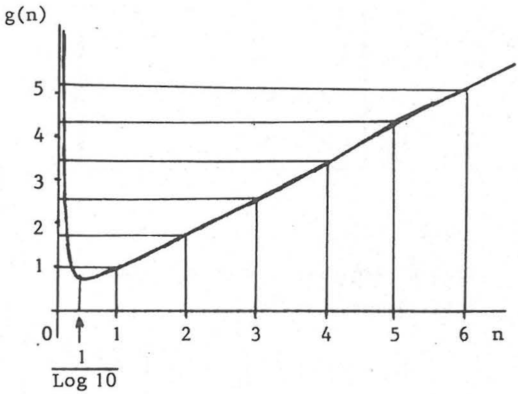
$$n \geqslant 4 \implies f(a) < a$$

Pour un naturel ayant *au moins* quatre chiffres, f(a) est inférieur à a .

Il suffit donc de vérifier P1 pour les naturels ayant au plus trois chiffres; pour ces naturels :

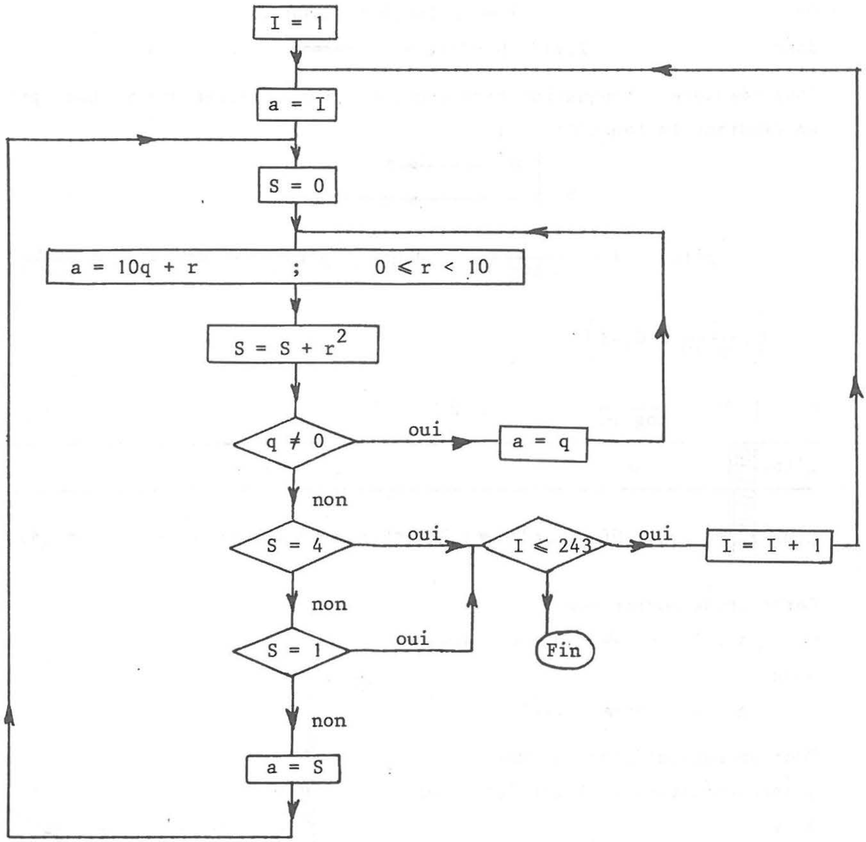
$$\sum_{i=1}^{3} u_i^{\,2} \leqslant 3 \times 9^2$$

soit $$\sum_{i=1}^{3} u_i^{\,2} \leqslant 243$$



Cette vérification a été faite au moyen du programme dont l'organigramme figure ci-après.

Le fait que la machine lise l'instruction "fin" prouve que la proposition P1 est vraie pour tout naturel au plus égal à 243, donc qu'elle est vraie pour tout naturel n.



Généralisation :

Plus généralement, a étant le naturel écrit $\overline{u_1 u_2 \ldots u_n}$ en base *dix*, considérons l'application:

$$f_k \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}_* \longrightarrow \mathbb{N} \\ a \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,k} \end{array} \right.$$

L'étude précédente n'est autre que l'étude du cas $k = 2$.

En remplaçant dans le premier organigramme r^2 par r^k , on peut constater expérimentalement l'existence d'un nombre fini de puits.

La démonstration demeure valable, à condition de remplacer 9^2 par 9^k ; on obtient ainsi :

$$1 + k \log 9 < n - \log n \qquad \text{entraîne} \qquad f(a) < a$$

k	$1+k\log 9$	$1+k\log 9 < n-\log n$ est vérifié si:	Il faut donc tester les naturels ayant au plus	Plafond théorique	Plafond pratique
1	1,95	$n \geqslant 3$	2 chiffres	2×9 = 18	18
2	2,90	$n \geqslant 4$	3 chiffres	3×9^2 = 243	239
3	3,85	$n \geqslant 5$	4 chiffres	4×9^3 = 2 916	2 899
4	4,81	$n \geqslant 6$	5 chiffres	5×9^4 = 32 805	29 999
5	5,77	$n \geqslant 7$	6 chiffres	6×9^5 = 354 294	349 999

Le nombre d'essais croît donc rapidement lorsque k augmente et le temps nécessaire à ces essais devient très grand.

Il y a donc intérêt à chercher à réduire le nombre d'essais.

Prenons l'exemple $k = 4$.

La vérification pour 32 805 est inutile car

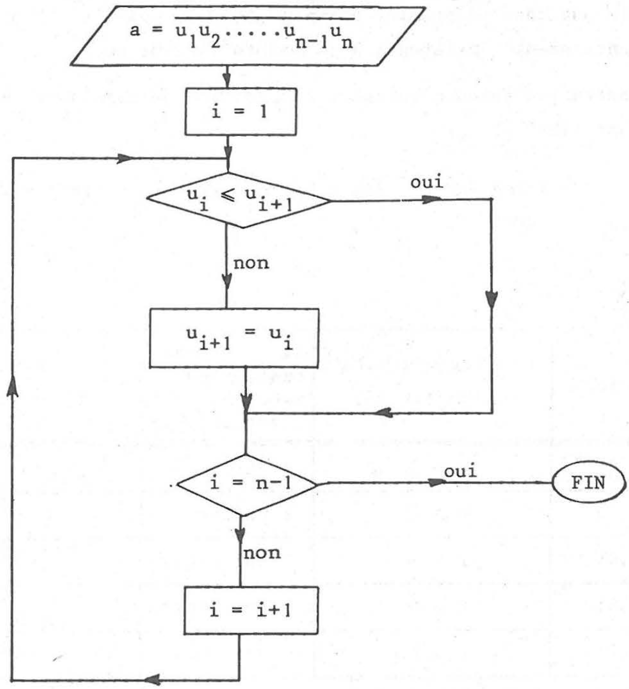
$$f_4\ (32\ 805) = f_4\ (2\ 358) \quad .$$

Il suffit pratiquement de faire les essais jusqu'à 29 999 , ce qui abaisse le plafond théorique, et de tester les seuls nombres $\overline{u_1 u_2 \ldots u_n}$ vérifiant :

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n$$

ce qui en fait remplace les arrangements avec répétitions par des combinaisons avec répétitions.

L'organigramme ci-après indique quel est le naturel a' qu'il faut tester lorsqu'on est arrivé au naturel a .



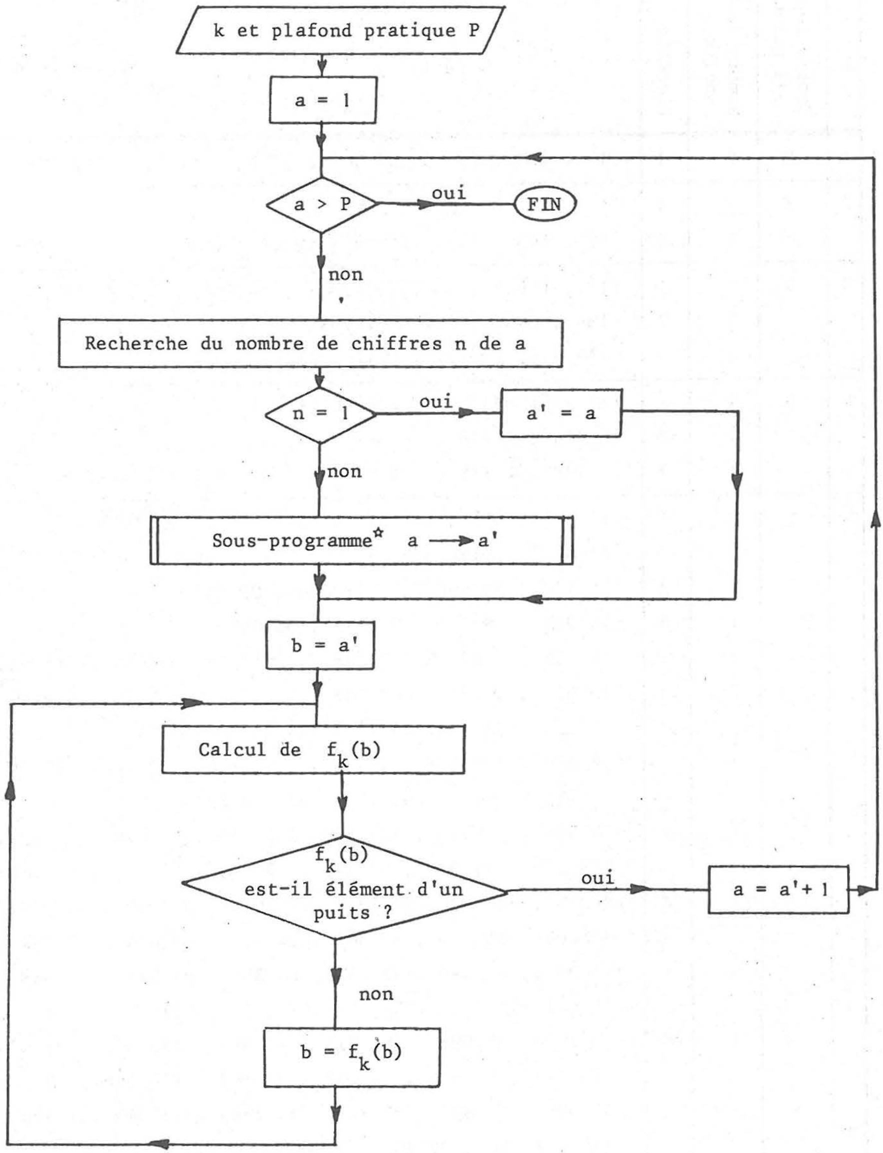
sous-programme

Exemple: Lorsque les vérifications ont été faites jusqu'à 7 999, on a

$$a = 8\,000 \longrightarrow 8\,800 \longrightarrow 8\,880 \longrightarrow 8\,888 = a'$$

Entre 8 000 et 8 888 , on ne calculera donc que $f_k(8\,888)$, ce qui diminue notablement le temps nécessaire aux vérifications.

L'organigramme ci-dessous permet de procéder à tous les essais, lorsque les puits ont été déterminés expérimentalement.



☆ Voir page précédente

Résultats : Voici quelques résultats obtenus en collaboration avec A. ROZE, et R. BERARD, de l'IREM de LYON.

k	Nombre total de puits	Nombre de puits	Diamètre	Puits
1	9	9	1	{1} , {2} , {3} , {4} , {5} , {6} , {7} , {8} , {9}
2	2	1	1	{1}
		1	8	{89 , 145 , 42 , 20 , 4 , 16 , 37 , 58}
3	9	5	1	{1} , {153} , {370} , {371} , {407}
		2	2	{136 , 244} , {919 , 1 459}
		2	3	{133 , 55 , 250} , {217 , 352 , 160}
4	6	4	1	{1} , {1 634} , {8 208} , {9 474}
		1	2	{6 514 , 2 178}
		1	7	{1 138 , 4 179 , 9 219 , 13 139 , 6 725 , 4 338 , 4 514}
5	16	7	1	{1} , {4 150} , {4 151} , {54 748} , {92 727} , {93 084} , {194 979}
		2	2	{76 438 , 58 618} , {157 596 , 89 883}
		1	4	{10 933 , 59 536 , 73 318 , 50 062}
		1	6	{44 155 , 8 299 , 150 898 , 127 711 , 33 649 , 68 335}
		2	10	{83 633 , 41 273 , 18 107 , 49 577 , 96 812 , 99 626 , 133 682 , 41 063 , 9 044 , 61 097} {92 873 , 108 899 , 183 635 , 44 156 , 12 950 , 62 207 , 24 647 , 26 663 , 23 603 , 8 294}
		1	12	{24 584 , 37 973 , 93 149 , 119 366 , 74 846 , 59 399 , 180 515 , 39 020 , 59 324 , 63 473 , 26 093 , 67 100}
		1	22	{9 045 , 63 198 , 99 837 , 167 916 , 91 410 , 60 075 , 27 708 , 66 414 , 17 601 , 24 585 , 40 074 , 18 855 , 71 787 , 83 190 , 92 061 , 66 858 , 84 213 , 34 068 , 41 811 , 33 795 , 79 467 , 101 463}
		1	28	{70 225 , 19 996 , 184 924 , 93 898 , 183 877 , 99 394 , 178 414 , 51 625 , 14 059 , 63 199 , 126 118 , 40 579 , 80 005 , 35 893 , 95 428 , 95 998 , 213 040 , 1 300 , 244 , 2 080 , 32 800 , 33 043 , 1 753 , 20 176 , 24 616 , 16 609 , 74 602 , 25 639}

VI - FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Toutes les calculatrices de poche dites "scientifiques" actuellement disponibles sur le marché comportent les touches fonctionnelles sin , cos , tan , et celles des fonctions inverses. Mais leur coût relativement élevé rend pour l'instant utopique leur utilisation systématique dans les classes.

Or il est possible avec un matériel très bon marché de construire ces fonctions en privilégiant certains *algorithmes* de calcul fondamentaux. La recherche, puis la justification de ces algorithmes s'intègre parfaitement au cours de mathématiques; et leur exploitation dès la fin de la troisième est une motivation puissante au calcul trigonométrique, tout en donnant aux élèves un premier aperçu concret de notions d'analyse.

Mais quel algorithme ? Les développements en série sont à éliminer, tant à cause de leur faible rapidité de convergence qu'à cause de l'impossibilité de les justifier à un niveau trop élémentaire: l'algorithme intéressant est celui que l'on construit avec les élèves !

Imaginons un élève, par exemple de Seconde, muni d'une calculatrice de poche comportant simplement les touches: + , - , × , ÷ , $\sqrt{\ }$ (la présence d'une mémoire, avec les touches *stockage* et *rappel*, n'est pas indispensable, mais évitera de noter les résultats intermédiaires); et de précision p (résultats à 10^{-p} près, p valant selon les machines 6 , 8 ou 10).

a) *Le cercle trigonométrique* $x^2 + y^2 = 1$

Dès la fin de la troisième, l'élève connaît les définitions des lignes trigonométriques ainsi que quelques relations métriques dans le triangle rectangle. (Nota: angles et arcs sont exprimés en radians).

1er problème : *Trouver l'arc connaissant une ligne trigonométrique*

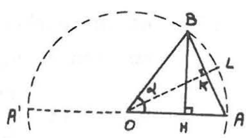
- Recherche de Arc sin x

On donne BH = x = sin α

Pour calculer α , on imagine de partager l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en deux, puis en deux, ...etc...

On a, d'une façon évidente :

corde AB < 2 corde BL < ... < ... < $\overset{\frown}{AB}$



$BH = \sin \alpha = s_0$ $\qquad$ $BK = \sin \frac{\alpha}{2} = s_1$

$OH = \cos \alpha = c_0$ $\qquad$ $OK = \cos \frac{\alpha}{2} = c_1$

Pour un angle très petit, corde et arc correspondants sont pratiquement isométriques.

D'autre part, les deux relations suivantes sont faciles à démontrer :

$s_0 = 2\ s_1\ c_1$ La première traduit de deux façons l'aire OAB,

$c_0 = 2\ c_1^2 - 1$ l'autre la relation: $A'B^2 = A'H.A'A$

(On "reconnaît" les formules de duplication $\sin 2\theta = 2 \sin \theta . \cos \theta$

et $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$!)

D'où l'on tire: $2\ s_1 = s_0 / c_1$

$$c_1 = \sqrt{(1 + c_0) / 2}$$

Plus généralement, on aurait, pour un indice i quelconque:

$$s_i^2 + c_i^2 = 1$$

$$c_{i+1} = \sqrt{(1 + c_i) / 2}$$

$$2\ s_{i+1} = s_i / c_{i+1}$$

Enfin $\qquad c_0 < c_1 < \dots < c_i < c_{i+1} < \dots < 1$

et $\qquad s_0 < 2\ s_1 \ , \quad \dots . \quad , \quad s_i < 2\ s_{i+1} \ , \quad \dots$

D'où la méthode :

1) $\boxed{s_0 = x \quad \text{donné}}$

2) on calcule $c_0 = \sqrt{1 - s_0^2}$

3) puis $c_1 = \sqrt{(1 + c_0) / 2}$

4) puis $2\ s_1 = s_0 / c_1$

5) et on réitère en prenant $2\ s_1$ au lieu de s_0 , ...etc

... et $\boxed{s_n \longrightarrow \text{Arc sin } x}$

Traduction:

Algorithme A 1
Entrer s et c
c ⟵ $\sqrt{(1+c)/2}$
s ⟵ s/c
Si c < 1
Sinon, écrire s

Quelques remarques:

- c tend vers 1.

  Le test d'arrêt $c = 1$ dépend de la précision de la calculatrice. On constate expérimentalement que pour obtenir 10 chiffres significatifs pour Arc sin x, il faut 16 itérations. Mais 5 itérations donnent déjà $1 - c < 10^{-4}$ et Arc sin x avec 3 chiffres significatifs.
- Il est essentiel de faire tester le programme pour quelques valeurs simples de x : $1/2$; 1 ; ...
- Ne pas oublier que Arc sin x est donné en radians. Pour avoir α en degrés (décimaux), la valeur finale de s doit être multipliée par $180/\pi$!

- <u>Calcul de l'aire du secteur angulaire</u>

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent:

$BH = x = \sin\alpha$ aire OAB < 2 aire OBL < ... < aire secteur AOB

Or aire $OAB = \frac{1}{2}\,BH.OA = \frac{x}{2}$ d'où aire secteur $AOB = \frac{1}{2}\,\text{Arc sin}\,x$

Le même algorithme fournira donc, avec les mêmes entrées, le double de l'aire du secteur angulaire !

- Il est aisé d'établir :

* si $\cos\alpha = x$ alors $\sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}$

* si $\operatorname{tg}\alpha = x$ alors
$$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}\right.$$

* si $\operatorname{cotg}\alpha = x$ alors
$$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}\right.$$

L'algorithme A1 permet donc tout aussi bien d'obtenir Arc cos x, Arc tg x, Arc cotg x, en modifiant les entrées s et c en conséquence !

En résumé

Algorithme A1

Entrer s et c

$c \longleftarrow \sqrt{(1+c)/2}$

$s \longleftarrow s/c$

Si $c < 1$

Sinon, écrire s

Entrées: dans s	Entrées: dans c	Sortie (dans s)	validité
x	$\sqrt{1-x^2}$	Arc sin x = 2 aire du secteur	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\sqrt{1-x^2}$	x	Arc cos x	
$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	Arc tg x	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	Arc cotg x	

2ème problème : *Recherche des lignes trigonométriques*

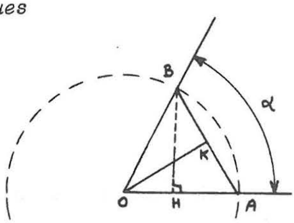
• Calcul de $\sin \alpha$

On donne α (en radians) $= \overset{\frown}{AB}$

On cherche $BH = \sin \alpha = s_0$

On peut reprendre l'idée de l'algorithme A1 en l'inversant (duplication des arcs) :

Pour n assez grand : $\alpha / 2^n$ est suffisamment petit pour que corde et arc soient pratiquement isométriques !



$BH = s_0$

$BK = s_1$

Or nous avons vu que, pour tout i : $s_i = 2\, s_{i+1} \cdot c_{i+1}$

c'est-à-dire $s_i = 2\, s_{i+1} \cdot \sqrt{1 - s_{i+1}^2}$

d'où la méthode, résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme A2

Entrer α et n

$s \longleftarrow \alpha / 2^n$

$s \longleftarrow 2s \cdot \sqrt{1 - s^2}$

$n \longleftarrow n - 1$

Si $n > 0$ (retour à la ligne précédente)

Sinon, écrire s

L'approximation est d'autant meilleure que n est plus grand.

On peut constater qu'en prenant $n = 5$, on obtient $\sin \alpha$ avec 4 chiffres significatifs.

Mais il faut 13 itérations pour obtenir 10 chiffres significatifs sur une calculatrice de précision 10.

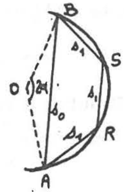
- On peut améliorer l'algorithme A2 en utilisant le théorème suivant :

Si $AR = RS = SB = s_1$

et si $AB = s_0 = 2 \sin \alpha$

on a la relation:

$$s_0 = s_1 (3 - s_1^2)$$



D'où l'algorithme :

Algorithme A3

Entrer α et n

$s \longleftarrow 2\alpha / 3^n$

$s \longleftarrow s \cdot (3 - s^2)$

$n \longleftarrow n - 1$

Si $n > 0$

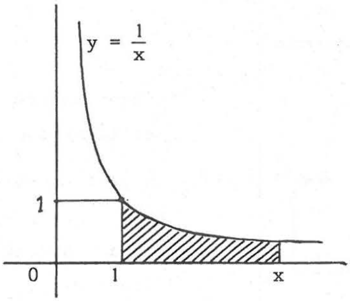
Sinon, écrire (au choix):
- $s/2$ (= $\sin \alpha$)
- $\sqrt{4 - s^2}/2$ (= $\cos \alpha$)
- $s / \sqrt{4 - s^2}$ (= $\mathrm{tg}\, \alpha$)
- $\sqrt{4 - s^2}/s$ (= $\mathrm{cotg}\, \alpha$)

On constate expérimentalement qu'il suffit de prendre $n = 9$ pour avoir 10 chiffres significatifs (soit 4 itérations de moins qu'avec l'algorithme A2 !)

On notera l'intérêt pédagogique de présenter plusieurs algorithmes traitant du même problème: Quel est le plus rapide ? Pourquoi ? Peut-on faire mieux ? ......

b) *Pour aller plus loin: après le cercle, l'hyperbole !*

$xy = 1$



$$\ell n(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\exp(x) = e^x = \ell n^{-1}(x)$$
$$= \mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x$$

<u>1er Problème</u> : *Trouver l'argument*

a) Recherche de θ connaissant $\mathrm{Sh}\ \theta = x$

On procède d'une façon tout à fait analogue à ce qui a été fait pour le cercle (l'interprétation géométrique est cependant moins évidente).

* Si $s = \mathrm{Sh}\ \theta$ alors $c = \mathrm{Ch}\ \theta = \sqrt{1 + s^2}$
* D'autre part les formules de duplication sont les mêmes qu'avec les fonctions circulaires:

$$\mathrm{Sh}\ 2\theta = 2\ \mathrm{Sh}\ \theta \ .\ \mathrm{Ch}\ \theta$$

$$\mathrm{Ch}\ 2\theta = 2\ \mathrm{Ch}^2\theta - 1$$

* On obtient donc un algortihme A4 (voir plus loin) tout à fait semblable à A1, hormis le fait que $c = \mathrm{Ch}\ \theta$ tend vers 1 par valeurs supérieures lorsque θ tend vers 0 .

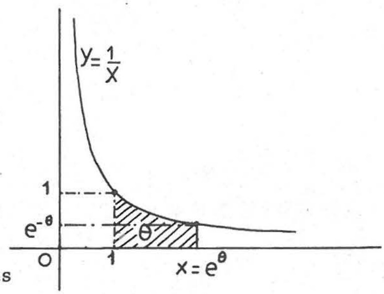
b) Compte tenu des définitions des fonctions hyperboliques:

$$\text{Si} \quad \mathrm{Ch}\ \theta = x \quad \text{alors} \quad \mathrm{Sh}\ \theta = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Si} \quad \text{th } \theta = x \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \text{Sh } \theta = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{Ch } \theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{cases}$$

$$\text{Si} \quad \text{coth } \theta = x \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \text{Sh } \theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{Ch } \theta = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{cases}$$

Il suffira de modifier en conséquence les entrées s et c de A4 pour obtenir Arg Ch x , Arg th x , Arg coth x .



c) Enfin :

Si nous posons $\theta = \ell n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x}$

alors $x = e^{\theta}$

$\dfrac{1}{x} = e^{-\theta}$

L'aire du trapèze limité par les droites $x = 1$ et $x = e^{\theta}$ est une approximation (par excès) de θ d'autant meilleure que $|1 - x|$ est petit.

$$\text{Or} \qquad \text{aire du trapèze} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{2} \times (x - 1)$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \text{Sh } \theta$$

Donc l'algorithme A4 permet aussi de calculer $\ell n(x)$, avec comme valeurs initiales

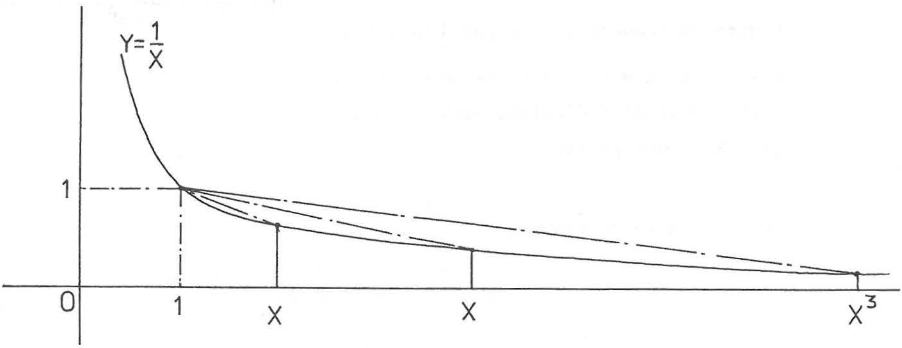
$$s = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad \text{d'où} \qquad c = \text{Ch } \theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

d) Résumé

Algorithme A4
Entrer s et c
$c \longleftarrow \sqrt{(1+c)/2}$
$s \longleftarrow s/c$
Si $c > 1$
Sinon écrire s

entrées		sortie	validité
dans s	dans c	(dans s)	
x	$\sqrt{1+x^2}$	Arg Sh x	$-\infty < x < +\infty$
$\sqrt{x^2-1}$	x	Arg Ch x	$x \geqslant 1$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arg th x	$-1 < x < +1$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	Arg coth x	$-1 < x < +1$
$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$\ell n\,(x)$	$x > 0$

2ème **Problème** : *Calcul des fonctions hyperboliques*



Soit :

s_0 l'aire du trapèze de bases 1 et x : $\theta = \ell n(x)$ donc $s_0 = \text{Sh}\ \theta$

s_1 l'aire du trapèze de bases 1 et x^2 : $2\theta = \ell n(x^2)$ donc $s_1 = \text{Sh}\ 2\theta$

s_1' l'aire du trapèze de bases 1 et x^3 : $3\theta = \ell n(x^3)$ donc $s_1' = \text{Sh}\ 3\theta$

On a, par un calcul évident (ou en utilisant les formules d'addition) les deux relations :

$$s_1 = 2\, s_0 \sqrt{1 + s_0^2}$$

$$s_1' = s_0\, (3 + 4\, s_0^2)$$

l'une ou l'autre conduisent à des algorithmes A5 et A6 très semblables à A2 et A3, avec des degrés de précision identiques à ce qui a été dit pour A2 et A3 .

Remarquons pour finir que

$$\exp(\theta) = e^{\theta} = \mathrm{Sh}\,\theta + \mathrm{Ch}\,\theta = \mathrm{Sh}\,\theta + \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2\,\theta}$$

Les deux algorithmes A5 et A6 fourniront aussi exp (θ) :

Algorithme A5

Entrer θ et n

$s \longleftarrow \theta / 2^n$

$s \longleftarrow 2s \sqrt{1 + s^2}$

$n \longleftarrow n - 1$

Si $n > 0$

Sinon, écrire

Algorithme A6

Entrer θ et n

$s \longleftarrow \theta / 3^n$

$s \longleftarrow s\,(3 + 4s^2)$

$n \longleftarrow n - 1$

Si $n > 0$

Sinon, écrire

s (= Sh θ)

$\sqrt{1 + s^2}$ (= Ch θ)

$\dfrac{s}{\sqrt{1 + s^2}}$ (= th θ)

$\dfrac{\sqrt{1 + s^2}}{s}$ (= coth θ)

$s + \sqrt{1 + s^2}$ (= exp(θ))

c) *Une vieille histoire*

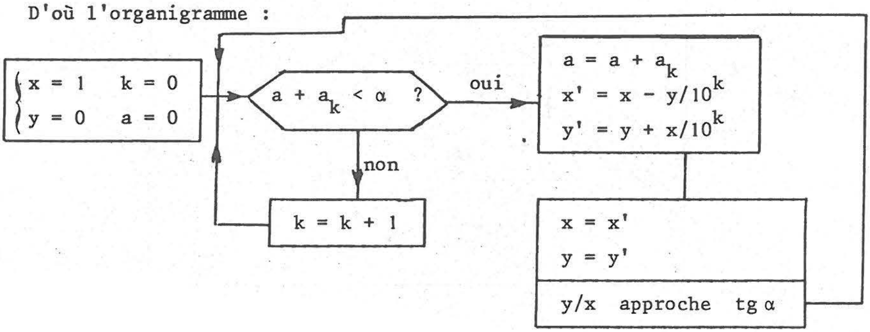
Les exemples précédents sont extraits d'un exposé fait à KARLSRUHE (août 1976) par le professeur ENGEL.

Mais il ne faut pas croire que ce genre d'algorithme a vu le jour avec l'apparition des calculatrices. En fait, ils étaient utilisés par les fabricants de tables numériques dès le XVIIème siècle.

Voici, par exemple, comment Briggs, un élève de Neper, calculait $\operatorname{tg} \alpha$ en fonction de α :

> On connaît: $\quad \text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$
>
> $\text{Arc tg } \frac{1}{10} \simeq 0{,}1 \qquad \text{Arc tg } \frac{1}{100} \simeq 0{,}01$
>
> et $\left(\text{Arc tg } \frac{1}{10^k}\right)$ qui "vaut" $\left(\frac{1}{10^k}\right)$ avec au moins 8 décimales exactes.
>
> Pour calculer $\operatorname{tg}\alpha$, on essaie d'approcher α en additionnant des $\text{Arc tg } 1$ puis des $\text{Arc tg } \frac{1}{10}$ puis des $\text{Arc tg } \frac{1}{100}$ ...
>
> Pour cela on effectue des similitudes successives à partir du point $(1\ ;\ 0)$ sur l'axe des x :
>
> $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/10^k \\ 1/10^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$
>
> L'angle de similitude est $\quad \text{Arc tg } \frac{1}{10^k} = a_k$

D'où l'organigramme :



VII - TIRER PARTI DES ABERRANCES

a) *Club ou pas club ?*

Est-il dangereux (intellectuellement) d'associer nos élèves à nos propres essais et maladresses dans notre apprentissage de l'art d'utiliser un ordinateur ?

Est-il au contraire plus dangereux encore de les laisser dans l'ignorance, le mythe, l'incompréhension d'un événement de civilisation aussi important que celui de l'informatique et de ses applications ?

Depuis octobre 1973, nous avons permis, au lycée J.B. Corot de Savigny-sur-Orge, et au Centre National de Télé-Enseignement de Vanves, à quelques-uns de nos élèves de travailler *avec nous* en prise directe sur l'ordinateur. Nous leur demandons de rédiger, de construire eux-mêmes leurs programmes, *de commander la machine et de ne pas se contenter d'obéir* aux programmes rédigés par d'autres.

Les jeunes veulent savoir ce que l'on peut faire avec un ordinateur, et comment. Nous avons donc rédigé un cours: "Informations sur l'Informatique", avec des exemples traités et des exercices. Les devoirs des élèves du CNTE sont corrigés par nous-mêmes à la console d'ordinateur (c'est long: d'où le nombre limité des inscriptions, tant que ce service de correction ne sera pas officiellement reconnu et pourvu de professeurs). Les lycéens de Savigny font la mise au point eux-mêmes, et nous apportent les listages que nous discutons. Ils poursuivent également des projets personnels *que nous discutons ensemble, élèves et professeurs* - nous efforçant de leur enseigner de notre mieux le scrupule et la persévérance qui sont les garants de l'efficacité et de la réussite.

b) *Où l'ordinateur est le seul à ne pas y retrouver son compte*

Notre cours débute sur la prise de décisions (tri booléen, méthode des parenthésages pour les élèves "avancés") et sur les différentes étapes où interviennent les *prises de responsabilité* (rédaction d'un questionnaire, établissement des règles logiques, soin (clarté) dans la rédaction des programmes), et *nécessité de vérification* (pointages à la saisie des données, jeux d'essai pour l'exécution). Là, les risques ne viennent pas de la machine mais de son emploi:

d'une modélisation inadéquate ou d'une réalisation fautive (les calculs booléens sont faits *exactement)*.

Cependant, dès le deuxième cours nous présentons une application (vécue) à l'organisation d'une coopérative laitière. En 1973, une nouvelle loi sur le prix du lait à la ferme avait désorienté les producteurs. Le salaire mensuel des fermiers n'était plus calculé uniformément (au prix du litre) mais suivant la qualité du lait: son taux par litre en matières sèches utiles (M.S.U.), matières grasses et protéines.

Le bilan financier, calculé par ordinateur, laisse alors apparaître un excédent dû aux arrondis !!

```
EXECUTER A PARTIR DE 1
TOTAL DISPONIBLE:      53 697
NOM: GRAS    G1=    30.2     G2=    32.1      G3=    31.9
P1=    43.1     P2=42.8     P3=    44.1
CATEGORIE=    3     NOMBRE DE LITRES=    2234
NOM:    CALVET   G1=   29,8    G2=   29.9    G3=   30.1
P1=    38.2     P2=     37.1      P3=    39.2
CATEGORIE=    2     NOMBRE DE LITRES=    2502
```

Pour chaque fermier, trois prélèvements permettent de calculer une moyenne:

$$G \leftarrow \frac{G1 + G2 + G3}{3} \qquad\qquad P \leftarrow \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

G + P est le taux moyen en grammes par litre de matière sèche utile. On tient compte aussi de la qualité bactériologique du lait:

3 "excellent", prime 0,012 F par litre ;
2 "moyen" ;
1 "mauvais" , taxe de 0,018 F par litre .

Ainsi, pour le calcul des salaires, la somme totale à partager doit être majorée des taxes, diminuée des primes à verser, et divisée par la masse totale de M.S.U. pour fournir un tarif moyen au gramme de M.S.U. . Puis on distribue à chaque fermier son salaire proportionnellement à ce tarif et aux quantités fournies avec les corrections dues à la qualité.

Nous avons calculé ainsi le prix au litre de lait par fermier - prix qui n'était plus uniforme, mais qui renseigne mieux ces derniers qu'un tarif au gramme de M.S.U.

```
TOTAL DE  MSU:  4.410297E+06
NOMBRE DE LITRES DE LAIT:   60511
TARIF AU GRAMME DE MSU:   0.01206406
NOM:   GRAS   NOMBRE DE LITRES:   2234
PRIX AU LITRE:   0.9195874
SOMME VERSEE EN SALAIRE:   2054.358
```

Vérification (!)

```
SOMME VERSEE TOTALE:   53 628.7
TERMINE EN LIGNE  120
```

Nos élèves des classes de "C" furent bien déçus de constater que l'on ne retrouvait pas exactement le total disponible comme total distribué (mais un peu moins: il y a un reliquat; on aurait pu aussi bien trouver un déficit).

$$53\ 697 - 53\ 628{,}7 = +\ 68{,}3 \quad \text{(en F)}$$

D'autre part, il est évident que les sommes versées doivent être arrondies "au centime". De toute manière, pour la coopérative cela importe peu: il suffit de reporter au mois suivant l'avoir ou le déficit (recalculé après arrondi des salaires).

c) *Où nous faisons sciemment errer l'ordinateur*

C'est alors que, suivant les conseils des numériciens, nous provoquons des expériences de "déraillement" et proposons à nos élèves des exercices pour les mettre en garde contre les effets de troncature ou d'arrondi.

```
X=  9999999                          Y=   9999998
LE QUOTIENT  X/Y  EST :  1.0000003
LA PARTIE ENTIERE DE  X/Y  EST :  1
LA DIFFERENCE ENTRE LES 2 VALEURS CALCULEES EST:  2.384186E-07
X=  99999999                         Y=   99999998
LE QUOTIENT  X/Y  EST :  1
LA PARTIE ENTIERE DE  X/Y  EST :  1
LA DIFFERENCE ENTRE LES 2 VALEURS CALCULEES EST:  0
```

Nous poussons la machine à sa limite de sensibilité.

Après calculs plus précis "à la main" du quotient X/Y pour le premier exemple ci-dessus, 1,000 000 3 est approché par excès et 1,000 000 1 par défaut. Ainsi X/Y a été calculé par l'ordinateur avec une incertitude de 2.10^{-7} .

Nous ébranlons la confiance aveugle des élèves notamment par l'exercice proposé par J. VIGNES (exposé de ALT, aux journées A.P.M. d'Orléans) de comparaison des calculs de (X + Y - X) / Y et (X - X + Y) / Y .

Lorsque la valeur de Y est négligée devant celle de X, le résultat du premier calcul est 0 - sinon (comme en algèbre) on trouve 1. Dans les cas intermédiaires, on trouve des valeurs approchées de manière "plus ou moins fantaisistes".

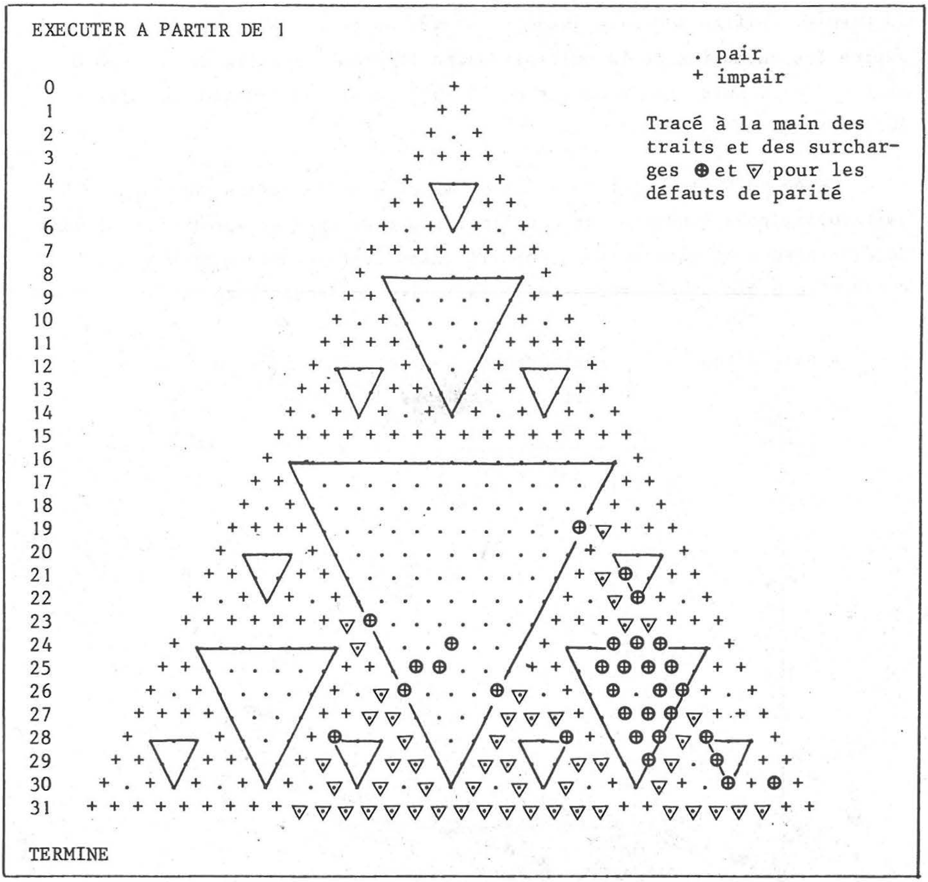
```
1*  EXPRESSIONS DU PREMIER DEGRE
10  AFFICHER[ /, 'FIN DE FICHIER: '] ;LIRE FIND
15  AFFICHER[ /, 'X=   '] ;LIRE X
18  SI  X=FIND ALORS TERMINER
20  AFFICHER[ /, 'Y=   '] ;LIRE Y
25  T ← (X+Y-X)/Y
30  AFFICHER[ / ] T
35  S ← (X-X+Y)/Y
40  AFFICHER [ / ] S
45  ALLER EN 15
```

```
X= 3            X= 10000
Y= 2            Y= 0.00001
1               0.7629395
1               1
X= 10000        X= 100000
Y= 0.001        Y= 0.000001
0.9994508       0
1               1
```

d) *Où nous laissons l'ordinateur filer seul dans l'erreur*

Pour conclure avec certitude, nous observons systématiquement les comportements aberrants afin de conclure exactement *juste avant l'aberrance*.

Voici par exemple la méthode de contrôle du test de parité appliqué au triangle de Pascal (que nous proposons en exercice au 14ème devoir).

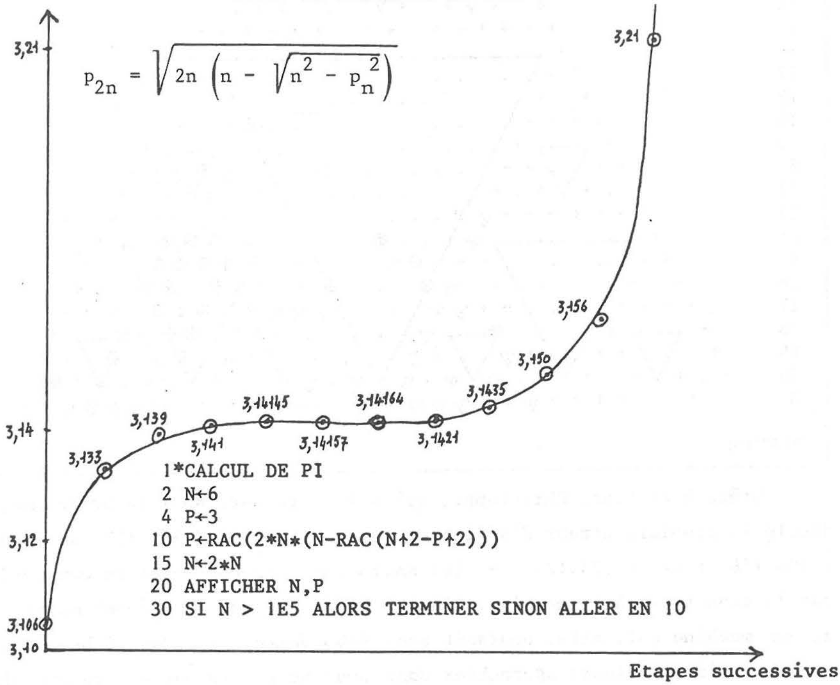


Grâce à ce test, Christophe, qui a élaboré avec nous le programme, a décelé la première erreur d'affichage de la machine (2 704 157 au lieu de 2 704 156 pour C (24,12)) - les anomalies précédentes étant compensées par la troncature à la machine. Ainsi, Christophe est maintenant maître de sa machine qui, elle, poursuit sans débordement de capacité beaucoup plus loin - mais en valeurs approchées dont nous ne savons pas encore *calculer avec certitude l'incertitude* (la plus petite possible).

Cette méthode (du calcul modulo 10) s'applique aisément à la vérification d'une table de carrés, par exemple. Ainsi 2897^2 est le premier carré que l'ordinateur nous fournit avec une erreur (+1) en affichant 8 392 610 au lieu de 8 392 609 . L'étude des nombres des unités simples, par affichage du premier chiffre à droite jusqu'à 6 049 au carré, nous a permis une observation des anomalies de la multiplication (l'erreur oscille de +1 à 0 puis -1 , puis +4 à partir de $5\ 794^2$, soit 33 570 440 au lieu de 33 570 436).

Je ne puis citer ici tous les exemples que nous avons rencontrés. En particulier nous étudions les oscillations, convergences apparentes suivies de divergences et vice-versa, anomalies dans le fonctionnement des tests donnant le signe d'une expression à la limite de sensibilité.

π par "défaut" (périmètre du polygone inscrit à 2n côtés / unité: le diamètre du cercle)



La discussion de la validité des résultats ne peut se faire ponctuellement - mais, comme en physique, d'après un ensemble de mesures (dans un voisinage des conditions de calcul).

2n	π (par défaut !)
96	3,141 033
192	3,141 459 6
384	3,141 572 7
768	3,141 645
1 536	3,143 539

Les erreurs font boule de neige par itération.

Intervalle de confiance: $\boxed{3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142}$

e) *Où nous préconisons l'usage des sécurités* (automatisées)

Les "folies" de l'ordinateur sont dues (sauf de très rares exceptions) à un usage hors limites - à des effets de "bords", des débordements de capacité. Nous voudrions pouvoir calculer en fonction de la machine et du programme les domaines *à ne pas dépasser* (ou à explorer en fonction d'une *incertitude connue* de tolérance) - et mettre alors à l'exécution des tests d'arrêt.

C'est pourquoi nous avons commencé à utiliser systématiquement, pour les opérations arithmétiques usuelles, les "grosses opérations" - par chaînes de caractères ou tableaux de nombres - où l'on fragmente les calculs afin de ne pas dépasser les limites de l'exactitude des calculs à la machine. Naturellement les calculs sont plus longs ainsi. Par exemple nous calculons exactement 250! en un peu plus d'une demi-heure et 599! en plusieurs heures, avec arrêt ensuite par débordement de capacité des tableaux mis en mémoire d'ordinateur (sur MITRA 15, 4K de mémoire sur disque et avec une imprimante Logabax rapide).

De toute manière, il faut bien s'arrêter à un moment donné... *Un arrêt par blocage n'est pas trompeur.* Alors que les résultats affichés par l'ordinateur en valeur approchée "non contrôlée" (à incertitude non calculée) sont mathématiquement (et souvent pratiquement) inutilisables.

Les calculs *avec arrondi* sont nécessaires (pour raison non seulement d'économie, mais aussi par nécessité mathématique pour les nombres non décimaux).

ax = b

Une équation très difficile à résoudre à la machine.

Comment calculer x par excès et par défaut ?

En calcul numérique, notre Club s'est attaqué systématiquement au calcul d'incertitudes, fonctions des paramètres (et de leur incertitude) et du programme de calcul *avec les opérations usuelles* du compilateur. Or nous connaissons notre machine de l'extérieur (comme une boîte noire) et sommes réduits à l'observer pour déterminer ses limites. Nous voudrions que les constructeurs eux-mêmes, qui ont accès au déterminisme de leur système, prévoient un calcul automatique d'incertitude pour les opérations arithmétiques. Il nous resterait encore ensuite à adapter ce calcul à nos divers algorithmes. Si l'on "sait ce que l'on entre" en ordinateur, on doit pouvoir savoir "ce qui en sort".

Cependant, on est loin actuellement de cette précision dans l'imprécision - et les petites calculatrices (de poche), qui fascinent tant nos élèves, les induisent aussi trop souvent en erreur.

Un automate qui ne comporte pas les moyens de son auto-contrôle est dangereux.

Dans la salle de l'ordinateur, les élèves comparent les résultats obtenus par plusieurs calculatrices à ceux de l'ordinateur. Ils apprennent à estimer les précisions et à ne plus croire à l'absolue exactitude lorsqu'elle n'est pas accessible. Ils apprennent à se protéger des automatismes abusifs, pour mieux utiliser l'automate.

Plus généralement, et pas seulement en calcul numérique, nous voudrions que l'emploi des programmes et des diverses procédures qu'il comporte soit systématiquement sécurisé par des tests d'arrêt *pour en interdire un usage illicite* (inconscient la plupart du temps). Nous multiplions les essais de mauvais usages "pour voir ce que cela donne". Nous construisons des jeux d'essai pour utiliser les programmes dans tous les cas envisageables. Nos élèves découvrent qu'il est beaucoup plus long de prouver la valeur d'un programme, d'un ensemble de résultats, que d'écrire le programme lui-même. Les malheurs des apprentis sorciers sont les expériences nécessaires d'un bon apprentissage: mais encore faut-il en être conscient. Les habitudes du travail en équipe avec des enseignants "méfiants par formation" me paraît ici particulièrement utile.

f) *Agir ou laisser faire*

Nous autres, les animatrices de ce Club, nous n'avons pas encore en informatique une formation "bien lourde" - ni le temps, ni peut-être même le goût de la virtuosité dans le maniement de l'ordinateur. Nos élèves de 14 à 18 ans sont au maximum de leur vivacité d'esprit, et leur mémoire n'est pas encore ralentie par le goût des idées générales. Ils sont plus "astucieux" que nous (mais moins méthodiques) pour optimiser les temps de traitement - et sont heureux de travailler avec nous sur le plan de l'efficacité, hors de toute autre hiérarchie que celle de la réussite. Ils se sentent valorisés d'être traités en adultes, et nous apportent autant que nous pouvons leur donner - mais dans un ordre qualitatif bien différent. Ils ont au lycée le loisir du travail "pour l'amour de l'art" et celui de progresser sans souci de rentabilité immédiate.

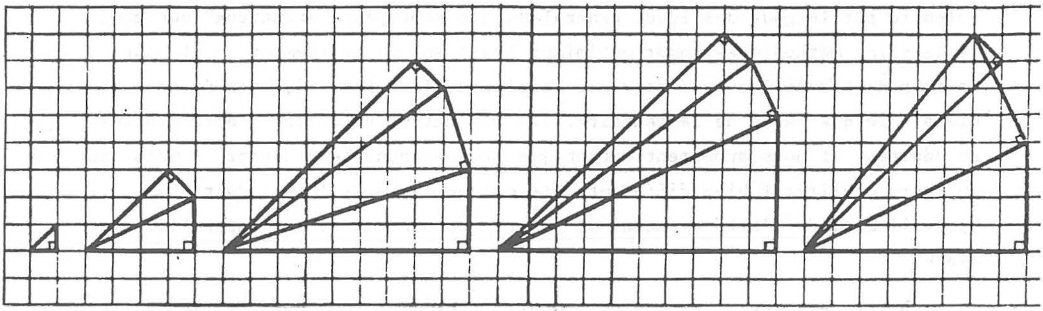
Notre seul regret est de ne pouvoir accueillir tous ceux qui le désirent - ce qui restera impossible tant que cette animation des Clubs ne sera pas officiellement développée. Un MITRA 15 avec 8 consoles et deux professeurs qui prennent trop souvent sur leurs loisirs le temps d'accueillir une centaine de lycéens très actifs (tant sur place que par correspondance, soit environ le double de ceux qui ont été inscrits) c'est peu pour 2 500 élèves au lycée de Savigny et au moins autant en Première au CNTE par correspondance. Et il n'y a en France que 58 lycées ainsi équipés ! Nos jeunes sont pourtant prêts (en particulier par l'étude des "maths dites modernes") à assimiler avec scrupule et ténacité la méthode informatique.

Ne soyons pas trop modestes: c'est le professeur de mathématique qui peut leur apporter les vertus d'exactitude, de précision, de logique - et plus spécialement *le goût de la méthode* algorithmique et de *la clarté du langage*, pour leur permettre de *déjouer les pièges* de l'ordinateur. Tout en nous associant aux autres enseignants pour les modélisations et les discussions d'adéquation des modèles, nous avons pour mission de veiller au bon usage de la méthode *en faisant abstraction* de la nature même des résultats.

L'avenir proche de nos élèves est en jeu dans cette formation à l'informatique. Si nous nous laissons déborder par les mauvais usages, nous serons en partie responsables de la révolte prévisible et déjà actuellement grondante des victimes de l'informatique contre une technique mal employée dont le grand public ne saura pas déceler les causes des erreurs de fonctionnement - et qu'il aura trop tendance à rejeter globalement.

Ce nouveau langage des sociétés sera le meilleur ou le pire des supports de notre pensée. A nous de faire en sorte qu'il soit le meilleur.

VIII - VERS π



Examinez les cinq figures ci-dessus et trouvez la règle du jeu.

Commentaire:

Les figures ci-dessus sont une illustration géométrique de formules en Arc tg $\frac{1}{a}$ (avec a naturel non nul) permettant le calcul de $\frac{\pi}{4}$ donc le calcul de π .

Figures	Formules	Formules
①	$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg } \frac{1}{1}$	$\pi = 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{1}$
②	$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg } \frac{1}{2} + \text{Arc tg } \frac{1}{3}$	$\pi = 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{2} + 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{3}$
③	$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Arc tg } \frac{1}{3} + \text{Arc tg } \frac{1}{7}$	$\pi = 8 \text{ Arc tg } \frac{1}{3} + 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{7}$
④	$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg } \frac{1}{2} + \text{Arc tg } \frac{1}{5} + \text{Arc tg } \frac{1}{8}$	$\pi = 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{2} + 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{5} + 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{8}$ Formule de STRASSNITZKY (1840)
⑤	$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Arc tg } \frac{1}{2} - \text{Arc tg } \frac{1}{7}$	$\pi = 8 \text{ Arc tg } \frac{1}{2} - 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{7}$

Parmi d'autres formules utilisées pour le calcul de π selon ces méthodes, nous pouvons citer:

⑥ Formule de MACHIN (1706) $\pi = 16 \text{ Arc tg } \frac{1}{5} - 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{239}$

⑦ Formule de STÖRMER (1896) $\quad \pi = 24 \text{ Arc tg}\frac{1}{8} + 8 \text{ Arc tg}\frac{1}{57} + \text{Arc tg}\frac{1}{239}$

Formules de récurrence

Rappelons que :

$$\alpha \text{ Arc tg } \frac{1}{a} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{3a^3} + \frac{\alpha}{5a^5} - \dots + \frac{(-1)^n \alpha}{(2n+1)\ a^{2n+1}} + \dots = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n \ \alpha}{(2n+1)\ a^{2n+1}}$$

Ce qui permet d'utiliser pour algorithme récurrent les formules suivantes:

$$U_{2n+1} = - U_{2n-1} \times \frac{2n - 1}{(2n+1)\ a^2} \qquad \text{initialisation: } U_{-1} = \alpha\, a$$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + U_{2n+1} \qquad \text{initialisation: } S_{-1} = 0$$

d'où $\qquad \alpha \text{ Arc tg } \frac{1}{a} = \lim\limits_{\infty} S_{2n+1}$

Rapidité de convergence:

Soit $\qquad \pi = \alpha \text{ Arc tg } \frac{1}{a} + \beta \text{ Arc tg } \frac{1}{b} + \gamma \text{ Arc tg } \frac{1}{c} \quad$ avec $\quad a < b < c$

à calculer avec d décimales.

La précision est obtenue lorsque: $\dfrac{\alpha}{(2n+1)\ a^{2n+1}} < 10^{-d}$ ⑧

Pour la formule ① $\alpha = 4$; $a = 1$; il suffit que l'on ait $n > 2.10^d$

Pour calculer π avec 10 décimales exactes, une calculatrice programmable du type Hewlett-Packard modèle 20 mettrait environ 40 ans pour atteindre cette précision.

Pour les autres formules :

⑧ est logiquement équivalent à: $\log (2n+1) + (2n+1) \log a > \log \alpha + d$

Or dès que $n > 12$ on a: $\log (2n+1) > \log \alpha$

donc il suffit d'avoir: $(2n+1) \log a > d$

$$2n + 1 > \frac{d}{\log a}$$

donc il suffit d'avoir: $n > \dfrac{d}{2 \log a}$

pour obtenir la précision de d décimales.

Voici pour obtenir π avec 1 000 décimales les durées approximatives du calcul sur machine HP 20 :

Formules	a	n maximal	Durée en heures
② ④ ⑤	2	1 661	12
③	3	1 048	7
⑥	5	716	5
⑦	8	554	4

Choix de formules

La formule ⑥ de MACHIN a été la première de ces formules utilisées pour un calcul à la main et elle a permis en 1706 un calcul de π avec 100 décimales.

Mais on a ensuite utilisé, à partir de 1840, la formule ④ de STRASSNITZKY plus facile à manipuler à la main à cause des divisions par 2^2 , 5^2 , 8^2 qui sont plus simples que les divisions par 239^2 .

L'arrivée des ordinateurs a privilégié les formules ⑥ et ⑦ .

. La convergence est plus rapide pour la série de Störmer que pour la série de Machin (durée de calcul réduite environ d'un quart).

. La formule de Machin ne comporte que deux termes en Arc tg ; l'encombrement en machine est donc moins important que pour la formule de Störmer qui en compte trois (encombrement réduit d'un quart).

Compte-tenu de ces deux critères, le choix entre ⑥ et ⑦ dépend donc de l'ordinateur utilisé et de ce que l'on désire obtenir.

Intérêt du calcul de π

Euclide, Archimède, Apollonius, Viète et bien d'autres qui se sont attaqué au calcul du "développement décimal" de π ont voulu essayer, entre autres, de découvrir une éventuelle périodicité dans l'écriture des décimales, d'où la rationnalité de π qui en résulterait.

Cette préoccupation fut abandonnée en 1768 lorsque LAMBERT démontra que π est irrationnel.

On a ensuite recherché si la répartition des chiffres était ou non aléatoire. Cette réponse ne peut être donnée avec certitude; cependant on peut en augmenter la probabilité. Le calcul de π fait en 1967 avec 500 000 décimales a montré que la suite des décimales de π est une "excellente" suite de chiffres aléatoires.

Le calcul des décimales de π peut aussi être utilisé pour tester sur un ordinateur:

- son bon fonctionnement,
- sa rapidité de calcul,
- l'encombrement du programme en machine
- la facilité de programmation.

Il peut être aussi utilisé par le programmeur pour tester sa connaissance de la programmation et des possibilités de la machine.

IX - CALCUL MENTAL ET INFORMATIQUE

Parmi les activités classiques en milieu scolaire qui peuvent aider à faire comprendre ce qu'est l'informatique et en contre-partie recevoir de l'informatique un éclairage nouveau, le calcul mental tient une place de choix.

a) On aperçoit une analogie immédiate entre le fonctionnement d'un ordinateur et celui du cerveau lors de l'exécution d'un calcul mental. Examinons de plus près cette analogie. Un ordinateur comporte des organes d'entrée-sortie, une mémoire, un organe de calcul. Il faut enfin lui procurer des données et un programme à exécuter. Chez un humain qui effectue

$$348 \times 259$$

on s'attendrait à trouver uniquement un puissant instrument de calcul. En fait il lui faut pour pouvoir fonctionner:

- des yeux, des oreilles, une langue ou des doigts pour communiquer avec l'extérieur;
- une mémoire pour stocker ne serait-ce que la table de multiplication;

c'est-à-dire des entrées-sorties et une mémoire.

b) La structure de la mémoire est intéressante à étudier aussi bien pour l'ordinateur que pour l'homme qui calcule. On distingue plusieurs sortes de mémoires:

- une mémoire modifiable interne assez coûteuse pour l'ordinateur et assez petite chez l'homme. Pouvez-vous retenir 5 nombres de 4 chiffres que l'on modifie sans cesse ?
- une mémoire non modifiable interne, moins coûteuse pour l'ordinateur et assez vaste chez l'homme (c'est celle où nous mettons par exemple la table de multiplication).
- des mémoires externes de capacité pratiquement illimitée (elles sont représentées en calcul mental par le tableau, les papiers que l'homme peut avoir sous les yeux).

La caractéristique la plus importante du cerveau humain utilisé comme calculateur est la petitesse de la mémoire modifiable.

c) On peut pallier la petitesse de la mémoire modifiable par le recours à des mémoires extérieures et par un emploi convenable des entrées-sorties. Le problème de calculer

$$348 \times 259 \quad ,$$

ces deux nombres étant écrits au tableau et constamment sous les yeux du calculateur, les chiffres du produit pouvant être écrits au tableau au fur et à mesure de leur obtention, est un problème facile car, comme nous le verrons, il n'y a presque rien à mettre en mémoire modifiable.

Par contre, le problème d'effectuer le produit de ces deux mêmes nombres, ceux-ci étant dictés et le résultat devant être fourni sous forme définitive, est un problème beaucoup plus difficile, car il faut garder en mémoire modifiable les deux facteurs, l'état actuel du résultat et quelques autres informations.

Pour spécifier complètement un problème de calcul mental, il faut indiquer d'une manière précise sous quelle forme sont fournies les données et sous quelle forme on demande les résultats.

Or ceci n'est pas fait habituellement car on porte son attention uniquement sur l'aspect manipulation des chiffres.

d) On peut également pallier la petitesse de la mémoire modifiable en choisissant des algorithmes de calcul qui minimisent les besoins en mémoire.

Pour multiplier 348 par 259 , on utilisera la multiplication en croix :

$8 \times 9 = 72$	2 je retiens 7
$7 + (8 \times 5) + (4 \times 9) = 83$	3 je retiens 8
$8 + (8 \times 2) + (4 \times 5) + (3 \times 9) = 71$	1 je retiens 7
$7 + (4 \times 2) + (3 \times 5) = 30$	0 je retiens 3
$3 + (3 \times 2) = 9$	9

Le résultat 90 132 a été énoncé chiffre par chiffre en commençant par la gauche. On n'a mémorisé que la retenue et le rang auquel on opère (on suppose les facteurs écrits au tableau). L'algorithme ordinaire aurait nécessité la construction et la mémorisation des trois produits partiels.

e) Les propriétés mathématiques de l'algorithme peuvent laisser une certaine liberté dans l'ordre de certaines opérations. On peut en profiter pour soulager la mémoire modifiable.

Soit par exemple à effectuer

$$1\,954 + 260 + 786$$

les nombres étant simplement énoncés.

On répète cette ligne plusieurs fois pour bien la mémoriser. On va ensuite ajouter progressivement les chiffres du dernier nombre à ceux du premier au cours d'une répétition continuelle.

1 960 + 260 + 780 | 2 040 + 260 + 700 | 2 740 + 260

puis on ajoutera de même les chiffres du deuxième nombre à ceux du premier

2 800 + 200 | 3 000

Le résultat est 3 000 .

Lorsqu'il y a plus de deux nombres, il semble bien qu'il est plus facile de faire disparaître le dernier chiffre prononcé plutôt qu'un autre.

Remarque : Si l'on veut faire la preuve par 9 de ce calcul, comme on aura à la fin oublié les termes, on déterminera le reste par 9 de l'expression donnée *avant* de la transformer. Ici

$1 + 9 + 5 + 4 = 1$ $\quad$ $2 + 6 + 0 = 8$ $\quad$ $1 + 8 = 0$

$7 + 8 + 6 = 3$

Le reste par 9 du résultat doit être 3. Il faut mémoriser ce chiffre jusqu'à la fin du calcul.

f) Nous venons de rencontrer un des grands principes de l'informatique: *Adapter la méthode à l'outil dont on dispose* . En voici un autre: *Adapter la méthode au problème*. Ici on constate un phénomène que je nommme le *foisonnement algorithmique*. Autour d'une même théorie mathématique, on rencontre non pas un problème mais un grand nombre de problèmes différant entre eux par des particularités qui peuvent paraître accessoires, mais qui peuvent cependant conduire à des algorithmes très différents.

Par exemple, autour de la notion de division, on peut rencontrer les problèmes suivants:

- déterminer le quotient et le reste de a par b
- déterminer le quotient de a par b
- déterminer le reste de a par b
- reconnaître si a est divisible par b
- sachant que a est divisible par b, trouver le quotient.

Voici un bon algorithme de calcul mental pour trouver le reste de 842 519 par 7 :

On remarque que $100 = 7 \times 14 + 2$

On ne change donc pas le reste en supprimant le chiffre le plus à gauche, le doublant et l'ajoutant 2 rangs plus à droite. (On soustraira 7 sans le dire dès que cela sera possible).

8 4 2 5 1 9	8 → 1 → 2	4 4 5 1 9
4 4 5 1 9	4 → 8 → 1	4 6 1 9
4 6 1 9	4 → 8 → 1	6 2 9
6 2 9	6 → 12 → 5	3 4

Le reste de 34 est 6.

Soit maintenant à examiner si 842 519 est multiple de 7 .
J'ajouterai ou retrancherai 7 ou $7 \times 3 = 21$ de manière à rendre nul le chiffre des unités. Ici il faut ajouter 21.

Je divise par 10 : 84 254

Je divise par 2 : 42 127

Je retranche 7 ; je divise par 10 : 4 212

Je divise par 2 : 2 106 1 053

J'ajoute 7 ; je divise par 10: 106

Je divise par 2 : 53

qui n'est pas multiple de 7 .

g) Jusqu'ici nous avons utilisé des idées informatiques pour montrer sous un jour nouveau le calcul mental. En fait, dans l'enseignement les choses se présenteront plutôt en sens inverse. La réflexion sur une pratique du calcul mental préalablement rendue plus réfléchie peut être une voie pour ouvrir les élèves à l'informatique, comprise au sens large, c'est-à-dire utilisation de procédés algorithmiques pour résoudre des problèmes en se servant d'outils divers, l'ordinateur n'étant que l'un de ces outils.

Pour que cette voie paraisse raisonnable, il faut lever plusieurs objections préalables.

h) Le calcul mental est actuellement déprécié aussi bien aux yeux des élèves qu'à ceux des enseignants. Ce mot évoque un travail à la chaîne, une absence totale d'activité intelligente. En fait, ceci est tout à fait inexact à condition de bien préciser que ce qu'on demande aux élèves sera en général d'analyser un problème de calcul, de lui trouver une solution, de la mettre au point et de s'amuser à la faire tourner pour bien s'assurer de sa validité. C'est seulement dans le cas particulier de calculs ayant une utilité suffisante que l'on ira plus loin et que l'on donnera un entraînement permettant une bonne efficacité (par exemple exécution des quatre opérations).

i) Ceci pose d'ailleurs une autre question: Devant la marée des calculateurs de poche et autres gadgets, est-il nécessaire de savoir calculer à la main ou mentalement ?

Ma réponse sera la suivante: Pour utiliser un outil sans en être esclave, il est nécessaire de bien dominer ce qu'il fait. Dans le cas d'un outil de calcul, cela exige d'être capable de faire soi-même n'importe quelle partie du travail qu'on lui demande. Imaginez un utilisateur de calculateur de poche ne sachant pas calculer dont la machine aurait ses touches + et × permutées. Il produirait en toute tranquillité d'esprit des résultats complètement aberrants.

J'ajouterai une autre raison. Il est bon que l'homme garde dans notre civilisation technique une certaine *rusticité*. Nos machines ne sont pas toujours là, elles ont parfois des pannes. Dans nos maisons, on garde, à côté de l'ascenseur, un escalier. Votre survie peut dépendre un jour d'une bonne estimation numérique faite à un moment où vous n'aurez aucun autre outil que votre cerveau.

j) Mais, dira-t-on, on fait du calcul mental à l'école élémentaire et on présente l'informatique vers 15 ans. Entre temps les élèves auront oublié bien des choses. Je répondrai qu'à mon avis, on devrait faire du calcul mental à tous les niveaux, pour illustrer bien entendu certains outils que l'on vient de présenter. Voici des exemples:

Recherche du PGCD de deux nombres

Soit les deux nombres 629 et 347 .

On peut former leur PGCD par remplacement répété du plus grand par la différence des deux. On placera le plus grand en tête. Le PGCD est obtenu lorsque les deux nombres sont égaux. (On peut s'arrêter dès qu'il est évident que l'un divise l'autre).

On fera la différence chiffre par chiffre mais en gardant le plus petit intact.

$\underline{629}$ - $\underline{347}$ - 622 - 347 - 582 - 347 - 282 - 347
$\underline{347}$ - $\underline{282}$ - 345 - 282 - 265 - 282 - 65 - 82
$\underline{82}$ - $\underline{65}$ - 77 - 65 - 17 - 65
$\underline{65}$ - $\underline{17}$

On peut s'arrêter. Il est clair que le seul diviseur commun de ces deux nombres est 1 puisque 17 est premier et que 65 n'est pas un multiple de 17 .

Voici encore un autre exemple:

Changement de base pour un naturel

Soit par exemple:

7 634 écrit en base *huit* à transformer en base *dix*.

On emploiera le schéma de Hörner sous la forme

7 - 6 - 3 - 4 - 56 - 6 - 3 - 4 - 62 - 3 - 4 - 124 - 3 - 4 - 248 -
3 - 4 - 496 - 3 - 4 - 499 - 4 - 998 - 4 - 1996 - 4 - 3992 - 4 - 3996

(Pour multiplier par 8 on a multiplié 3 fois par 2).

k) Je terminerai en indiquant un certain nombre de remarques générales sur les *techniques*, que l'on pourra présenter aux élèves soit à propos du calcul écrit ou mental, soit à propos de l'usage d'outils informatiques.

Ces remarques font partie de la formation de tout homme qui veut être efficace car elles sont communes à toutes les techniques. (Les techniques de calcul sont probablement les premières que l'élève ait à utiliser d'une manière suivie).

Faites ce que vous faites

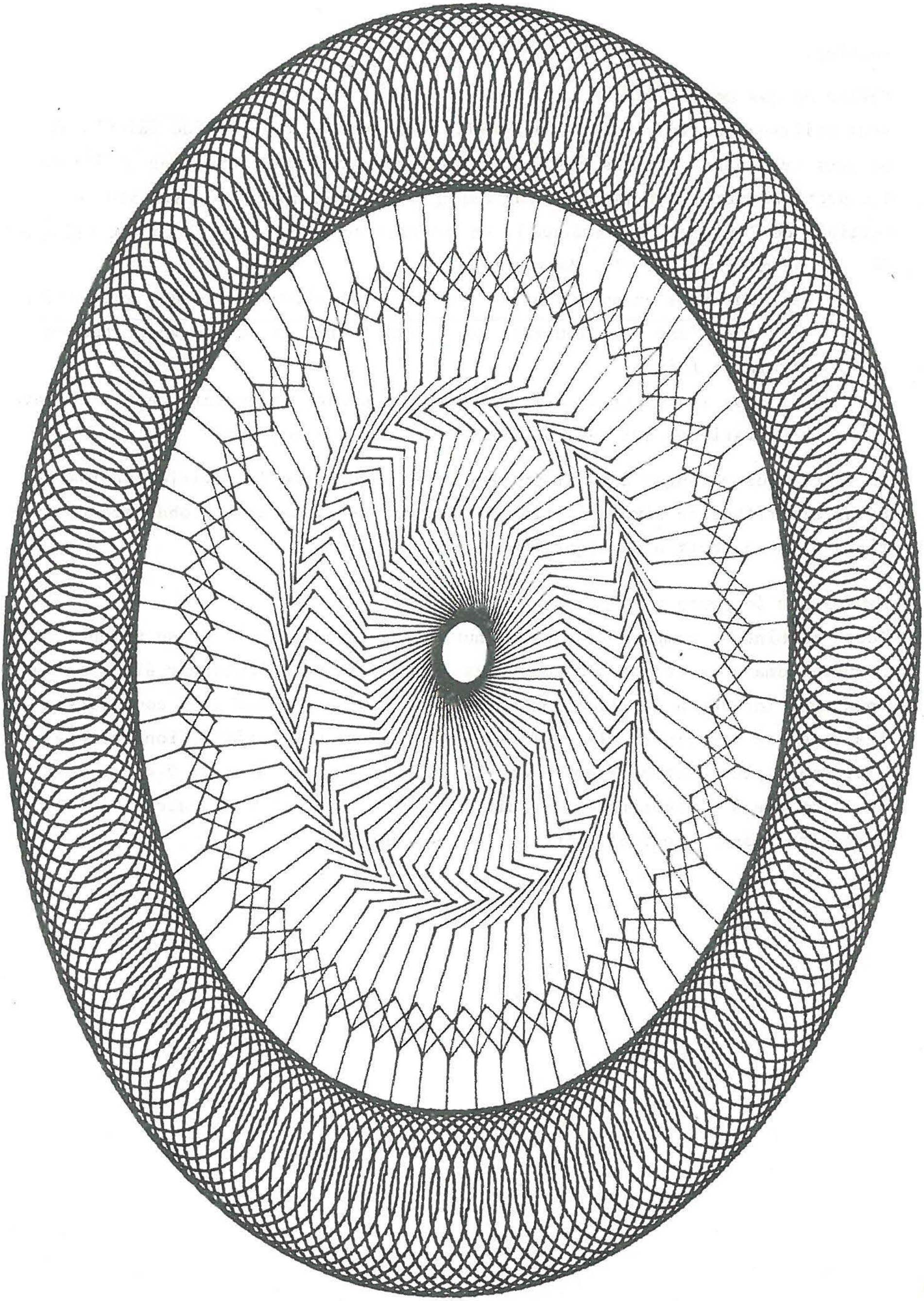
Vous utilisez un algorithme, c'est-à-dire un procédé régulier de calcul. Il se peut que, dans certains cas, on puisse raccourcir le travail en utilisant des particularités des données. Par exemple, pour examiner si 842 519 est multiple de 7 (exercice précédent), on pouvait supprimer 84 à gauche puisque 84 est un multiple de 7 . Mais attention:

- si vous vous en apercevez en cours de calcul, vous risquez soit d'être victime d'une illusion, soit de perdre le fil de ce que vous êtes en train de faire;
- si vous l'avez prévu à l'avance, vous passez un certain temps à essayer une variante qui sera un raccourci une fois sur sept.

En fait, vous mélangez deux algorithmes, un algorithme de division ordinaire et un algorithme de simplification par la droite. Vous avez probablement intérêt à vous en tenir à un algorithme simple et clair.

Pensez que la faute vous guette

Toute machine, y compris le cerveau humain, est susceptible de se tromper (le cerveau humain se trompe beaucoup plus souvent qu'un calculateur électronique). Vous avez intérêt à vérifier vos résultats. Dans une classe, la comparaison des réponses des divers élèves fournit en général une vérification valable. J'ai donné plus haut un exemple de vérification par preuve par 9 et comment on l'intègre à l'algorithme (en fait, on effectue les petits calculs qu'il nécessite avant le calcul principal et non après).



CHAPITRE 2

QUELQUES DEVELOPPEMENTS EN SITUATION PEDAGOGIQUE

I - UNE ETRANGERE DANS LA CLASSE : LA MACHINE ...

De plus en plus d'élèves utilisent, en classe ou ailleurs, des machines à calculer, programmables ou non, de poche ou de bureau, depuis la simple " 4 OP. " jusqu'au matériel plus élaboré utilisant un langage évolué.

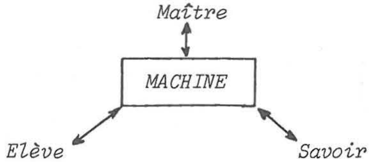
Ce développement ne pourra que s'amplifier, étant donné l'invasion du marché, les prix de plus en plus compétitifs ... et les avantages pédagogiques et relationnels que cela peut apporter dans la vie d'une classe.

De plus en plus de professeurs en sont aussi conscients. Les autres ne pourront pas l'ignorer très longtemps. "Il vaut mieux prévoir d'utiliser ces calculatrices sur la table, sinon les élèves le feront sous la table." comme l'a dit un collègue, en janvier 1976, au colloque de PONT-A-MOUSSON sur les apports de l'algorithmique et de l'informatique à l'enseignement des Mathématiques.

Le gros problème reste l'équipement des établissements et / ou des élèves en machines. Il importe de trouver des solutions pour que ce ne soit pas, une fois de plus, l'élève aux ressources les plus modestes qui soit le plus défavorisé.

Ceci étant dit, et le problème n'étant pas résolu, il n'en demeure pas moins que la présence en classe de machines à calculer crée un certain nombre de situations nouvelles.

La machine vient s'introduire dans le circuit habituel maître - élève - savoir. Elle est un élément nouveau qui modifie les relations Enseignants - Enseignés.



a) <u>Influence de la machine dans les relations Maître - Elèves</u>

Très souvent, trop souvent, indépendamment du contenu, les relations entre l'élève et le maître se font dans un sens unique, du maître vers l'élève.

Le premier décide, il parle, il sait. L'élève reçoit un message mais ne pose pas, ou peu , de questions.

La présence de la machine fait que le maître recevra davantage de questions du type:

"Quand je lui demande de ... elle me répond ... Pourquoi ? (ou elle ne me répond pas) ".

Par le biais de la machine, grâce à elle, un dialogue, parfois jusqu'alors très réduit, avec le professeur devient peut-être possible.

Ces dialogues, ces demandes d'explications se font de façon beaucoup plus nouvelle, spontanée, détendue, moins crispée, moins scolaire.

Le professeur n'est plus le seul interlocuteur, connaissant la mathématique et jugeant les fautes "impardonnables"; il devient un animateur, plus proche des élèves, moins inaccessible ... On assiste ainsi à certains déblocages au niveau des relations, déblocages toujours positifs quant à l'intérêt porté par l'élève à la discipline enseignée.

Enfin un dialogue de l'élève avec la machine s'établit, indépendamment du professeur. Certains élèves, souvent les plus timides, les plus timorés, les plus dominés, peuvent sans crainte "parler" à la machine, lui donner des ordres, eux qui jusqu'ici n'ont fait qu'en recevoir ! Et ce dialogue avec la machine, l'élève en est (relativement) maître. C'est lui qui organise son travail, l'analyse, le teste. Il en est maître, de la conception aux résultats.

En tout état de cause, on observe une plus grande activité intellectuelle de l'élève et on peut penser que la machine à calculer est amenée à jouer, dans un proche avenir, le rôle que le magnétophone et la magnétoscope peuvent jouer dans l'enseignement des langues.

En fait, beaucoup plus que l'instrument, c'est l'usage qu'on en fait qui importe. Si le magnétophone est utilisé en cabine individuelle de langue, où l'élève travaille seul et en liberté, alors le rapport maître - élève est fondamentalement modifié. Il en est de même pour les calculatrices programmables, dans la mesure où on laisse l'élève travailler librement, sans contrôle du maître pendant assez longtemps et sans travail imposé à effectuer. Là, l'élève est seul ou en équipe avec sa machine; s'il fait une erreur dans un programme, la machine le lui fera savoir, mais il ne se sentira pas jugé, il ne se sentira pas infériorisé par cet échec ponctuel, il ne sera pas tenté, pour rétablir son équilibre intérieur, d'en rendre responsable le maître ou le système.

Pour ce qui est des machines non programmables, elles peuvent aussi intervenir, mais de façon plus modeste, dans le changement d'ambiance, dans des rapports affectifs. Certains élèves ont peur de faire des erreurs d'opérations, de se tromper dans les calculs. La machine peut donner un sentiment de sécurité, peut-être illusoire, à ces élèves infériorisés.

b) <u>Influence de la machine dans les relations entre le maître... et son savoir</u>

On constatera, là aussi, que la présence de la machine amène chez le maître, comme chez l'élève, une plus grande activité intellectuelle. La calculatrice est l'occasion de revenir - ou de venir - sur bien des questions oubliées - ou inconnues - (analyse; analyse numérique: programmation, algorithme, langages, etc... etc...). Par exemple, résoudre un système linéaire: la méthode de Cramer, par les déterminants, si elle est satisfaisante mathématiquement, est parfaitement inadaptée à la résolution pratique dès que ce système est d'ordre plus grand que 5 (grand nombre d'opérations, propagations des erreurs d'arrondis, temps de calcul important). D'autres méthodes, soit directes (Gauss) soit itératives (gradient) donnent un meilleur résultat, en moins de temps ... et elles sont aussi simples à programmer.

La machine, outil pédagogique, est suffisamment riche pour que le professeur ait toujours le souci de rechercher des utilisations, des approches, des méthodes nouvelles, sans se cantonner dans une "Pédagogie" figée et stable, qu'il peut croire la meilleure une fois pour toutes:

Grâce à la machine, son savoir et sa pédagogie seront "en recherche" permanente.

Et lui qui sait tout (en mathématique), il lui arrivera également de faire quelques erreurs, d'hésiter, de chercher, ... de mieux comprendre la démarche de l'élève, de mieux connaître les points où "çà bloque", de mieux se mettre dans sa peau ... et d'en tirer profit.

c) Influence de la machine dans les relations savoir - élèves

Il existe en général - au moins dans la classe - une voie unique pour la transmission du savoir: c'est le professeur. La présence de la calculatrice modifie les relations en créant un deuxième canal de transmission. En effet, souvent, pour l'élève, la machine "sait".

Exemple 1 - Dans l'exécution d'un programme, la machine fait TILT (une lampe rouge s'allume, ou un message "error" apparaît ...). On recherche d'où peut venir cette erreur, activité d'ailleurs très riche en soi, et acceptée par l'élève beaucoup plus facilement qu'à la suite d'un jugement défavorable venant du professeur. Et parfois, on trouve que, dans ce programme, on divise par une expression qui devient nulle à un certain moment, ou que l'on prend la racine carrée d'une expression négative ... "Le prof nous l'avait bien dit" ! mais il doit dire tellement de choses, le prof ! La machine confirme.

Exemple 2 - Le passage automatique, sur certaines machines, à la notation scientifique, dès que les nombres en jeu sont très petits ou très grands, peut justifier, ou amener, la notation $a.10^p$, a priori suspecte, bizarre et non naturelle. Ce n'est d'ailleurs que dans ces cas-là que cette notation peut se justifier, ... puisque la machine le dit.

De façon plus générale, le savoir de l'élève sera plus "ancré", plus durable, s'il est le fruit d'un travail de recherche personnel. Ce n'est pas en écoutant (même un bon professeur), en apprenant (même dans un bon manuel), en utilisant (même de bons théorèmes) que l'élève "saura des mathématiques", mais plutôt en sachant manipuler, tâtonner, conjecturer ... et découvrir, organiser, critiquer. Et une machine à calculer, surtout si elle est programmable, donne à l'élève toutes les possibilités de le faire.

Considérons donc la machine comme notre auxiliaire et non comme notre ennemi, mais n'hésitons pas à descendre l'idole de son piédestal. Montrons qu'elle a ses faiblesses et n'hésitons pas non plus à les souligner, pour bien mettre les choses à leur place.

Faisons calculer : $U = \frac{X + Y - X}{Y}$ et $V = \frac{X - X + Y}{Y}$ avec (pour une machine qui a huit chiffres à l'affichage) $X = 10^8$ et $Y = 10^{-2}$; quelle que soit la machine, elle indique $U = 0$ et $V = 1$.
(Voir Chapitre I - paragraphe VII)

Faisons calculer : 2^3 en utilisant la touche X^Y . Certaines machines - et c'est regrettable - donnent 7,999 999 4 .

A un autre niveau, demandons à une calculatrice un peu d'aide pour étudier la fonction caractéristique de $\mathbb{D}$ (ensemble des décimaux). Elle nous sera d'un piètre secours, même si elle est programmable. Quand on a une machine en main, peut-on lui faire confiance ?

Bien sûr, mais dans des limites qu'il convient de connaître. Il faut savoir que, quand on tâtonnera, elle sera souvent une aide précieuse pour nous permettre de formuler des conjectures, mais elle ne fera pas une démonstration à notre place.

Jusqu'à présent, quand il organisait méthodiquement un calcul, le professeur de mathématiques faisait, presque toujours, de l'informatique sans le savoir; maintenant, il serait bon qu'il le sache.

Le professeur ENGEL disait, au Congrès International de KARLSRUHE, en août 1976: "*Si le 19ème siècle a été dominé par la notion de fonction, le 20ème siècle sera le siècle des algorithmes, et comme on avait pris l'habitude de penser en termes de fonction, on prendra l'habitude de penser en termes d'algorithmes*".

II - LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

a) Introduction

La place et le statut de l'expérience sont largement différents dans la pédagogie des mathématiques et dans celle des sciences justement dénommées "expérimentales". Considérons par exemple la physique: la construction d'une théorie, l'introduction d'une donnée nouvelle, font appel à l'expérience réalisée par les élèves ou, encore trop souvent, présentée aux élèves. En cela le maître tend à reproduire la construction historique de la théorie, en prenant toutefois soin d'en éliminer certains tâtonnements et, sauf parfois dans un but anecdotique, toutes les hypothèses mises en échec ultérieurement. D'autre part, l'expérience possède une valeur relative dont le physicien s'accommode bien par référence à la notion de précision des mesures et au prix d'une restriction de situation (mécanique newtonienne / mécanique relativiste - par exemple).

L'introduction dans l'enseignement de la construction axiomatique des mathématiques nécessite une approche toute autre, en général, de la démarche expérimentale. Approche différente ne signifiant pas, d'ailleurs, élimination pure et simple: il convient de ne pas tomber dans les excès qui ont suivi l'introduction des nouveaux programmes et ont, entre autres, fait bannir du "Cours de Maths" toute figure de géométrie !

L'expérience "physique" reproduisant une démarche historique sera peu employée (voir cependant un exemple ci-dessous d'introduction du nombre π). Il faut surtout noter que l'expérience perd son rôle d'articulation entre deux théories ou entre deux phases d'une même théorie et se situe parallèlement à la théorie, construite axiomatiquement - donc sans elle - . Le rôle unique, mais fondamental, de l'expérience est alors pédagogique. C'est l'expérience qui, explicitement ou implicitement, guidera dans le choix d'un système d'axiomes, c'est l'expérience qui suggérera la construction d'un nouvel être mathématique ...

La difficulté (pédagogiquement parlant) consiste alors à montrer la nécessité de la démonstration, c'est-à-dire de la compatibilité entre l'observation et le modèle, la théorie.

Ceci met en évidence un premier obstacle épistémologique: celui qui résulte des présupposés de l'intuition, de l'évidence ou de l'immédiat. Nous essaierons donc d'analyser, à l'aide de quelques exemples, le rôle que doit jouer l'expérience, et en particulier l'expérience informatique, pour lever les obstacles épistémologiques.

b) La calculatrice et l'évidence

Une des expériences les plus simples à réaliser à l'aide d'une calculatrice consiste à construire point par point une approche de la courbe représentative d'une fonction. Le cas d'une suite (application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$)

est particulièrement intéressant car la machine peut alors fournir des valeurs approchées de u_n pour tout n inférieur à une certaine valeur n_0 déterminée par des contraintes techniques (capacité, durée de calcul, ...).

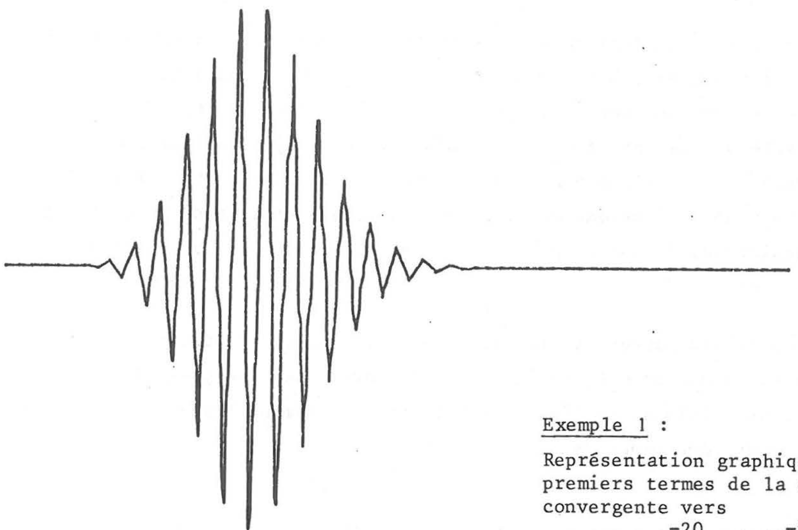
Exemple 1 -

Considérons les deux suites de terme général:

$$u_p = \sum_{n=0}^{n=p} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_p = \sum_{n=0}^{n=p} (-1)^n \frac{n!}{x^n}$$

Pour $x = 20$, par exemple, la suite U est convergente (vers e^{-20}) et la suite V divergente. Pourtant l'observation des premières valeurs (même jusqu'à un rang assez élevé, de l'ordre de 40) laisse croire tout le contraire. Il est nécessaire de pousser le calcul jusqu'aux termes u_{60} ou u_{70} (resp. v_{60} ou v_{70}) pour faire apparaître convergence ou divergence.

L'intérêt d'une telle étude au plan pédagogique est alors de motiver la nécessité d'une démonstration: puisque les apparences ne permettent pas de conclure, il faut trouver une méthode de conclusion universelle, donc construire une théorie rendant compte de tels phénomènes - ici la notion de limite - .



Exemple 1 :

Représentation graphique des premiers termes de la suite U, convergente vers $e^{-20} \simeq 2.10^{-9}$

c) Le support de l'intuition

La spontanéité de l'intuition n'est néfaste, dans l'enseignement des mathématiques, que si rien ne vient la contrôler ou l'endiguer. Nous venons de voir un exemple dans lequel une aberration apparente motivait une démarche logique. De la même façon, l'intuition peut être utilisée pour motiver l'introduction d'une notion nouvelle.

On peut proposer comme exemple "l'introduction à l'analyse et la définition des réels, assistées par référence aux calculateurs programmables" (voir l'article de M. CAUSSE, dans le compte rendu du groupe "Analyse" au colloque "Calculateurs programmables" de CARRY-LE-ROUET - juin 1976). On peut également proposer, et c'est une gageure, d'introduire expérimentalement - grâce au calculateur - la formalisation de la notion de limite d'une fonction.

*Exemple 2** -
f étant une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit à amener à la formalisation:

$$\lim_{x_0} f = \ell \iff [\forall\varepsilon > 0 \ , \quad \exists\alpha > 0 \quad (\ |x-x_0| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \ )]$$

Ceci peut s'apparenter à une situation ludique: "Mon adversaire exige une précision donnée (un ε donné); je dois donc trouver un α qui relève le défi". Le jeu peut se décomposer en deux parties: d'une part, le calculateur trouve systématiquement (à tous les coups si, bien sûr, la limite existe) l'α correspondant à l'ε proposé par l'élève et, d'autre part, l'élève doit répondre aux sollicitations du calculateur, éventuellement en l'utilisant en mode calculatrice de bureau pour pouvoir ainsi travailler sur des fonctions non triviales.

Deux élèves peuvent également jouer l'un contre l'autre en s'aidant de la machine, ce qui permet, répétons-le, de sortir des exemples classiques qui ou bien sont triviaux, ou bien noient le fait fondamental sous une masse de calculs ou de découpages des ε .

---

* Voir l'article de GLAESER dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. numéro 302 (février 1976).

Notons que dans ce cas ne se pose pas le problème classique de l'utilisation d'un calculateur en analyse car ε et α peuvent, sans dommages, ne prendre que des valeurs décimales. Notons également que, dans le cas d'un jeu entre deux élèves, les calculatrices employées n'ont pas besoin d'être programmables.

d) Les mots ...

Les mots mathématiques sont fréquemment importés du langage courant. L'élève mis face à un tel mot néglige souvent le sens mathématique de celui-ci pour lui accorder une valeur intermédiaire entre celle du langage courant et celle du langage mathématique: une distance est bien une application qui à un couple de points d'un espace affine euclidien associe un nombre réel et qui est douée de certaines propriétés, mais, pour l'élève, *une* distance est toujours *perçue* comme *la* distance "naturelle" d_2 , le cercle unité est toujours "rond" et la médiatrice de deux points est toujours "droite".

Exemple 3 - (dû à G. Mounier - équipe JARENTE - LYON)
Le but de cet exemple est de proposer une recherche autour de la "représentation" de diverses distances par l'intermédiaire de certains êtres géométriques, ici la médiatrice de deux points; mais l'étude peut être également menée de manière identique pour construire des cercles unité, ou diverses courbes classiques.

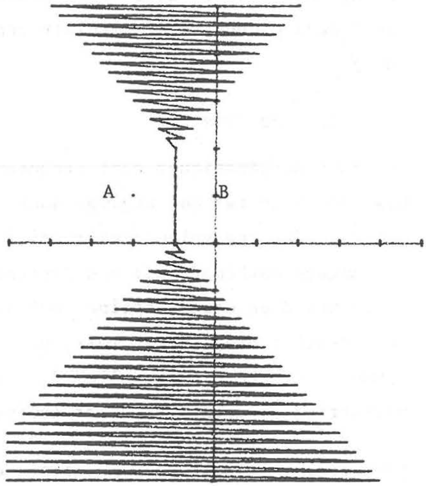
Donnons-nous un quadrillage de pas p et , pour chaque point M du quadrillage, étudions si $|d(A, M) - d(B, M)| \leqslant \varepsilon$, où A et B sont les points dont on cherche la médiatrice pour la distance d et où ε est égal à $\frac{p\sqrt{2}}{2}$ (ou tout au moins à sa valeur approchée pour la machine). Si cette condition est réalisée, alors écrivons un point en M. Nous obtenons ainsi un tracé approché point par point de la médiatrice de (A, B). Les courbes obtenues pour d_1 , d_3 , $d_{0,5}$ et d_∞ comparées à celle, classique, obtenue pour d_2 sont autant d'invitations à poursuivre dans cette voie et à abandonner la fixation sur d_2 . (Voir pages suivantes).

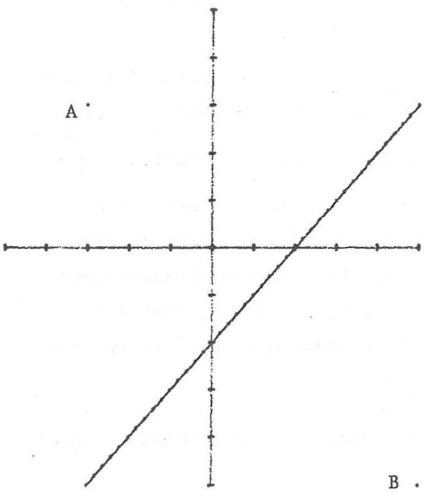
Notons que les programmes (ici en BASIC) sont particulièrement simples pour un "beau" résultat !

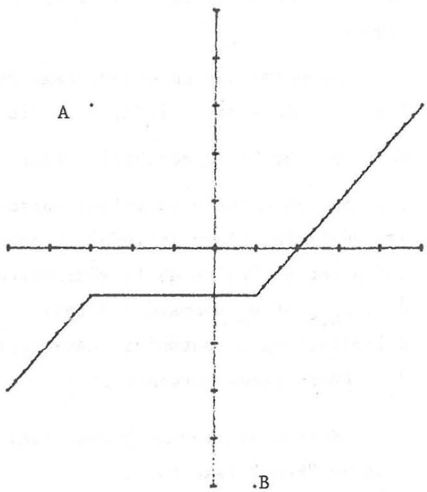
Exemple 3 :

Médiatrice de deux points
distance d_∞

Si $\vec{W}(u, v)$, $\|\vec{W}\| = \sup(|u|, |v|)$





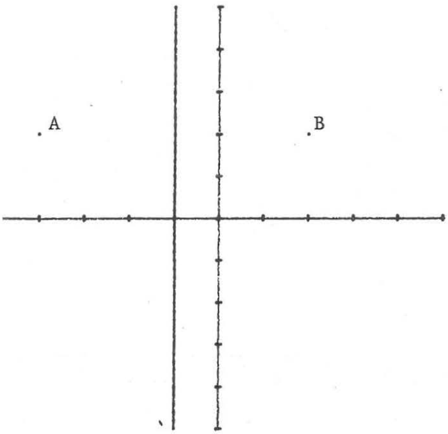


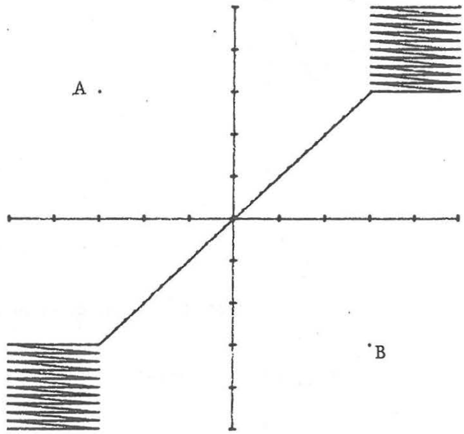
Exemple 3 :

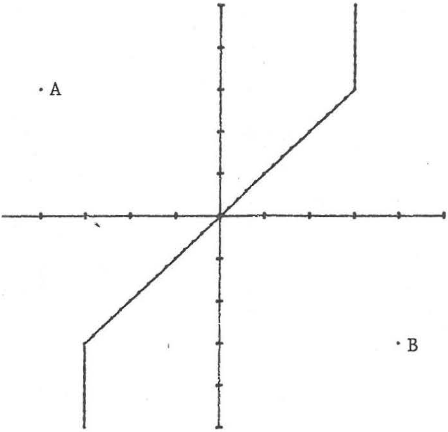
Médiatrice de deux points - distance d_1

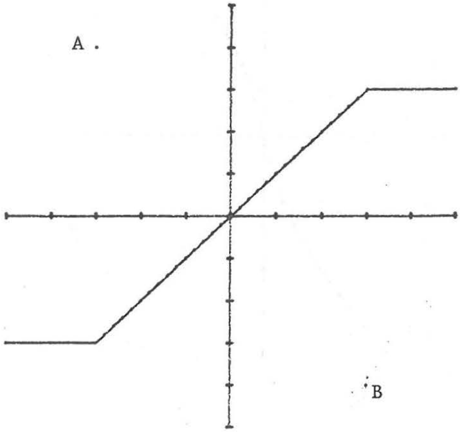
$\vec{W}(u, v)$, $\|\vec{W}\| = |u| + |v|$

```
 10   IN PUT A1, A2, B1, B2
 20   SCALE  -5, 5, -5, 5
 30   PLOT A1, A2
 40   PEN
 50   PLOT B1, B2
 60   PEN
 70   FOR X=-5 TO 5 STEP 0.2
 80   FOR Y=-5 TO 5 STEP 0.2
 90   U=X-A1
100   V=X-A2
110   GO SUB 210
120   D1=W
130   U=X-B1
140   V=Y-B2
150   GO SUB 210
160   IF D1≠D2 THEN 180
170   PLOT X,Y
180   NEXT Y
190   NEXT X
200   END
210   W=ABS(U)+ABS(V)
```



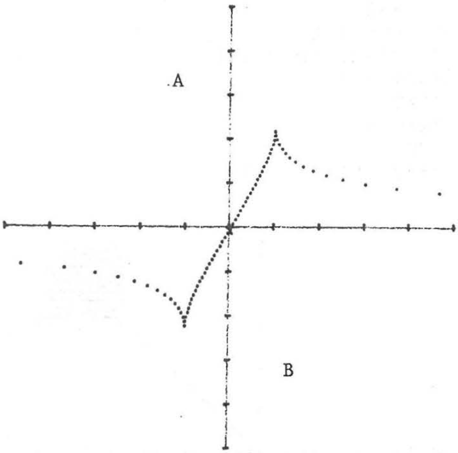


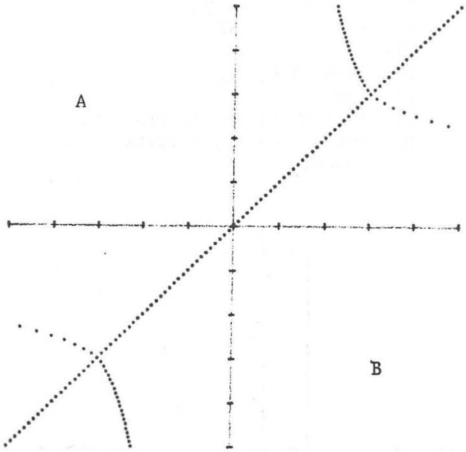




<u>Exemple 3</u> - Médiatrice de deux points - $d_{0,5}$

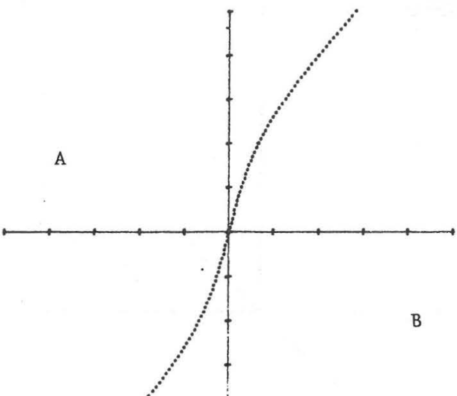
M(x, y) M'(x', y') $d_{0,5}(M, M') = \left(\sqrt{|x - x'|} + \sqrt{|y - y'|} \right)^2$

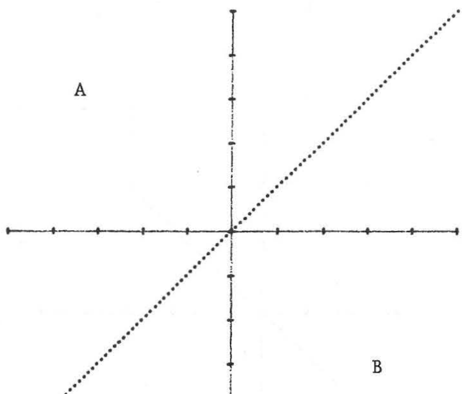


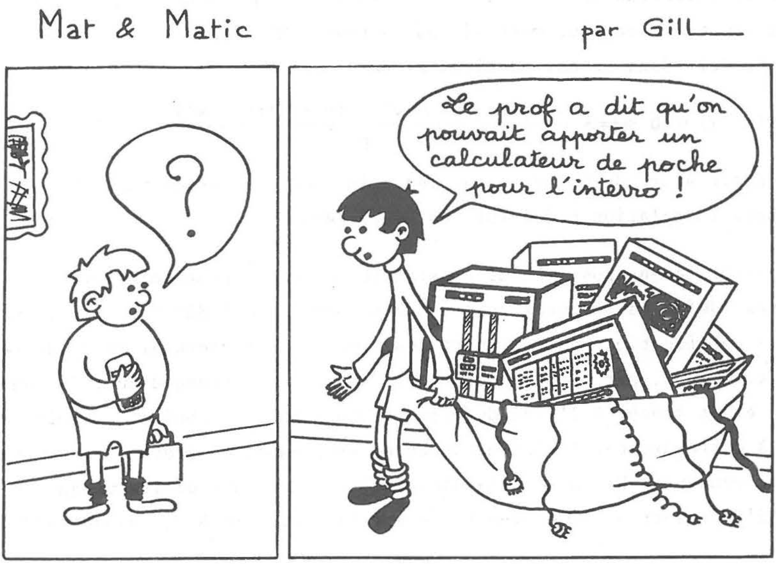


Médiatrice de deux points - d_3

M(x, y) M'(x', y') $d_3(M, M') = \sqrt[3]{|x - x'|^3 + |y - y'|^3}$







Exemple 4 - (d'après un document de l'I.N.R.D.P. - Section informatique)
Droites d'un plan fini.

La construction axiomatique de la géométrie est supposée s'appuyer sur des considérations physiques en vue de construire un modèle mathématique du plan ou de la droite physiques. Il est alors fondamental de montrer aux élèves que le modèle construit (et dont la "validité" a, en principe, été vérifiée) ne s'applique pas seulement au plan physique, qu'il existe d'autres plans et que, dans ces plans, les droites définies par les axiomes d'incidence ont un tracé particulier.

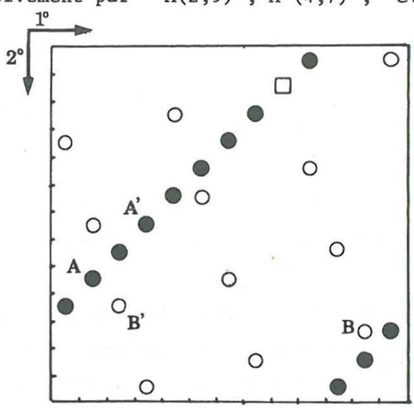
Les plans considérés sont les plans affines construits sur les corps $\mathbb{Z} / p\,\mathbb{Z}$ où p est un naturel premier. Le plan contient alors p^2 points distincts. Les droites sont déterminées dans ce plan par deux points (distincts) donnés par leurs coordonnées: M(x, y) et M'(x', y'). Un point T du plan appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires, ce qui se traduit dans ce cas particulier par:

$$T(X, Y) \in D \Longleftrightarrow \frac{(X - x)(y' - y) - (y - Y)(x - x')}{p} \in \mathbb{Z}$$

Il suffit alors de balayer tous les points du plan et de marquer ceux pour lesquels la relation précédente est vérifiée.

Il est également possible de construire un second programme qui trace deux droites (définies par deux couples de points) et qui détermine leur intersection. La vérification de la plupart des propriétés devient alors relativement simple. Citons, par exemple, la vérification de l'axiome d'Euclide: une droite D_1 étant tracée à l'aide du premier programme, on choisit un point H extérieur à cette droite. A l'aide du second programme, on trace D_1 et toutes les droites contenant H. On vérifie alors qu'il existe une droite unique contenant H et d'intersection vide avec D_1; c'est la parallèle à D_1 passant par H.

Voici la figure obtenue pour $p = 13$ et les deux droites définies respectivement par A(2;9) , A'(4;7) , et B(12;11) , B'(3;10) :



● désigne les points de la première droite,

O désigne les points de la seconde droite,

□ est le point d'intersection

e) Autour d'un thème ...

S'il est un thème simple à mettre en œuvre à tous les niveaux de l'enseignement et qui reste très motivant pour nos élèves, c'est bien celui de l'étude des différentes méthodes de "calcul" de π . Proposons "en vrac" quelques applications en classe, soutenues par l'emploi de calculatrices.

π comme constante physique

Il s'agit ici d'effectuer une expérience, au sens du physicien, en vue de fournir une valeur "utilisable" de π , et d'abord de constater que la circonférence d'un cercle semble proportionnelle à son rayon.

Donnons-nous un échantillonnage, le plus vaste possible, de "cercles physiques" (boîtes de conserves non cabossées, flacons divers, rouleaux de papier, etc...), c'est-à-dire en fait de cylindres à base circulaire. L'expérience consiste alors à enrouler autour du cylindre une bande de papier fixée par du ruban adhésif, à pointer celle-ci et à comparer la mesure ainsi obtenue de la circonférence à celle du diamètre.

L'exploitation des résultats précédents à l'aide d'une calculatrice permet un grand nombre de mesures et donne en général des résultats très honorables. Cette expérience constitue une excellente occasion d'introduire les notions d'encadrement, d'erreur et d'incertitude, ainsi qu'une réflexion sur la notion d'expérience en liaison avec le professeur de physique (puisque celle-ci est introduite en sixième et en cinquième).

Des méthodes géométriques

Ayant mis physiquement en évidence la formule $c = 2\pi R$, nous pouvons alors tenter de fournir mathématiquement une approximation de π . En particulier, nous pouvons proposer la méthode géométrique employée par Archimède: encadrer π par les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle. Par exemple, le périmètre p_{2n} du polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1 vérifie la formule de récurrence suivante :

$$p_{2n} = 2\sqrt{n\left(2n - \sqrt{4n^2 - p_n^2}\right)} \quad \text{et} \quad p_{2\times 3} = 6 \quad ,$$

où p_n est le périmètre du polygone régulier inscrit ayant 2 fois moins de côtés.

Malheureusement, avec une petite machine, les deux racines carrées imbriquées provoquent des accumulations d'erreurs d'arrondi successives, et il y a divergence ! (voir aussi Chapitre I, § VII).

Les méthodes de l'analyse

Les méthodes classiques d'approche de π par la formule de Wallis, les sommes de séries ou les produits infinis donnent en général des résultats médiocres dus à une trop faible vitesse de convergence. Le problème de l'amélioration de celle-ci est traité par J. Martinie dans la brochure numéro 75 de l'I.N.R.D.P., page 103 et reprise, pour π , par J. Ténier dans le compte rendu du groupe "Analyse" du colloque "Calculateurs programmables" de CARRY-LE-ROUET, juin 1976, page 7.

Une méthode statistique

Cette méthode est, elle aussi, proposée par J. Ténier (op. cit.): c'est une méthode de Monte-Carlo qui consiste à tirer des points au hasard dans le carré de côté 2 et à dénombrer ceux qui sont intérieurs au cercle inscrit, qui a donc 1 pour rayon. La probabilité de tirer un point du disque est égale au quotient des surfaces, soit $\pi/4$. Donc, en appliquant la loi des grands nombres, la limite du rapport du nombre de points tirés dans le disque au nombre total de points tirés au hasard dans le carré est $\pi/4$. L'exemple traité (avec tirage de 100 000 points sur une HP 25) est malheureusement loin d'être probant quand à la vitesse de convergence.

Notons qu'une simulation de la méthode de Buffon donne de meilleurs résultats, mais est plus délicate à mettre en œuvre .

III - MODELISER ET SIMULER

Modéliser

Modéliser une situation, c'est écrire l'algorithme d'évolution de la situation. Cette évolution est parfaitement déterminée et ne dépend que des valeurs initiales des paramètres intervenant dans le phénomène.

On peut, sur calculatrice ou ordinateur, faire "fonctionner" le modèle pour différentes valeurs des paramètres et observer dans chaque cas l'évolution du phénomène.

Simuler

Il semble raisonnable d'appeler simulation une "modélisation" où intervient le hasard (et qui ne serait donc pas une modélisation comme on l'entend ci-dessus).

Le phénomène acquiert alors une "vie propre" et son évolution est aléatoire (dans un certain domaine bien entendu).

Dans les exemples qui suivent, le paragraphe D décrit des modélisations, les paragraphes A, B et C décrivent des simulations.

On pourrait peut-être simuler la réfraction d'un rayon lumineux à travers un dioptre en se plaçant à l'échelle corpusculaire et en envoyant des photons à travers deux milieux différents représentés par leurs structures moléculaires. Le "choc" d'un photon sur un atome serait alors aléatoire en fonction de la disposition de ces derniers.

En tout cas, dans certaines matières, comme la physique, la chimie ou les sciences naturelles, les élèves font des travaux pratiques qui leur permettent de monter des expériences, d'observer des phénomènes, de provoquer et d'étudier des réactions.

En mathématiques, on peut utiliser l'informatique pour construire des modèles (simulant des phénomènes concrets) et les expérimenter. L'intérêt pédagogique est multiple:

- L'élève construit un modèle mathématique s'adaptant à une situation précise.
- Il contrôle son modèle; il peut le faire évoluer à sa guise en modifiant des paramètres.
- Il observe les résultats et en tire des conséquences.

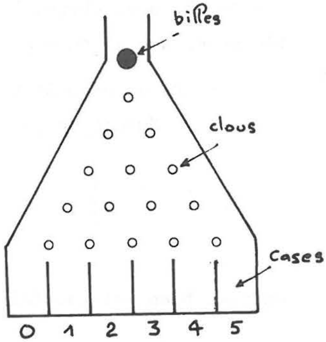
Malheureusement, si certaines simulations sont possibles sur du petit matériel (HP 25 ; 65 ; ...) d'autres ne sont réalisables que sur des calculateurs plus sophistiqués (HP 10 avec table traçante, MITRA 15, ...) .

Voici quelques exemples:

A) *La planche de GALTON*

1. Description

C'est une planche à clous sur laquelle on fait rouler des billes. Les clous sont disposés régulièrement (voir dessin) et la distance entre deux clous voisins est légèrement supérieure au diamètre des billes.



La planche étant inclinée , on lâche les billes une à une. On suppose qu'après chaque choc la bille a la même probabilité, $\frac{1}{2}$,de dévier à droite qu'à gauche.

2. Simulation

La simulation est très simple. On peut même se passer de calculatrice en jouant à pile ou face la direction que la bille va prendre sur chaque clou.

Si la planche possède n rangées de clous, il y aura n+1 cases numérotées de 0 à n. La simulation est alors simplifiée par la remarque suivante: Si l'on ajoute après chaque choc 0 si la boule va à gauche, 1 si la boule va à droite, on obtient exactement le numéro de la case d'arrivée.

3. Aspects mathématiques

La bille a d'autant plus de chances d'arriver dans une case qu'il y a de chemins qui y conduisent. Or il y a C_n^i chemins qui aboutissent à la case numéro i (il suffit en effet de choisir i "droite" sur n chocs) et 2^n chemins en tout. La probabilité d'arriver en i est donc $\frac{C_n^i}{2^n}$. Il est pratique de lâcher 2^k boules $(k \geqslant n)$; ainsi théoriquement la case numéro i contiendra $2^{k-n}\, C_n^i$ boules.

On peut "corser" un peu le problème en inclinant l'axe de la planche de façon que la probabilité de passer à gauche soit p (et celle de passer à droite $1 - p$). Le nombre des boules théoriquement contenues dans la case i devient alors (pour 2^k boules lâchées) $2^{k-n}\, C_n^i\, p^i\, (1 - p)^{n-i}$.

4. Exploitation

Sur des petites calculatrices programmables comme HP 25 on peut (si l'on n'est pas trop pressé !) simuler la planche de Galton de la façon suivante:

Il suffit de ne considérer qu'une case à la fois (par exemple la case numéro i); pour chaque boule lâchée, on calcule le numéro k de la case d'arrivée et si k = i on ajoute 1 à un compteur.

Voici un exemple pour 256 boules:

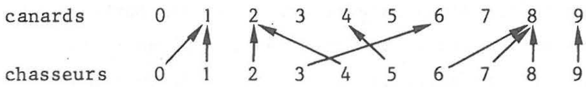
Numéro de la case	Nombre obtenu	Nombre théorique
0	9	16
1	66	64
2	106	96
3	58	64
4	17	16

On peut bien entendu faire varier le nombre de boules et le nombre de cases.

B) *La chasse aux canards*

1. Description

Dix chasseurs sont embusqués près d'un étang; dix canards se posent sur l'étang. Les chasseurs doivent tirer en même temps et ne peuvent pas se concerter; ils choisissent donc leur victime au hasard. On suppose qu'ils ne la manquent jamais. Combien de canards survivront en moyenne ?



2. Simulation

Il suffit de choisir dix nombres au hasard entre 0 et 9 et de compter les numéros n'y figurant pas.

Par exemple : 1 1 2 6 2 4 8 8 8 9 : il y a 4 survivants (0 , 3 , 5 et 7) .

On répète cette expérience N fois et on calcule le nombre moyen de survivants.

3. Différentes approches mathématiques possibles

On peut mathématiser la situation de plusieurs façons:

- En utilisant le nombre S_{10}^{k} de surjections de l'ensemble des dix chasseurs dans l'ensemble des k canards tirés.
- En utilisant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)$
- Ou bien en utilisant les combinaisons avec répétition (les chasseurs tirant sur le même canard sont dans un même tiroir).

4. Exploitation

On peut déjà programmer cette simulation sur HP 25 mais c'est plus commode sur ordinateur.

On trouve pour 10 chasseurs et 10 canards une moyenne de survivants comprise entre 3 et 4 (le résultat théorique étant 3,48...)

Il est possible bien entendu de faire varier le nombre de chasseurs, le nombre de canards et le nombre de tirs.

C) *Equilibre entre deux espèces*

1. Description

Il y a beaucoup d'exemples dans ce domaine, plus ou moins compliqués; en voici un qui a été élaboré par l'I.R.E.M. de STRASBOURG et qui a l'avantage de tenir compte des positions relatives des individus.

Dans une région se trouvent en présence des renards et des coqs de bruyère. Les coqs sont atteints d'une maladie qui n'est pas mortelle mais qui les rend vulnérables aux renards. Plus précisément, si un renard rencontre un coq de bruyère malade, il le mange; si le coq est sain, le renard n'arrive pas à l'attraper. On suppose en outre que si un coq malade rencontre un coq sain, il le contamine. Les coqs ne manquent pas de nourriture dans la région mais s'ils sont peu nombreux les renards peuvent manquer de nourriture et un certain nombre d'entre eux disparaîtra. Chaque population, isolément, a un taux de reproduction constant.

2. Simulation

La région est simulée par 80 cases correspondant à 8 hectares.
Les renards et les coqs se déplacent au hasard sur cette grille, c'est-à-dire qu'à chaque instant on tire au hasard le numéro de la case de chaque animal (un nombre aléatoire entre 1 et 80). Deux animaux se rencontrent s'ils sont dans la même case. A chaque instant, une certaine proportion des renards n'ayant rien mangé disparaît.

L'intérêt de cette simulation est de permettre aux élèves, en faisant varier les paramètres (nombre d'individus, proportion de malades, taux de reproduction, proportion de renards qui disparaît lorsque la nourriture manque) de constater des phénomènes très différents allant de l'extinction de la population des renards à un équilibre relatif des renards et des coqs.

On peut également, en modifiant la surface de la région, augmenter ou diminuer la probabilité de rencontre.

3. Résultats

Voici deux exploitations d'un programme réalisé sur MITRA 15 (Figures 1 et 2).

```
DONNER L'OPTION 1:NOMBRES  2:COURBES  2
DONNER LE NOMBRE DE RENARDS  10
DONNER LE NOMBRE DE COQS 10
DONNER LA PROPORTION DE MALADES 0.4
DONNER LE TAUX DE CROISSANCE DES RENARDS ET DES COQS 0.2 0.2
DONNER LA PROPORTION DES MORTS DE FAIM 0.2
DONNER TMAX,PER1000 1
DONNER LA SURFACE  EN ARES  8
40.00 %
34.00 %
34.00 %
34.00 %
36.00 %
36.00 %
41.00 %
46.00 %
56.00 %
67.00 %
70.00 %
76.00 %
89.00 %
91.00 %
97.00 %
97.00 %
98.00 %
98.00 %
98.00 %
97.00 %
98.00 %
97.00 %
96.00 %
97.00 %
96.00 %
94.00 %
91.00 %
81.00 %
74.00 %
64.00 %
58.00 %
38.00 %
23.00 %
23.00 %
40.00 %
31.00 %
20.00 %
8.00 %
8.00 %
8.00 %
8.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
1.00 %
3.00 %
1.00 %
```

proportion de coqs malades

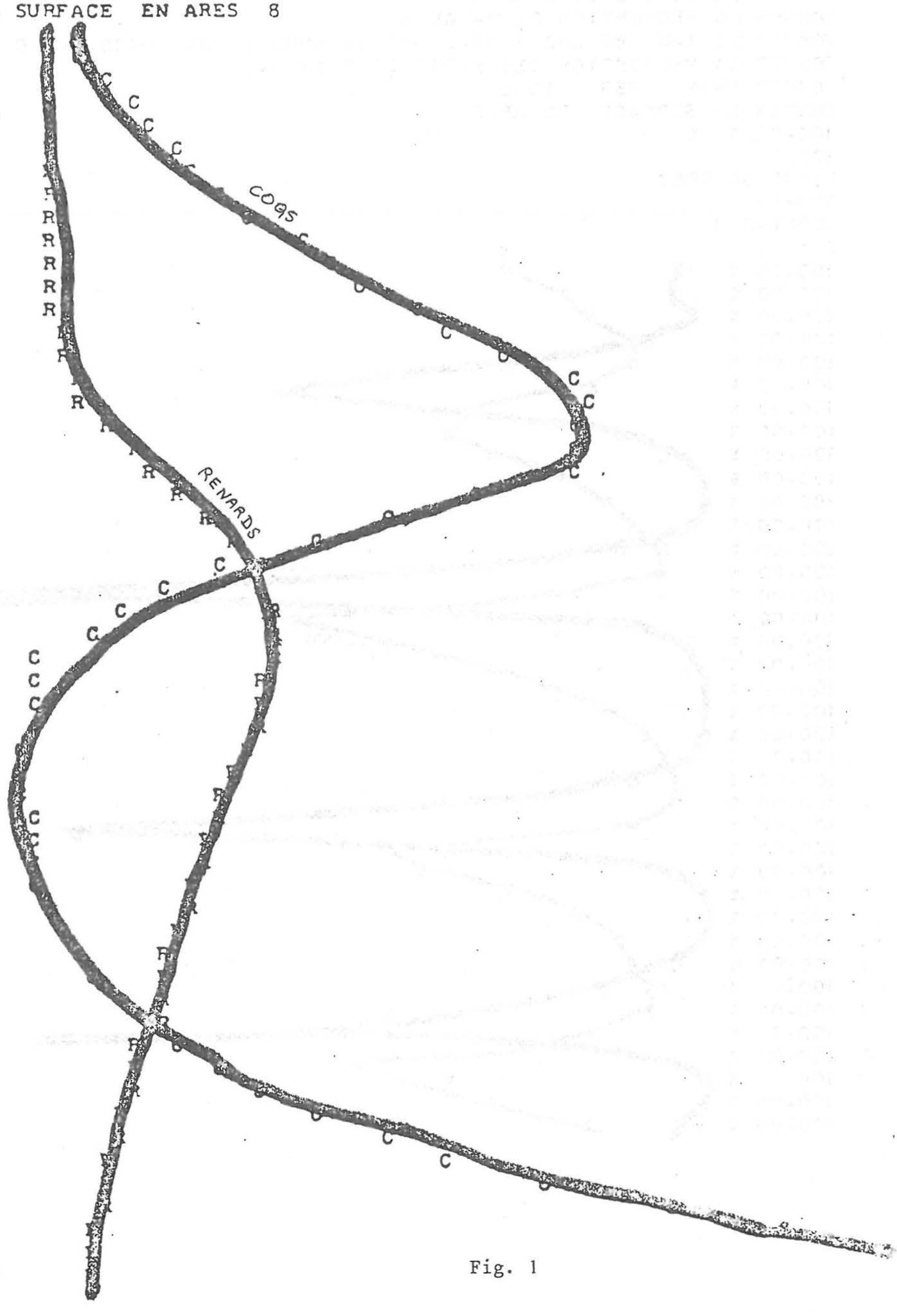


Fig. 1

```
DONNER L'OPTION 1:NOMBRES  2:COURBES  2
DONNER LE NOMBRE DE RENARDS  40
DONNER LE NOMBRE DE COQS 4
DONNER LA PROPORTION DE MALADES 1
DONNER LE TAUX DE CROISSANCE DES RENARDS ET DES COQS 0.2 0.2
DONNER LA PROPORTION DES MORTS DE FAIM 0.2
DONNER TMAX   PER   1000 1
DONNER LA SURFACE  EN ARES  10
100.00 %  C                   R
100.0
LIGNE 54 PRET
PER←10
CONTINUER
0 %  C
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
100.00 %
```

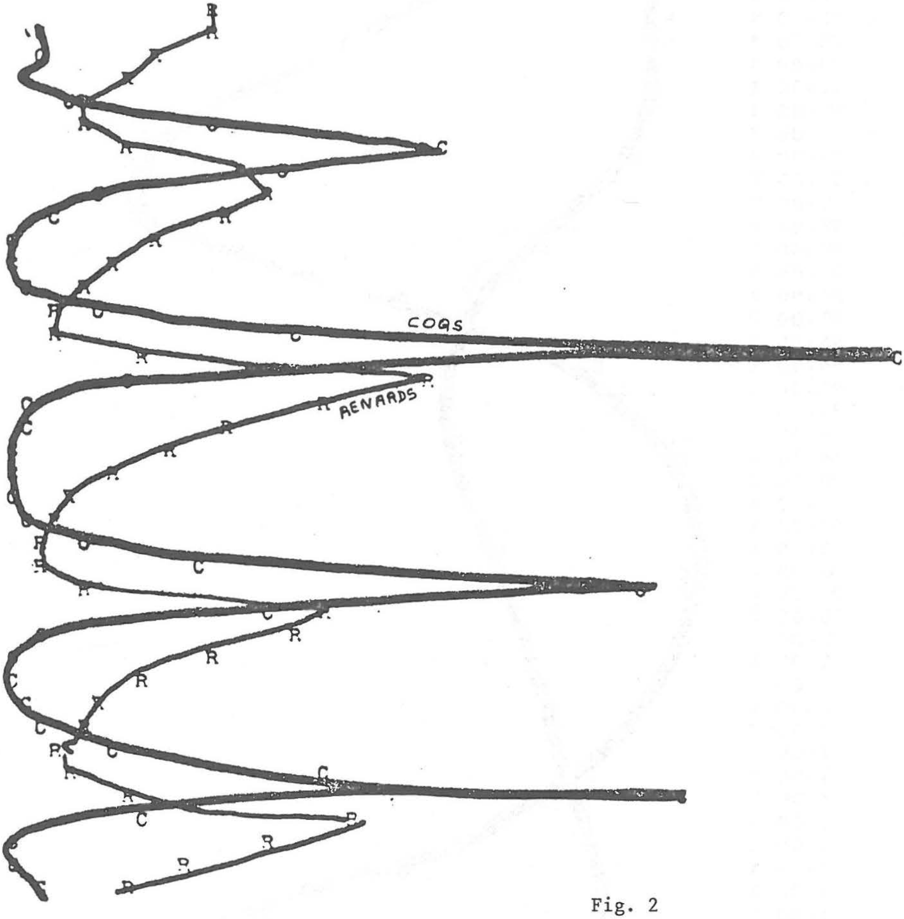
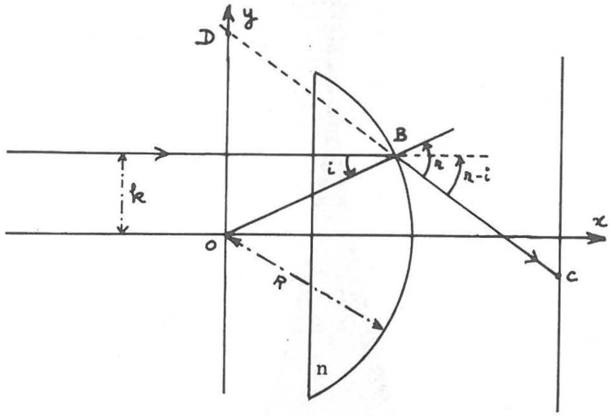


Fig. 2

D) *Simulations utilisant une table traçante*

Les résultats, souvent spectaculaires, suscitent l'intérêt des élèves. Des travaux ont été effectués sur HP 10 par les I.R.E.M. de LYON et de GRENOBLE aussi bien en optique qu'en électricité.

1. Lentille plan convexe recevant la lumière par la face plane



L'équation de la droite BC est

$$y = k + \operatorname{tg}(r - i)\left[\sqrt{R^2 - k^2} - x\right]$$

Or $\sin i = \frac{k}{R}$; $\sin r = n \sin i = \frac{nk}{R}$ d'où

$$y = k + \operatorname{tg}\left(\operatorname{Arc}\sin\frac{nk}{R} - \operatorname{Arc}\sin\frac{k}{R}\right) \times \left[\sqrt{R^2 - k^2} - x\right]$$

En prenant par exemple, pour abscisse de C, $x = 4R$ et en faisant varier k de façon régulière, on obtient la figure 3.

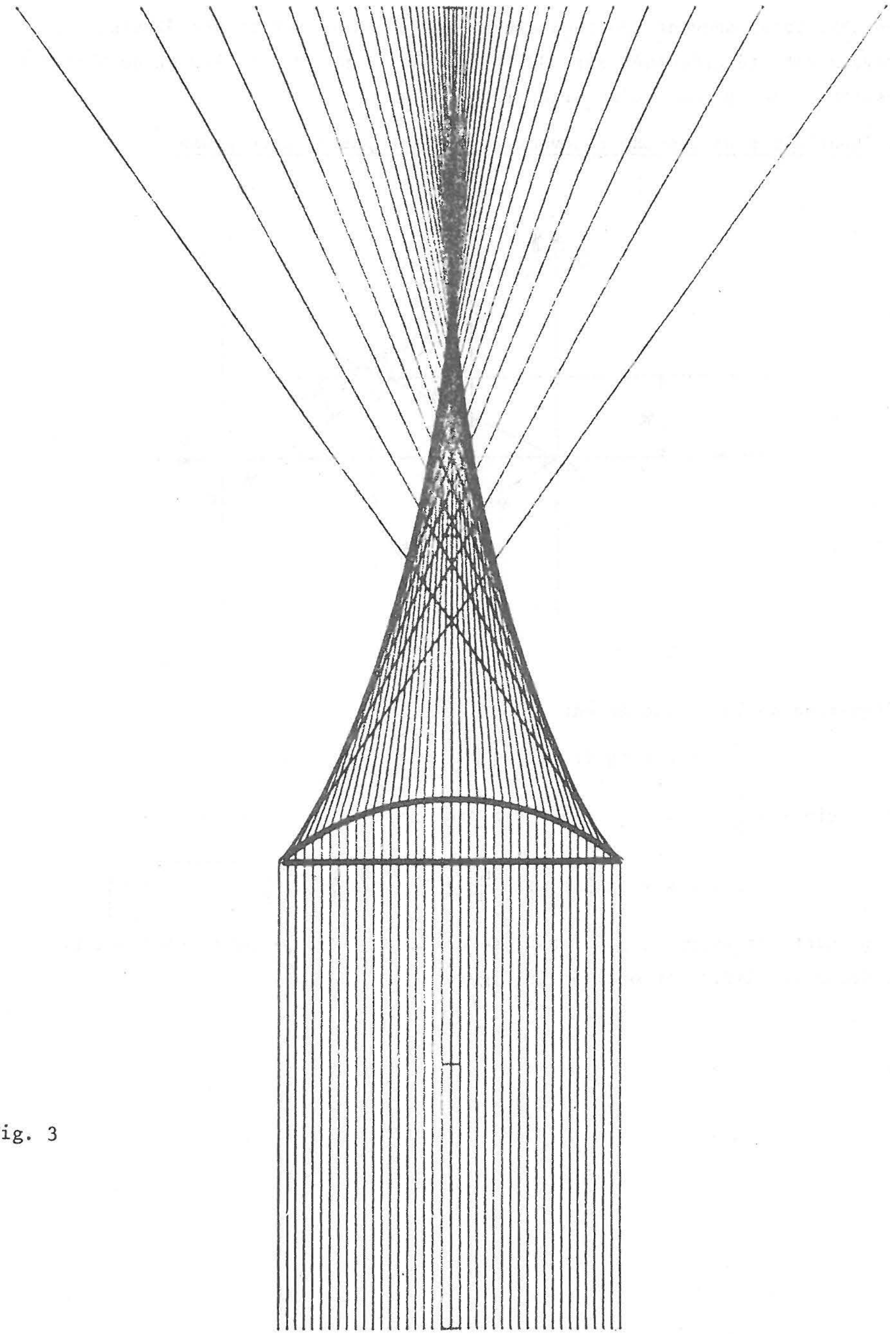
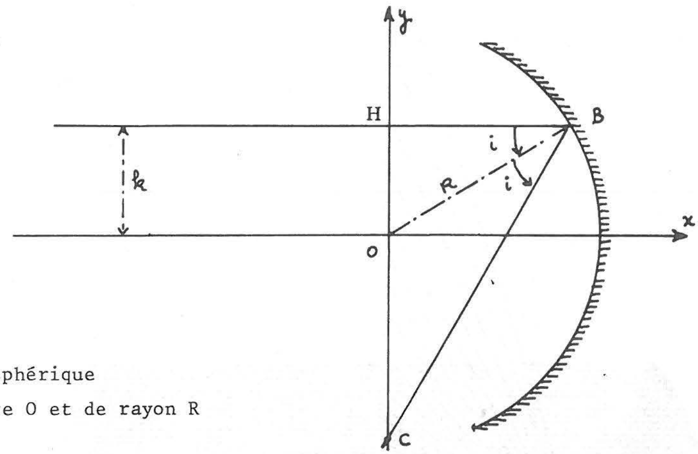


Fig. 3

2. Miroir sphérique recevant un faisceau de lumière parallèle



Miroir sphérique
de centre O et de rayon R

Soit y l'ordonnée de C . $\qquad \operatorname{tg} i = \dfrac{|k|}{HB}$

$$\operatorname{tg} 2i = \frac{|y| + |k|}{HB} = \frac{2 \operatorname{tg} i}{1 - \operatorname{tg}^2 i}$$

d'où, si $\quad y < 0 \quad$ et $\quad 0 < k < \dfrac{R}{\sqrt{2}} \quad$:

$$y = \frac{- k R^2}{R^2 - 2 k^2}$$

A chaque valeur de k correspond un rayon lumineux. En faisant varier k de $-\dfrac{R}{1,7} = -30$ à $\dfrac{R}{1,7} = 30$, on obtient les 60 rayons lumineux de la figure 4.

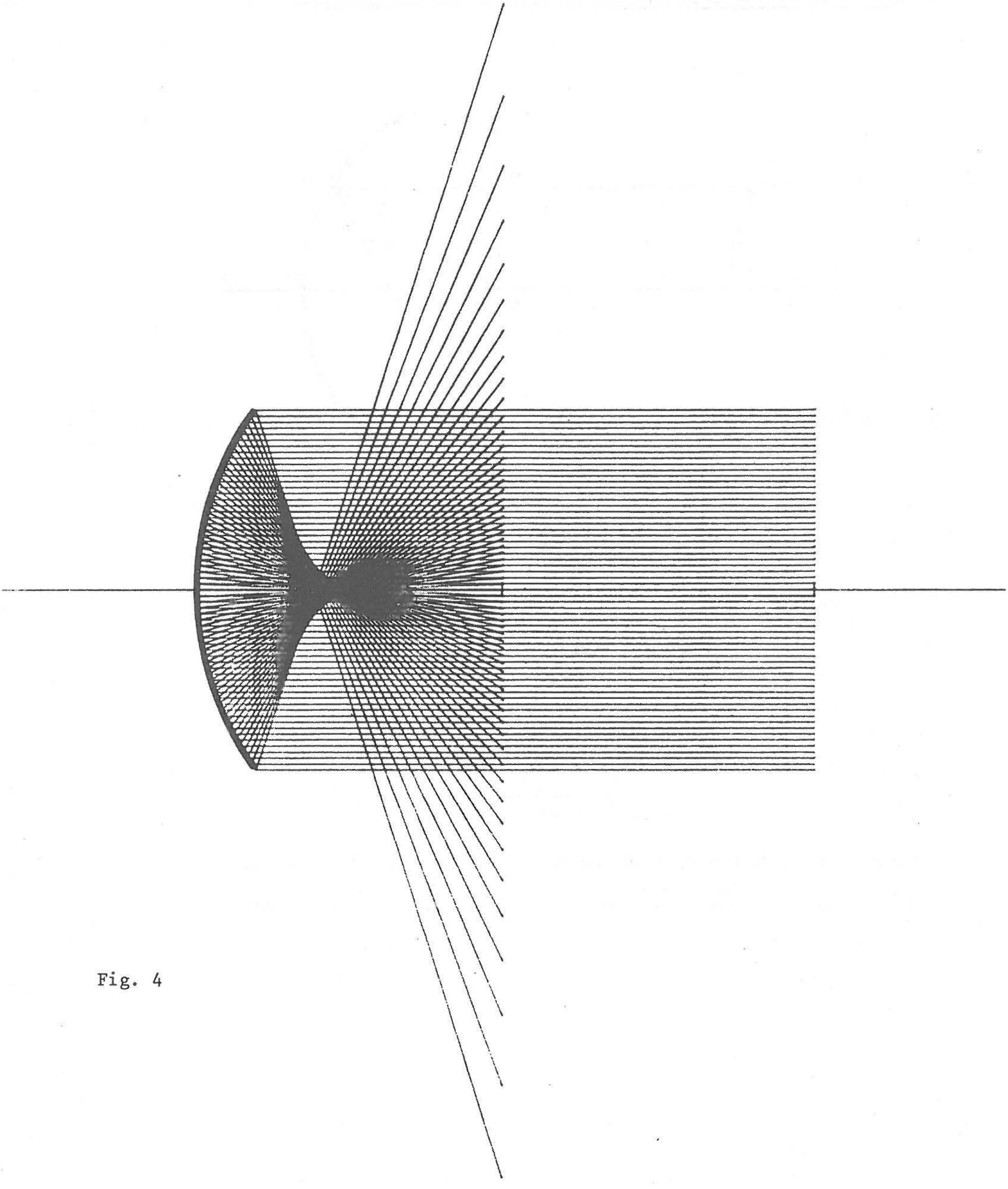


Fig. 4

3. Electricité

Le champ électrique créé par une charge q située en A a pour valeur en un point M :

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{q}{d^3}\overrightarrow{AM} \qquad \text{où} \qquad d = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$$

Si on place plusieurs charges q_1 , q_2 , ..., q_n en des points A_1 , A_2 , ..., A_n , le champ créé en M est alors

$$\overrightarrow{E_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{d_i^{\,3}} \overrightarrow{A_iM}$$

Les lignes de champ sont des courbes tangentes au vecteur champ en chacun de leurs points. Avec une table traçante on tracera des lignes polygonales voisines des lignes de champ de la façon suivante:

On détermine le champ en M puis on trace MM' tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{E_M}$, la distance MM' étant "petite", puis on recommence avec M' .

Dans le cas de 3 charges, on obtient la figure 5 .

BIBLIOGRAPHIE

- "Utilisation d'un ordinateur et d'une table traçante en optique"
I.R.E.M. de LYON (mai 1976)

- "Planche de Galton et chasse aux canards"
Gilles MOUNIER

- Champ électrique J.C. MONNET - I.R.E.M. de GRENOBLE

- Renards et coqs - "Informatique, quand tu nous tiens" -
I.R.E.M. de STRASBOURG

Les organigrammes et programmes dont il est question sont disponibles sur demande expresse.

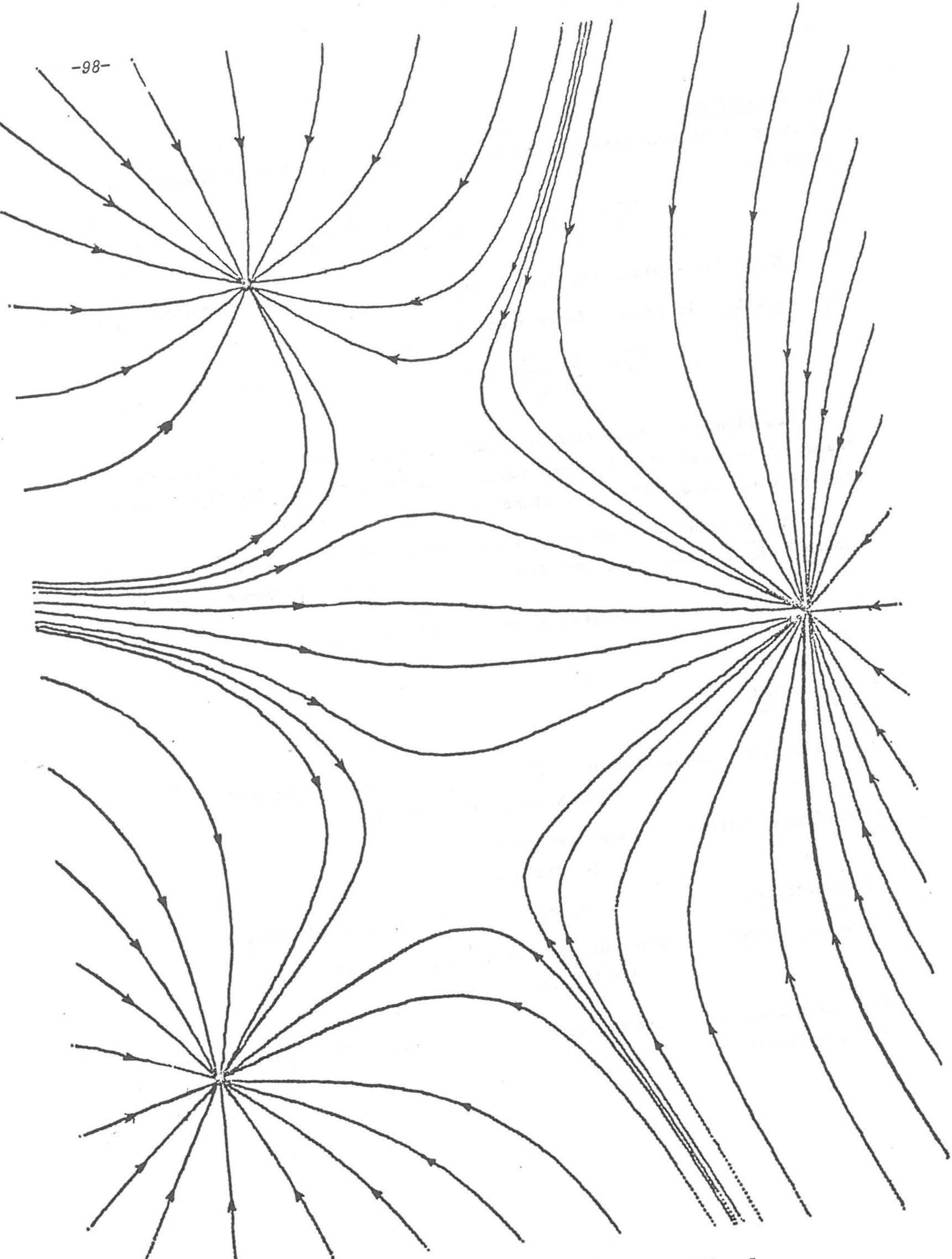


Fig. 5

(IV) - LA SIMULATION ALEATOIRE ...

Les qualités les plus évidentes d'un ordinateur sont peut-être la *rapidité* d'exécution et la possibilité de faire des *répétitions* d'une même séquence en nombre aussi grand que l'on veut.

Si de plus, il possède un programme interne de *génération de nombres au hasard*, il est, par sa rapidité, un outil extraordinairement rapide pour la simulation de phénomènes aléatoires. Il permet de fabriquer des suites de "coups" ou "tirages" suivant des distributions diverses calculées à partir de la distribution uniforme sur [0 ; 1] : schémas de Bernoulli, chaînes de Markov et tout processus complexe.

a) Dans le domaine des probabilités, il existe à présent dix films Super 8 de 5 minutes chacun dont l'Ofrateme assure la diffusion des copies:

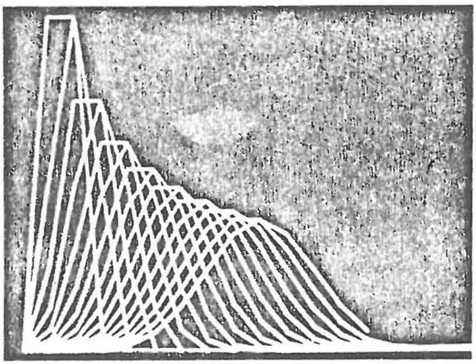
1. "Schéma de Bernoulli - Loi des grands nombres";
2. "Convergence de la distribution binomiale vers la courbe en cloche de Laplace-Gauss - Cas symétrique" ;
3. "Convergence de la distribution binomiale vers la courbe en cloche de Laplace-Gauss. Cas dissymétrique".
4. 5. 6. 7. "Urne de Polya" , 4 films de 5 minutes.
8. 9. 10. "Loi des grands nombres dans le plan", 3 films de 5 minutes.

Voici un exemple d'images particulièrement parlantes en provenance d'un écran graphique "Tektronix" :

Distributions binomiales pour un nombre de plus en plus grand de coups

(probabilité de succès
P = 0,5).

(Film 2.)



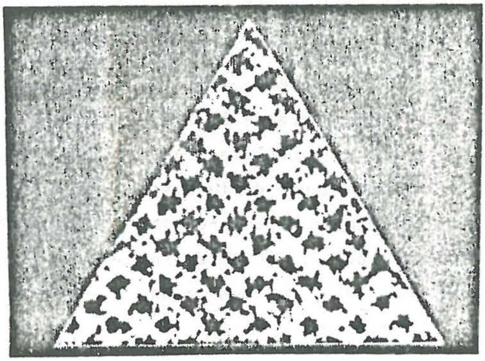
b) Rien n'est en effet moins éloquent qu'un tableau de nombres. Cela est évident sur les représentations suivantes.
Il s'agit de tirages de points dans un triangle à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Le programme est exécuté:

1. d'abord en fournissant les coordonnées x, y du point,
2. puis en inscrivant le point dans le triangle, sur la console graphique.

Grâce à cette dernière illustration, il apparaît rapidement que, contrairement à ce que l'on attendait, la répartition n'est pas uniforme dans le triangle et, cela étant rendu évident, il est possible de le démontrer en étudiant de plus près le générateur.

439.9075	476.8405
406.9632	86.06772
702.2707	247.5477
800.7177	273.4596
308.52	180.5278
463.2119	439.516
421.0228	406.0109
519.4596	310.0292
589.7653	51.02687
800.7106	84.54761
195.5718	118.8234
570.4417	233.8428
260.6102	260.512
312.0375	105.8888
297.9665	17.51292
424.5351	26.64824
635.4727	549.2112
255.7862	150.0714
241.7186	43.41454
818.2907	34.27029
466.7317	559.8554
537.0486	405.9959
522.9845	299.3539
649.5325	95.20072
746.2192	279.5665
521.227	424.2786
380.5901	55.61708
886.8428	20.55712
408.7145	98.25008
[illegible]	217.0803
	[illegible]

(tirages)



Représentation de ces tirages
(ici environ 5 000).

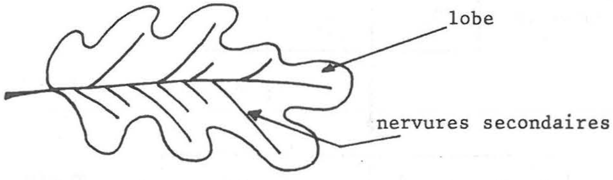
(V) - VERS LA PLURIDISCIPLINARITE

Après les probabilités, les statistiques sont les grandes bénéficiaires de la possibilité d'intervention des machines.

A titre d'exemple, voici deux thèmes de travail proposés aux élèves par leurs professeurs du lycée de Vannes (utilisation d'une HP 10).

a) <u>Les paramètres statistiques élémentaires</u>

1. Etablir deux tableaux de distribution de fréquence; pour l'un la variable α sera le nombre de lobes de chaque feuille d'un lot de feuilles prises au hasard dans une population de chênes pédonculés; pour l'autre, la variable sera le nombre de nervures secondaires de ces mêmes feuilles.



2. Faire une représentation graphique pour chaque distribution sous la forme d'un polygone de fréquence.

3. Pour chaque distribution, indiquer:
   - le mode
   - la moyenne arithmétique
   - l'écart-type.

4. Comparer les résultats obtenus et essayer d'en tirer quelques conclusions d'ordre biologique.

(On s'aidera de l'ordinateur pour apporter des données complémentaires permettant d'améliorer nos conclusions).

N.B. - Lors de l'étude du chapitre de biométrie, tous les élèves ont appris à construire les courbes et à calculer les paramètres de façon classique à partir de cet exemple. Lors du cours suivant, avec un programme préétabli, dans la salle de l'ordinateur, une synthèse a été effectuée en exploitant les résultats obtenus par les deux groupes de T.P. .

b) <u>Ecologie et test du</u> χ^2

Au cours d'une excursion écologique, on demande de constater dans deux carrés de $1 m^2$ chacun si deux espèces A et B, choisies à l'avance, sont présentes ensemble ou non.
Avec une classe entière, on peut obtenir plus de cinquante échantillons examinés.

		espèce B présente	espèce B absente
espèce A	présente	O_1	O_2
	absente	O_4	O_3

Présentation des observations.

$$N = O_1 + O_2 + O_3 + O_4$$

$\frac{(O_1+O_2)(O_1+O_4)}{N} = C_1$	$\frac{(O_1+O_2)(O_2+O_3)}{N} = C_2$
$\frac{(O_1+O_4)(O_3+O_4)}{N} = C_4$	$\frac{(O_2+O_3)(O_3+O_4)}{N} = C_3$

On peut, des résultats observés, déduire une distribution théorique qui correspondrait, pour le même nombre d'échantillons, à une répartition au hasard.

La comparaison de ces tableaux permet d'envisager si les différences observées entre les données pratiques et les données théoriques sont attribuables au hasard ou si ces différences peuvent s'expliquer par autre chose.

Dans ce dernier cas:

$C_1 > O_1$ traduit une séparation des deux espèces

$C_1 < O_1$ traduit une liaison entre les deux espèces.

La quantité: $\chi^2 = \Sigma \frac{(O - C)^2}{C}$ est une "mesure" des différences entre les tableaux. "On" montre que, par exemple, si $\chi^2 > 11$, alors il y a moins de 1 chance sur 100 de se tromper en pensant que les différences observées ne sont pas dues au hasard.

Voici par exemple le résultat d'une statistique sur les moules et les pourpres d'un morceau de côte bretonne.

		Moules	
		Présent	Absent
Pourpres	Présent	30 O_1	8 O_2
	Absent	5 O_4	14 O_3

N = 57
(57 m^2 ont été explorés)

Y a-t-il une liaison entre la distribution de ces deux espèces ?

	Présent	Absent
Présent	23,3 C_1	14,6 C_2
Absent	11,6 C_4	7,3 C_3

N = 57

$\chi^2 = 14,80$

Pour $\nu = 3$ $\chi^2_{0,05} = 7,82$
$\chi^2_{0,01} = 11,3$

Cette distribution n'est pas conforme à celle attendue si seul le hasard intervient: $11,3 < 14,80$
avec $O_1 > C_1$

L'hypothèse d'une liaison entre les deux espèces est acceptable avec moins de 1% de chance pour que cette conclusion soit fausse.

O_1 3.000000000 01*
O_2 8.000000000 00*
O_3 1.400000000 01*
O_4 5.000000000 00*
N 5.700000000 01
C_1 2.333333333 01
C_2 1.466666667 01
C_3 7.333333333 00
C_4 1.166666667 01
χ^2 1.480519481 01

L'observation nous a permis d'envisager un lien de nourriture...

Les professeurs du lycée de Vannes jugent assez favorablement leurs expériences, comme on pourra le voir à la lecture de quelques-unes de leurs conclusions:

c) <u>Apports possibles</u>

Pour les élèves

- Meilleure conception de la machine: appareil à faire des calculs dans un ordre prévu à l'avance (moins "peur" de l'ordinateur).
- Pour certaines parties du programme (biométrie, valeur énergétique d'un menu), les élèves doivent réaliser de nombreux calculs, d'où une monotonie, une lassitude, des erreurs, ne permettant pas toujours d'exploiter les résultats. Avec la calculatrice, nous avons la possibilité de vérifier très vite les résultats, de multiplier les exemples, de les comparer, de consacrer plus de temps à la recherche de conclusions d'ordre biologique.
  (Nous ne négligeons pas pour autant le calcul par la méthode classique, nous l'écourtons. Le principe doit en être parfaitement bien compris pour construire un programme).
- Prise de conscience de la nécessité d'être soucieux du détail, d'être toujours attentif.
  Des erreurs se glissent facilement dans ce genre de travail, elles sont toujours imputables à l'homme. L'élève accepte volontiers cette critique sévère.
- Prise de conscience de l'importance de l'ordre dans l'organisation rigoureuse d'une argumentation.
- Mise en évidence que les conclusions des disciplines expérimentales ont une base statistique (lien possible avec la philosophie).

Pour la pédagogie en Sciences Naturelles

- Réponses plus critiques à certaines questions posées par l'introduction d'une argumentation numérique (les calculs longs sont escamotés).
- Possibilité de multiplier des exemples ou de choisir à titre d'essai les matériels les plus variés sans perte de temps.
- Meilleure compréhension de certaines parties du programme (biométrie) avec une meilleure liaison avec le programme de mathématiques.

- L'application des mathématiques aux Sciences naturelles est à utiliser avec précaution (superposition d'une courbe de Gauss sur une distribution dissymétrique; une population hétérogène peut simuler une distribution normale).
- Travail plus étroit avec les collègues de mathématiques et de physique et aussi dans l'avenir probablement avec les professeurs de géographie (écologie) et de philosophie (biométrie, génétique, évolution).
- Il nous a semblé très intéressant de constater que les élèves ont apprécié de voir leurs professeurs résoudre des problèmes avec eux, en même temps qu'eux.

VI - L'ANALYSE

a) L'analyse en Terminale C

Il s'agit d'une expérience qui se déroule actuellement (année scolaire 1976-1977) au Lycée J. Amyot à Auxerre. Elle ne concerne que l'enseignement de l'analyse et respecte l'horaire et les programmes actuels de cette classe. Il s'agit ici, non pas de donner les conclusions de cette expérience encore en cours, ni de développer tous les objectifs, mais simplement de rendre compte de nos premières impressions, surtout par rapport à l'utilisation des calculatrices.

Les objectifs généraux de l'expérience tiennent déjà dans le titre officiel et pompeux de l'expérience: "Pour une approche heuristique des concepts d'analyse" et dans la belle devise que nous nous sommes trouvée: "comprendre d'abord, formaliser ensuite".

Notre idée de départ réside en un lieu commun: l'actuel enseignement de l'analyse, si certains peuvent le trouver satisfaisant d'un point de vue purement mathématique, ne donne pas satisfaction au niveau pédagogique. Si on essaie d'en déterminer le "rendement", c'est-à-dire de constater si les concepts enseignés, les théorèmes démontrés sont acquis, on s'aperçoit que chez la plupart des élèves les définitions sont en général connues mais le fonctionnement des concepts n'est pas maîtrisé. A la démarche actuelle que l'on pourrait caricaturer par le triplet (exemple introductif, formalisation des concepts, utilisations éventuelles) nous opposons une démarche fondamentalement différente: amener les élèves, par une manipulation active, à découvrir les concepts, même à les utiliser avant de les formaliser. La formalisation des concepts permet alors de leur donner un statut mathématique plus général et leur fonctionnement devient plus indépendant des modèles qui ont permis leurs premières manipulations.

Notre espoir et notre but sont qu'ainsi bien plus d'élèves puissent faire des mathématiques tout en arrivant à un degré de formalisation plus ou moins élevé selon leurs aptitudes. Evidemment, nous espérons aussi amener une plus grande masse d'élèves à une meilleure compréhension de l'analyse.

La réalisation pratique de ces objectifs nécessite de redonner une plus grande importance à des aspects quantitatifs et donc de disposer de moyens permettant d'accéder à de nombreux résultats numériques (par ailleurs, mais ce n'est pas l'objet ici de ce texte, nous attachons aussi une grande importance aux idées intuitives apportées par les représentations graphiques ou par de simples graffiti). Il était impossible d'obtenir "à la main" la masse des résultats nécessaires et c'est là que l'outil informatique devenait nécessaire.

Bien qu'initialement nous ayons hésité entre l'utilisation indirecte d'un ordinateur et l'utilisation directe de calculatrices programmables, nous avons finalement privilégié cette dernière option, toujours dans le souci de favoriser l'activité réelle des élèves. L'expérience se déroule dans le cadre des travaux de l'IREM de DIJON qui met à la disposition des élèves des calculatrices HP 25 (une machine pour deux élèves). Il est en outre prévu quelquefois une HP 15 avec table traçante. L'emploi de ces machines, à cause de leurs exigences au niveau de l'organisation des calculs et de la programmation, exige et développe chez les élèves des qualités d'analyse et de structuration des problèmes qui en soi sont déjà positives.

L'initiation des élèves à l'utilisation des machines a été réalisée très facilement (beaucoup plus facilement que nous le pensions, compte tenu du temps parfois mis par des adultes) en trois séances de deux heures chacune. Ces six heures sont les seules heures "perdues" par rapport au programme officiel, encore que pour cette initiation nous nous soyons servis du cours d'arithmétique de la classe et que l'étude d'organigrammes relatifs aux changements de bases, à l'algorithme d'Euclide et autres classiques de ce genre d'initiation n'ait pas été sans retombées quant à une meilleure compréhension du cours d'arithmétique.

Dans le cadre de l'Analyse, nous avons déjà abordé les thèmes suivants:

- approche des réels à partir de la caractérisation des rationnels par des développements décimaux périodiques;
- notion de convergence et de limite: étude de suites convergentes, différentes formes de divergence, rapidité de convergence.

Nous travaillons actuellement sur des fonctions numériques. Puis l'intégration sera abordée à partir de calculs approchés d'intégrales.

A propos des fonctions, l'étude de tableaux de valeurs suivie de représentations graphiques donne un éclairage différent à la notion de fonction et montre la nécessité de l'étude mathématique que les élèves effectuent habituellement de façon mécanique sans en percevoir l'intérêt. De même, les contingences d'utilisation de la table traçante obligent à une étude mathématique préalable même grossière.

L'aspect dialectique constant "étude avec machine - étude mathématique" donne une connaissance plus profonde des notions étudiées, amène les élèves à se poser des questions, à préciser certains points.

Remarquons à ce sujet que l'introduction de machines dans une classe de mathématiques, avec la nécessaire apparition du travail indépendant et en groupe, apporte un changement très net d'ambiance dans la classe et une remise en cause du rôle du professeur. Il faut là aussi signaler que certaines séances ont lieu avec deux professeurs dans la classe; cela aussi n'est pas sans conséquences sur l'ambiance d'une classe et on pourra s'interroger longuement sur le résultat de: un professeur + un professeur.

En tout cas, dans la classe considérée, il y a développement incontestable d'un esprit très critique; parfois même cette critique devient agressive et apparaît comme une remise en cause d'une certaine docilité vis-à-vis des impératifs du raisonnement mathématique.

Il reste maintenant à répondre à quelques critiques faites au sujet de cette expérience.

L'utilisation de calculateurs programmables dans l'enseignement de l'analyse conduit à des positions diverses. On trouvera dans le compte rendu du colloque inter-IREM de CARRY-LE-ROUET de juin 1976 (groupe Analyse) différents points de vue possibles.

Nous n'aborderons ici que les objections suivantes:
- la machine travaille sur un sous-ensemble de nombres décimaux; or le champ d'action de l'analyse est $\mathbb{R}$;
- la machine de démontre rien, elle peut même donner des idées fausses ou dangereuses.

Ces objections proviennent d'une mauvaise compréhension de l'utilisation que nous faisons des machines. Les élèves ont d'ailleurs conscience, dès les premières séances, de l'insuffisance de la machine, des valeurs approchées des résultats... Cette insuffisance devient alors une motivation à une étude théorique (et permet également de "démystifier" le "pouvoir" des machines); et la formalisation des concepts permet de se détacher de tout empirisme expérimental. Cette démarche évite, comme c'est trop souvent le cas actuellement, de faire rentrer les élèves de plain-pied dans le stade "fini" des mathématiques.

Il est difficile actuellement d'apporter une conclusion; est-il même possible d'en apporter une après une expérience portant sur une année scolaire et une seule classe ? Mais dès à présent, il semblerait que plutôt que de pouvoir améliorer considérablement l'actuel état des choses, il faudra à moyenne échéance repenser nos conceptions de l'enseignement de l'analyse: de l'enseignement et de l'analyse.

EXEMPLE:

Document de travail pour des élèves de T C

Première partie

A. D est la droite représentative de $x \mapsto y = x$
H est la courbe représentative de $\varphi : x \mapsto y = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

1) Tracez avec soin D et H sur un même repère orthonormé.
2) Calculez les coordonnées des points d'intersection. On appelle L celui dont les coordonnées sont *positives*.
3) On pose

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= \varphi(u_0) \\ u_2 &= \varphi(u_1) = \varphi \circ \varphi(u_0) = \varphi^2(u_0) \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= \varphi(u_{n-1}) = \varphi^n(u_0) \end{aligned}$$

$A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...$ désignent les points de x'0x et
$M_0, M_1, M_2, ..., M_n, ...$ les points de H d'abscisses
$u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$

A_1 (respectivement A_n) est la projection orthogonale sur x'0x de l'intersection de D avec la parallèle à x'0x en M_0 (respectivement M_{n-1}).

Que peut-on *voir* sur le graphique

a) pour les points M_n ?

b) pour la suite (u_n) ?

On ne s'occupe pas ici de justifier cette constatation expérimentale (voir la deuxième partie), mais en programmant la suite (u_n) sur la HP 25, calculez $u_1, u_2, ...$ et comparez ces valeurs à

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ ...$$

Remarquez que ce procédé donne même *sans machine* une très bonne approximation de $\sqrt{2}$ avec *très peu de calculs.*

B. H_a désigne la courbe représentative de la fonction

$$f_a : x \mapsto y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \qquad \text{avec } a > 0$$

$(H = H_2$ et $\varphi = f_2)$

Que donne la procédure décrite au paragraphe A, appliqué à D et à H_a ?

Application numérique sur la HP 25

Calculez $\sqrt{\pi}$ avec la meilleure approximation permise par la machine.

C. 1) Remarquez, en utilisant la courbe H, que la suite (u_n) tend vers $\sqrt{2}$ de façon *monotone.*

Montrez sur différents graphiques, en remplaçant H par des courbes C bien choisies que

a) la suite (u_n) peut converger vers sa limite ℓ de façon *alternée* :

$$\forall n \qquad (u_n - \ell)(u_{n+1} - \ell) < 0$$

b) la suite (u_n) peut diverger.

2) Montrez que l'opinion couramment admise selon laquelle si u_n et u_{n+1} ont, à partir de la *gauche*, un certain nombre de chiffres significatifs *communs*, ces chiffres sont «*définitivement exacts*», *peut être fausse.* En réalité, son usage fréquent se justifie par le fait qu'elle est «*souvent vraie*».

3) Montrez que la procédure mise en place est, *le plus souvent «autocorrective»*, c'est-à-dire que si une erreur de calcul est intervenue dans le calcul de u_k, la nouvelle suite $u'_{k+1}, u'_{k+2}, ...$ converge vers la même limite que la suite (u_n) obtenue sans erreur de calcul.

D. Appliquez à l'aide de la HP 25 la méthode pour résoudre les équations

$$x - \sin x - 0{,}25 = 0 \quad \text{(x est en radian)}$$
$$x^3 + x = 1\,000$$
$$x = \sqrt[3]{x} + 1$$

Deuxième partie

Dans la première partie, on s'est servi, pour trouver une racine approchée de certaines équations, d'une méthode où l'on a constaté *expérimentalement* la convergence (ou la divergence) d'une suite (u_n) vers une racine de l'équation.

Dans cette partie, on va étudier *rigoureusement* certaines conditions *suffisantes* de convergence.

Dans toute la suite on suppose

a) que l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

est mise sous la forme équivalente

$$f(x) = x \qquad (f(x) = x + \varphi(x))$$

b) qu'on sait *localiser* une racine dans un certain intervalle $[a, b]$ de façon grossière (indiquez le genre de procédé qu'on peut envisager dans ce but) ;

c) que f est *dérivable* au moins sur $[a, b]$;

d) que le théorème suivant (qui sera démontré en exercice) est vrai :

$$f \text{ est dérivable sur } [\alpha, \beta] \Rightarrow \exists \gamma, \gamma \in [\alpha, \beta] : f'(\gamma) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(C'est le théorème des *accroissements finis* : étudiez sa signification géométrique intuitive.)

(x_n) est la suite définie par

$$x_0 \in [a, b]$$
$$x_n = f(x_{n-1})$$

A. On suppose f *croissante* sur $[a, b]$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$.

1) Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

2) Démontrez que sa limite est une racine de l'équation $\varphi(x) = 0$.

B. On suppose que f est *décroissante* sur $[a, b]$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$.

1) Montrez alors que $f \circ f$ est *croissante* sur $[a, b]$
et que $f \circ f([a, b]) \subset [a, b]$.

2) En déduire que les suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) extraites de la suite (x_n) sont chacune convergentes.

Quelle hypothèse supplémentaire doit-on faire sur ces deux suites pour pouvoir conclure à la convergence de (x_n) ?

C. On suppose maintenant f *dérivable* (et on ne fait plus d'hypothèse quant à sa *monotonie*) et que

(i) $\exists k, k \in]0 ; 1[\quad \forall x, x \in [a, b] \ : \ |f'(x)| \leqslant k$

(ii) $f([a, b] \subset [a, b]$

1) Montrez que la racine qui est par hypothèse supposée exister dans [a, b] est, dans cet intervalle, *unique* (théorème des accroissements finis).

2) ℓ est l'unique racine dans [a, b].

Montrez que

$$|f(x) - \ell| < k|x - \ell|$$

(théorème des accroissements finis)

En déduire successivement :

$$\forall n \qquad |x_n - \ell| < k|x_{n-1} - \ell|$$

$$(1) \quad \forall n \qquad |x_n - \ell| < k^n|x_0 - \ell|$$

En conclure

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ell$$

3) En analysant l'inégalité (1), décrire des facteurs qui influent sur la rapidité de convergence de la suite (x_n).

b) Les débuts de l'analyse

Sur le thème du problème précédent, Maurice Glaymann a développé une "initiation aux méthodes itératives" à partir de l'usage de calculateurs pour de jeunes enfants. En voici le début:

1. Un exercice pour commencer

Voici une application de **R** vers **R** :

$$f : x \longmapsto 4 + \frac{x}{2}$$

Partons de la valeur 2 et appliquons f :

$$f : 2 \longmapsto 5$$

Appliquons à nouveau f :

$$f : 5 \longmapsto 6,5$$

Itérons plusieurs fois de suite f, il vient:

$$2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6,5 \longrightarrow 7,25 \longrightarrow 7,625 \longrightarrow \ldots$$

Les élèves peuvent faire leurs calculs avec une calculatrice et peuvent présenter leurs résultats à l'aide d'une table:

1	2
2	5
3	6,5
4	7,25
5	7,625
6	7,8125
7	7,90625
8	7,953125
9	7,9765625
10	7,98828125
11	7,994140625
12	7,997070313
13	7,998535157
14	7,999267579

Les calculs sont *arrondis* à la 9ième décimale. Nous obtenons une suite *croissante* qui *semble* converger vers 8.

Partons alors de la valeur 10 et appliquons plusieurs fois de suite f:

$$10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8{,}5 \longrightarrow 8{,}25 \longrightarrow \ldots$$

Les calculs arrondis à la 9ième décimale conduisent à la table suivante:

1	10
2	9
3	8,5
4	8,25
5	8,125
6	8,0625
7	8,03125
8	8,015625
9	8,0078125
10	8,00390625
11	8,001953125
12	8,000976563
13	8,000488282
14	8,000244141

Nous avons cette fois une suite *décroissante* qui *semble* elle aussi converger vers 8.

Que se passe-t-il maintenant si l'on part de la valeur 8 ? L'image de 8 par f est 8. En itérant le calcul, nous avons une suite constante: tous ses termes sont égaux à 8.

Il est intéressant de faire remarquer aux élèves que les réels qui sont *leur propre image par* f sont racines de l'équation

$$f(u) = u$$

soit

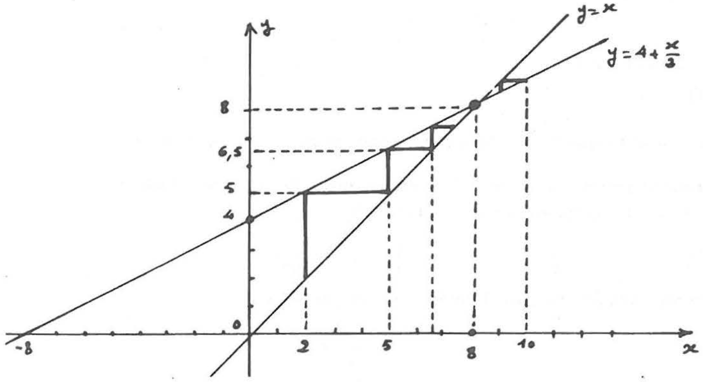
$$4 + \frac{u}{2} = u.$$

Cette équation admet pour *unique* racine le réel 8.

Proposons alors aux élèves de construire sur un même graphique les droites représentatives des équations

$$y = 4 + \frac{x}{2}$$

et $$y = x$$



Il est facile de 'voir' sur ce dessin que les deux suites précédentes (croissante et décroissante) *convergent* vers 8.

2. Comment prouver la convergence ?

La calculatrice d'une part, et le dessin d'autre part, suggèrent aux élèves la convergence des deux suites. Il est alors intéressant de leur faire découvrir des preuves qui permettent d'affirmer ou d'infirmer cette convergence.

Cependant, pour aller plus loin, il nous faut introduire quelques notations:

f est une application de R vers R.

La méthode précédente permet de construire une suite, en partant d'une valeur initiale x_0 :

$$x_1 = f(x_0) \quad , \quad x_2 = f(x_1) \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad , \quad \ldots.$$

Pour notre exemple, avec

$$f : x \longmapsto 4 + \frac{x}{2}$$

il vient

$$x_n = 4 + \frac{1}{2} x_{n-1}$$

et nous obtenons successivement

$$x_1 = 4 + \frac{1}{2} x_0$$

$$x_2 = 4 + \frac{1}{2} x_1 = 4 + \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{2} x_0)$$

$$= 4 + 2 + \frac{1}{2^2} x_0$$

$$x_3 = 4 + \frac{1}{2} x_2 = 4 + \frac{1}{2}(4 + 2 + \frac{1}{2^2} x_0)$$

$$= 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2^3} x_0$$

et plus généralement

$$x_n = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^n} x_0$$

En posant alors

(1) $$S_n = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}$$

on constate que S_n est la somme des n premiers termes de la progression géométrique dont le premier terme est 4 et la raison $\frac{1}{2}$.
Un calcul *classique* permet de calculer S_n :

(2) $$\frac{1}{2} S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-2}}$$

En retranchant membre à membre (1) et (2), il vient

$$\frac{1}{2} S_n = 4 - \frac{1}{2^{n-2}}$$

d'où $$S_n = 8 - \frac{1}{2^{n-3}}$$

et finalement

$$x_n = 8 - \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{x_0}{2^n}$$

résultat qui montre que *quel que soit* x_0, la suite (x_n) converge vers 8 .

Notons au passage qu'il est intéressant et instructif de faire construire aux élèves à l'aide de leur calculateur la table suivante:

n	2^n	$1 / 2^n$
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,0078125
8	256	0,00390625
9	512	0,001953125
10	1024	0,000976563
11	2048	0,000488281
12	4096	0,000244141
13	8192	0,000122070
14	16384	0,000061035
15	32768	0,000030518

Si l'on effectue les calculs avec deux décimales, $\frac{1}{2^n}$ est "*nul*" si $n \geqslant 8$, avec trois décimales, $\frac{1}{2^n}$ est "*nul*" si $n \geqslant 11$.

Pour quelles valeurs de n cette expression est-elle "*nulle*" lorsque l'on effectue les calculs avec 9 décimales ?

Il est utile de faire découvrir aux élèves que si l'on effectue les calculs avec plus de précision — donc avec plus de décimales — il faudra aller plus loin pour considérer $\frac{1}{2^n}$ comme nul, mais que *dans tous les cas, quelle que soit la précision choisie, à partir d'un certain rang,* $\frac{1}{2^n}$ *peut être considéré comme quantité négligeable.*

VII - AVEC UNE TABLE TRAÇANTE

La convergence de suites numériques,
l'existence d'une limite pour une fonction,
les positions respectives d'une courbe et de son asymptote,
la continuité ou la discontinuité d'une fonction,
....

autant de sujets que l'utilisation d'un traceur (programmable) de courbes permet d'illustrer mais aussi de motiver et d'expliquer.

. Le groupe "Table traçante et géométrie dans le second cycle" a choisi d'exploiter cet instrument pour une étude renouvelée des applications affines.

Les dessins obtenus en itérant ces applications ne se passent pas de commentaires (fig. 1 et 2) ! Le manque de place nous oblige à limiter à un exemple de fiche-élève les documents relatifs à cette expérimentation.

Quelques applications pédagogiques sont cependant développées par Jean Sargent: les liaisons algèbre linéaire - géométrie y sont éclairées d'un jour nouveau (tout au moins au niveau des classes du secondaire).

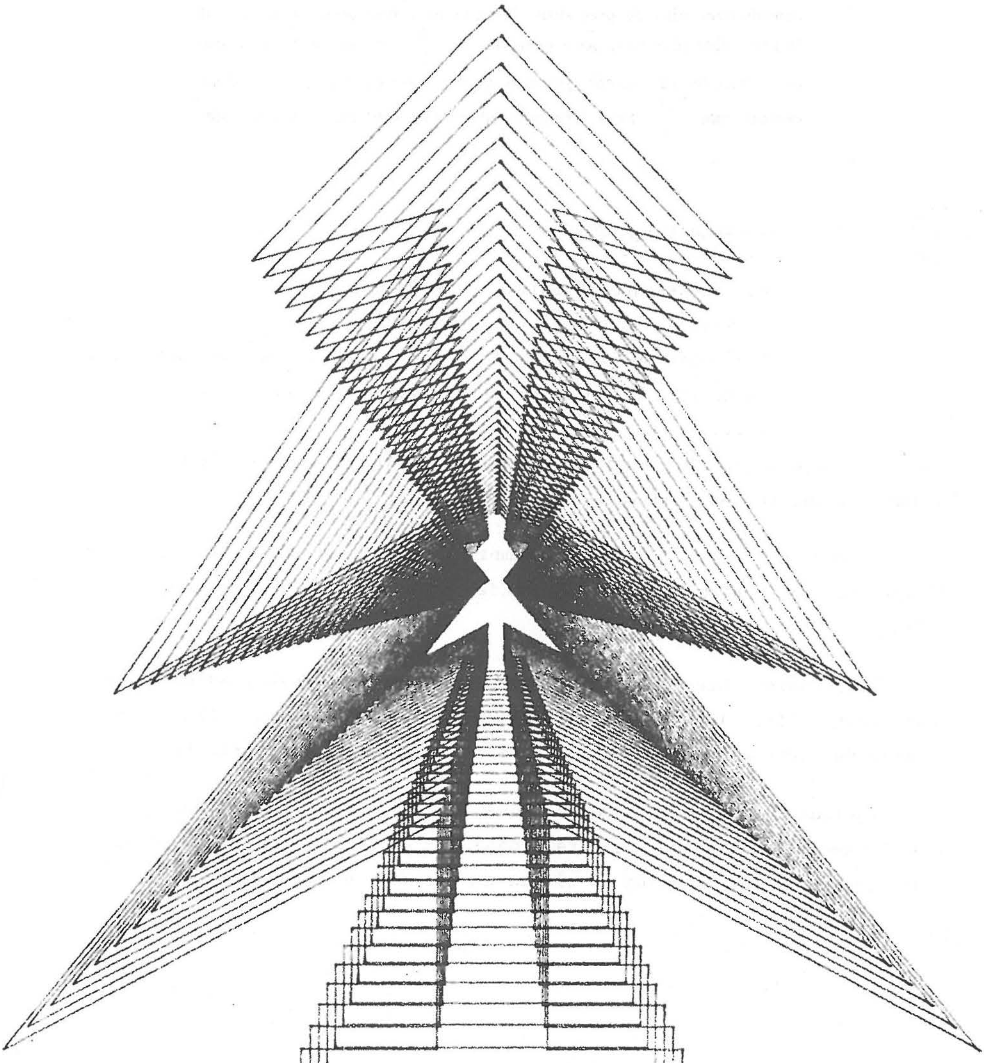


Figure 1

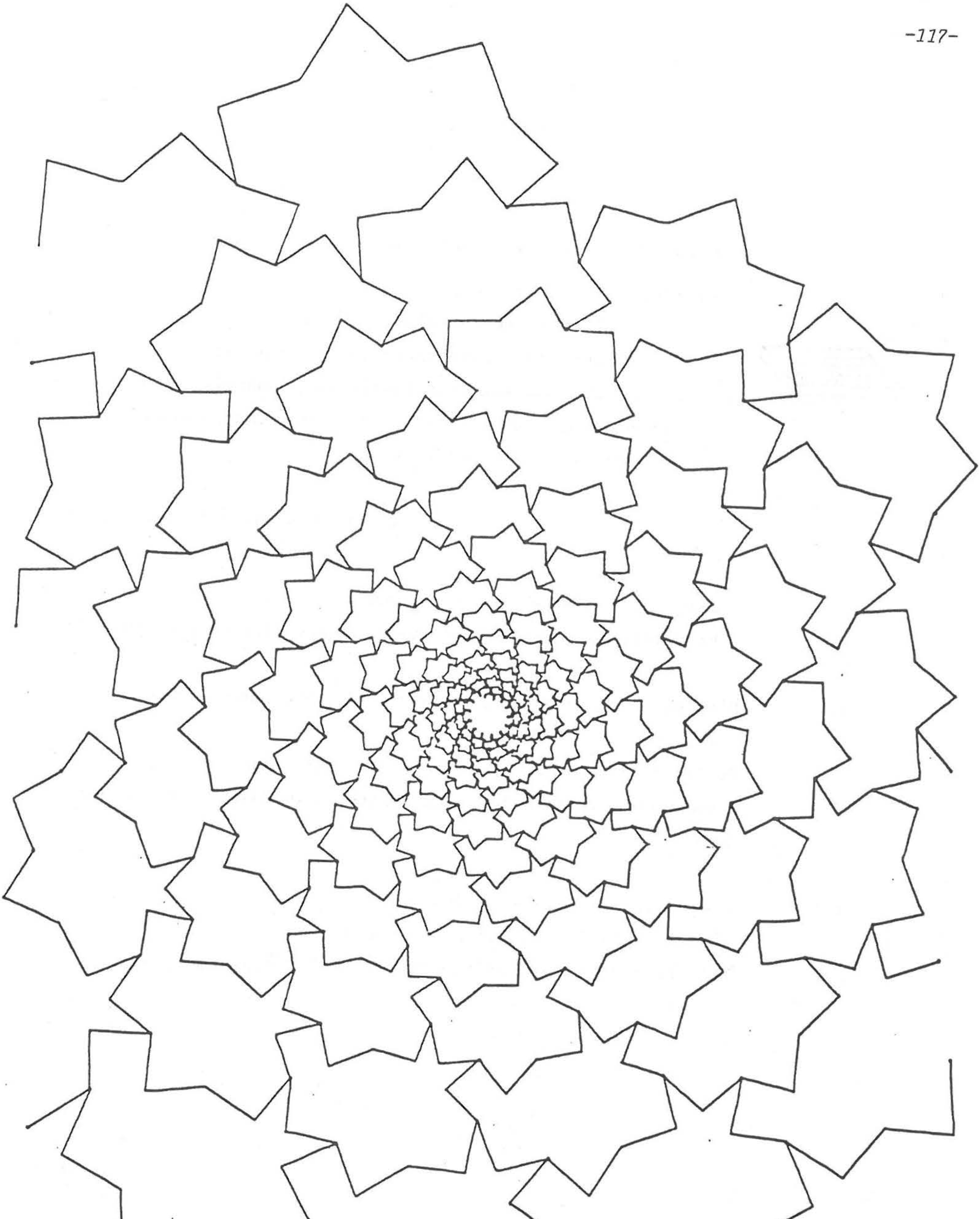
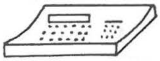


Figure 2

FICHE N° 3

I . Choisir n points par leurs coordonnées ($3 \leqslant n \leqslant 6$)

. Utiliser le programme n°3



a) introduire la valeur de n

b) puis les coordonnées de ces n points

c) enfin les caractéristiques géométriques de f

La machine trace les n points puis leurs images respectives et imprime leurs coordonnées.

Retournez à votre place.

. Joindre chaque point à son image.
Propriété des droites obtenues (observation et démonstration).

II D'après ce qui précède, pensez-vous que f admette des points invariants ?
Recherche systématique des points invariants par f.
Eventuellement recherche des droites globalement invariantes de f.

III f est-elle bijective ? Justifier.
Si oui, définir l'application réciproque.
Illustrer cette propriété en prenant le programme n°3.

Enfin des vecteurs ... propres

Une table traçante connectée sur un mini-ordinateur de bureau peut être utilisée pour visualiser concrètement diverses applications linéaires du plan vectoriel euclidien.

Une application linéaire f sera déterminée dans le calculateur par sa matrice dans la base canonique. Ainsi, pour les figures 1 et 2,

$$\text{mat } (f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Les illustrations de f se font en plusieurs étapes :

1) Tracé des images de vecteurs d'un cercle (ou d'un demi-cercle). Lorsqu'un vecteur et son image sont colinéaires (ou presque colinéaires), le traceur les joint.

2) Tracé des images de vecteurs appartenant aux droites vectorielles (propres) déterminées précédemment. Ce tracé conduit à constater expérimentalement que la restriction de f à chacune de ces droites vectorielles semble être une homothétie dont le calculateur détermine le rapport (figure 1).

Ces deux étapes peuvent précéder et motiver la recherche mathématique correspondante.

3) Illustration concrète du comportement d'une suite de vecteurs. Un vecteur initial V_0 étant donné, il s'agit de représenter la suite:

$$\left(V_0,\ f(V_0),\ f\circ f(V_0),\ \ldots,\ f^n(V_0),\ \ldots\right)$$

Constatation expérimentale dans chacun des cas suivants:

Cas de la figure 2.

La matrice de f est: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Choisissons $V_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}24 \end{bmatrix}$ proche du vecteur propre $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre 2. La suite notée sur la figure

(0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; ...)

"s'écarte" de la droite vectorielle associée à cette valeur propre et semble se "stabiliser" sur la droite vectorielle associée à la valeur propre -5 de plus grande valeur absolue.

Cas de la figure 3.

La matrice de f est: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; les valeurs propres 3 et -3 ont même valeur absolue.

Choisissons $V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. La suite notée (0 ; 1 ; 2 ; ...) est associée à des vecteurs appartenant à deux droites vectorielles.

Choisissons $V'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Même constatation pour la suite notée (0' ; 1' ; 2' ; ...) .

REMARQUE - Comme les points de la suite (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...) sortent de la feuille à partir de 4, le traceur est programmé de façon que, dans le cas de dépassement, le cadrage subisse une homothétie de rapport 10.
Ainsi, par ce biais, le point 4 a été ramené dans le cadre de la feuille.

On peut alors faire chercher et démontrer par les élèves la nature de $f \circ f$ (homothétie de rapport 9).

Cas de la figure 4.

La matrice de f est: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Ces dernières études expérimentales peuvent, en Terminale C, précéder et motiver l'étude mathématique correspondante limitée aux cas cités.

En conclusion:

Après quelques exemples de bijections linéaires (avec et sans vecteurs propres), il est souhaitable de visualiser aussi des applications linéaires non bijectives et de faire apparaître les rôles respectifs joués par le noyau et par l'image de f.

Cette étude expérimentale peut servir à sensibiliser les élèves aux concepts ainsi présentés et à permettre certaines conjectures que l'on pourra ensuite contrôler par démonstration. Ces visualisations ont aussi le mérite d'aider les élèves à se forger une image mentale leur permettant une vue plus synthétique des notions présentées.

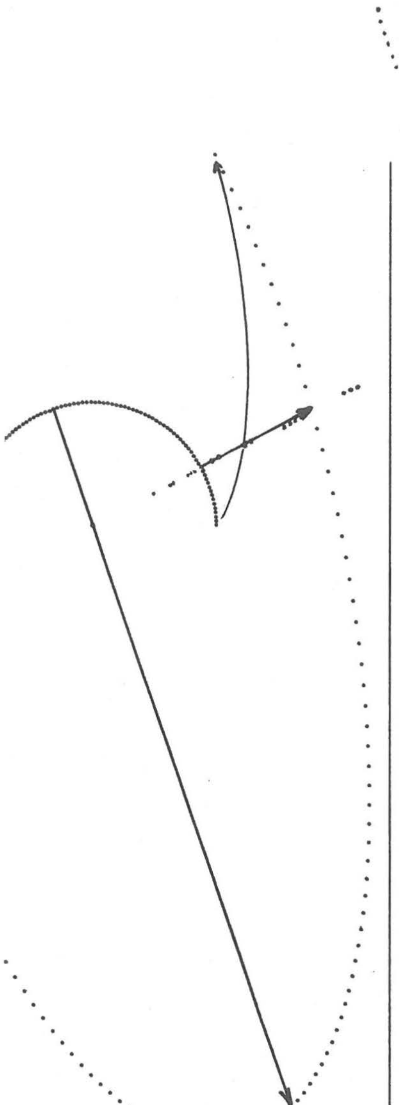


FIGURE 1

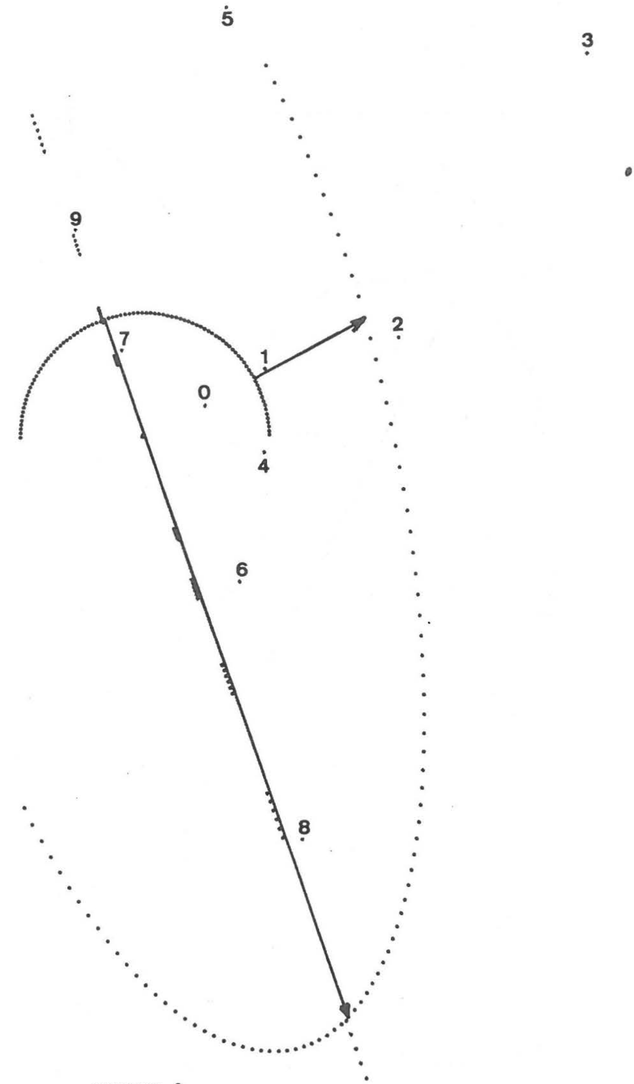


FIGURE 2

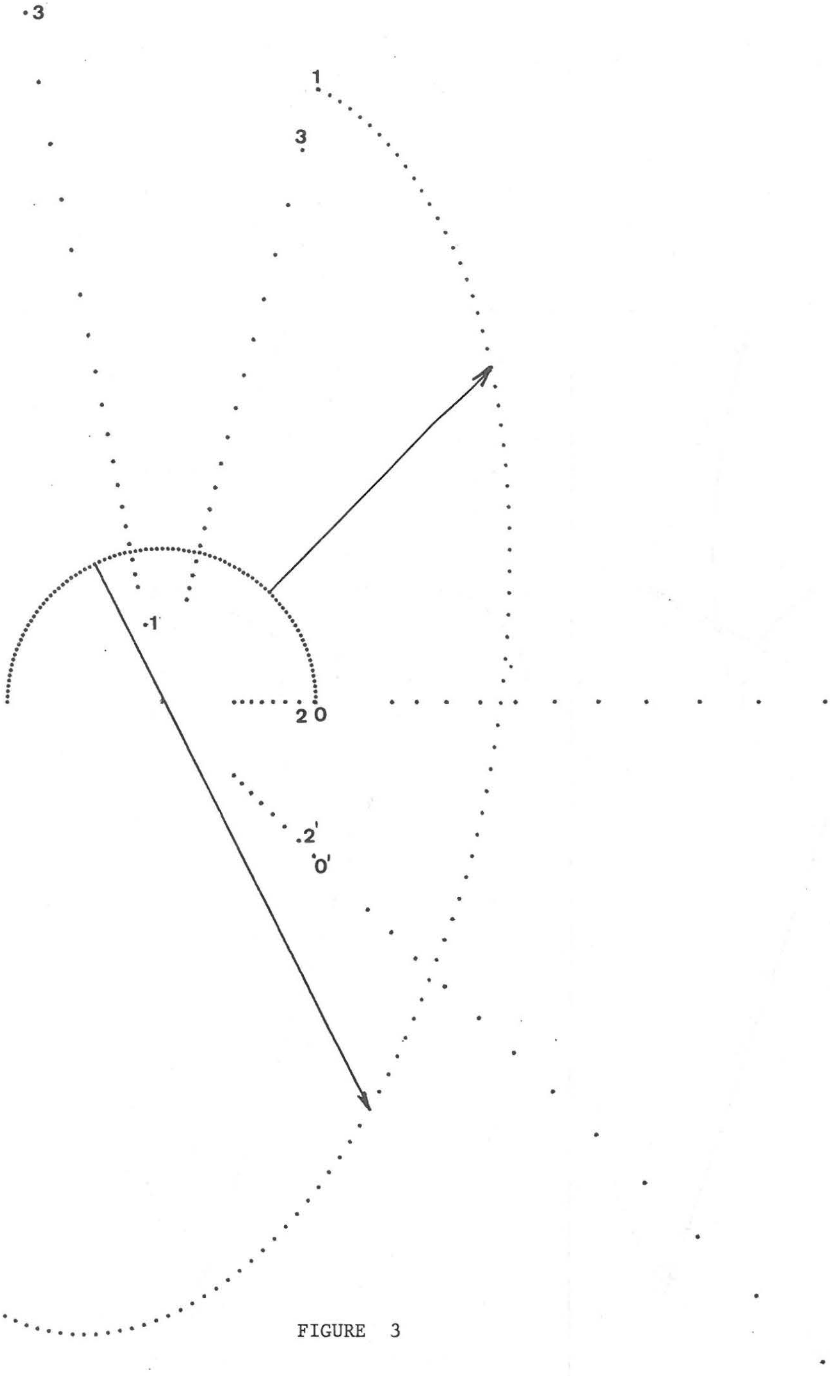


FIGURE 3

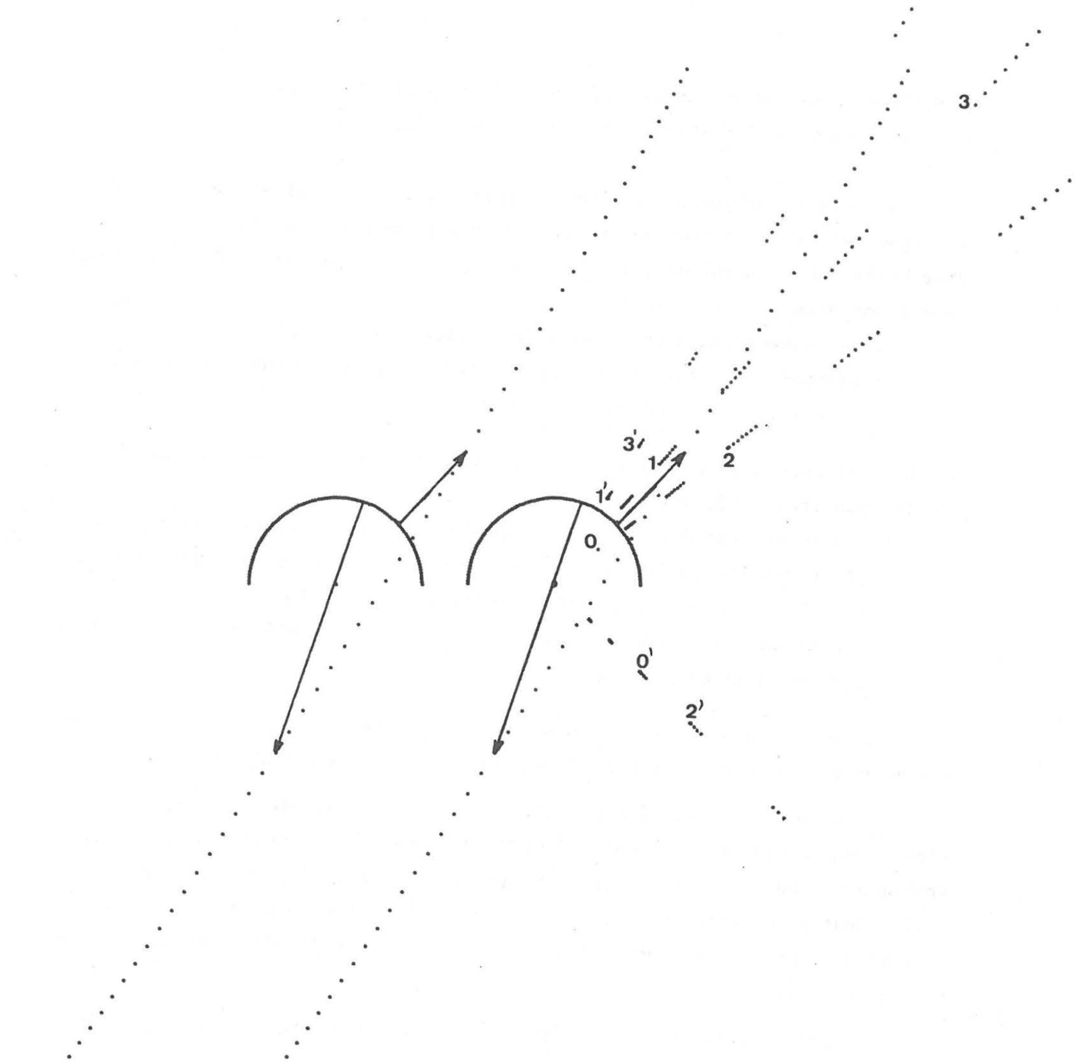


FIGURE 4

VIII - PEUT-ON EMPLOYER DES CALCULATRICES POUR DONNER UNE INITIATION A L'ANALYSE ?

(Monsieur J. Kuntzmann expose ici une opinion personnelle qui nous a paru soulever assez de problèmes pour la publier intégralement).

Je vois se multiplier à l'heure actuelle, en particulier par suite de la vogue des calculatrices de poche, des enseignements d'initiation à l'analyse basés sur l'emploi de tels instruments. Je vais essayer d'expliquer pourquoi à mon avis de telles tentatives

1) ne peuvent que donner des idées fausses aux élèves
2) passent sous silence une autre catégorie de phénomènes qu'elles pourraient faire connaître aux élèves.

a) L'homme muni d'un papier et d'un crayon, aussi bien que la calculatrice, ont les particularités suivantes:

- ils ne peuvent écrire en un temps fini qu'un nombre fini de symboles
- il en résulte qu'ils ne peuvent manipuler réellement que des nombres dont l'écriture n'exige qu'un nombre fini de symboles
- ils ne peuvent exécuter en un temps fini qu'un nombre fini d'opérations sur les nombres précédents.

Le fait qu'une opération élémentaire demande 10 secondes ou 10^{-9} secondes ne change rien au caractère fondamental de cette affirmation.

Il en résulte que, même pour $\mathbb{N}$, il n'est pas possible en un temps fini d'en énumérer tous les éléments. Pour $\mathbb{R}$ la situation est encore beaucoup plus tragique puisque l'ensemble des éléments que l'on peut espérer réellement écrire dans une convention donnée (par exemple l'écriture à virgule en base *dix*) en un temps fini ne comprend pas des nombres tout à fait usuels, par exemple $\frac{1}{7}$ ou $\sqrt{2}$.

La notion centrale de l'analyse élémentaire (dans $\mathbb{R}$) est la notion de limite. Cette notion a un double aspect:

- intuitif. Il s'agit alors d'une notion dynamique: x tend vers a
- mathématique. La mathématique élimine le caractère dynamique qu'elle ne sait pas prendre en compte et en fait une notion statique:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Comment se présente l'utilisation de la calculatrice ? Elle est bien évidemment incapable d'apporter quelque chose au niveau statique. Cela reviendrait à lui demander de prendre en compte, sous leur écriture décimale, tous les éléments d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Nous voici réduits à l'aspect intuitif, ce qui est déjà regrettable pour une bonne compréhension de l'analyse. Mais même cet aspect intuitif de la notion de limite est très mal pris en compte par la calculatrice. En effet il faudrait s'intéresser à une infinité de valeurs de x (qui tendent vers a). Ceci est déjà impossible.

Mais ce n'est pas encore tout. Si l'on persiste à vouloir manipuler un grand nombre de valeurs de x, on s'apercevra qu'il n'y en a qu'un nombre fini qui s'écrivent avec 8 chiffres au plus, un nombre fini qui s'écrivent avec 16 chiffres au plus. Autrement dit, nous serons noyés non seulement sous les nombres mais, plus encore, sous le nombre de plus en plus grand des chiffres de ces nombres.

aa) Les dangers de l'emploi de calculatrices en analyse sont bien connus. Rappelons-en quelques-uns[1] :

- séries convergentes qui ont l'air divergentes (si on forme les 100 premières sommes), par exemple:

$$1 - \frac{100}{1!} + \dots + (-1)^n \frac{(100)^n}{n!} \dots \qquad (2)$$

- séries divergentes qui ont l'air convergentes (si l'on forme les 100 premières sommes), par exemple:

$$1 - \frac{1!}{100} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{(100)^n} + \dots$$

- fonctions dont on obtient une suite de valeurs bien régulières alors qu'il y a une discontinuité ou même un intervalle où elle n'est pas définie.

On ne peut pas dire qu'il s'agisse là d'inconvénients mineurs.

aaa) Je voudrais encore attirer l'attention sur une différence entre le calcul à la main et les calculatrices, qui n'est pas non plus en faveur de ces der-

---

(1) Empruntés à mon livre: "Apport de l'informatique à l'enseignement mathématique" CEDIC 1974.

(2) NDLR. Voir chapitre II, § II : démarche expérimentale "la calculatrice et l'évidence".

nières. En calcul à la main, on utilise un nombre de décimales qui n'est pas fixé. On peut ainsi écrire des nombres successifs:

1,
1,5
1,75
1,875
1,937 5
1,968 75

dont la longueur augmente ce qui évoque très bien "à la limite" une écriture infinie. Cette écriture infinie, on peut d'ailleurs l'évoquer encore bien plus efficacement par des points de suspension

3,141 592 ....

Au contraire, une calculatrice utilise des nombres casés, c'est-à-dire dont les chiffres sont situés dans des cases (8 assez souvent). Le calcul précédent se présentera donc de la manière suivante, une fois la virgule fixée:

1,0000000
1,5000000
1,7500000
1,8750000
1,9375000
1,9687500

Cette présence constante de 8 chiffres n'évoque absolument pas une écriture infinie. La calculatrice n'a pas non plus l'habitude d'écrire des points de suspension.

aaaa) J'ai cru comprendre par ailleurs qu'un certain nombre d'expériences actuellement en cours consistent à confier des calculatrices aux élèves au moment où l'on commence l'initiation à l'analyse. Ceux-ci se trouvent alors en présence de deux nouveautés ayant des caractéristiques incompatibles:

- d'une part, un outil prestigieux manifestement puissant
- d'autre part, une théorie assez mystérieuse à ses débuts.

Ne faut-il pas craindre une assimilation: Analyse = Calculatrice ?

Mais aussi

- d'une part, possibilités accrues mais cependant finies de manipulation de chiffres et de nombres
- d'autre part, impossibilité d'atteindre l'objectif par des manipulations finies

ou à un niveau plus bas

- manipulation sans douleur de nombres à huit chiffres
- exigence d'une infinité de chiffres.

Cela me semble une situation de nature à engendrer de nombreuses idées fausses du type: on dit l'infini, mais pratiquement on s'arrête à huit : $\infty = 8$. Bien entendu, avec des élèves connaissant préalablement la calculatrice, ne s'en servant pendant l'initiation à l'analyse que comme un outil débarrassant de tâches matérielles, mais non directement mêlé à l'introduction des notions d'analyse, ces objections tombent.

b) En fait, l'impossibilité d'exécuter effectivement une infinité d'opérations ou de traiter une écriture ayant une infinité de chiffres a donné naissance à une branche des mathématiques qui s'appelle l'analyse numérique. L'utilisation des calculatrices devrait conduire à présenter aux élèves quelques résultats très simples dans ce domaine. D'abord la notion d'approximation. Puis celle de processus itératif. En voici un exemple. On sait qu'un bon procédé pour calculer $\sqrt{a}$ consiste à utiliser la suite $u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ à partir d'une valeur u_0 strictement positive. Cette suite converge vers $\sqrt{a}$. En calcul approché avec un nombre fixe de chiffres après la virgule on constatera les éventualités suivantes:

- à partir d'une certaine valeur N, on trouve $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \ldots$
- à partir d'une certaine valeur N, on tourne en rond. Par exemple,

$$\beta, \gamma, \beta, \gamma, \beta, \gamma, \ldots\ldots.$$

Naturellement α, β, γ sont des approximations de $\sqrt{a}$ sur lesquelles on peut donner des renseignements plus précis.

Il importe de remarquer:

- qu'on ne peut pas échapper à l'analyse numérique par des slogans tel que "on calculera si l'on veut de plus en plus de chiffres". Il faudra bien s'arrêter un jour et le choix de s'arrêter parce qu'on est fatigué n'est pas un choix intelligent.
- que l'analyse numérique est plus compliquée et difficile que l'analyse bien qu'elle manipule des êtres plus simples. L'initiation nécessaire à l'analyse numérique doit donc venir après une initiation à l'analyse. Je veux dire, non pas immédiatement après la présentation des éléments de celle-ci, mais avec un intervalle assez grand pour que les notions d'analyse soient assimilées et qu'on voie bien qu'il s'agit d'une nouvelle étape.
- que certaines des notions à présenter figurent déjà dans les programmes mais pas dans le contexte qui mettrait vraiment en valeur leur signification profonde.

IX - CALCULATEURS PROGRAMMABLES et ALGEBRE DE QUATRIEME

La présentation faite ici de la recherche expérimentale menée sur "Calculateurs Programmables et Algèbre de Quatrième" se situe pendant les travaux d'évaluation, en début 1977, d'une expérimentation menée pendant l'année scolaire 1975-1976.

Cette expérimentation est issue de travaux et expériences préalables dont le lecteur trouvera l'exposé dans les brochures 54 et 75 de la Revue "Recherche Pédagogique" (voir Bibliographie en Annexe).

Comme toute recherche expérimentale, celle-ci est suivie d'une évaluation, actuellement en cours, analysant:

- La pertinence des tests élaborés
- La validité du matériel pédagogique
- Les niveaux d'acquisition mathématique des élèves
- Les résultats qualitatifs et quantitatifs par rapport aux objectifs posés en hypothèse théorique.

Objectifs

Les difficultés d'acquisition des concepts de base de l'Algèbre, dès la classe de Quatrième, sont généralement constatées.

L'introduction de l'Informatique et l'utilisation de calculateurs programmables, de façon continue, tout au long de l'enseignement de l'algèbre élémentaire, doivent permettre une meilleure acquisition des concepts mathématiques (motivation, présentation, exploitation).

Ceci devrait se vérifier plus particulièrement en classe de Quatrième, par exemple à propos des concepts de "variable" et de "constante" .

Pour tenter de vérifier l'hypothèse ainsi énoncée, les objectifs précis suivants ont été dégagés:

- O_1 : Ecriture de formules littérales
- O_2 : Substitution d'une valeur à un symbole, et d'un autre symbole à un symbole
- O_3 : Manipulation de symboles indépendamment de leur valeur
- O_4 : Balayage d'un ensemble débouchant sur l'idée d'éléments génériques.

Cette utilisation continue doit aussi provoquer une modification de l'organisation de la classe et des relations pédagogiques maître - élèves ou entre élèves.

Elle doit faciliter la mise en place ultérieure, fort probable et à une échelle de plus en plus importante, d'une intégration de la méthode informatique, par le biais de calculateurs programmables de poche, dans les enseignements mathématiques du second degré.

Organisation matérielle

Un groupe de travail à l'échelon inter-IREM (12 IREM concernés) se réunit périodiquement et rédige les divers documents.

L'ensemble concerne 30 classes expérimentales (sur les 12 IREM) et autant de classes témoins. Une soixantaine d'enseignants du secondaire (animateurs, expérimentateurs et témoins) ainsi que deux psychologues participent à ces travaux.

Matériel pédagogique

Il a été établi une progression détaillée liant les acquisitions en informatique aux acquisitions en mathématiques (Documents ① et ②).

Des fiches de travail couvrant les diverses acquisitions ont été réalisées, en vue d'activités des élèves par groupes et d'une rotation sur les machines. On peut classer ces fiches en trois catégories:

- la séquence d'apprentissage (notions fondamentales pour l'utilisation de la machine) (Documents ③ , ④ et ⑤).
- des fiches mathématiques utilisant le calculateur: les exercices, ainsi conçus, mettent le calculateur au service des mathématiques (Documents ⑥,⑦ et ⑧)
- des fiches du maître, explicitant les intentions pédagogiques et les possibilités d'exploitation des fiches-élèves (en présentation des documents ⑥,⑦).

Matériel d'évaluation

Quatre tests sont soumis à tous les élèves expérimentateurs et témoins au cours de l'année scolaire. Ces tests sont à contenu purement mathématique et gardent sous-jacents les objectifs codés en O_1, O_2, O_3 et O_4 qui seront analysés après correction reportée dans des grilles conçues à cet effet.

Un traitement informatique des cartes perforées concernant chaque élève, pour chaque test, permet de rechercher dans les listings les corrélations entre les questions et les réponses des différents exercices entre eux, les résultats des élèves expérimentaux et témoins, etc...

Afin de prendre des décisions ultérieures, quant à la poursuite, la modification ou l'extension de cette expérimentation, une analyse factorielle est envisagée.

Les calculateurs programmables

Antérieurement à septembre 1976, les classes ont fonctionné avec des Hewlett-Packard 9810, des Sharp ou des P. 101 Olivetti (en général un par classe). Depuis, une partie des classes est équipée en calculateurs programmables de poche HP 25 (de 5 à 12 par classe).

Perspectives

- L'extension aux classes de troisième est actuellement envisagée.
- L'évaluation est actuellement en cours; sa publication est prévue fin 1977.
- Une brochure spécifique, qui sera un compte rendu d'expérience, enrichi d'extraits significatifs de fiches pédagogiques, et présentant les résultats de l'évaluation, sera publiée par l'A.P.M.E.P. au début de l'année 1978.

Pour le groupe,
Rédacteur : Rachel Hebenstreit

ANNEXES:

- Bibliographie des travaux antérieurs expérimentés en France.
- Documents cités dans l'article de 1 à 8 .

BIBLIOGRAPHIE

Articles parus dans la Revue "Recherche Pédagogique"

N° 35 - page 61 - "Machines à calculer en Sixième" - J. COLOMB

N° 39 - page 20 - "Le calcul numérique dans l'Enseignement du Premier Cycle" - A. MYX

N° 42 - page 97 - "Premiers pas en programmation pour des enfants de 10 à 12 ans et leur maître" - M. DUMONT et A. ROUMANET

N° 48 - page 28 - "Utilisation de Calculateurs programmables en Quatrième" M. DUMONT et J. SARGENT

N° 50 - page 67 - "Rigueur et automatisation d'un discours" - M. DUMONT

N° 54 - "Emploi de Calculateurs programmables dans le Second degré". Bilan d'une expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P.

N° 75 - "Calculateurs programmables dans les Collèges et les Lycées". Expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P.

LES CONQUERANTS

(d'un nouveau genre)

Comme un vol de gerfauts hors du charnier natal
Fatigués de porter leurs valises trop pleines
Ils allaient de Marseille et puis de Saint Etienne
Vers un rêve héroïque et expérimental.

Chaque soir espérant des lendemains épiques
Le charme évanescent de la Mathématique
Enchantait leur sommeil d'un mirage doré

Ou, penchés au-dessus de leurs fiches rebelles
Ils regardaient monter vers leurs yeux fatigués
Du fond de leurs dossiers le parfum des Réels.

N.D.L.R. - Pour des raisons typographiques, les documents 1 et 2 sont présentés ci-après sur trois doubles pages; le lecteur pourra ainsi retrouver la progression pour l'année scolaire.

PROGRESSION : 1er trimestre du cours de Mathématiques de quatrième à partir de la progression établie par Henri BAREIL

Thèmes généraux	Titre des leçons	Fiches	Nbre de fiches	Heures sans machine
Rentrée TEST 1				
Phase 1 APPREN-TISSAGE INTENSIF		Fiches 1 à 6	6 (1 h x 6)	1 h libre
Rappels : LES DECI-MAUX	Présentation des décimaux			1 h de synthèse
	(D ; +)	Addition dans **D** ; propriétés	1 h	—
		Soustraction dans **D**	1 h	—
	(D ; ×)	Multiplication dans **D**	2 h	—
				1 h de synthèse (ou libre)
	(D ; + ; ×)	Ecriture et enregistrement d'un programme sans boucle	1 h	—
		Hiérarchie des opérations	1 h	—
		Distributivité	2 h	
				1 h de synthèse (ou libre)
	Puissances à exposant dans $\mathbf{N} - \{0\}$	Puissances	1 h	—
				1 h de synthèse (ou libre)
	Ordre sur **D** Encadrements dans **D**	—		2 h de cours
				1 h libre
Vers **R**	Inverses	Etude du problème : remplacement de la division par b par une multiplication sur divers exemples.	3 h	—
				2 h de synthèse

MARSEILLE JUIN 1975	Claude ANSAS M. Thérèse PATALANI	
Notions à acquérir par les élèves	**Notions utilisées dans la pratique du calculateur progr.**	**Calendrier**
		Septembre
Utilisation des décimaux comme matériaux sans étude systématique.	2 registres M et A, entrées, sorties $\downarrow$ $\updownarrow$, décimalisation, $+$, $\times$, $-$, opp, organigramme linéaire.	
Mise au point des notions connues (méthode libre) Pratique de l'addition, commutativité, associativité, rôle du 0, somme d'opposés Définition et applications Pratique de la multiplication, rôle du 0, commutativité, associativité, rôle de 1, $a \times (-1)$.		Octobre
Utilisation de la hiérarchie des opérations et de la distributivité factorisations à propos d'exemples.	Ecriture et enregistrement d'un programme sans boucle. Découverte des registres de stockage. Instructions : B$\uparrow$; B$\downarrow$; B$\updownarrow$	
Définition de puissances positives, hiérarchie, calculs sans règles.		
Définition d'un ordre, ordre et addition ; ordre et multiplication. Notation intervalle et encadrement. Encadrements de plus en plus fins.	Cartes graphitées ou magnétiques	Novembre
Notion de nombres réels ; inverses ; notation $\frac{a}{b}$ Impossibilité division par 0 .	Découverte de l'instruction : $\div$	

PROGRESSION : 1er trimestre du cours de Mathématiques de quatrième à partir de la progression établie par Henri BAREIL

Thèmes généraux	Titre des leçons	Fiches	Nbre de fiches	Heures sans machine
Vers R (suite)		Programme avec boucle folle	1 h	———
	Opérations sur R et compléments sur inverses			2 h de cours
		Résolution pratique d'équations du 1er degré	2 h	
TEST 2				2 h libres
	Radicaux	Organigramme avec test	1 h	———

PROGRESSION : 2ème partie du cours de Mathématiques de quatrième à partir de la progression établie par Henri BAREIL

Thèmes généraux	Titre des leçons	Fiches	Nbre de fiches	Heures sans machine
Vers R (suite)		Résolution pratique d'équations du 1er degré	2 h (n° 18)	2 h libres
	Radicaux	Organigramme avec test Programme avec test	2 h (n° 19)	● 2 h de Géométrie
		Recherche de $\sqrt{a}$, $a \in \mathbf{R}^+$, par des approximations de plus en plus fines	2 h (n° 20)	● 2 h de Géométrie
LES FORMES $\frac{a}{b}$	Formes $\frac{a}{b}$ et écritures à virgule ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$) et pratique des calculs sur les formes $\frac{a}{b}$			2 h de cours
		La machine sera utilisée pour doubler les calculs avec des écritures à virgule	4 h (n° 21)	
				● 2 h de Géométrie
				2 h libres

MARSEILLE JUIN 1975	Claude ANSAS M. Thérèse PATALANI	
Notions à acquérir par les élèves	**Notions utilisées dans la pratique du calculateur progr.**	**Calendrier**
———	Organigramme et programme avec boucle folle.	Décembre
Définition des propriétés de (R, +, x) $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$; équations $ax = b$.		
Recherche de $\sqrt{a}$, $a \in R^{+}$, par des approximations de plus en plus fines.	Organigramme avec test.	

MARSEILLE FEVRIER 1976	Claude ANSAS M. Thérèse PATALANI	
Notions à acquérir par les élèves	**Notions utilisées dans la pratique du calculateur progr.**	**Calendrier**
		Janvier
Existence et définition de $\sqrt{a}$ avec $a \in R^{+}$. Pratique de calculs numériques simples.	Organigramme avec test. Programme avec test. Utilisation d'un programme pré-établi, enregistré sur carte magnétique.	
Prise de conscience des élèves quant aux difficultés qui se présentent lorsqu'on essaie de faire des calculs sur les formes $\frac{a}{b}$ en les remplaçant par des nombres à virgule. Pratique des calculs directs sur les formes $\frac{a}{b}$.	Le calculateur programmable est ici utilisé seulement comme "calculatrice de bureau" afin de contrôler les calculs faits sur les formes $\frac{a}{b}$ avec des nombres à virgule.	Février

PROGRESSION : 2ème partie du cours de Mathématiques de quatrième à partir de la progression établie par Henri BAREIL

Thèmes généraux	Titre des leçons	Fiches	Nbre de fiches	Heures sans machine
PUIS-SANCES	Puissances à exposant positif	Préliminaire aux puissances	1 h (n° 22-0)	2 h de cours
				● 2 h de Géométrie
		Utilisation des formules relatives aux puissances à exposants positifs uniquement	1 h (n° 22)	
	Puissance d'un nombre réel non nul, les exposants étant des entiers relatifs.			2 h de cours
		Formules relatives aux puissances	1 h (n° 22bis)	
TEST 3				
ETUDE D'APPLI-CATIONS DANS R ou R*				● 2 h de Géométrie
	Application translation Application homothétie Homothétie suivie de translation	Translation, homothétie, homothétie suivie de translation	2 h (n° 23)	3 h de cours et exercices ● 2 h de Géométrie
	Application valeur absolue	Application valeur absolue	2 h (n° 24)	
				● 2 h de Géométrie
	Application élévation au carré Application puissance	Application élévation au carré Application puissance	2 h (n° 25)	
				1 h libre
				● 2 h de Géométrie
	Fonctions monomes	Fonctions monomes	2 h (n° 26)	
	Fonctions polynomes	Fonctions polynomes	2 h (n° 27)	
TEST 4				

MARSEILLE FEVRIER 1976	Claude ANSAS M. Thérèse PATALANI	
Notions à acquérir par les élèves	**Notions utilisées dans la pratique du calculateur progr.**	**Calendrier**
Redécouverte des formules, vérification sur des calculs numériques puis généralisation. Exercices sur ce qui précède. Vérification générale et utilisation des formules relatives aux puissances (nombreux calculs exposants surtout négatifs). En cours : ordre et puissances ; ordre de grandeur d'une puissance	Notion de compteur. Les élèves peuvent utiliser les instructions B^+, $B-$, etc...	Mars
Ordre et addition dans R . Effets sur somme et produit de deux nombres de la multiplication de ces nombres par un même réel et inversement. Résolution d'inéquations L'application valeur absolue sera conçue comme une composition d'applications. Etudes relatives à : $(x+y)^2$; $(x-y)^2$; x^2-y^2 Pratique des calculs. Définition d'une application monome.	Les fiches 23, 24, 25 et 26 appliquent les notions d'organigramme et de programme avec test, boucle et pas de calcul.	Avril
		Mai

DOCUMENT 3

P 101

Ecriture d'un programme
Enregistrement d'un programme
Exécution d'un programme enregistré

---

① Calcule (sans le P 101)

$4 \times 23{,}71$
$2 \times 103{,}789$
$207{,}578 + 94{,}84$

② Reprends l'organigramme de la fiche 5, exercice ③.
Si la première donnée est u et la seconde v, le contenu final de A sera ....
Va au P 101.
Utilise le P 101 pour compléter le tableau ci-dessous:

u	v	molette sur	4u + 2v
5	7,3		
23,71	103,789		

③ On veut calculer, à l'aide du P 101, les valeurs de 4u + 2v en donnant à u et v les valeurs indiquées ci-dessous :

u	8	0	100	0,1	0,3	250,125	5 041,209
v	10	-5,5	300	0,3	0,1	0	-13 250,381 4

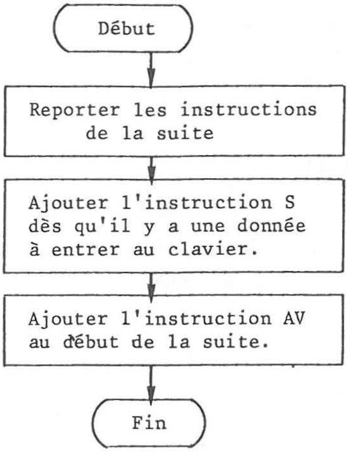
u	-13,215	1,258 19
v	26,43	-2,516 39

Combien de fois faudrait-il taper la suite d'instructions du 5 - ③ ?

Tu vas apprendre
1) à $\boxed{\text{Ecrire un programme}}$
2) à $\boxed{\text{Enregistrer ce programme}}$
3) à $\boxed{\text{Exécuter ce programme enregistré}}$

1) Ecriture du programme

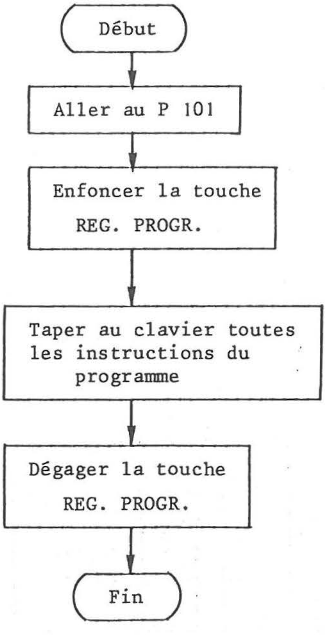
Tu modifies la suite d'instructions de 5 - ③ de la façon suivante:

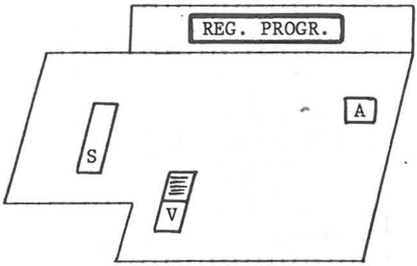


Nombres	Instructions

Montre ce programme à ton professeur.

2) Enregistrement de ce programme





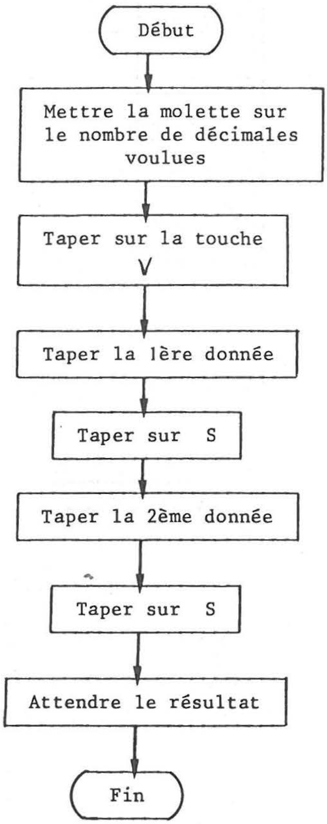
Instruction AV :

Touche $\boxed{A}$ puis touche $\boxed{V}$

Ton programme (entrée de u, puis de v, calcul et impression de 4u + 2v) est enregistré en machine.

Tu vas pouvoir maintenant exécuter ce programme autant de fois que tu le désires.
Reste au P 101.

3) <u>Exécution de ce programme enregistré</u>



molette sur 1
1ère donnée u = 5
2ème donnée v = 7,3

Exécute 9 fois ce programme pour remplir le tableau ci-dessous :

u	100	250,125	5 041,209	0	0,3	-13,215
v	300	0	-13 250,381 4	-5,5	0,1	26,43
4u + 2v						

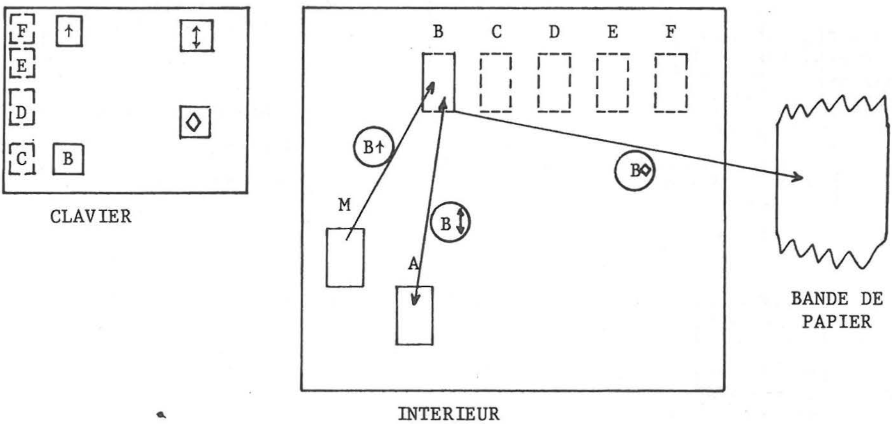
u	0,1	1,258 19	8
v	0,3	-2,516 39	10
4u + 2v			

④ Reprendre l'exercice ⑤ de la fiche 5.
En faire un programme, l'enregistrer, l'exécuter.

DOCUMENT 4

11 - 3

Regarde bien le schéma suivant:



A ton avis, que font les instructions :

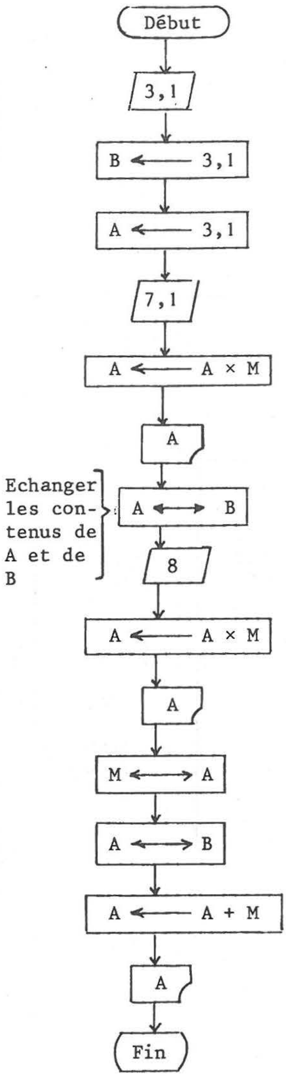
B ◇ :

B ↑ :

B ↕ :

Fais appel à ton professeur pour qu'il vérifie tes réponses.

4) Ecris le programme correspondant à l'organigramme suivant:



Programme

- Quels sont, dans l'ordre, les contenus de A qui sont imprimés sur la bande de papier ?

- Va au P 101 enregistrer, puis exécuter ce programme :

- Exécute ce programme pour calculer:

  $(a \times b) + (a \times c)$,

  avec $a = 573{,}212$

  $b = 14{,}5831$

  $c = 85{,}4169$

DOCUMENT 5

HP 10 FICHE 22 - 0 Puissances dans R

(I) On veut calculer $t^4 \times t^3$.

t	4,2	3,7	3,2				
t^4							
t^3							
$t^4 \times t^3$							

1) On a écrit l'organigramme qui :

. calcule t^4 et imprime le résultat

. calcule t^3 et imprime le résultat

. calcule $t^4 \times t^3$ et imprime le résultat

t prend pour valeur initiale 4,2 .

Comment calcule-t-on une valeur de t à partir de la précédente ?

Attention! On n'entre que 4,2 et 0,5 ; les autres valeurs de t seront calculées par la machine.

La valeur constante que l'on retranche à t s'appelle le "pas du calcul" (il ne faut pas le confondre avec le "pas du programme").

2) Ecris le programme correspondant à l'organigramme de la page (2).

Reporte-le sur carte graphitée.

3) Enregistre et fais exécuter ce programme.

Qu'as-tu obtenu ?

(II) On veut faire le même calcul pour des valeurs de t positives à partir de 5,3 avec un pas égal à 0,7 .

Tu dois utiliser un test pour vérifier si t est positif.

Prends la fiche 19.

Quelles sont les instructions correspondant au test ?

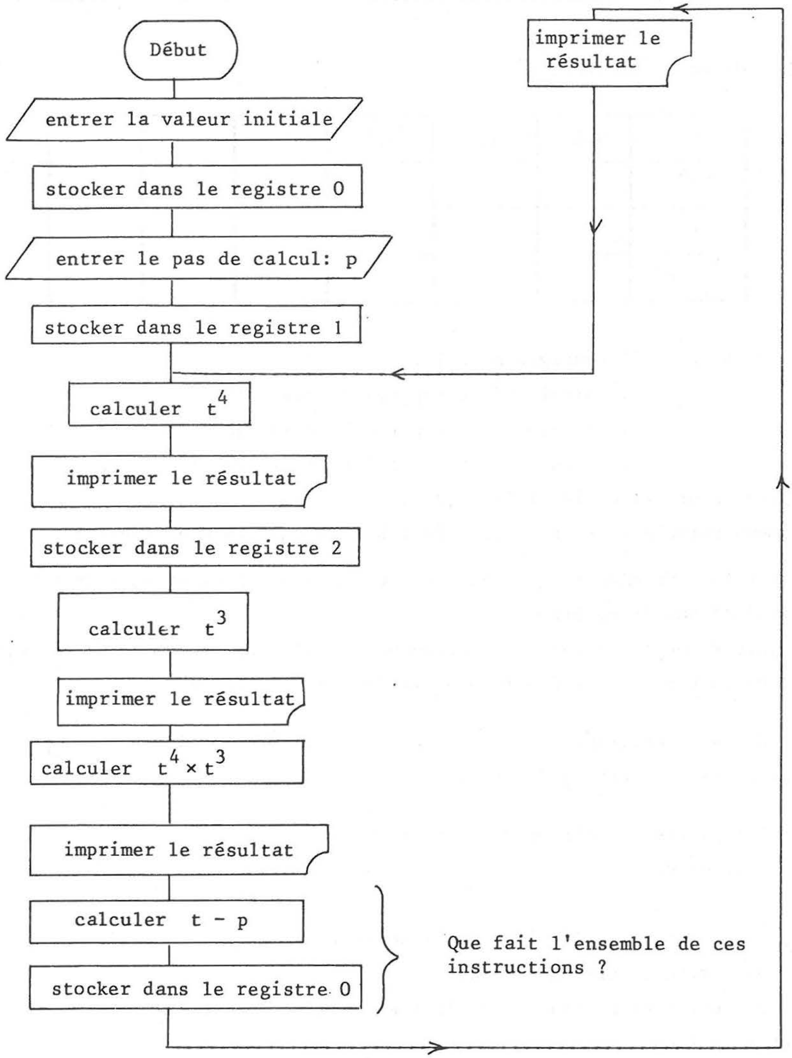
Où dois-tu les placer sur l'organigramme ?

Quels doivent être les contenus des registres x et y avant le test ?

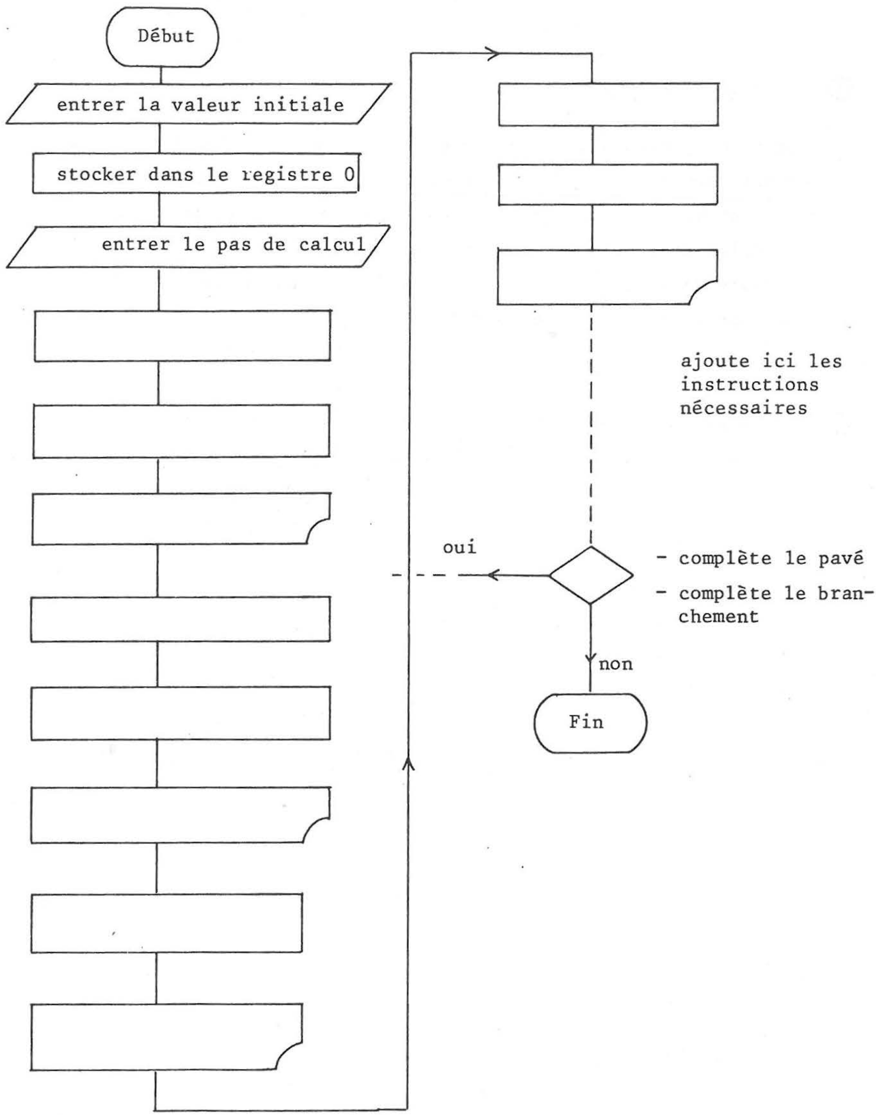
Quelles instructions ajouter ? Complète l'organigramme de la page 4.

Modifie ton programme. Fais-le contrôler par ton professeur.

Enregistre et fais exécuter le programme.


Début
entrer la valeur initiale
stocker dans le registre 0
entrer le pas de calcul: p
stocker dans le registre 1
calculer t^4
imprimer le résultat
stocker dans le registre 2
calculer t^3
imprimer le résultat
calculer $t^4 \times t^3$
imprimer le résultat
calculer t - p
stocker dans le registre 0
Que fait l'ensemble de ces instructions ?
imprimer le résultat

HP 10 FICHE 22 - 0



DOCUMENT 6

FICHE 18

FICHE PROFESSEUR

I ① But de l'exercice

Amener les élèves à remarquer que certains groupes ont trouvé deux valeurs convenables et d'autres une seule (afin de motiver le raisonnement qui sera fait par la suite pour montrer qu'une équation du premier degré a une seule solution dans $\mathbb{R}$).
Il serait donc souhaitable que des groupes aient trouvé les deux solutions (2 et 13), et d'autres une seule.

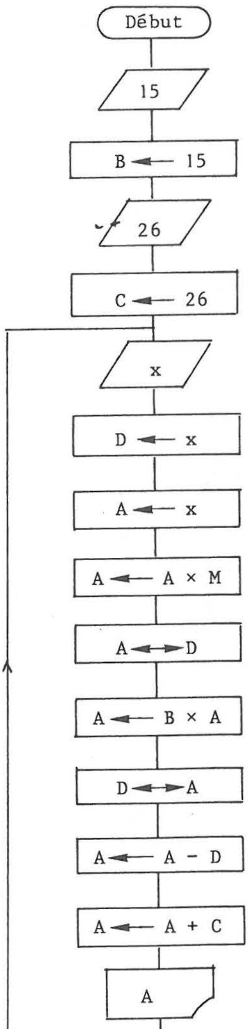
I ② Mise au point pour amener l'élève à se demander s'il est normal qu'il ne trouve qu'une valeur convenable.

FICHE 18

RESOLUTIONS PRATIQUES D'EQUATIONS

I ① On se propose, à partir de valeurs données à x, de calculer la valeur de :

$$x^2 - 15x + 26$$



- L'organigramme ci-contre permet de calculer

$$x^2 - 15\ x + 26$$

- Cherche la (ou les) valeur(s) de x qui rende(nt) vraie l'égalité :

" $x^2 - 15x + 26 = 0$ "

(essaie à partir de $x = 0$)

- Compare le résultat de ta recherche avec celui des groupes voisins.

② Reprends le programme de la fiche 17 .
Utilise-le pour résoudre le problème suivant:

" Y a-t-il des valeurs de x qui rendent vraie l'égalité:

$$4{,}25\ x = 29{,}75 \qquad ?$$ "

- Compare tes résultats à ceux des groupes voisins.
  Ton groupe a trouvé une solution et une seule; les autres groupes aussi. Es-tu sûr qu'il n'y aurait pas une autre solution décimale ?
- Fais appel à ton professeur.

II ① Voici une équation: $4\ x = 7$

On la transforme de la façon suivante :

1) $4x = 7$

2) $\frac{1}{4}\ (4x) = \frac{1}{4} \times 7$

3) $\left(\frac{1}{4} \times 4\right)\ x = \frac{1}{4} \cdot 7$

4) $1 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot 7$

5) $x = 1{,}75$

Justifie le passage de chaque ligne à la suivante par une propriété de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

② Recommence un travail analogue avec l'équation: $5t = 32$

③ Quelle est ta conclusion pour ① ? pour ② ?
Penses-tu qu'une vérification est nécessaire ? Si oui, fais-la.

④ Tu as résolu l'équation $4x = 7$. Tu as trouvé une solution unique dans $\mathbb{R}$: 1,75 .
Nous dirons que l'ensemble des solutions est $\{1{,}75\}$.
Nous écrirons: $S_{\mathbb{R}} = \{1{,}75\}$

Ecris l'ensemble des solutions de l'équation $5t = 32$.

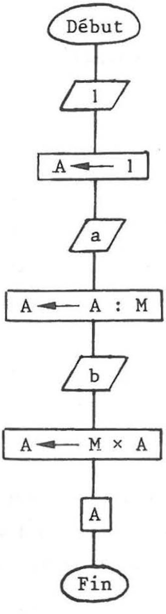
⑤ Recherche l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations:

$- 2x = 13$

$4t = -12$

$x \cdot 5 = 17$

III ①



a) Si on choisit $a = 5$; $b = 32$, l'organigramme ci-contre te permet-il de résoudre l'équation du II ② ?

b) Traduis cet organigramme en un programme.
Utilise ce dernier pour vérifier tes résultats de l'exercice II ⑤ .

② Essaie d'utiliser ce programme pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $0x = 7$
Justifie ce qui se passe.
Dans quels cas ce programme peut-il s'exécuter ?

③ • Essaie de trouver l'ensemble S des solutions de l'équation :

$$ax = b \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{array}$$

Justifie chaque étape.

• L'ensemble de solutions de l'équation $2t = -5$ comprend combien d'éléments ? Pourquoi ?

DOCUMENT 7

FICHE 23 (2 heures) et SYNTHESE (2 heures)

FICHE DU MAITRE

Introduire, sur des exemples machine, les applications $x \longmapsto ax$ et $x \longmapsto x + b$, de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$; puis la notion d'application composée (sans formuler).

- Fiche prévue pour 2 heures :
  1 heure avec la classe entière ① ②
  1 heure par demi-groupe ③

- Cette fiche n'est qu'une fiche de sensibilisation: il est prévu, dans la progression, 2 heures de synthèse pour formaliser l'application: $x \longmapsto ax$, l'application $x \longmapsto x + b$ et la composée de ces applications (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$).

- On peut faire modifier l'organigramme pour obtenir g suivi de f .
  Il est possible d'étudier, suivant le même principe, d'autres compositions d'applications;
  exemple:

$$f : x \longmapsto 2x^2$$
$$g : x \longmapsto (2t)^2 .$$

Mais il suffira, pour la suite, qu'après les deux heures de synthèse l'expression " f suivie de g " ait été vue.

FICHE 23

① Le contenu du registre C est 4 .

On veut réaliser $\boxed{M \longleftarrow M \times C}$

a) Ecris dans le tableau ci-contre une suite d'instructions nécessaires, pour obtenir: $M \longleftarrow M \times C$.
Quel est l'état final de M quand son état initial est -5 ?

Instructions	M	A	B	C
				4

b) Utilise le tableau et la suite d'instructions précédente pour compléter le tableau suivant:

Etat initial de M	Etat final de M
+ 1	
− 5	
0,1	
$\frac{14}{8}$	
x	

c) Le contenu du registre C est 4.
f est l'application de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ telle que:
Le contenu initial de M a pour image par la liste d'instructions précédente le contenu final de M .

Notation: $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$

En utilisant le tableau du b), complète :

$f(x) = \ldots$

puis calcule à la main: $f(2,4)$; $f(0,25)$; $f(0)$.

d) Le contenu du registre C est 7,2 .
On utilise la suite d'instructions précédente.
Soit l l'application de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ telle que le contenu initial de M a pour image le contenu final de M.
Si t est le contenu initial de M, quel est le contenu final de M :

$$l(t) = \ldots \qquad ?$$

② Le contenu du registre B est 5 .

a) Ecris dans le tableau ci-dessous une suite d'instructions pour réaliser

$$\boxed{M \longleftarrow M + B}$$

Instructions	M	A	B	C
			5	

b) Utilise le tableau et la suite d'instructions précédente pour compléter le tableau suivant:

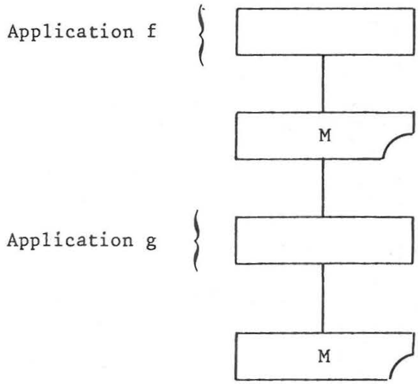
Etat initial de M	Etat final de M
4	
0,4	
-20	
7	
u	

c) L'application, notée g, de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ est telle que: le contenu initial de M a pour image, par la liste d'instructions précédente, le contenu final de M.

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ u \longmapsto g(u) \end{array} \right. \qquad g(u) = \ldots$$

Calcule g(32,5) , g(-4,8) , g(7,1) .

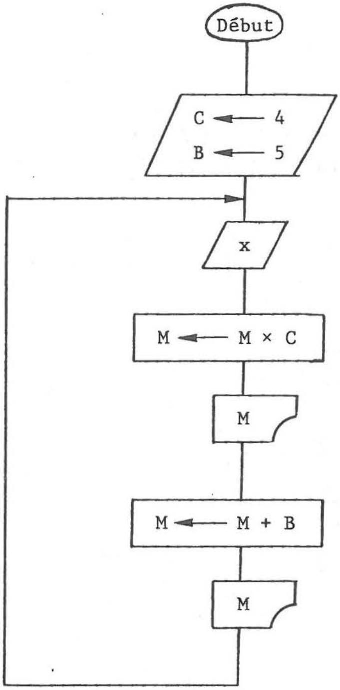
③ a) Le contenu du registre B est 5 et celui de C est 4 .
f et g sont les applications des paragraphes ① et ② .
Complète l'organigramme suivant:



Remplis le tableau ci-dessous:

Contenu initial de M	1ère sortie	2ème sortie
1		
- 5		
0,4		
t		

b) Ecris le programme correspondant à l'organigramme suivant:



Enregistre, puis fais exécuter ce programme pour les valeurs suivantes de x:

1 ; 4 ; 0,4 ; 1,25 .

Utilise la bande de papier pour remplir les quatre premières lignes du tableau suivant :

	1ère sortie	2ème sortie
1	f(...) = ...	g(...) = ...
4	f(...) = ...	g(...) = ...
0,4	f(...) = ...	g(...) = ...
-1,25	f(...) = ...	g(...) = ...
t	f(...) = ...	g(...) = ...

c) Recopie l'organigramme étudié au b) en supprimant la première sortie; modifie le programme correspondant; enregistre-le et fais-le exécuter pour les valeurs de x suivantes:

$$- 0{,}3 \ ; \quad 14{,}712 \ ; \quad 7 \ ; \quad - 1{,}1 \ .$$

Remplis le tableau suivant en utilisant la bande de papier et le tableau du b) .

x	Sortie
0,3	
14,7 / 2	
1	
4	
0,4	
- 1,25	
t	

Par le programme précédent, à chaque valeur donnée à x correspond une sortie; on définit ainsi une nouvelle application:

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ h \longmapsto h(x) \end{array} \right. \qquad \text{Complète:} \quad h(x) = \ldots$$

DOCUMENT 8

P 101 FICHE 26 Fonction monome

Arrêt de l'exécution d'un programme sur une valeur différente de 0

> Les nombres qui interviendront sont choisis dans $\mathbb{R}$.
> Les exposants sont choisis dans $\mathbb{N}$.

① Soit la fonction <u>monome</u> f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par f :

$$\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 3\,t^4 \end{array}\right.$$

Tu vas calculer les images de t pour $-1{,}5 \leqslant t \leqslant 1{,}5$, t prenant successivement les valeurs $-1{,}5$; -1 ; $-0{,}5$; ... ; 1

Quel est le "pas du calcul" ?

Prends la fiche 22 - 0 .

Tu entrais deux données:

la première valeur de t dans le registre B ,

le pas de calcul dans le registre C .

Quelles sont les données supplémentaires qu'il te faudra introduire ?

Tu les rangeras dans les registres D et E.

<u>Attention</u>

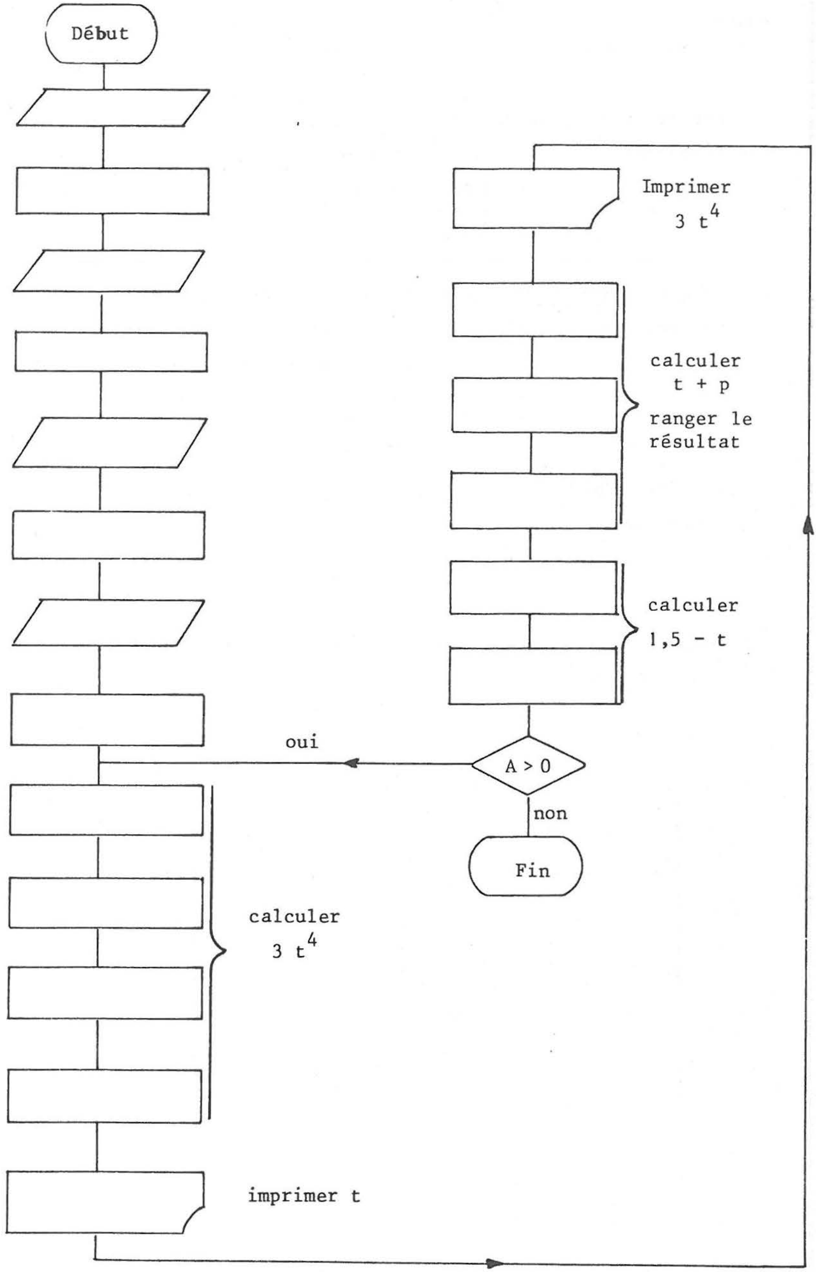
Il faut faire les calculs tant que $1{,}5 > t$ soit $1{,}5 - t > 0$.

Que devra contenir le registre A avant de faire le test ?

Complète l'organigramme de la page suivante:

P 101 FICHE 26

2



P 101
HR 10 FICHE 26
SHARP

---

③ Quelles modifications dois-tu apporter à cet organigramme pour calculer les images de t par la fonction monome g définie par

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 5{,}4\ t^4 \end{array} \right.$$

Est-ce que le programme est modifié ? Qu'est-ce qui est différent ?
Ces monomes ont un coefficient différent. Nous l'appellerons a .
La fonction monome que nous étudions est définie par

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto a\ t^4 \end{array} \right.$$

Ecris le programme. Fais-le contrôler par ton professeur.
Enregistre-le et fais-le exécuter pour l'une des valeurs de a : 3 ou 5,4 (partagez-vous le travail).

④ Complète le tableau suivant à l'aide des résultats que tu as obtenus et de ceux de tes camarades.

t	$3t^4$	$5{,}4\ t^4$	$3t^4 + 5{,}4\ t^4$ fais les calculs à la main	$3t^4 - 5{,}4\ t^4$
-1,5				
-1				
-0,5				
0				
0,5				
1				

P 101
HP 10 FICHE 26
SHARP

A l'aide des résultats précédents, sans utiliser la machine, remplis le tableau suivant si tu le peux.

Si oui, explique pourquoi. Si non, explique pourquoi.

t	$8,4\ t^4$	$-\ 2,4\ t^4$	$8,4\ t^8$	$6\ t^4$
$-\ 1,5$				
$-\ 1$				
$-\ 0,5$				
0				
$0,5$				
1				

⑤ Tu vas contrôler les résultats du ③ et du ④ avec la machine.
On a écrit le programme qui calcule les images de t définies par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto a\ t^n \end{array} \right.$$

n s'appelle le degré du monome.

Demande la carte correspondante à ton professeur.
Fais exécuter le programme pour $t \in [-1,5\ ;\ 2[$ avec un pas de calcul égal à $0,5$.

Attention: tu dois entrer dans l'ordre :

- la valeur initiale de t
- le pas de calcul
- la valeur maximum de t
- la valeur de a
- la valeur de n .

P 101
HP 10 FICHE 26
SHARP

Choisis a et n de façon à contrôler les résultats.

Partagez-vous le travail.

t							
-1,5							
-1							
-0,5							
0							
0,5							
1							

⑥ Quand peux-tu, quel que soit le choix de t, réduire en un seul monome:

$$a\ t^n + b\ t^p \qquad ?$$

Quand tu le peux, écris la formule correspondante:

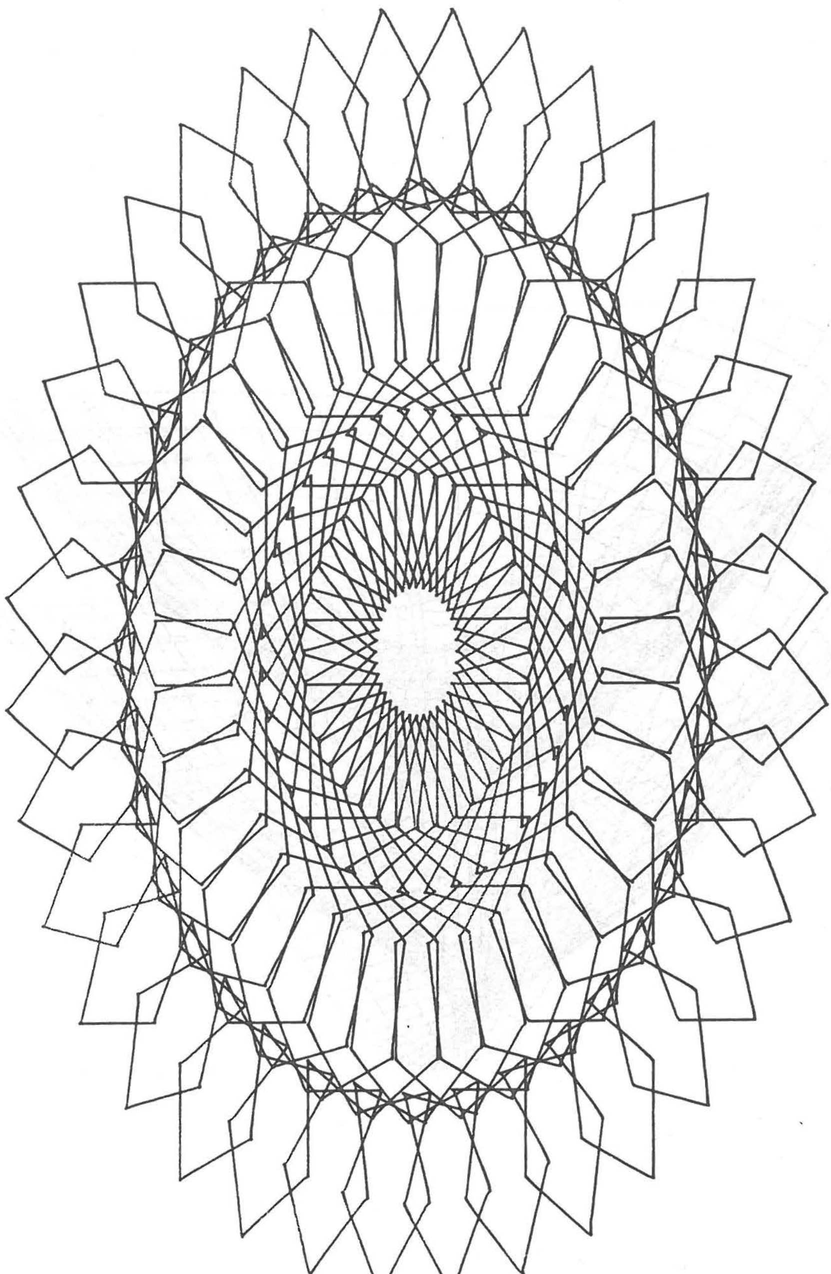
$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

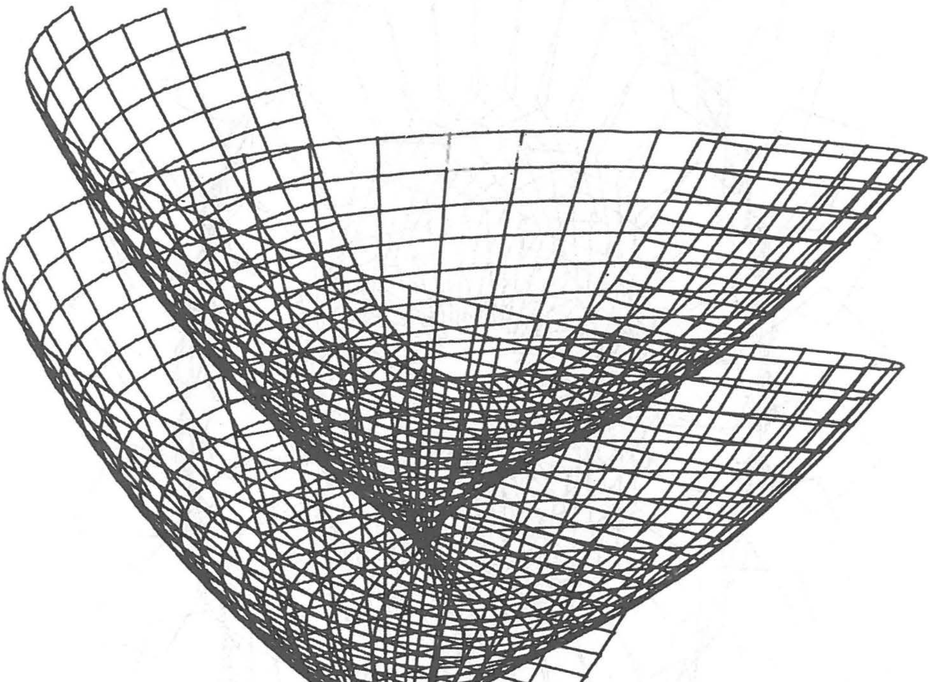
Fais-la contrôler par ton professeur.

Réduis en un seul monome quand cela est possible :

$2,3\ t^3 + 7,4\ t^3 =$ $\qquad$ $2,3\ t^3 + 2,3\ t^3 =$

$2,3\ t^3 + 2,3\ t^6 =$ $\qquad$ $9,7\ t^3 - 7,4\ t^3 =$





CHAPITRE 3

LANGAGES ET METHODES

1. LANGAGES

L'apport fondamental de l'informatique à l'enseignement des mathématiques est de nous apprendre à construire des algorithmes, c'est-à-dire des procédures automatiques de calcul.

La construction de ces algorithmes passe nécessairement par un langage. car sans langage, que dire ?

Le but de cet article est de présenter quelques types de langages employés pour exprimer des algorithmes. Il ne faut pas prendre ici "langage" au sens technique de langage de programmation. Au contraire, cet article vise à définir des façons générales de s'exprimer; les langages de programmation, qui servent effectivement à communiquer avec l'ordinateur, obéissent à des contraintes plus strictes, pour trois raisons :

- l'ordinateur n'admet aucun implicite
- l'ordinateur doit analyser lui-même le langage de programmation, d'où des contraintes syntaxiques rigoureuses pour permettre cette analyse automatique
- l'ordinateur est en liaison avec des périphériques, qu'il faut savoir commander (instructions d'entrée-sortie).

L'article cherche à dégager les structures possibles pour un langage, et compare sur des exemples les principales méthodes d'expression d'algorithmes utilisés aujourd'hui.

I - ORGANIGRAMME

Une procédure de calcul s'exprime à l'aide de variables, que nous classerons en trois types:

- *données*, désignées par des lettres minuscules: a, b, c, ... (sauf z); x désignera dans la suite le vecteur des données: $x = (a, b, c, \ldots)$
- *variables de calcul*, désignées par des majuscules: A, B, C, ... ; X désignera le vecteur $(A, B, C, \ldots)$
- *résultats*, désignés par le vecteur: $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$

Décrire une procédure consiste donc à décrire comment calculer z en fonction des données a, b, c, ..., et en utilisant les variables de calcul A, B, C, ... Pour cela, il faut indiquer une série d'instructions, et indiquer dans quel ordre celles-ci doivent être exécutées.

Un procédé courant est d'employer un organigramme, où les instructions sont reliées par des flèches qui indiquent l'ordre d'exécution, selon des modalités bien connues. Dans les organigrammes les plus simples (1), les instructions peuvent être rangées en quatre classes:

- *Instruction d'entrée*

Début

$$\boxed{X \longleftarrow f(x)}$$

L'instruction d'entrée correspond à l'affectation de valeurs initiales aux variables de calcul, en fonction des données.

- *Instructions d'affectation*

$$\boxed{X \longleftarrow g(x, X)}$$

ce qui signifie: calculer $g(x, X)$ en fonction des données et des valeurs actuelles des variables de calcul; puis affecter le résultat à X .

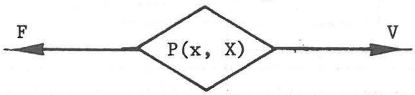
Exemple : $(A, B, C) \longleftarrow (B, C, A+a)$

Si $a = 1$, et si $(A, B, C) = (10, 9, 8)$ avant exécution de

(1) c'est-à-dire ceux où l'on n'utilise pas de variables indicées.

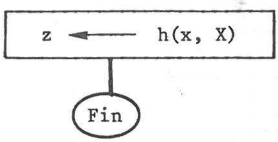
l'instruction, on aura: (A, B, C) = (9, 8, 11) après exécution.

- *Instructions de test*



Si le prédicat P, calculé en fonction des données et des valeurs actuelles des variables de calcul, a pour valeur "VRAI", il faut suivre la branche marquée V, dans l'organigramme; sinon, la branche marquée F .

- *Instructions de sortie*



Nous supposerons la procédure déterministe, c'est-à-dire que de l'instruction d'entrée et de chaque instruction d'affectation, part exactement une flèche, qui indique la prochaine instruction à exécuter (et de chaque instruction de test partent deux flèches et deux seulement, l'une marquée V, l'autre F). Enfin, un organigramme ne comporte pas de "cul de sac": chaque instruction est située sur au moins un chemin menant de l'instruction d'entrée à l'une des instructions de sortie.

EXEMPLE 1

L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD z de deux naturels a, b de la manière suivante:

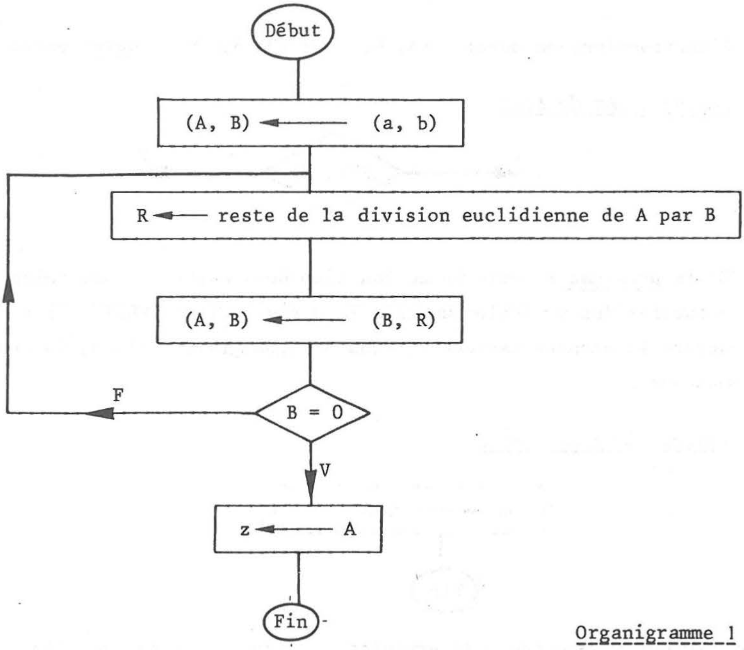
On effectue la division euclidienne de a par b :

$$a = bq + r \qquad 0 \leqslant r < b$$

Si $r = 0$, alors $z = b$; sinon, on remplace a par b , b par r , et on recommence... (car tout diviseur commun de a et b divise aussi b et r, et réciproquement).

Nous avons volontairement exprimé l'algorithme sous forme approximative.

Voici une traduction précise sous forme d'organigramme:



Organigramme 1

EXEMPLE 2

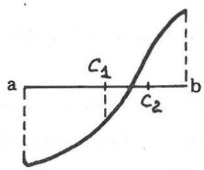
Si f est une fonction continue telle que:

$$f(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) > 0$$

on sait qu'il existe au moins une valeur $c \in \,]a, b[$ telle que: $f(c) = 0$

Une procédure pour obtenir une suite $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ convergeant vers une valeur c telle que $f(c) = 0$ est la suivante:

Poser $c_1 = \dfrac{a + b}{2}$

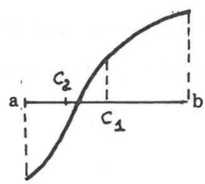


Si $f(c_1) < 0$,
recommencer en calculant

$$c_2 = \frac{c_1 + b}{2}$$

sinon, calculer :

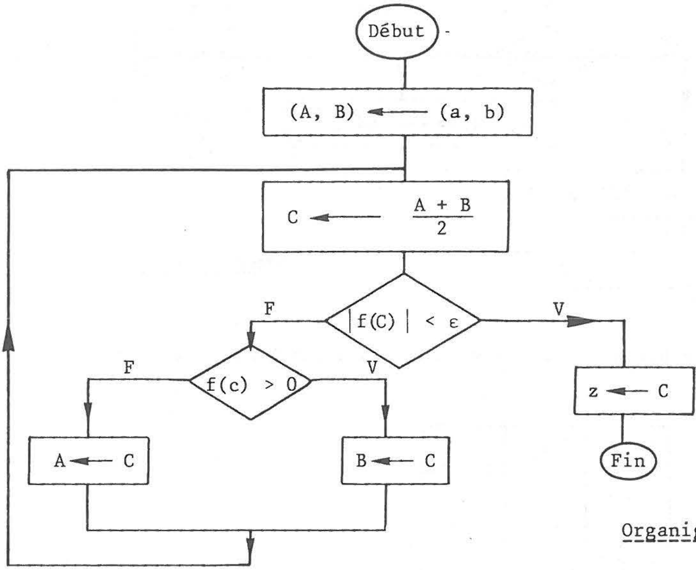
$$c_2 = \frac{a + c_1}{2}$$



etc...

Ceci reste intentionnellement assez vague. Pour préciser la description de la procédure, nous emploierons un organigramme. Calculer comme résultat la suite $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ exigerait l'emploi d'une variable <u>indicée</u>. Aussi nous introduirons plutôt une donnée supplémentaire $\varepsilon > 0$; le résultat de la procédure sera la première valeur de c telle que :

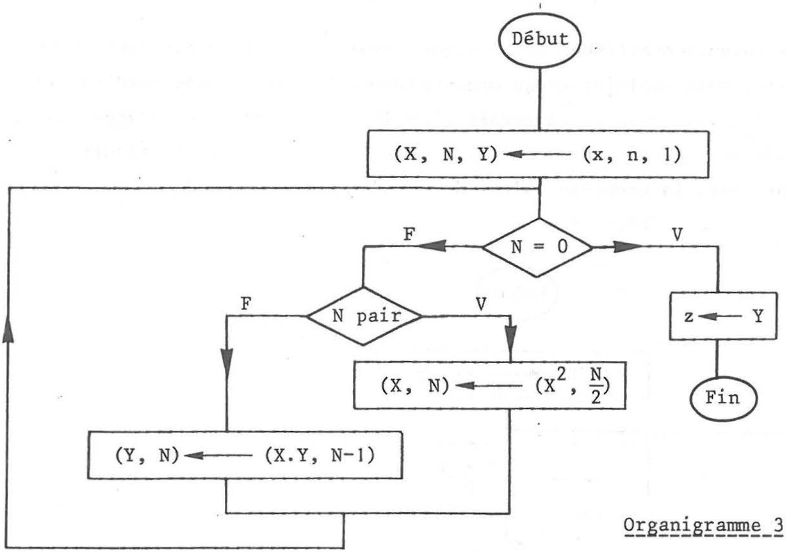
$$|f(c)| < \varepsilon$$



Organigramme 2

EXEMPLE 3

Voici, directement sous forme d'organigramme, une procédure dont on pourra s'amuser à constater qu'elle calcule (astucieusement...) la valeur de x^n, pour n naturel:



Organigramme 3

Voici par exemple le tableau des valeurs successives prises par les variables de calcul, si n = 13:

X	N	Y
x	13	1
	12	x
x^2	6	
x^4	3	
	2	x^5
x^8	1	
	0	x^{13}

Surprenant, n'est-ce pas ?

■

■ ■

Reste à communiquer un organigramme à une calculatrice programmable ou à un ordinateur. C'est là que les choses se gâtent, car un organigramme est une forme de graphe: sa structure est essentiellement à deux dimensions, alors que les langages d'ordinateur ont une structure linéaire: les instructions forment une suite (matérialisée par une suite de cartes perforées, ou par les lignes d'un programme).

La solution la plus simple à ce problème est d'utiliser des instructions de branchement; par exemple l'organigramme 2 peut être traduit sous la forme suivante:

1) $(A, B) \longleftarrow (a, b)$

2) $C \longleftarrow \dfrac{A + B}{2}$

3) Si $|f(C)| < \varepsilon$ aller en 9)

4) Si $f(C) > 0$ aller en 7)

5) $A \longleftarrow C$

6) Aller en 2)

7) $B \longleftarrow C$

8) Aller en 2)

9) $z \longleftarrow C$

10) Fin

Les instructions 3) et 4) sont des instructions de branchement conditionnel, du type:

> Si P(x, X) aller en n , ce qui signifie: si le prédicat P prend la valeur VRAI, aller à l'instruction numéro n ; sinon, passer à l'instruction suivante.

Il est manifeste qu'on peut traduire ainsi n'importe quel organigramme; par contre la structure profonde de la procédure est devenue assez illisible.

Cette solution est celle des langages élémentaires de programmation, qu'on trouve sur les petites calculatrices programmables; c'est celle aussi du premier langage évolué, FORTRAN, et du langage BASIC qu'on trouve actuellement sur la plupart des micro-ordinateurs du marché (et qui, de ce fait, est particulièrement employé dans les IREM). Le passage de l'écriture précédente à l'écriture d'un programme BASIC, par exemple, n'est qu'une affaire de routine, qui demande seulement une connaissance précise:

- des fonctions disponibles en BASIC et de la façon de les exprimer; en particulier des règles d'écriture des expressions algébriques,
- des instructions BASIC d'entrée de données et de sortie de résultats (vers une imprimante ou vers un écran).

Pour obtenir un programme sur HP 25, le travail est plus pénible, car il faut décomposer chaque instruction en instructions plus élémentaires, mais il reste un travail de routine; la preuve en est qu'un ordinateur en est capable: c'est précisément le travail qu'il exécute lorsqu'il compile un programme BASIC ou FORTRAN, pour le traduire dans son langage interne (qui ne comporte que des instructions très élémentaires, codées en général chacune par 8 bits, c'est-à-dire par une suite de huit 0 ou 1).

Résumons:

L'organigramme, tel qu'il a été défini, est une bonne méthode d'explicitation d'une procédure. Mais il faut ensuite le traduire sous une forme linéaire: la méthode courante, à base d'instructions de branchement, est simple, mais obscurcit la structure de la procédure.

II - LANGAGES DU TYPE ALGOL

ALGOL est un langage qui date environ de 1960; conçu à partir de recherches linguistiques, il a eu de nombreux successeurs qui tous, permettent d'exprimer une procédure à partir de nouveaux schémas de formulation.

Dans un langage de ce type, un programme est une suite d'instructions, séparées, par exemple, par des points-virgules: S_0 ; S_1 ; S_2 ; ... ; S_n .
S_0 est l'instruction d'entrée:

Début

$x \longleftarrow f(x)$

Son rôle est le même que celui de l'instruction d'entrée décrite au paragraphe I, dont nous reprendrons les notations.

Les autres instructions peuvent être classées en cinq types:

- Instructions d'affectation:

$$X \longleftarrow g(x, X)$$

- Instructions conditionnelles:

Si P(x, X) alors S ; sinon S' ; où S et S' sont elles-mêmes des instructions (ce type de définition est récursif: S peut être elle-même une instruction conditionnelle, ou tout autre type d'instruction). Les mots si , alors , sinon sont soulignés pour marquer qu'ils font partie du langage que nous décrivons.

♦ Instructions de répétition:

Tant que P(x, X) faire S

ou bien Répéter S jusqu'à P(x, X)

(S désigne à nouveau une instruction quelconque, et P un prédicat fonction des données x et des variables de calcul X).

♦ Instructions de concaténation:

$[S_1 ; S_2 ; \dots ; S_n]$

est une instruction si $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des instructions.

♦ Instructions de sortie:

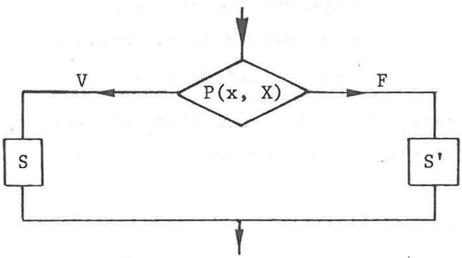
$Z \longleftarrow h(x, X)$

Fin

(leur rôle est analogue à celui des instructions de sortie du paragraphe I).

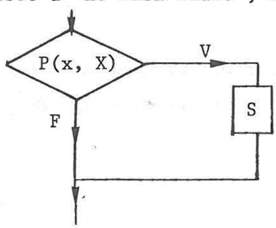
Les trois types nouveaux d'instructions: conditionnelles, répétition, concaténation, correspondent aux schémas suivants:

♦ Instructions conditionnelles:



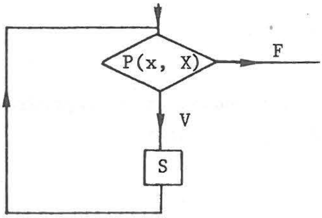
Si P(x, X) alors S sinon S'

Si S' consiste à "ne rien faire", on emploie aussi la formulation suivante:

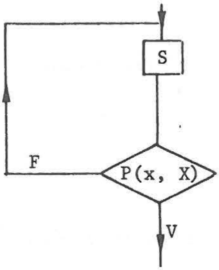


Si P(x, X) alors S

◆ Instructions de répétition:

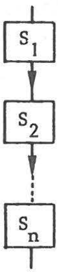


Tant que P(x, X) faire S



Répéter S jusqu'à P(x, X)

◆ Instructions de concaténation:



$[S_1 \; ; \; S_2 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; S_n]$

Note : En fait, les langages de ce type emploient d'autres symboles que les crochets: [ ] pour marquer la concaténation. C'est un pur détail.

Traduisons les trois organigrammes du paragraphe 1 à l'aide d'un tel langage, pour illustrer la fonction de choc de ce type d'instructions.

Programme 1 (calcul du PGCD de a et b)

Début

(A, B) ⟵ (a, b) ;

Répéter [R ⟵ reste de la division euclidienne de A par B ;
(A, B) ⟵ (B, R)]

jusqu'à B = 0 ;

z ⟵ A ;

Fin

Programme 2 (calcul à ε près d'une racine de f sur $[a, b]$)

<u>Début</u>

$(A, B) \longleftarrow (a, b)$;

$C \longleftarrow \frac{A + B}{2}$;

<u>Tant que</u> $|f(C)| > \varepsilon$ <u>faire</u>

$\left[\right.$ <u>Si</u> $f(C) > 0$ <u>alors</u> $B \longleftarrow C$ <u>sinon</u> $A \longleftarrow C$; $C \longleftarrow \frac{A + B}{2}\left.\right]$;

$z \longleftarrow C$;

<u>Fin</u>

Programme 3 (calcul de x^n)

<u>Début</u>

$(X, N, Y) \longleftarrow (x, n, 1)$;

<u>Tant que</u> $N > 0$ <u>faire</u>

<u>Si</u> N pair <u>alors</u> $(X, N) \longleftarrow (X^2, N/2)$

<u>sinon</u> $(Y, N) \longleftarrow (XY, N-1)$;

$z \longleftarrow Y$;

<u>Fin</u>

<u>Note</u> : Dans les écritures ci-dessus, nous sommes contraints, pour des raisons purement physiques, à des changements de ligne, et nous les organisons de façon à rendre la lecture claire, mais ils ne font pas partie du langage. Le programme ci-dessus est purement linéaire, et peut être écrit:

<u>Début</u> : $(X, N, Y) \longleftarrow (x, n, 1)$; <u>Tant que</u> $N > 0$ <u>faire</u> <u>si</u> N pair <u>alors</u> $(X, N) \longleftarrow (X^2, N/2)$ <u>sinon</u> $(Y, N) \longleftarrow (XY, N-1)$; $z \longleftarrow Y$; <u>Fin</u>

Résumons les caractéristiques d'un tel langage:

- Un langage de type ALGOL se rapproche d'un véritable langage, avec ses possibilités d'<u>emboîtements</u> (formellement, cela se traduit par des définitions <u>récursives</u> des instructions).

- Moyennant parfois quelques répétitions d'instructions, on peut exprimer n'importe quel organigramme[1], et ceci de telle sorte que la structure profonde de l'organigramme devienne lisible.

Or, un "bon" langage pour l'expression d'algorithmes doit:

- guider la pensée de celui qui met au point un algorithme (comme par exemple le langage de l'algèbre donne une méthode générale de mise en équation d'un problème);
- faciliter la détection des erreurs, et la mise au point de programmes fiables, c'est-à-dire dont on puisse prouver la correction;
- permettre la communication entre différentes personnes travaillant sur un même problème: un programme écrit par l'une de ces personnes doit être lisible pour une autre; à cette lisibilité est attachée la facilité de modification d'un programme déjà écrit.

A l'opposé, un "mauvais" langage n'aide pas l'utilisateur à développer sa pensée; la mise au point de programmes et la détection des erreurs est un jeu assez stérile style "le chat et la souris" et toute modification risque de faire s'écrouler le château de cartes patiemment échafaudé.

Ceci comporte évidemment un aspect attractif pour les esprits bricoleurs, qui éprouvent une certaine satisfaction à voir "tourner" leurs programmes hétéroclites sans que personne d'autre n'arrive à comprendre comment cela fonctionne.

De telles motivations ne sont pas à mépriser, et chacun doit être libre d'utiliser l'ordinateur comme il veut; mais elles ne peuvent former la base d'un système pédagogique. D'autant plus que la tentation est grande, vu l'émerveillement devant l'ordinateur, de s'en tenir à ces bricolages.

Il apparaît à l'usage que les types de constructions répertoriés ci-dessus - concaténation, test, et répétition - sont fondamentaux. Un bon langage comportera donc le moyen d'exprimer directement ces constructions, sans passer par des artifices, et sans restriction (d'où la nécessité des emboîtements; il est essentiel que dans une instruction du type:

Tant que P faire S

---

(1) Ce résultat est loin d'être évident, mais peut être démontré (il faut parfois aussi ajouter des variables de calcul auxiliaires).

il n'y ait aucune restriction sur la nature de l'instruction S, qui peut être elle-même:

$$\underline{\text{Si}}\ P_1\ \underline{\text{alors}}\ S_1\ \underline{\text{sinon}}\ S_2\ ,$$

S_1 et S_2 pouvant elles-mêmes être des instructions répétitives, conditionnelles, etc...).

▲

▲ ▲

Les exemples présentés jusqu'à maintenant concernaient des procédures simples et courtes. Il est clair que c'est surtout l'écriture de procédures complexes qui exige des méthodes systématiques. En particulier il faut revenir sur les instructions d'affectation, symbolisées par:

$$X \longleftarrow g(x, X)$$

où g désigne une fonction du vecteur x des données et du vecteur X des valeurs des variables de calcul. Tout dépend en effet de la nature de g : il peut s'agir d'une fonction courante , et son codage en langage de programmation est immédiat ; tous les langages de programmation comportent en effet des fonctions "standard". Mais il peut s'agir aussi d'une fonction complexe qui, pour être calculée, exige ... un <u>algorithme</u>[(1)] .

- Si l'algorithme de calcul de g est très simple, l'instruction d'affectation

  $$X \longleftarrow g(x, X)$$

  pourra être remplacée directement par une chaîne d'instructions élémentaires.

  Par exemple, l'instruction:

  " R ⟵ reste de la division euclidienne de A par B "

  pourra être remplacée par:

  $$[\ Q \longleftarrow \text{ENT}\ (A\ /\ B)\ ;\ \ R \longleftarrow A - B \times Q\ ]$$

  si les fonctions disponibles sont seulement les quatre opérations arithmétiques et la fonction

  $$\text{ENT} :\ x \longmapsto \text{partie entière de } x$$

  (ENT(x) est le plus grand entier inférieur ou égal à x).

---

(1) Le calcul d'une fonction standard utilise bien sûr lui aussi un algorithme, mais celui-ci est choisi par le constructeur et reste caché aux yeux de l'utilisateur, qui n'a pas à s'en préoccuper.

- Dès que l'algorithme de calcul de g est complexe, la méthode sera de formuler cet algorithme dans une procédure indépendante. Un bon langage doit permettre la définition par l'utilisateur des fonctions de son choix, et leur utilisation à l'intérieur d'autres procédures au même titre que les fonctions "standard" du langage. En d'autres termes l'utilisateur doit pouvoir définir le vocabulaire adapté à ses besoins, la syntaxe étant par exemple celle que nous avons définie dans ce paragraphe.

  Nous renvoyons à ce sujet à l'article de Claude VIEULES dans cette brochure.

  La possibilité de modifier le vocabulaire employé est bien sûr essentielle du point de vue pédagogique: il n'est pas souhaitable que pour des élèves disposant d'un ordinateur, écrire une procédure soit synonyme d'en écrire tous les détails; il est préférable, dans bien des cas, de ne leur demander que l'architecture générale de la procédure, en leur permettant d'utiliser des procédures auxiliaires toutes faites. Des procédures auxiliaires peuvent être:

  . préparées par le professeur
  . préparées par d'autres élèves: une tâche complexe pourra ainsi être réalisée par un groupe d'élèves, qui après avoir élaboré l'architecture générale, procède à une division du travail pour la mise au point des procédures auxiliaires.

III - LOGO : UN EXEMPLE DE LANGAGE "EVOLUTIF"

LOGO est un langage mis au point au M.I.T.(1) et au Québec, spécialement destiné à la pédagogie.

Lorsque des élèves utilisent LOGO, l'ordinateur est en général relié à une "tortue" (mécanique bien entendu), ou à un écran graphique; parmi les fonctions standard de LOGO figurent:

AVANCE	Par exemple AVANCE 3 fait avancer la tortue de 3 unités
RECULE	
DROITE	Par exemple DROITE 45 fait pivoter la tortue de 45° vers la droite.
GAUCHE	

(1) Massassuchetts Institute of Technology

Si la tortue est représentée par un point sur un écran, ses mouvements peuvent laisser une trace sur l'écran, et ainsi l'élève est amené à réaliser des dessins, au moyen de programmes.

Exemples :

Procédure DESSINER

```
POUR DESSINER : DISTANCE
1 AVANCE : DISTANCE
2 RECULE : DISTANCE
FIN
```

Indique qu'une définition de procédure va suivre

Indique le nom de la procédure

Indique un nom de paramètre; le signe : distingue les noms des variables de calcul des noms des procédures

Cette procédure permet de dessiner ... et de revenir au point de départ.

AVANCE 3

Origine

DESSINE 3

(le triangle représente la position finale de la tortue)

Procédure VE : cette procédure permet de dessiner un "V"

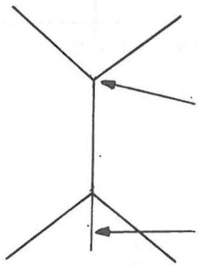
```
POUR VE : GRANDEUR
1 GAUCHE 50
2 DESSINER : GRANDEUR
3 DROITE 100
4 DESSINER : GRANDEUR
5 GAUCHE 50
FIN
```

La dernière instruction a pour fonction de remettre la tortue dans sa position de départ.

VE 2

Et maintenant l'élève est prêt à dessiner, sans peine, un bonhomme[1].

POUR BONHOMME : GRANDEUR
1 VE : GRANDEUR
2 DROITE 180
3 AVANCE : GRANDEUR
4 VE : GRANDEUR
5 AVANCE : GRANDEUR /2
FIN



BONHOMME 2

<u>Autre exemple</u> : Comment dessiner une fleur ?

On met à la disposition de l'élève une procédure QCERCLE qui a l'effet suivant :

QCERCLE 2

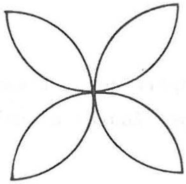
L'élève peut alors écrire les programmes suivants:

POUR PETALE : GRANDEUR
1 QCERCLE : GRANDEUR
2 DROITE 90
3 QCERCLE : GRANDEUR
FIN

PETALE 2

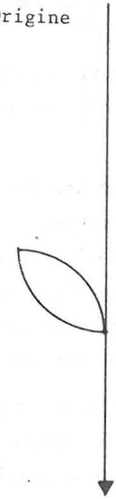
(1) Tous ces exemples sont tirés de publications de PAPERT, l'un des "pères" de LOGO.

```
POUR FLEUR : GRANDEUR
1 PETALE : GRANDEUR
2 PETALE : GRANDEUR
3 PETALE : GRANDEUR
4 PETALE : GRANDEUR
FIN
```



FLEUR 2

Origine



```
POUR TIGE : GRANDEUR
1 DROITE 180
2 AVANCE : 2XGRANDEUR
3 DROITE 90
4 PETALE : GRANDEUR / 2
5 AVANCE : GRANDEUR
FIN
```

TIGE 3

```
POUR PLANTE : GRANDEUR
1 FLEUR : GRANDEUR
2 TIGE : GRANDEUR
FIN
```

On laisse le lecteur exécuter PLANTE 3 ...

Revenons sur l'exécution de TIGE 3 .
L'ordinateur attribue la valeur 3 au paramètre : GRANDEUR du programme TIGE ; puis, quand il exécute l'instruction 4 :

PETALE : GRANDEUR / 2

il attribue donc la valeur 1,5 au paramètre : GRANDEUR du programme PETALE. Il est donc essentiel qu'il ne confonde pas (c'est-à-dire qu'il place dans des cases mémoires séparées) les variables intervenant dans différents programmes, même quand elles ont même nom. La description d'une procédure doit donc préciser quelles sont les variables <u>locales</u> (c'est-à-dire devant être traitées indépendamment de toute autre variable du même nom apparaissant dans une procédure extérieure), par opposition aux variables <u>globales</u>. Les paramètres d'une procédure (c'est-à-dire les variables intervenant dans le titre même de la procédure) sont toujours locaux.

▲

▲ ▲

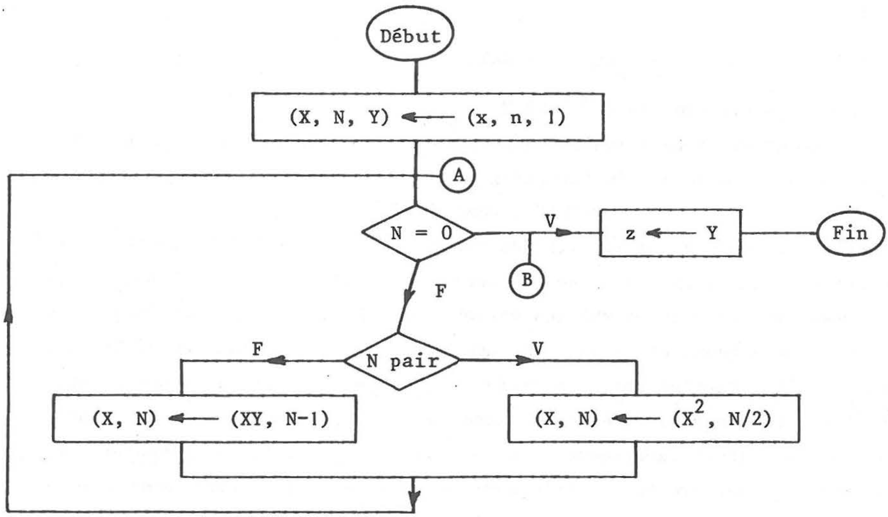
On espère que l'exemple de LOGO montre que l'informatique ne se réduit pas à des procédures d'analyse numérique ...

(IV) - PREUVES DE PROGRAMMES

Lorsqu'un algorithme, ou un programme, est écrit, reste souvent à savoir s'il est correct, c'est-à-dire s'il fournit bien le résultat qu'il est censé fournir.

Une première vérification consiste souvent en quelques essais: on choisit des données a, b, c, ... pour lesquelles on connaît le résultat z, et on exécute l'algorithme (ou on fait exécuter le programme par un ordinateur). Si le résultat n'est pas conforme à l'attente, on a prouvé que l'algorithme est incorrect, mais sinon ... un mathématicien sait que quelques exemples ne remplacent pas une preuve.

Décrivons une méthode (1) pour prouver la correction d'un algorithme. Nous choisirons comme exemple l'algorithme 3 (paragraphes I et II), qui calcule x^n pour n naturel, dont voici à nouveau l'organigramme :



(1) Cette méthode est appelée "méthode des assertions". Ce n'est pas la seule méthode de preuve de programmes.

La preuve de correction se décompose en deux parties :

1°) Preuve de correction partielle

L'algorithme comprend essentiellement une boucle; introduisons une coupure dans cette boucle, à savoir en Ⓐ, et énonçons une assertion qui soit vraie chaque fois qu'on passe par Ⓐ, au cours de l'exécution de l'algorithme. Ici l'assertion n'est pas du tout évidente (de façon générale, bien comprendre un algorithme c'est être capable d'énoncer les "bonnes" assertions...); c'est:

$$(1) \qquad Y \,.\, X^n = x^n$$

En effet, si l'on arrive en Ⓐ en venant de Début, l'assertion (1) est vraie, car Y vaut 1, X vaut x et N vaut n .

Si l'on arrive en Ⓐ après exécution d'une boucle, on peut supposer (hypothèse de récurrence) que l'assertion (1) était vraie avant exécution de la boucle.

Reste à examiner ce qui se passe au cours de l'exécution de la boucle:

- si N est pair, X est remplacé par X^2, et N par N/2 , donc :

$$Y \,.\, X^N = Y \,.\, (X^2)^{N/2}$$

  est inchangé;

- si N est impair, Y est remplacé par XY , et N par N-1 , donc

$$Y \,.\, X^N = (Y.X) \,.\, X^{N-1}$$

  est inchangé.

Ceci achève la preuve qu'en Ⓐ on a toujours :

$$Y \,.\, X^N = x^n$$

Donc, en particulier, si l'on arrive en Ⓑ, ce qui se produit en venant de Ⓐ avec N = 0 , on aura:

$$Y \,.\, X^0 = x^n$$

c'est-à-dire

$$Y = x^n$$

Conclusion : si en cours d'exécution on arrive en Ⓑ, l'algorithme est correct.

2°) Terminaison

Reste à prouver que lors de toute exécution (avec $n \in \mathbb{N}$) , on finit par passer en Ⓑ, c'est-à-dire à prouver que l'algorithme ne boucle pas (on dit aussi: termine).

Ici cette preuve est facile, car à chaque exécution de la boucle, N décroît (en restant positif ou nul): donc au bout d'un temps fini, on arrivera à $N = 0$.

▲

▲ ▲

La méthode précédente peut être appliquée à tout algorithme. Les assertions utilisées pour preuve de correction partielle sont en fait essentielles à la compréhension d'un algorithme; il est conseillé de les placer en commentaires entre accolades dans le programme.

Exemples:

Programme 3

Début

$(X, N, Y) \leftarrow (x, n, 1)$;

Tant que $N > 0$ faire $\{X\,Y^N = x^n\}$

Si N pair alors $(X, N) \leftarrow (X^2, N/2)$

sinon $(Y, N) \leftarrow (XY, N-1)$;

$z \leftarrow Y$;

Fin

Programme 1 algorithme d'Euclide

Début

$(A, B) \leftarrow (a, b)$;

Répéter {PGCD (A, B) = PGCD (a, b)}

[R ← reste de la division de A par B;

$(A, B) \leftarrow (B, R)$]

jusqu'à $B = 0$;

$z \leftarrow A$;

Fin

La preuve de terminaison de ce programme est classique en arithmétique: les restes des divisions successives vont en décroissant strictement.

Programme 2 calcul d'une racine de f sur $[a, b]$

<u>Début</u>

$(A, B) \longleftarrow (a, b)$;

$C \longleftarrow \dfrac{A + B}{2}$;

<u>Tant que</u> $|f(C)| > \varepsilon$ <u>faire</u> $\{f(A) < 0$ et $f(B) > 0\}$

$[$ <u>Si</u> $f(C) > 0$ <u>alors</u> $B \longleftarrow C$ sinon $A \longleftarrow C$; $C \longleftarrow \dfrac{A + B}{2}$ $]$;

$z \longleftarrow C$;

<u>Fin</u>

Ici la preuve de la terminaison est évidemment fondée sur la continuité de f (sinon ce programme peut très bien boucler), et nécessite une véritable démonstration d'analyse.

2. METHODES

On peut définir la programmation comme une méthode de conception des algorithmes.

Notre intérêt se porte donc sur les procédés d'organisation et de recherche permettant de construire ces algorithmes d'une façon logique et raisonnée.

Le langage de programmation n'interviendra que <u>très tard</u> dans notre progression: ce n'est en fait qu'un simple codage fidèle du travail antérieur permettant notre communication avec une machine donnée.

I - <u>LES NOTIONS FONDAMENTALES</u> suivantes doivent être assimilées au départ:

- La machine est seulement docile:
  Lorsque nous communiquons entre êtres humains, nous traduisons en général notre pensée par des phrases qui ne sont pas complètement explicites car interprétées dans un certain contexte.

Un automate, par contre, ne peut qu'exécuter les ordres précis qu'il reçoit: ceux-ci doivent donc être formulés clairement, sans sous-entendu ni ambiguïté possible.

- Le programme traduit un dynamisme:
  - en cours d'exécution les variables changent de valeurs, par exemple: $x \longleftarrow y$: x prend la valeur de y .
  - l'ordre dans lequel se présentent dans le texte les actions décrites par un programme diffère, en général, de celui de leur exécution; ainsi par exemple:
    si "test" alors "action 1" sinon "action 2" . Lors d'une exécution nous aurons, après le test,
    soit "action 1"
    soit "action 2"
    mais jamais les deux à la fois.
  - La capacité et le pouvoir des machines actuelles sont immenses et dépassent notre pouvoir d'imagination: seule une structuration raisonnée du problème à résoudre peut nous permettre de contrôler le travail car elle l'adapte à nos limites intellectuelles: la règle principale étant de diviser pour mieux régner.

Notre analyse se fera donc d'une façon descendante à partir du problème entier que nous décomposerons en sous-problèmes au maximum indépendants les uns des autres, etc...

II - UN PREMIER EXEMPLE D'ANALYSE DESCENDANTE

Nous allons essayer de décrire en détail, sur un exemple, notre processus de raisonnement dans l'activité de conception et de construction d'un programme :

1) Nous sommes (ou nous serons) en face d'un AUTOMATE: avant tout, nous devons définir ce que nous prétendons en attendre, donc, énoncer clairement, sans ambiguïté ni sous-entendu, le problème à résoudre:
   Ainsi, proposons-nous de faire
   (étape 1) "classer dans l'ordre croissant une suite donnée de n nombres entiers"

   Pourquoi ne pas imaginer une "machine" capable de comprendre un tel langage et d'exécuter un tel ordre ? Dans ce cas, notre programme se limiterait à cette commande unique.

2) Il n'en est pas ainsi, en général; aussi devons-nous décomposer cette action en actions plus élémentaires:

(étape 2) a) lecture de la suite de n nombres donnée

b) classement des éléments de la suite par ordre croissant

c) impression de la suite de nombres classés.

Une "machine" qui exécuterait successivement les trois actions a), b) et c) produirait exactement le même effet que celle qui exécuterait l'unique action décrite en 1).

Ces trois actions travaillent sur une ressource commune: la suite des nombres.
A ce stade, nous devons préciser sous quelle forme nous choisissons de la représenter: choisissons un tableau TAB à une dimension, de n éléments.
Nous pouvons maintenant préciser chacune des actions a), b) et c) séparément les unes des autres: elles sont indépendantes mais font référence à une ressource commune: le tableau TAB.
Dans un langage évolué comme, par exemple, LSE, a) et c) peuvent être codées maintenant, alors que b) ("classement des éléments du tableau par ordre croissant") doit à nouveau être "raffiné".
Nous décidons ici de procéder de la façon suivante:

> Nous allons chercher dans le tableau son plus petit élément et le mettre en première position; ensuite, nous considérerons le tableau commençant à la deuxième position, et nous chercherons, à son tour, son plus petit élément, que nous mettrons dans la première position de ce tableau, et ainsi de suite ...
> ... Remarquons que le dernier se trouvera automatiquement à sa place.

Cette méthode étant choisie, nous pouvons décrire de la façon suivante:

b') pour i variant de 1 jusqu'à n-1 faire:

> (β) mettre en première position (c'est-à-dire TAB (i)) de la portion du tableau TAB qui commence au ième terme et finit au nième, son plus petit élément.

Nous avons dû ici utiliser la variable locale i qui est propre à cette partie, donc inconnue de a) et de c).

Ici, chaque réalisation de l'action β est fonction du paramètre i.
Nous la noterons donc $\beta(i)$.
Nous devons nous assurer que l'effet produit par b') est le même que celui par b).
$\beta(i)$ est placée dans une structure itérative; il paraît nécessaire de vérifier les cas "limites" en faisant tourner l'algorithme "à la main".

- pour $i = 1$, nous plaçons en TAB (1) le plus petit élément du tableau TAB [1, n] qui est le tableau donné, en entier, donc $\forall i$, $i \in [1, n]$, TAB (1) $\leqslant$ TAB (i)
- pour $i = 2$, nous plaçons TAB (2)
  donc TAB (1) $\leqslant$ TAB (2)
  et $\forall i$, $i \in [\![2, n]\!]$ TAB (2) $\leqslant$ TAB (i)
- pour $i = n-1$, nous plaçons en TAB (n-1) le plus petit élément choisi entre TAB (n-1) et TAB (n) .
  L'exécution s'arrête ici; en TAB (n) se trouvera donc automatiquement le plus grand élément du tableau.

En LSE , la première ligne: "pour i variant de 1 jusqu'à n - 1 faire $\beta(i)$ " peut être codée directement. A cette étape, le programme élaboré est:

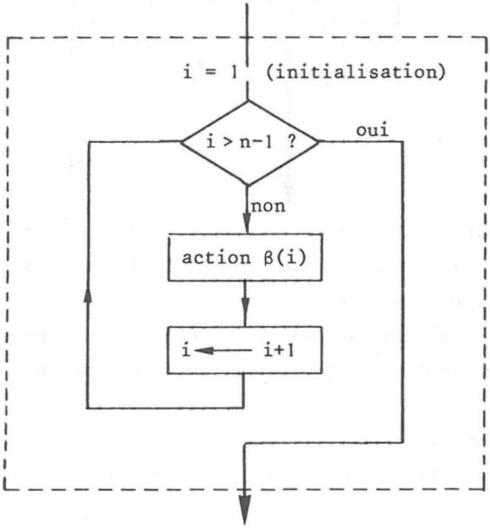
```
1* Classement dans l'ordre croissant d'une suite de n nombres
2* ..........................................................
3* Lecture des données:
4  Afficher  'N=' ; lire N
5  Tableau TAB[N]
6  Afficher 'frappez l'un après l'autre les nombres à classer:'
                                         lire TAB ;
7* ..........................................................
8* Classement des éléments de la suite par ordre croissant:
9  Faire 11 pour  I ← 1  jusqu'à  N-1
```

$\beta(i)$: "mettre en première position du tableau TAB [i, n] son plus petit élément".

12* ....
13* Impression de la suite des nombres classés:
14 Afficher TAB
15 Terminer

Si le langage utilisé ne permet pas le codage par une instruction de cette ligne, nous devons la décomposer par la boucle itérative:

b') :



Remarquons que le test $i > n-1$? est préférable au test $i = n$?

Etudions maintenant l'action $\beta(i)$.

$\beta'(i)$: pour j variant depuis $i+1$ jusqu'à n faire :
| $\gamma(i, j)$: si TAB (i) > TAB (j) alors "permuter TAB (i) et TAB (j)"

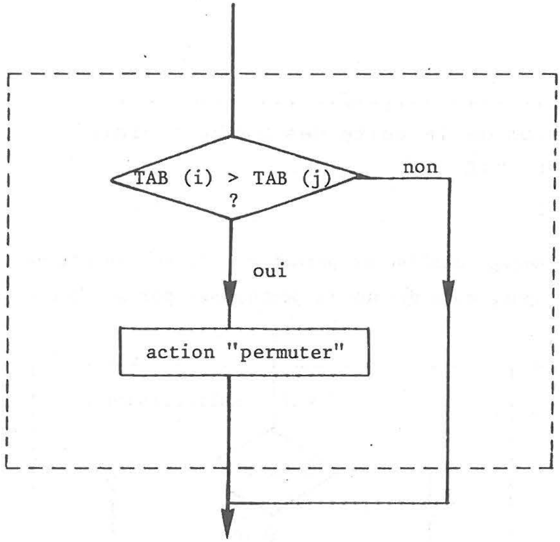
Notons l'introduction de la nouvelle variable locale j.

Nous devons ici contrôler l'équivalence entre $\beta(i)$ et $\beta'(i)$:

- La structure de la première ligne est la même que celle de b'), les mêmes considérations s'imposent donc; nous ne les développerons pas.
- Par contre:
  l'action "<u>si</u> TAB (i) > TAB (j)" <u>alors</u> "permuter TAB (i) et TAB (j)" fait apparaître le schéma de sélection:

  <u>si</u> "inspection" <u>alors</u> "action" .

γ(i, j) :



Si l'action "permuter TAB (i) et TAB (j)" n'est pas une primitive du langage (commande faisant partie du répertoire interprétable par l'automate), nous devons la préciser.

Nous devons prendre une variable auxiliaire A qui nous permettra de sauvegarder la valeur de TAB (i) avant de l'écraser par celle de TAB (j) .

En LSE , nous pouvons écrire :

A ⟵ TAB (i) ; TAB (i) ⟵ TAB (j) ; TAB (j) ⟵ A

Voici un exemple du programme codé en LSE :

```
 1* Classement dans l'ordre croissant d'une suite de N nombres
 2* ..........................................................
 3* Lecture des données:
 4  Afficher  'N=' ; Lire N
 5  Tableau  TAB [N]
 6  Afficher 'Frappez l'un  après l'autre les nombres à classer:'
                                                  ; Lire TAB
 7* ......................................
 8* Classement des éléments de la suite par ordre croissant:
 9  Faire  11  pour  I ← 1   jusqu'à  N-1
10  Faire  11  pour  J ← I+1 jusqu'à  N
```

```
11  Si  TAB [I] > TAB [J]   alors  Début   A ← TAB  [I]  ;
             TAB [I] ← TAB [J]  ;  TAB [J] ← A          Fin
12* ....................................
13* Impression de la suite des nombres classés:
14  Afficher  TAB
15  Terminer
```

<u>Remarques</u>:

- La structuration est laissée sous forme de commentaires.
- D'une façon générale, pour faciliter la compréhension du programme, on donne aux variables et aux identificateurs un nom rappelant leur qualité ou leur fonction.

III - <u>STRUCTURES SIMPLES : SCHÉMAS DE PROGRAMMES</u>

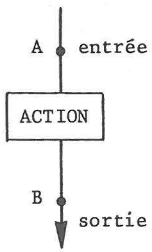
L'énoncé du problème est décomposé en énoncés de problèmes plus simples, au maximum indépendants les uns des autres, chacun d'eux étant structuré clairement et simplement afin de nous en permettre une lecture et un contrôle faciles.

Les variables n'ont été introduites qu'à partir du seul niveau où leur création est devenue nécessaire.

A chaque étape, nous pouvons vérifier aisément la correction de l'algorithme, c'est-à-dire que le nouveau schéma introduit produit bien l'effet que nous avons défini être le sien.

Dans tous les cas, cette vérification est facilitée par le petit nombre et le classicisme des schémas de programme introduits.

A la première étape, l'algorithme peut être représenté sous la forme d'une seule "action".



Cette action est une application du domaine d'entrée sur le domaine de sortie.

Nous devons préciser clairement:

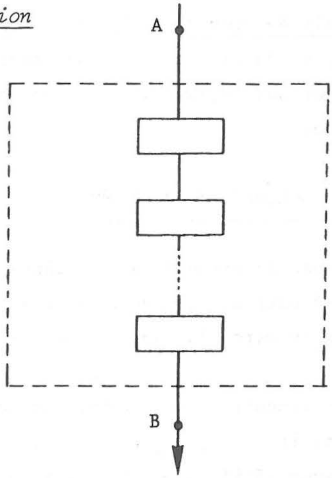
- le domaine d'entrée
- le domaine de sortie
- les changements, dans les états ou les variables, réalisés par cette "action".

Lorsque nous "levons le voile" sur ce qui se passe à l'intérieur, il faut absolument faire coïncider les points d'entrée et de sortie avec ceux définis à l'étape antérieure.

Les schémas de programme introduits ne peuvent donc avoir <u>qu'une seule entrée</u> et qu'une seule sortie.

Les structures sont de trois types:

1) *<u>Concaténation</u>*

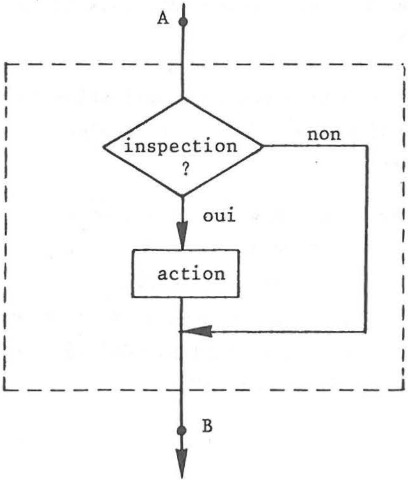


L'effet cumulatif de ces actions est égal à celui de l'action unique décrite à l'étape précédente.

Leur exécution doit avoir lieu dans l'ordre donné.

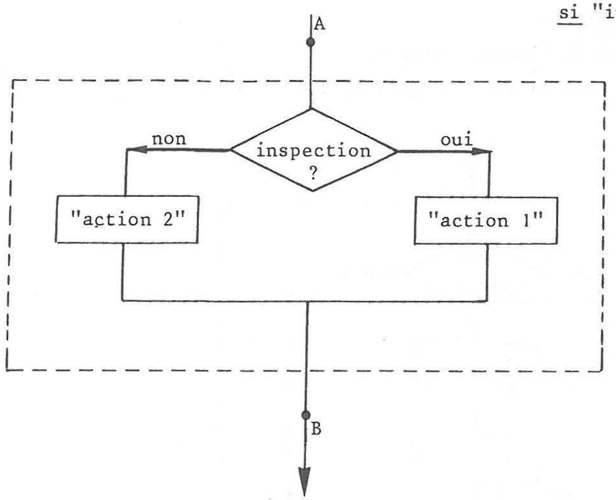
2) *<u>Sélection</u> :* nous avons déjà rencontré dans l'exemple 1 :

<u>si</u> "inspection" <u>alors</u> "action"

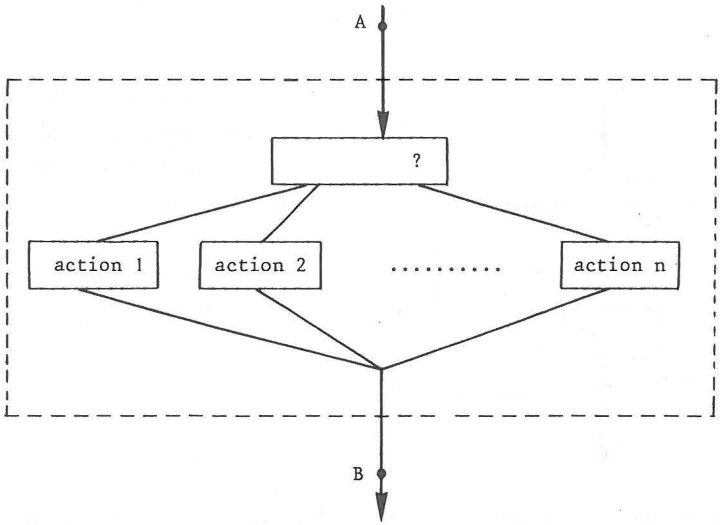


Nous pouvons avoir aussi:

<u>si</u> "inspection" <u>alors</u> "action 1"
<u>sinon</u> "action 2"



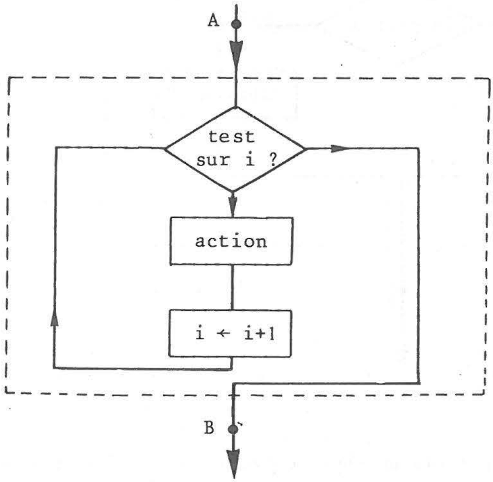
Nous rencontrerons parfois un choix entre un plus grand nombre de cas.



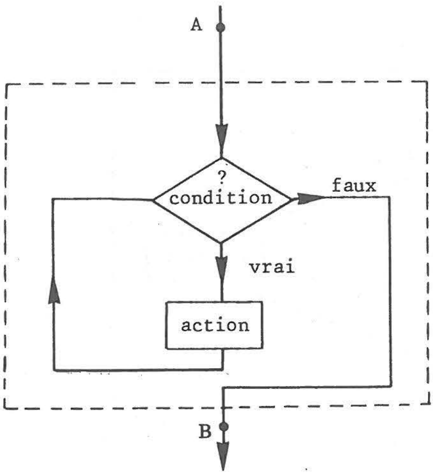
3) *Enoncés répétitifs* :

Nous avons déjà rencontré le comptage simple:

"pour i variant de 1 jusqu'à n" faire "action"



Ceci peut être considéré comme un cas particulier de la forme générale: tant que "condition", faire "action".



Il est préférable d'utiliser cette forme plutôt que celle qui place "action" avant le test de contrôle car si, au départ, la propriété testée est fausse, l'action ne doit pas être exécutée.

Nous devons nous assurer que ces boucles vont s'exécuter un nombre <u>fini</u> de fois, autrement dit que si l'on passe au moins une fois par "action" elle provoquera au bout d'un nombre <u>fini</u> de passages une modification de l'état testé en "condition", provoquant la sortie de la boucle.

Remarque : A cause de l'approximation possible des calculs, il est souvent préférable de tester une inégalité plutôt qu'une égalité.

IV - NIVEAUX D'ABSTRACTION , NIVEAUX DE LANGAGE

1 - a) Dans l'exemple 1, page *184* , nous avons décomposé chaque action en introduisant des sous-actions et ainsi de suite, chaque sous-action étant à son tour considérée comme une action et décomposée à nouveau ...

Cette méthode d'analyse descendante semble présenter le plus d'intérêt sur le plan pédagogique: elle part du problème entier et aboutit de proche en proche à son codage complet dans le langage de la machine réelle ou fictive que nous nous proposons d'utiliser.

Nous entendons par "langage" l'ensemble des instructions mises à notre disposition pour que nous puissions donner des ordres à la machine: ce peuvent être, bien entendu, celles du langage implanté, en particulier pour le calcul des notions mathématiques classiques: sinus, logarithmes; mais nous pouvons aussi en écrire nous-mêmes sous la forme de procédures - On désigne en général sous le nom de primitives ces fonctions ou procédures utilisables directement par le programmeur - Ainsi, dans l'exemple 1, nous aurions pu avoir à notre disposition une procédure générale réalisant la permutation de deux nombres X et Y :

```
20  Procédure   &Perm (X, Y)  Local A
21  A ← X
22  X ← Y
23  Y ← A
24  Retour
```

La ligne du programme s'écrit alors:

```
11  Si  TAB [I] > TAB [J]   Alors  &Perm (TAB [I], TAB [J])
```

b) Une abstraction est définie comme une simplification conceptuelle car elle exprime ce qui doit être fait sans spécifier comment.

Au départ, le programme peut être considéré comme une machine abstraite réalisant le problème en entier; c'est elle qui a le plus fort niveau d'abstraction.

Ensuite, cette machine fait appel à de nouvelles machines de niveau d'abstraction inférieur, et ainsi de suite ...

Dans l'exemple ci-dessous, nous allons mettre en évidence cette méthode d'analyse descendante.

2 - Exemple

Nous avons choisi cet exemple très classique de façon à bien mettre en évidence la méthode:

"Résolution d'une équation de degré au plus égal à deux de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ "}$$

constitue le niveau d'abstraction le plus élevé.

Notre problème se décomposera ensuite en deux parties distinctes:

1.1. Lecture des données

1.2. Traitement des données et impression du résultat.

Elles sont indépendantes l'une de l'autre et à la rigueur pourraient être codées par deux programmeurs différents.

C'est la deuxième partie qui demande notre effort d'analyse:

<u>si</u> $a = 0$ <u>alors</u> "résolution de l'équation $bx + c = 0$ " <u>sinon</u> "résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ "

Si nous possédons des "machines" capables de réaliser

"résolution de l'équation $bx + c = 0$ "

et "résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ "

notre problème est terminé.

A ce niveau, ces machines sont considérées comme des boîtes noires: on sait ce qu'elles font, mais on ne sait pas comment.

De toute façon, nous pouvons faire comme si nous possédions ces machines en réalisant des procédures que nous préciserons par la suite.

Mais nous pouvons, dès maintenant, contrôler que notre analyse est correcte et qu'à ce niveau-là, notre programme tourne.

En LSE, nous obtenons:

```
Lister à partir de 1
 1* Résolution d'une équation de degré au plus égal à deux
 2*                            de la forme  AX↑2 + BX + C = 0
 3* ============================================================
10* Lecture des données:
11* ====================
12  Afficher  "A=" ; Lire A
13  Afficher  "B=" ; Lire B
14  Afficher  "C=" ; Lire C
19*
20* Traitement des données:
21* =======================
22  Si  A = 0  alors  &Maxi(B, C)  sinon  &Stri 2 (A, B, C)
23  Terminer
29* -----------------------------
30  Procédure  &Stri 2 (A, B, C)
31  Afficher "l'équation est strictement du second degré"
39  Retour
69* ----------------------------
70  Procédure  &Maxi (B, C)
71  Afficher  "l'équation est au plus du premier degré"
79  Retour


    Exécuter à partir de 1
         A = 0
         B = 3
         C = 1
         L'équation est au plus du premier degré
         Terminé

    Exécuter à partir de 1
         A = 2
         B = 3
         C = 1
         L'équation est strictement du second degré
         Terminé
```

Sur cette base, sûrement exacte, nous procédons ensuite d'une façon analogue jusqu'à l'analyse complète du problème et son codage complet.

Nous obtenons en LSE :

```
 1* RESOLUTION D'UNE EQUATION DE DEGRE AU PLUS EGAL A DEUX
 2*                           DE LA FORME  AX↑2 + BX + C = 0
 3* ===================================================
10* LECTURE DES DONNEES:
11* ===================
12  AFFICHER "A=" ; LIRE A
13  AFFICHER "B=" ; LIRE B
14  AFFICHER "C=" ; LIRE C
19*
20* TRAITEMENT DES DONNEES
21* ======================
22  SI  A=0  ALORS  &MAXI(B,C)  SINON  &STRI2(A, B, C)
23  TERMINER
29* -------------------------
30  PROCEDURE  &STRI2(A, B, C)
31  AFFICHER "L'EQUATION EST STRICTEMENT DU SECOND DEGRE"
32  DELTA ← B ↑ 2 - 4 * A * C
33  SI DELTA < 0  ALORS AFFICHER  "PAS DE RACINE REELLE"
34  SI DELTA = 0  ALORS AFFICHER  "UNE RACINE DOUBLE:
                                      X1 = X2 = " , (-B)/2/A
35  SI DELTA > 0  ALORS  &SPEC(A, B, DELTA)
38  RETOUR
39* ................................
40  PROCEDURE &SPEC(A, B, DELTA)
61  AFFICHER  "L'EQUATION A DEUX RACINES REELLES"
62  RA ← RAC(DELTA)
63  X1 ← (-B+RA)/2/A
64  X2 ← (-B-RA)/2/A
65  AFFICHER  " X1= " , X1
66  AFFICHER  " X2= " , X2
67  RETOUR
69* -------------------------
70  PROCEDURE  &MAXI(B, C)
```

```
71  AFFICHER  "L'EQUATION EST AU PLUS DU PREMIER DEGRE"
72  SI  B=0  ALORS  &MAXO(C)  SINON AFFICHER "X=" , (-C)/B
78  RETOUR
79 * .......................
80  PROCEDURE  &MAXO(C)
81  SI  C=0  ALORS AFFICHER  "S=R"  SINON AFFICHER "S EST VIDE"
82  RETOUR
```

Il ne faut considérer ceci que comme un exemple, bien entendu.

Notons la hiérarchie dans les ressources des différents niveaux: par exemple: & STRI 2 (A, B, C) a créé DELTA

Seules les procédures d'un niveau d'abstraction inférieur et sous sa dépendance pourront y faire référence.

Par contre, il est bien évident que, à un niveau donné, on ne peut en aucune manière utiliser des ressources créées à des niveaux inférieurs. Les variables interviennent donc seulement à partir de l'étape qui les a rendues nécessaires.

3 - Intérêt

- Pédagogique: Les élèves peuvent aborder l'étude des algorithmes sans se noyer dans les détails. C'est la structure générale qui ressort avant tout.
- Facilité d'écriture et de mise au point: tout est contrôlé étape par étape.
- La modification des parties d'un programme est rendue possible sans entraîner une suite d'erreurs en cascade; en effet, les modules sont au maximum indépendants.
- Suppression des répétitions d'écriture de certaines séquences d'instructions: on constitue une procédure que l'on appelle chaque fois que la séquence doit être utilisée.

V - OBJECTIFS ET LANGAGE

Dans chaque cas, nous devons définir nos objectifs majeurs et orienter l'activité en fonction de ceux-ci.

Certains programmes ne sont construits que pour utiliser simplement les fortes possibilités (vitesse d'exécution, capacité mémoire) de la machine, mais, d'une façon générale, la méthodologie dans l'analyse et l'organisation tient une place prépondérante: chacun (professeur et élève) prend conscience de la nécessité de définir, d'analyser et de systématiser un certain nombre de démarches qui jusqu'alors pouvaient n'être qu'intuitives.

La phase d'apprentissage dans l'utilisation du matériel peut être très réduite et cet aspect technologique n'est pas un objectif fondamental: le langage n'est qu'un simple moyen de codage, son apprentissage se fera au fur et à mesure que la nécessité en sera ressentie, et il ne doit pas avoir d'incidence sur les méthodes d'analyse et de résolution des problèmes.

Dans un langage du type LSE, il ne faut pas craindre d'introduire la notion de procédure assez tôt; ainsi, par exemple, des élèves de sixième peuvent écrire des procédures sans paramètre réalisant l'écriture de grandes lettres puis les utiliser pour écrire des mots de leur choix.

Nous pouvons écrire nous-mêmes des procédures pour les mettre à la disposition des élèves: nous leur fournissons les spécifications des données en entrée, des résultats obtenus ainsi que la description du travail réalisé, ceci en français: ils n'ont pas à savoir comment elles procèdent.

Ce peuvent être par exemple des procédures réalisant des traitements de chaînes de caractères ou des tracés de courbes.

Chacun pourra choisir avec discernement parmi les moyens mis à sa disposition ceux dévant être utilisés pour parvenir à son but. Il pourra être amené à créer pour ses propres besoins de nouveaux outils.

C'est dans l'action que l'élève progressera en élaborant son propre "savoir faire".

Le rôle du professeur est fondamental dans l'établissement et la conduite de la progression en vue d'un objectif donné: les difficultés étant levées pas à pas, chaque nouvelle étape, à travers les problèmes suggérés, apportera quelque chose de nouveau par rapport à la précédente. Ainsi, par exemple, pour aboutir à l'exercice 2, on peut envisager successivement:

- prise de contact avec la machine et notion de programme;
  exemple: programme d'affichage d'un petit dessin.
- notion de données dans un programme;
  exemple: calcul de la somme puis de la moyenne de quelques nombres.
- choix binaire (si "..." alors "..." sinon "...")
  affichage de la valeur absolue d'un nombre lu.
- modularité (procédure)
  résolution d'une équation du premier degré.

Le programme de résolution d'une équation du second degré réalisé ensuite pourra, à son tour, être appelé comme simple procédure par exemple dans un programme de résolution d'équations paramétriques.

Il n'est pas possible de faire réaliser à des élèves d'un niveau donné tous les exercices pouvant être intéressants mais nous pouvons leur faire résoudre un même problème par des algorithmes différents (exemple: méthode itérative, méthode récursive) et ensuite provoquer la confrontation, entre eux, de ces différentes productions. Pour cela, il est bien entendu impératif que les travaux soient lisibles, la structure et les commentaires ayant beaucoup plus d'importance que le codage.

Nous venons , dans les pages ci-dessus, de mettre l'accent sur les méthodes. Il est bien certain que tous les efforts entrepris seront vains si la méthodologie de développement ou de synthèse adoptée en cours n'est pas en accord avec celle que nous attendons.

3. RECURSIVITE

Dans cette partie nous souhaitons mettre en évidence le rôle intéressant que jouent certaines procédures. Plutôt que d'essayer de définir ce qui caractérise ces procédures, nous proposons d'examiner un exemple simple et d'essayer, par des commentaires, de soulever les problèmes d'ordre mathématique et d'ordre pratique qui se posent. Enfin les références bibliographiques devraient permettre au lecteur intéressé de trouver les réponses aux questions que nous posons en accédant à des traités complets et détaillés.

Soit à calculer le PGCD de deux nombres entiers strictement positifs A et B.

Pour ce calcul nous voulons utiliser l'algorithme basé sur la propriété suivante:

- si le reste R de la division euclidienne de A par B est nul, le PGCD de A et de B est égal à B et dans le cas contraire le PGCD de A et de B est égal au PGCD de B et de R -

Nous sommes donc tentés de définir une fonction PGCD par la formule

$$\text{PGCD}(X, Y) = \underline{\text{si}}\ \text{RESTE}(X, Y) = 0\ \underline{\text{alors}}\ Y\ \underline{\text{sinon}}\ \text{PGCD}(Y, \text{RESTE}(X, Y)) \qquad (1)$$

Cette écriture nécessite quelques commentaires:

(i) - Nous supposons que la fonction RESTE est la fonction de deux variables qui, à tout couple d'entiers (X, Y) tel que X soit positif ou nul et Y strictement positif, fait correspondre le reste de la division euclidienne de X par Y. Lorsque nous évoquerons la programmation de la formule (1) nous n'expliciterons pas d'algorithme de calcul de cette fonction RESTE, nous supposerons simplement que c'est une primitive du langage de programmation.

(ii) - Il est à noter que le nom de la fonction PGCD apparaît à gauche et à droite du signe <u>égale</u> de (1); cela ne devrait pas être surprenant car ce type de définition est rencontré très souvent (citons par exemple les définitions récurrentes de suites numériques).

Plus généralement, considérons la formule:

$$F(X, Y) = \underline{\text{si}}\ \text{RESTE}(X, Y) = 0\ \underline{\text{alors}}\ Y\ \underline{\text{sinon}}\ G(Y, \text{RESTE}(X, Y)) \qquad (2)$$

Si G est une fonction de deux variables entières à valeurs entières, la formule (2) permet de lui associer une fonction F de même type. Ainsi donc la formule (2) définit une application τ d'un certain ensemble de fonctions dans lui-même et la formule (2) s'écrit:

$$F = \tau(G) \quad .$$

La formule (1) s'écrit alors:

$$\text{PGCD} = \tau(\text{PGCD}) \quad ,$$

ce qui exprime que la fonction PGCD est un point fixe de l'application τ . Malheureusement, rien ne nous dit que τ possède de tels points fixes et rien ne nous dit non plus que, lorsqu'il y a existence, il n'y a qu'un seul point fixe. A priori, la formule (1) ne semble donc pas définir une (et une seule) fonction. Pourtant cette formule contient, en elle-même, un algorithme de calcul qui devrait permettre de lui associer une et une seule fonction, celle effectivement calculée. Explicitons cet algorithme sur un exemple: X = 8 et Y = 12 .

Pour calculer PGCD (8 ; 12)
  nous testons si RESTE (8 ; 12) est nul ;
  ce n'est pas le cas puisque RESTE (8 ; 12) = 8 ;
  ainsi donc PGCD (8 ; 12) est égal à PGCD (12 ; 8) que nous calculons.

Pour calculer PGCD (12 ; 8)
  nous testons si RESTE (12 ; 8) est nul ;
  ce n'est pas le cas puisque RESTE (12 ; 8) = 4 ;
  ainsi donc PGCD (12 ; 8) est égal à PGCD (8 ; 4) que nous calculons.

Pour calculer PGCD (8 ; 4)
  nous testons si RESTE (8 ; 4) est nul ;
  c'est le cas puisque RESTE (8 ; 4) = 0 ;
  ainsi donc PGCD (8 ; 4) est égal à 4 .

Si nous n'avons pas oublié que PGCD (12 ; 8) était donné en fonction de PGCD (8 ; 4), nous pouvons terminer le calcul de PGCD (12 ; 8) ; il est égal à 4 .

Si nous n'avons pas oublié que PGCD (8 ; 12) était donné en fonction de PGCD (12 ; 8), nous pouvons terminer le calcul de PGCD (8 ; 12) ; il est égal à 4 .

Nous considérerons donc que la formule (1) définit la fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble des couples de nombres entiers pour lesquels l'exécution de l'algorithme de calcul mentionné ci-dessus s'arrête en un temps fini, la valeur de la fonction étant alors le résultat final de l'exécution. Il paraît donc naturel de pouvoir programmer le calcul en gardant la structure de la formule (1) et de s'attendre à ce que le comportement de l'automate à l'exécution soit celui que nous venons de simuler (la fonction effectivement calculée étant alors nécessairement celle que nous avons définie). Nous devrions donc pouvoir programmer le calcul de la façon suivante:

```
FONCTION PROCEDURE   PGCD (X, Y)
SI   RESTE (X, Y) = 0   ALORS   PGCD = Y
                        SINON   PGCD = PGCD (Y, RESTE(X, Y))
FIN DE FONCTION PROCEDURE
```

où la procédure est appelée fonction procédure car son objet est l'évaluation d'une fonction et où nous avons utilisé une variable portant le même nom que la fonction pour stocker la valeur de cette fonction; le programme principal pourrait alors être:

```
PROGRAMME PRINCIPAL
LIRE  A , B
IMPRIMER  PGCD (A, B)
FIN
```

Lors de l'exécution de l'instruction IMPRIMER PGCD (A, B) , la fonction procédure PGCD est appelée et son exécution est lancée avec pour arguments les valeurs de A et de B; cette exécution nécessitera plusieurs appels de la même fonction procédure PGCD avec à chaque appel de nouveaux arguments (par exemple, il y aura 3 appels pour A = 8 et B = 12). Notons que, bien que dans certains cas il soit possible d'estimer a priori ce nombre d'appels, cette connaissance n'est pas nécessaire à l'écriture du programme. Les langages de programmation permettant une telle écriture sont dits récursifs.

Pour des exemples de procédures et de fonctions procédures récursives, nous renvoyons le lecteur à 1. et 3.* . Il trouvera aussi en 1. des explications détaillées sur le comportement de l'automate au cours de l'exécution de ces programmes et en 3. des exemples de programmes écrits en L.S.E. .

Les questions fondamentales auxquelles il faut maintenant apporter une réponse sont les suivantes:

(i) - Est-il possible de déterminer, a priori, l'ensemble des valeurs des arguments pour lesquels l'exécution s'arrête en un temps fini

---

* Voir Bibliographie.

(c'est-à-dire l'ensemble de définition de la fonction effectivement calculée) ?

(ii)- Est-il possible, toujours a priori, de montrer que les calculs effectués sont bien ceux que l'on souhaitait et, plus généralement, est-il possible de démontrer des propriétés de la fonction effectivement calculée ?

Ces deux questions relèvent de ce qui est appelé "théorie de la preuve des programmes" (que nous aurons à utiliser dans le cas récursif). C'est une théorie mathématique qui a été développée pour pouvoir reconnaître quelles applications τ possèdent des points fixes et savoir si parmi ces derniers il n'en existerait pas un qui serait exactement la fonction effectivement calculée, auquel cas la fonction calculée par l'automate hériterait des propriétés démontrées mathématiquement sur le point fixe particulier auquel elle s'identifie.

Pour ce dernier aspect de la question, nous renvoyons le lecteur à 2., 4. et 5..

Dans ce chapitre, nous avons vu l'intérêt d'utiliser un langage de programmation évolué afin de permettre une programmation structurée. En général, ces langages permettent l'écriture de procédures et de fonctions procédures récursives. Leur intérêt essentiel est leur clarté et leur simplicité. De plus nous sommes souvent confrontés à des algorithmes de nature récursive et la non récursivité du langage de programmation nous contraint à modifier (et trop souvent à dénaturer) l'algorithme afin de pouvoir le programmer. Enfin n'est-il pas évident que la manipulation de formules analogues à la formule (1) est enrichissante ? Ne permettrait-elle pas de supprimer un certain nombre de blocages dus aux phénomènes récurrents en général et ne permettrait-elle pas d'élargir le champ des problèmes, mathématiques et extra-mathématiques, à aborder ?

Nous avons commencé ce paragraphe par un exemple, terminons-le par un autre exemple.

Par un raisonnement inductif en tout point analogue à celui présenté aux élèves pour dénombrer les sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments, on obtient la formule suivante (on notera sa ressemblance avec "la formule du triangle de Pascal"):

$$S(n, p) = \underline{\text{si}}\ p = 0\ \underline{\text{alors}}\ 1\ \underline{\text{sinon}}\ \text{si}\ n < p\ \underline{\text{alors}}\ 0\ \underline{\text{sinon}}\ pS(n-1, p-1) + pS(n-1, p)$$

où S(n, p) est le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

Pourquoi donc, alors que l'on dénombre les injections d'un ensemble fini dans un autre, ne dénombre-t-on pas les surjections ? Est-ce uniquement par manque de temps ou ne serait-ce pas plutôt parce que nous ne sommes pas habitués à manipuler de telles formules, que nous ne les considérons pas comme susceptibles de définir des objets pour lequels il est possible de démontrer des propriétés ?

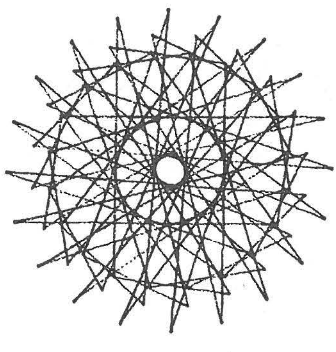
Est-ce que la programmation récursive qui nous a fait prendre conscience de ces problèmes n'en serait pas aussi la solution ?

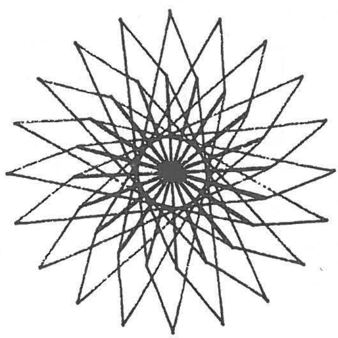
BIBLIOGRAPHIE

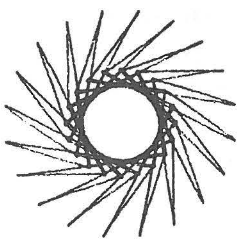
1. R. CARMONA et F. DIDIER - Récursivité. IREM de MARSEILLE (avril 1975).
2. R. CARMONA et F. DIDIER - Propriété de point fixe et preuve de programmes récursifs. (en préparation).
3. F. DIDIER et P. ROUSSEL - Groupe récursivité. IREM de MARSEILLE (mai 1976).
4. J.P. FINANCE, P. LESCANNE, P. MARCHAND, R. MOHR, C. PAIR, A. QUERE et J.L. REMY - Aspects de la théorie de la programmation (Ecole d'Eté d'informatique. Tarbes 1974). IREM de NANCY (juillet 1974).
5. Z. MANNA - Mathematical Theory of Computation. Mc Graw Hill Inc (1974).
6. OJ. DAHL, EW DIJKSTRA, C.A. HOARE - Structured Programming. 1972 - Academic Press.
7. DIJKSTRA - A Discipline of programming. 1976 - Prentice Hall.
8. N. WIRTH - Systematic Programming : an introduction. 1973 - Prentice Hall.
9. WIRTH - Algorithms + data structures = programs - 1976 - Prentice Hall.
10. B. CHERBONNEAU , M. GALINIER , J.P. LAGASSE , H. MANIE , A. MATHIS , J.L PAUL - Programmation Structurée. Rapports 112 et 113 - Université Paul Sabatier - TOULOUSE.

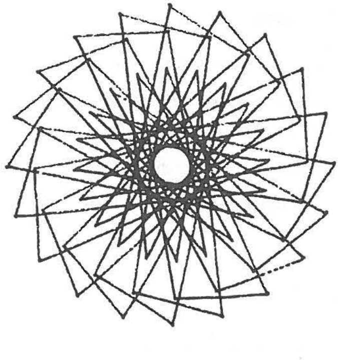
11. Revue Informatique et Enseignement de l'A.F.C.E.T. - Volume 1, N° 3 . Texte des communications de l'atelier algorithmique et programmation du Congrès A.F.C.E.T. (novembre 1976).

12. Compte rendu des travaux du groupe Informatique et Enseignement de l'IREM de TOULOUSE, avril 1977 - IREM de TOULOUSE.







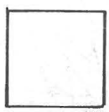
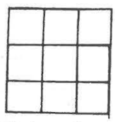
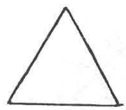
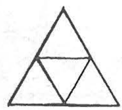


La notion de récursivité trouve sa plus belle illustration (c'est le cas de le dire) dans la réalisation de dessins.

Après Jean SARGENT, qui en fut le pionnier, en voici quelques exemples en provenance de G. NOEL.

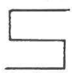
L E S   C O U R B E S   D E   P E O N A (1) (2)

Méfiez-vous des imitations !!! ...
On choisit un pavage dont on peut programmer le tracé par récursivité:
Exemples:

Génération 0   Génération 1   Génération 0   Génération 1

On choisit ensuite un arc de courbe traversant chaque élément du pavage de la génération 1.
Exemples:




Dans le carré   Dans le triangle équilatéral

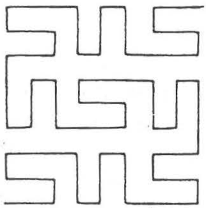
On considère ensuite la génération 2 du pavage dans laquelle on répète l'arc de courbe précédant autant de fois que nécessaire. On cherche alors à relier les arcs obtenus en prenant soin de toujours faire correspondre la fin d'un arc avec le début du suivant sans que les traits se recoupent.
La programmation est identique à celle de Péano.

---

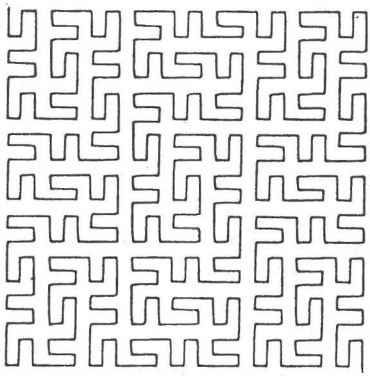
(1) N.D.L.R. PEONA : Femme de PEON qui se distrait ainsi en attendant le retour de son mari de la révolution (des Mathématiques Modernes) !!!

(2) Dessins réalisés par un élève de Seconde C .

COURBE DE PEONA dans le carré

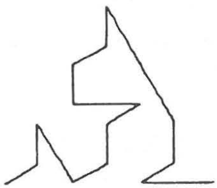


Génération 1

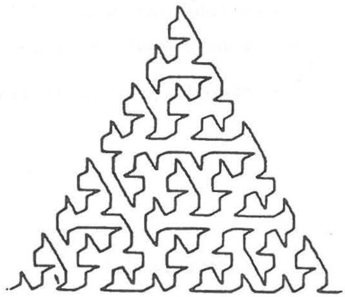


Génération 2

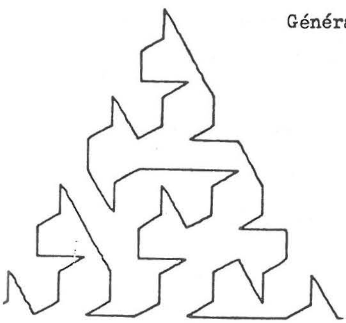
COURBE DE PEONA dans le triangle équilatéral



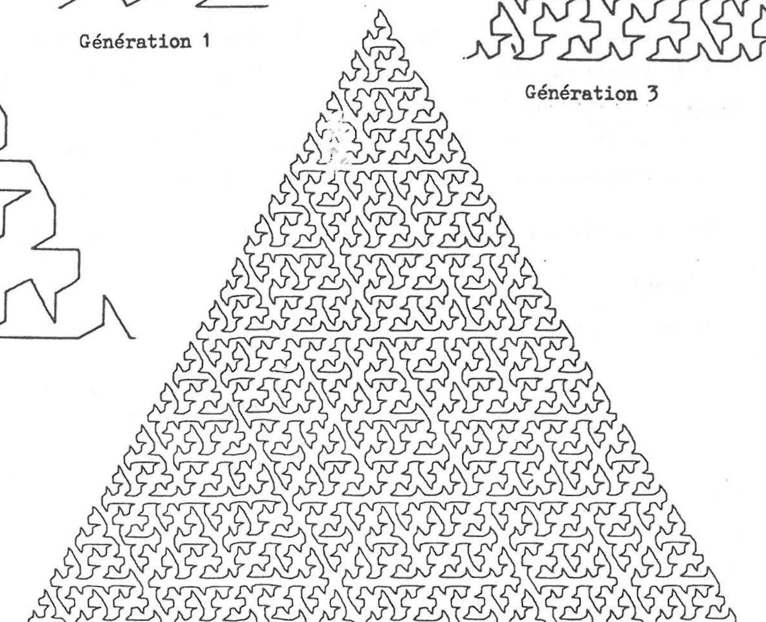
Génération 1



Génération 3



Génération 2



Génération 5

LES ROSAGONES [1]

<u>Principe</u> : On part d'un segment [AB] que l'on remplace à l'aide d'un processus récursif[2] par une ligne polygonale de mêmes extrémités.

Par exemple:

Génération 0

Génération 1

On obtient par ce procédé un motif de complexité variable suivant la ligne polygonale choisie et le nombre de générations demandées.

Par exemple pour la génération 2 et avec la ligne polygonale ci-dessus :

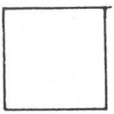
On reproduit ensuite le motif en lui faisant subir successivement une suite de rotations égales r d'angle α° (α commensurable avec 360). Le centre est choisi de façon que $r(A) = B$.

On arrête le tracé lorsqu'à la fin du tracé d'un motif le stylet de la table traçante est revenu à la position initiale.

Exemple : En partant du motif ci-dessus on obtient pour la génération 0 :

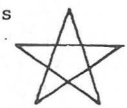
$\alpha = 90^\circ$

4 motifs



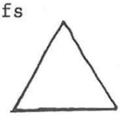
$\alpha = 144^\circ$

5 motifs



$\alpha = 120^\circ$

3 motifs

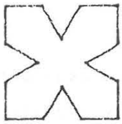


---

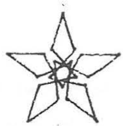
(1) Dessins réalisés par un élève de Seconde C.

(2) L'étude des processus récursifs est exposée dans: "NOTIONS ELEMENTAIRES D'INFORMATIQUE" - Fascicule 2, édité par l'IREM de BORDEAUX.

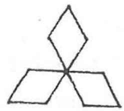
Et pour la génération 1:



α = 90°
4 motifs



α = 144°
5 motifs



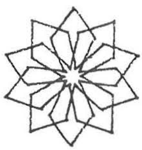
α = 120°
3 motifs

Réalisation pratique :

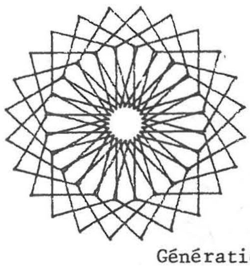
Le principe des ROSAGONES est de choisir convenablement la valeur de α pour obtenir le meilleur effet esthétique possible.

Par exemple, toujours à partir du motif indiqué ci-dessus:

Génération 1
α = 108°
10 motifs

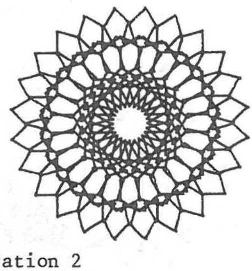


Génération 2
α = 108°
10 motifs

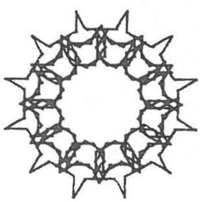


Génération 1

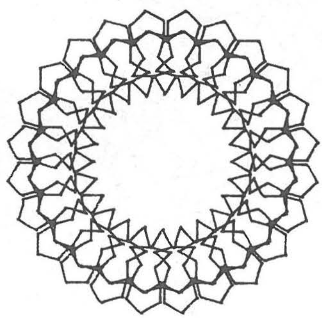
α = 105°
24 motifs



Génération 2



Génération 2
α = -150°
12 motifs



Génération 2
α = 75°
24 motifs

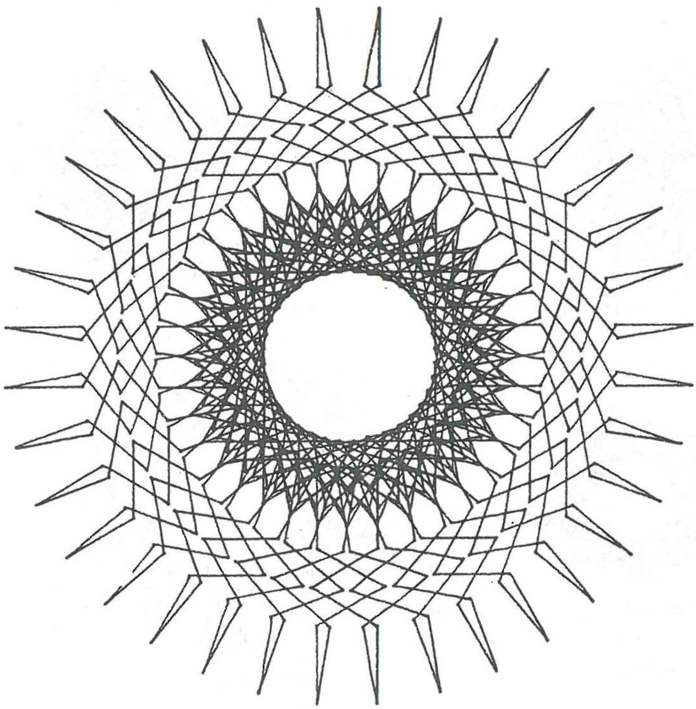
Remarques :

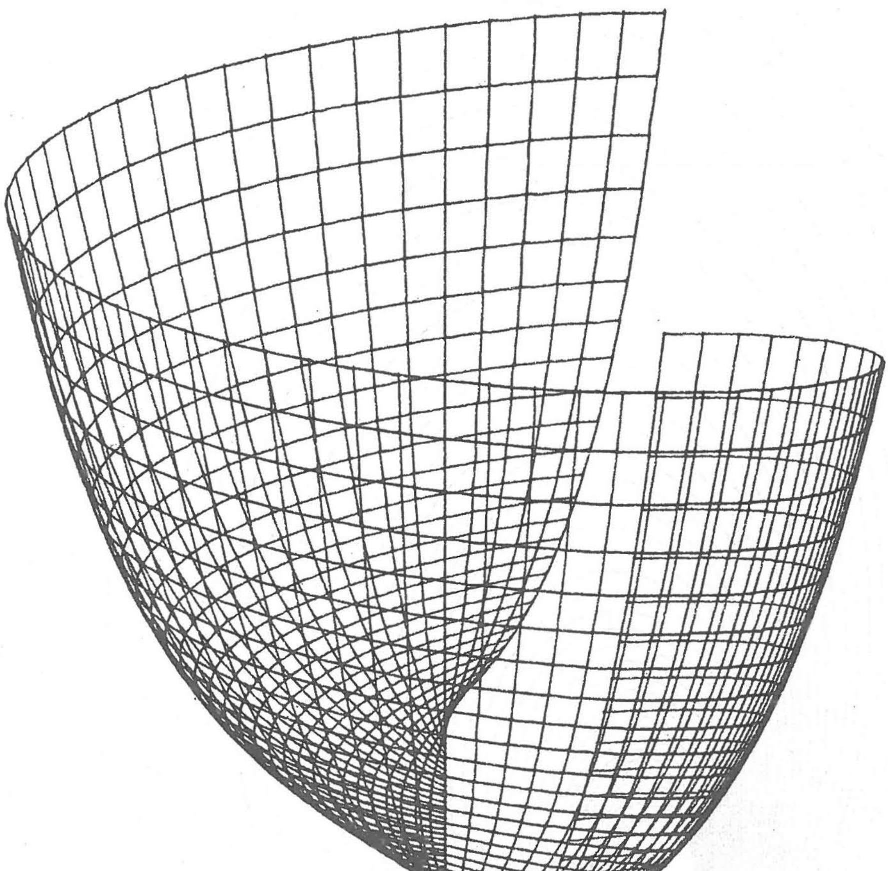
- Si le motif de génération 1 comprend n côtés, le motif de génération p comprend n^p côtés pas forcément distincts. Avec un angle de mesure $\alpha°$ le dessin définitif comprend :

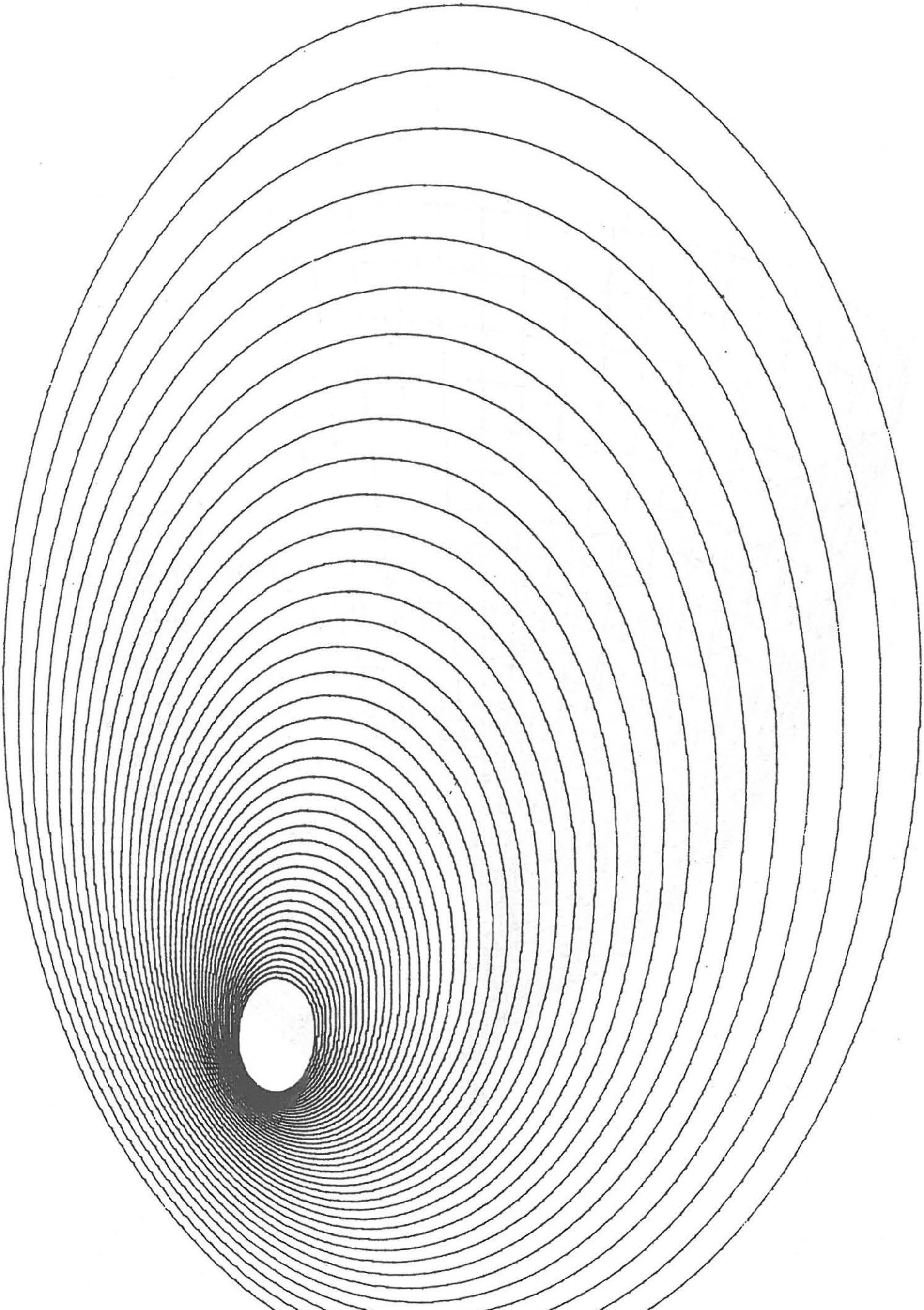
$$\frac{\text{PPCM } (360 \ ; \ \alpha)}{\alpha} \times n^p \quad \text{côtés}$$

car le nombre de motifs est alors : $\frac{\text{PPCM } (360 \ ; \ \alpha)}{\alpha}$

- Plus le PPCM de 360° et de $\alpha°$ est grand, plus le nombre de motifs sera grand et le dessin agréablement compliqué.







CHAPITRE 4

AIDE DE L'INFORMATIQUE A L'ENSEIGNEMENT

Nous avons groupé, dans ce chapitre, différentes informations sur les possibilités offertes par l'exploitation (sur place ou à distance) d'un matériel informatique lourd. Plus précisément:

. Nous donnons d'abord le descriptif des recherches menées sous la responsabilité de l'I.N.R.P., et relatives à "l'informatique dans l'enseignement secondaire".

. On trouvera la liste des lycées équipés d'ordinateurs dans le chapitre suivant; pour les collègues intéressés, nous avons ici indiqué la liste des thèmes de travail prévus en mathématiques dans le cadre de ces recherches.

Ces informations sont extraites de la revue:
"L'informatique dans l'enseignement secondaire"
éditée par l'I.N.R.P.
au Service des Etudes et Recherches Pédagogiques
Section "Informatique et Enseignement".

. Tout comme l'article suivant de C. Lafond qui fait le point sur les techniques d'Enseignement Assisté par Ordinateur.

. Afin d'illustrer ce propos, nous avons choisi l'exposé du travail d'une équipe du CNAM sur la notion d'espace vectoriel.

. Enfin, l'article de G. LOPATA présente les possibilités ouvertes par les bibliothèques de Q.C.M. .

(I) - RECHERCHES AGRÉÉES PAR L'I.N.R.P. EN 1976-1977

a) 74 - 12.5.14

1. Titre de la recherche

"Informatique dans les lycées techniques et CET industriels" .

2. Nature des établissements et niveaux concernés

Lycées et CET engagés dans l'action "Informatique industrielle"
Première année CET - Terminale Lycée technique.

3. Origine

Département de la Recherche sur les Enseignements Techniques et l'Informatique (M. DEFORGE).

4. Responsables

Scientifique:
- M. BONNET - Chargé du département des enseignements techniques

Groupe d'experts:
- M. DONNADIEU - Inspecteur général des Techniques Industrielles
- M. POULAIN - Inspecteur de l'Enseignement Technique
- M. CENAT - Représentant le Ministère

5. Objectifs et hypothèses de travail

Poursuite, promotion et animation de recherches déjà amorcées et concernant:

. La modélisation et simulation dans les domaines de la mécanique rationnelle, de l'automatique et des processus de fabrication industrielle.
. L'introduction généralisée de l'informatique dans deux établissements secondaires polyvalents à vocation principale "techniques industrielles".
. L'emploi des mini-calculateurs pour une nouvelle motivation des élèves de CET pour les matières générales et un décloisonnement des matières techniques.

Cet ensemble de recherches devrait permettre, avec la collaboration de l'Inspection générale des techniques industrielles, les définitions d'une formation informatique spécifique dans le domaine des techniques industrielles.

6. Travaux préparatoires

Poursuite des expériences en cours.

7. Planification de la recherche

. Etude et mise au point (déjà en cours) d'une initiation théorique des classes de Seconde.

. A l'intérieur de chaque classe et dans toutes les disciplines industrielles et connexes (mathématiques, physique, construction, ateliers, bureau des méthodes, etc...), mise au point de softwares d'applications pédagogiques mis à la disposition des élèves ou construits par leurs soins.

. Etude et mise au point de softwares d'applications au niveau des problèmes de gestion industrielle et d'ordonnancement avec la collaboration de spécialistes du secteur tertiaire.

8. Contrôle

Rapport et publication des travaux réalisés accompagnés de fiches d'exploitation.

9. Extension souhaitée

A définir en fonction de l'état d'avancement des recherches en fin d'exercice, en accord avec le groupe d'experts.

b) *71 - 12.4.3.*

1. Titre de la recherche

"Introduction de l'informatique dans l'enseignement des disciplines générales".

Conduite et synthèse des travaux entrepris par les professeurs anciens stagiaires "Informatique".

2. Nature des établissements et niveaux concernés

- Second cycle (et premier cycle)
- Terrains expérimentaux: les lycées équipés d'ordinateurs.

3. Origine

Mission à l'Informatique.

4. Responsables

Section Informatique et Enseignement - I.N.R.D.P.

. M.C. LAFOND - Attaché de recherche

. Mme F. FAURE - Psychologue

5. Objectifs et hypothèses de travail

. Introduire une "démarche informatique" dans l'enseignement de toutes les disciplines générales.

. Dans ce but, rechercher les domaines dans chaque discipline où peut être introduite cette nouvelle méthodologie, et, suivant les cas, les "niveaux d'intervention" de l'informatique:

- Sans utilisation de l'ordinateur (organigrammes - graphes - tables de décision - etc...)
- Utilisation de l'ordinateur comme outil de traitement
- Utilisation de l'ordinateur comme outil pédagogique (en particulier simulation)

. Définir pour chaque application le type d'activités mis en jeu par les élèves.

. Enfin, étudier des réalisations pluridisciplinaires.
Cinq groupes de travail fonctionnent dans la région parisienne:

- Informatique, Lettres et Langues
- Informatique et Sciences Humaines
- Informatique et Sciences Naturelles
- Informatique et Sciences Physiques
- Informatique et Mathématiques.

D'autres équipes, regroupant également des professeurs anciens stagiaires "Informatique", travaillent sur des thèmes disciplinaires ou pluridisciplinaires, dans les académies de GRENOBLE, NANCY, RENNES et TOULOUSE, sous la direction des responsables de centres de formation approfondie.

Toutes ces expériences s'appuient sur les terrains expérimentaux constitués par les lycées équipés d'ordinateurs.

6. Planification de la recherche

Jusqu'en juin 1975, premières expérimentations amenant à une définition précise des objectifs pédagogiques.

7. <u>Contrôle</u>

Un groupe "évaluation" tente de définir les objectifs de façon opérationnelle et d'élaborer des instruments de mesure adéquats.

. Résultats des premières observations et expérimentations - juin 1975.
. Mise en place d'un plan d'évaluation à la rentrée scolaire 1975-76.

c) 73 - 12.8.5.

1. <u>Titre de la recherche</u>

"Sensibilisation à l'informatique dans les lycées équipés d'ordinateurs"

2. <u>Nature des établissements et niveaux concernés</u>

Lycées équipés d'ordinateurs - Second cycle (et Premier cycle).

3. <u>Origine</u>

Mission à l'informatique

4. <u>Responsables</u>

. M. C. LAFOND - Attaché de Recherche
. Mme F. FAURE - Psychologue

Section Informatique et Enseignement - I.N.R.D.P.

5. <u>Objectifs et hypothèses de travail</u>

Déterminer la vraie place de l'ordinateur dans un lycée, dans l'optique d'une "sensibilisation" des élèves à l'Informatique.

Cette recherche est le complément de la recherche 71 - 12.4.3.

Les objectifs sont les suivants:

. définir la meilleure approche de l'Informatique (éventuellement différencier selon les niveaux)
. déterminer, suivant les cas, quelles connaissances informatiques doivent être acquises préalablement à l'introduction de la démarche informatique et de l'ordinateur dans l'enseignement des disciplines ou pour l'étude de thèmes pluridisciplinaires.
. définir le contenu d'une sensibilisation. Notions d'informatique générale. Apprentissage et utilisation d'un langage de programmation.
. dans une étape transitoire, étudier les problèmes posés par la sensibilisation des professeurs des établissements.

Les lycées disposent d'ordinateurs identiques (bien que de constructeurs différents) dont les caractéristiques générales sont les suivantes: Unité Centrale 4 ou 8 K mots. Disque 128 à 200 K mots. Une télé-imprimante et 8 consoles de visualisation. Le langage commun est le LSE (langage symbolique d'enseignement).

6. Planification de la recherche

Les premières expérimentations s'étendront sur deux années scolaires, permettant une redéfinition plus précise des objectifs.

7. Contrôle

Sous la responsabilité du groupe "évaluation" (voir descriptif de recherche 71 - 12.4.3.).

d) *76 - 12.8.06.*

1. Titre de la recherche

"Informatique - Etude des démarches modélisantes et algorithmiques chez les élèves".

2. Nature des établissements et niveaux concernés

Premier et Second cycles

3. Origine

I.N.R.D.P. - Section Informatique et Enseignement

4. Responsables

Monsieur C. LAFOND
Madame F. FAURE

5. Objectifs et hypothèses de travail

L'un des objectifs de l'action d'introduction de l'Informatique dans l'enseignement secondaire est l'introduction d'une démarche modélisante et algorithmique chez l'élève.
Dans le cadre de l'évaluation générale de cette expérience, il apparaît que cet objectif ainsi défini n'est pas "mesurable".

L'étude a pour but de:

. préciser des notions et de concevoir des outils en vue d'une évaluation
. relever, parmi les pratiques des enseignants participant à l'expérience d'informatique, celles qui favorisent l'acquisition opérationnelle des notions de modèle et d'algorithme
. concevoir des exercices (en particulier des programmes de jeux et de simulation) pluridisciplinaires en complément des programmes produits existants.

Cette étude s'appuyera sur divers travaux déjà réalisés.

Durée de la recherche : Une année scolaire 1976-1977 .

e) Thèmes de travail en Mathématiques

1) Résolution d'équations polynomiales de degré n 2) Exercices d'annonces de bridge 3) Contrôle de connaissances sur le corps $\mathbb{C}$ (équations, racines, etc...) 4) Etude des similitudes dans $\mathbb{C}$ 5) Exercices sur les études de fonctions et calculs d'aires.	M. Michel CANAL 6, avenue Gaugé 78220 VIROFLAY
1) Applications - bijections - composition des applications à partir des graphes. 2) Introduction à la notion d'encadrement en Quatrième.	M. R. CLAUDE L.E.G. Belfort 38 bis, rue du Monceau 90300 VALDOIE
Programme de calcul en précision multiple par étude de dérivés.	M. HATT Lycée Fustel de Coulanges 67081 STRASBOURG CEDEX
1) Etude locale d'une fonction 2) Permutations d'ordre U 3) Exercices "trous"	Groupe Maths IREM-INRP Melle F. LORIG 10,avenue Félix Faure PARIS XV
1) Calcul mental en Sixième et Cinquième (dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{Z}$) 2) Jeux demandant des stratégies gagnantes simples (exemple: labyrinthe de petites dimensions)	M. CAMINEL CES Montplaisir 82000 MONTAUBAN
1) Quantificateurs (formation d'une phrase, interprétation d'une formule, négation) 2) Interprétation vectorielle de systèmes d'équations.	M. R. JACQUOT 33, rue de la Croix Grand Colas 54600 VILLIERS
Simplification de fonctions booléennes (automatisme, applications en classes de Première F_1, F_3, E)	M. MARTEN Bois de Roussac 81100 CASTRES

1) Intégration et dérivation (calculs approchés) 2) Recensement des propriétés affines du plan (Quatrième, Troisième, Seconde).	Melle MASSARD Lycée de Bréquigny-Rennes 13, Bd Léon Bourgeois 35100 RENNES
Arithmétique en Cinquième (nombres premiers, décompositions primaires)	M. Pierre AUBRA Lycée des Eaux Claires rue de Dunkerque 38100 GRENOBLE
1) Utilisation d'une table traçante (liée à un HP 10) pour l'étude des applications affines et des applications linéaires en Seconde et Terminale. 2) Introduction de l'analyse en Première.	M. LAGREE 31, rue Fromentin 56000 VANNES
Informatisation du programme de Quatrième: parenthèses, puissances, écriture des puissances de 10, applications (compositions et réciproques).	Mme JARAY 43, rue de la République 54520 LAXOU
Démarche algorithmique en Troisième (polynomes, racines carrées).	Mme LEFORT 26, rue du Cardinal Ville en Vermois 94210 SAINT NICOLAS DE PORT
A partir de $ax + by + c = 0$, étude de la droite - direction, vecteurs directeurs - détermination d'une droite par un vecteur, un point - droites passant par un point.	Melle CUNIN Lycée Jean Michel 39015 LONS LE SAUNIER
Etude des applications injectives, surjectives d'après leur graphe. Construction d'espaces affines finis.	M. CRESPIN M. DENISE

Approximation des fonctions, calcul intégral.	M. LLORCA Lycée Dumont d'Urville Bd De Lattre de Tassigny 83000 TOULON
1) Composition d'applications (Quatrième) 2) Utilisation des articles (Cinquième) 3) Encadrement d'une racine carrée par des décimaux avec visualisation (Quatrième).	M. MOREAU Lycée Banville 03000 MOULINS
1) Formules de trigonométrie (contrôle de connaissances) 2) Racines carrées d'un nombre complexe - Equation du second degré à coefficients complexes.	M. J.P. DUVERGNE Le Rouilly de Ligré 37500 CHINON
1) Exercices programmés sur les puissances de 10 (Seconde) 2) Programme sur les nombres complexes (Terminale) 3) Exercices programmés sur l'algèbre de Boole (T.S.)	M. R. RIOU Lycée de Saint Brieux 7, rue de Prague 22000 SAINT BRIEUC
1) Divisibilité dans $\mathbb{N}$ en Terminale C 2) Intégration en Terminale (intégrale, primitive, aire, logarithme, exponentielle)	M. D. MUSSO Lycée Calmette 5, avenue Foch 06000 NICE
Programme contrôlant et indiquant l'ordre de priorité des calculs dans une expression algébrique parenthésée ou non	M. CLEMENTIDES Lycée Albert Thomas 42328 ROANNE
Elémentaire: Petits programmes de mathématiques de niveau Cours Moyen.	Mme SIBILLE E.N.I. 11, rue du Général Leclerc 54320 MAXEVILLE

Programme d'E.A.O. portant sur les polynomes du premier degré (en liaison avec l'IREM de NANCY).	M. DIETSCH L. E. Charlemagne 17, avenue Clémenceau 57100 THIONVILLE
Exercices sur l'inclusion. Exercices sur le complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble B. Exercices sur la réunion de deux ensembles. Exercices sur l'intersection de deux ensembles. Exercices sur la numérotation.	M. LACAZE L.E.N. de Garches 104, Bd R. Poincaré 92380 GARCHES

II - DE L'ENSEIGNEMENT PROGRAMMÉ À L'ENSEIGNEMENT ASSISTÉ

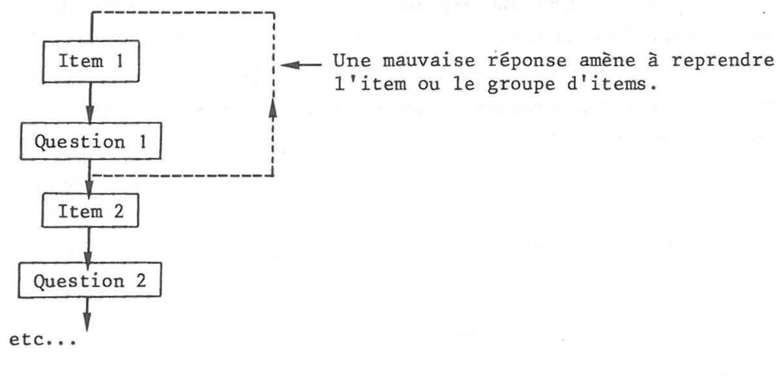
Au lendemain de la guerre l'apparition de moyens technologiques et les travaux de psychologues sur les théories de l'apprentissage ont conduit à des tentatives de rénovation pédagogique. Ainsi en est-il de l'enseignement programmé.

1. *L'enseignement programmé*

Le psychologue américain Skinner a été à l'origine de ce type d'enseignement. On peut résumer ses idées de la façon suivante:

Pour enseigner un concept ou une notion, il faut découper le cours en une série d'unités d'information appelées ITEMS et contrôler après chaque item la compréhension et l'acquisition de cette information.

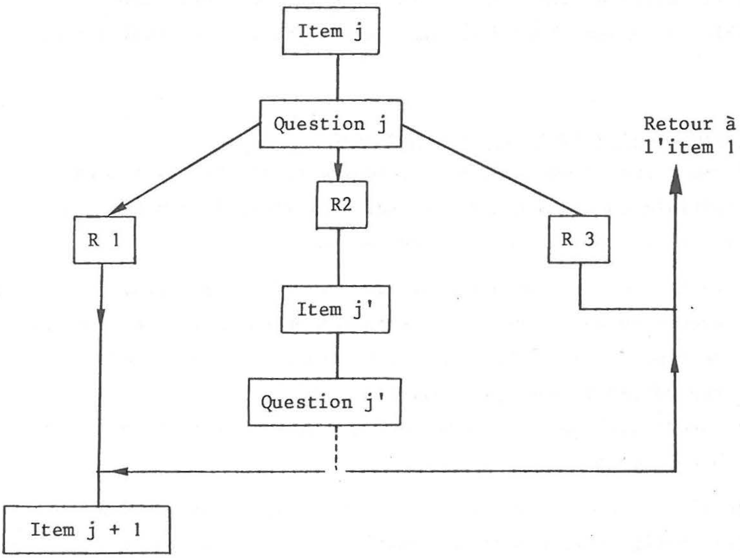
C'est ce qu'on appelle l'enseignement programmé linéaire, le schéma du cours étant du type:



Dans ce type de cours, on peut dire que l'on a individualisé la vitesse d'apprentissage, mais tous les élèves suivent le même "programme".

La difficulté principale qu'ont rencontrée les auteurs de "livres d'enseignement programmé" est la segmentation d'un enseignement en "items" qui ne doivent comporter qu'une idée nouvelle et dont la rédaction doit être parfaitement claire.

Il est apparu assez vite nécessaire d'individualiser le "cheminement" des élèves. En effet, s'il est exact que tous les enseignés n'apprennent pas à la même vitesse, il est également évident que tous n'apprennent pas de la même façon. Ainsi un élève pourra comprendre d'emblée une notion alors qu'il sera nécessaire pour d'autres de développer et d'expliciter pas à pas. Nous schématisons ci-dessous de façon grossière un tel dispositif d'enseignement programmé ramifié ou crowderien (du nom du professeur CROWDER qui en est à l'origine).



Chaque item est ici suivi d'une "question à choix multiple" (Q.C.M.); dans notre cas si l'élève donne la réponse R1, c'est qu'il a parfaitement compris la notion[1] et il passe à l'item suivant; la réponse 2 montre que cette notion n'a pas été acquise et elle va être explicitée en détail.

(1) ou du moins qu'il a choisi la bonne réponse soit par un raisonnement correct, soit par hasard, soit par un raisonnement incorrect.

Au terme du déroulement de cette branche de l'organigramme, l'élève abordera l'item suivant ou sera renvoyé à un item précédent. Dans certains cas, en effet (Réponse R3), il peut apparaître nécessaire de reprendre un ensemble d'items, présentant une notion mal comprise par l'élève.

Dans l'idéal on voit qu'on dispose là d'un outil qui permet une véritable individualisation de l'enseignement. Contrairement à la méthode linéaire, l'élève qui apprend rapidement ne sera pas obligé de passer par toute la série des items, et des voies spéciales sont prévues en cas de nécessité.

Il faut cependant bien voir que la construction de tels cours nécessite une analyse extrêmement fine du contenu de l'enseignement.

Chaque cours doit donner lieu à une série d'expérimentations avec des élèves avant d'être au point. Il est certain que ceci amène le professeur à un travail de réflexion et d'analyse très riche (et très long). Mais à notre sens, s'il existe de très bons cours d'enseignement programmé(1), il serait impossible voire dangereux d'essayer de présenter tout enseignement sous cette forme.

2. *L'enseignement programmé sur ordinateur*

Cette forme d'enseignement a, bien évidemment, attiré les informaticiens. L'idée initiale consistait à mettre sur ordinateur le contenu des items, les questions et le programme de gestion du cours.

On éviterait ainsi les inconvénients du livre d'Enseignement Programmé:

- nécessité de tourner sans cesse les pages (après les commentaires du type "Si vous avez répondu R1 sautez à la page 103, si vous avez répondu R3 revenez page 91, etc..."),
- autodiscipline nécessaire de l'enseigné pour qu'il ne regarde pas la bonne réponse.

L'application la plus immédiate est "l'exercice à trous" qui découle directement de l'enseignement programmé linéaire. Nous en donnons ici un exemple portant sur des exercices d'orthographe simples. On remarquera que, contrairement

---

(1) La méthode donne d'excellents résultats dans le cas où l'enseignement programmé consiste à transmettre des connaissances bien spécialisées. En particulier il existe de très bons livres d'Enseignement Programmé sur les langages de programmation où il s'agit d'apprendre des règles syntaxiques.

à la technique Q.C.M., l'élève donne sa réponse et ne choisit pas une réponse parmi plusieurs réponses proposées.

Un exemple d'exercice à trous:

L'ACCORD DE "TEL"

Si tel est suivi de que, il s'accorde en genre et en nombre avec le nom qui le précède.

Exemples: - Des hommes tels que Pasteur sont rares aujourd'hui.
- Sa douleur était telle qu'il hurla.

Sinon, accordez tel avec le nom qui le suit.

Exemples: - De grands hommes, tel Pasteur, sont rares aujourd'hui.
- De tels hommes sont rares.
- Telle a été sa réponse.

EXERCICE 1

Complétez les phrases au moyen de tel et faites l'accord qui convient.

Je n'ai jamais vu une ... affluence

Vous répondez: TELLE

C'est bien.

Pourquoi donnez-vous à cette affaire de ... proportions ?

Vous répondez: TELLES

C'est bien.

... sont nos lois: respectez-les !

Vous répondez: TEL

Faux. Revoyez éventuellement les règles.

... sont nos lois: respectez-les !

Vous répondez: TELS

Faux. Revoyez éventuellement les règles.

... sont nos lois: respectez-les !

Vous répondez: TELLE

JE VOUS RAPPELLE LES REGLES :

Il est vite apparu que l'on pouvait programmer une structure ramifiée très complexe. Mais on introduisait alors une difficulté supplémentaire pour le pédagogue: apprendre l'informatique et la programmation. Pour éviter cet obstacle, des langages spéciaux dits "Langages auteurs" ont été mis au point. L'enseignant utilisateur indique alors les textes des items, des questions, des réponses proposées, des commentaires associés aux différentes réponses et les branchements. Notons qu'à ce niveau, la méthode est rigoureusement la même, mais l'ordinateur permet que s'instaure un "dialogue" entre l'élève travaillant sur le terminal et le cours programmé. Il existe de très nombreux langages auteurs, le plus répandu étant "COURSE WRITER" développé par I.B.M. En France, citons les systèmes O.P.E. (Ordinateur Pour Etudiant, Université PARIS VI) et MAGISTER (Université de GRENOBLE). Sans atteindre bien évidemment les performances de ces gros systèmes, un programme L.S.E. a été mis au point par Monsieur BRUNET et l'équipe de l'E.N.S. de SAINT-CLOUD, qui permet, sur de petits ordinateurs, des applications de ce type. Nous en donnons ici un exemple très simple.

Exemple d'utilisation du programme ENSPI , extrait d'un cours sur les polygones

L'enseignant prépare l'organigramme de son cours programmé (voir page suivante), c'est-à-dire les items et les branchements entre ceux-ci, les réponses d'élèves analysées avec l'envoi de commentaires appropriés. Il est impossible d'associer un commentaire à toutes les réponses possibles (62 possibilités dans le cas de l'item 1). On ne testera donc que des réponses types, en tenant compte des erreurs les plus fréquemment commises par les élèves.

Des modules spéciaux permettent à l'enseignant d'entrer:

- le texte de ses items: exemple:

```
N° de l'item = 3
Consultez le schéma qui figure dans le document.
Un rectangle a-t-il toutes les propriétés d'un trapèze ?
```

- le texte des commentaires: exemple:

```
N° de commentaire = 3
Votre réponse est exacte. Mais la réponse numéro 4 est exacte
également.
```

- les branchements: exemple:

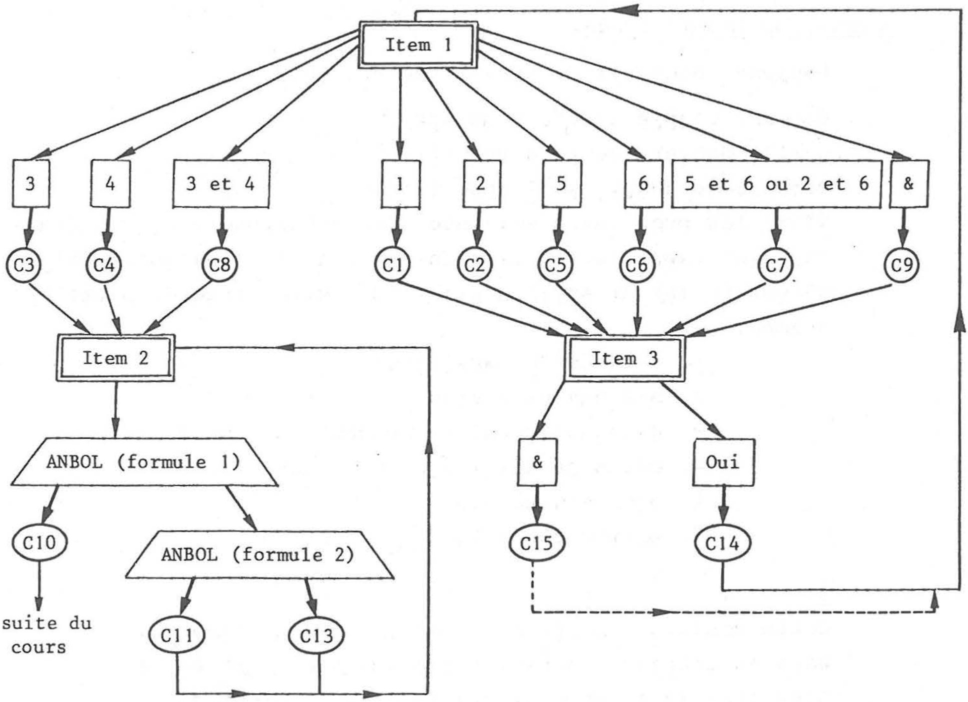
N° d'item: 1

Réponse	N° de commentaire	item suivant
1	1	3
2	2	3
5	5	3
6	6	3
3	3	2
4	4	2

Ainsi, si la réponse de l'élève est 2, il y aura affichage du commentaire 2 et passage à l'item 3.

Le programme ENSPI proprement dit effectue les tâches d'affichage, de test des réponses et les aiguillages ainsi définis (voir listage ci-joint).

Organigramme de la Séquence "ENSPI" (voir légende page suivante)



Légende :

Item : comprend le texte de l'item et de la question

Réponse élève

& Autres réponses que celles analysées

Commentaire

C15 Commentaire "Allez voir le professeur". Le déroulement de la séquence est interrompue. Seul le professeur peut "relancer" l'exécution.

Remarque - La partie concernant l'item 2 est expliquée au paragraphe 3.

Exemple d'un travail d'élève

Bonjour, nous allons travailler ensemble.

Comment t'appelles-tu ? Dupont

Quelle matière veux-tu travailler ? Maths

Demande le numéro et frappe-le: 1

Parmi les propriétés suivantes (caractérisant un quadrilatère convexe) tapez le(s) numéro(s) de celle(s) qui est(sont) nécessaire(s) et suffisante(s) pour déterminer un parallélogramme.

1. deux côtés parallèles
2. diagonales égales
3. diagonales qui se coupent en leur milieu
4. côtés parallèles deux à deux
5. deux angles droits
6. quatre côtés égaux

2

Cette condition n'est ni nécessaire ni suffisante.

Dans un trapèze isocèle, les diagonales sont égales.

Consultez le schéma☆ qui figure dans le document.

Un rectangle a-t-il toutes les propriétés d'un trapèze ?

☆ Voir page suivante.

NON

Votre réponse est incorrecte.

Tout rectangle, étant un trapèze (puisqu'il a au moins deux côtés parallèles), en possède toutes les propriétés.

Demandez au professeur de vous expliquer le schéma d'accompagnement.

Le déroulement du programme est arrêté. Le professeur après discussion avec l'élève "relance" l'exécution.

Parmi les propriétés suivantes (caractérisant un quadrilatère convexe) tapez le(s) numéro(s) de celle(s) qui est(sont) nécessaire(s) et suffisante(s) pour déterminer un parallélo--gramme.

1. deux côtés parallèles
2. diagonales égales
3. diagonales qui se coupent en leur milieu
4. côtés parallèles deux à deux
5. deux angles droits
6. quatre côtés égaux

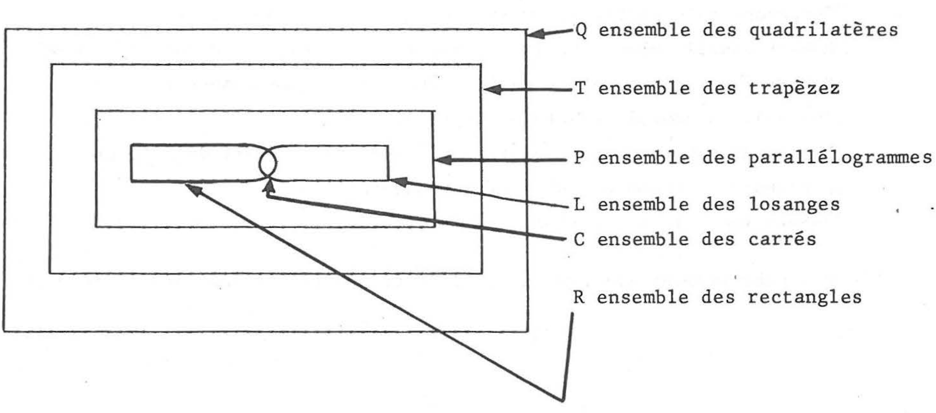
3 - 4

Parfait. Seules les réponses 3 et 4 sont exactes.

... branchement à l'item 2.

La suite de ce listage est donnée et expliquée au paragraphe suivant.

Schéma donné aux élèves :



3. *La technique des Q.C.M. et l'analyse des réponses*

Une "retombée" de l'adaptation sur ordinateur des méthodes de l'enseignement programmé a été la mise au point d'exercices de contrôle de connaissances basés sur des questionnaires à choix multiple (Q.C.M.). C'est-à-dire que pour chaque question l'élève choisit parmi les réponses proposées celle (ou celles) qui lui paraît exacte. Ainsi l'ordinateur peut assurer la tâche, souvent fastidieuse, de contrôle de connaissances, et l'élève pourra recevoir un "corrigé personnalisé" si des commentaires pour chaque réponse ont été mis en mémoire par les auteurs.

Il faut cependant souligner que cette technique de Q.C.M., qu'elle soit utilisée dans un processus d'Enseignement Programmé ou à titre de contrôles de connaissances, présente quelques inconvénients:

- certains lui reprochent d'induire chez les élèves des réponses fausses,
- la rédaction des mauvaises réponses est difficile si on ne veut pas que la "bonne réponse" soit évidente,
- cela paraît vite fastidieux à l'élève.

Pour pallier ces inconvénients, on a laissé l'élève répondre librement, sa réponse étant analysée par programme. Notons que les gros systèmes d'enseignement assisté par ordinateur offrent des logiciels d'analyse de réponses, d'analyse de formules mathématiques également, extrêmement puissants. La technique consiste à rechercher des mots clés ou des squelettes de mots. Ainsi, si j'attends comme réponse blanc, il faut peut-être rechercher uniquement la présence successive des caractères "blanc" pour tenir compte d'inévitables fautes de frappe. Le problème devient parfois difficile ainsi que l'exprime un auteur:

"Supposons qu'à partir de la phrase:
"Robert usually plays the flute, but he's playing the organ right now"
(Robert joue ordinairement de la flûte, mais en ce moment il joue de l'orgue), on veuille poser la question:
"What does Robert do in the groupe ?" (Que fait Robert dans le groupe ?);
et prévoir la réponse juste correspondante:
"Robert (he) plays the flute".

On a pour premier réflexe de se contenter de rechercher dans la réponse de l'élève les mots "plays", "the", "flute", pris dans cet ordre; pourtant cette prévision ne suffit pas car elle permet à la machine de reconnaître à tort comme juste une réponse comme

"he plays the flute and the organ" ...

Notons que la réponse de l'élève n'est jamais que partiellement "libre". Ainsi, toujours à l'O.P.E., afin d'éviter des phrases trop complexes, la réponse de l'élève est limitée à 55 caractères.

Nous donnons ici, à titre d'exemple, la fin de la séquence d'ENSPI exposée au paragraphe précédent. La réponse à l'item 2 est libre. Un programme spécial (ANBOL) permet d'en effectuer l'analyse.

La réponse correcte devra comporter les squelettes des mots QUAD (pour quadrilatère), COT (pour côté), // ou LLELE (pour parallèle), 2A2 (ou DEUX AD).

Si la réponse ne comporte pas QUAD, un commentaire spécial est affiché. Dans tous les autres cas on demandera à l'élève de reformuler sa réponse.

Donnez une définition du parallélogramme.
<u>C'est quand les côtés sont parallèles 2 à 2</u>
Vous avez bien décrit un ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes pour définir un parallélogramme, mais vous n'avez pas dit à quel ensemble (les quadrilatères convexes) se réfèrent ces propriétés.
Reformulez votre réponse.

Donnez une définition du parallélogramme.
<u>Quadrilatère dont les côtés sont parallèles 2 à 2</u>

Très bien ...

Pour que l'analyse de réponses ne soit pas trop complexe, il faut absolument se limiter aux erreurs les plus fréquemment rencontrées. De tels programmes devront donc être testés avec les élèves avant leur mise au point.

L'exposé serait incomplet si on ne mentionnait pas ici un élément important de l'utilisation des ordinateurs dans l'enseignement qui repose sur sa capacité de mémorisation des réponses d'élèves. Ceci est extrêmement important d'un point de vue pédagogique et psychopédagogique car, correctement exploité, ceci permet de mettre en évidence les problèmes majeurs que connaissent les élèves et d'essayer d'y remédier.

Nous donnons ici à titre d'exemple un très court listage d'une séquence d'un travail réalisé à l'O.P.E. sur la formation du présent en anglais. Les auteurs ont annoté les différentes réponses en précisant le taux de réussite d'un groupe d'élèves.

- Je travaille d'habitude cinquante heures par semaine.
Interpréter, please ...

HELP

Do you have a translation problem ? Type in the french word
You need and see what happens.
Now have a go.

I WORK USUALLY FIFTY HOURS IN A WEEK

We have seen before that usually couldn't be placed between the verb and its complement.
Try again.

I USUALLY WORK FIFTY HOURS IN A WEEK

50 heures par semaine is translated by -
50 hours a week.
Try again.

I USUALLY WORK FIFTY HOURS A WEEK

You're a champion.

La forme verbale work a été donnée par 46 élèves sur 49.
3 réponses "I'm working"
Seuls 23 élèves ont donné "I usually work" en 2ème réponse.

- JE NE MANGE JAMAIS DE VIANDE

I NEVER EAT NO MEAT

If only I were a smart machine. I would understand what you typed ...
Check the spelling and
try again.

Cette réponse n'avait pas été prévue.
Pour toutes les réponses non prévues, un commentaire de ce type est envoyé à l'élève.

I NEVER EAT MEAT

Pretty good, partner.

34 élèves sur 49 ont répondu juste à cette question.
1 réponse: "I'm eating".

4. *Les exercices d'entraînement et "d'expérimentation guidée" par ordinateur*

On constatera sur ce dernier exemple de grammaire anglaise que l'on ne retrouve pas un schéma de type enseignement programmé. L'exemple pris se situe dans un cours entier sur la formation du présent au cours duquel les règles de formation ont été données et des exercices programmés ont déjà été effectués.

Ceci nous amène à un autre type d'utilisation de l'ordinateur en E.A.O. qui n'a plus pour objectif la transmission de connaissances et le contrôle, mais de permettre à des élèves de s'entraîner à résoudre des exercices ou à réviser une notion préalablement présentée par le professeur.

Le lecteur trouvera ci-après un exemple d'exécution d'un programme de conjugaison latine. L'élève ayant appris les règles de formation d'une forme verbale pourra ainsi s'entraîner et contrôler ses connaissances et la bonne compréhension de la méthode.

Dans l'exemple ci-après le lecteur remarquera comment la réponse de l'élève est analysée en cas d'erreurs (forme composée ou non. Si oui vérification de l'auxiliaire. Si non vérification du radical, du suffixe et de la désinence).

Il a été appelé VOCATUS ES
Vocatus participe correct.
Es auxiliaire inexact.
Es radical juste
Désinence fausse.

Recommence. VOCATUS EST
Bene respondisti.

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Vous serez jetés JACEMINI

Jac radical faux.

E suffixe juste.

Mini désinence correcte.

Recommence. JACIEMINI

Bene respondisti.

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

On peut dire qu'à ce niveau la présence du pédagogue est évidemment nécessaire, d'une part préalablement à l'utilisation de l'ordinateur, et en aval, pourrait-on dire, pour discuter avec l'élève (avec le listage de son travail) les lacunes et les incompréhensions de celui-ci. Ceci peut également amener l'enseignant à améliorer son cours. Par ailleurs, ce rôle du pédagogue est d'autant plus nécessaire qu'il ne s'agit plus uniquement de transmettre des connaissances mais aussi de faire acquérir par les élèves une méthode de travail, comme le dit Monsieur MULLER: "Notre objectif est donc de nous appuyer sur la cohérence du système (de la conjugaison latine) pour donner aux élèves une méthode rigoureuse qui leur permette de construire les formes avec plus de sûreté et de les reconnaître dans un texte latin, car nous pensons qu'il est plus facile de retenir un nombre limité d'éléments et leurs règles de combinaisons plutôt que d'apprendre d'emblée des tableaux entiers de conjugaison".

Dans ce genre d'application, les exercices proposés le sont en général sous forme de difficulté croissante. Ainsi dans le cas de l'exemple exposé l'enseignant peut définir les verbes et les formes verbales qui sont proposés aux élèves.

Il faut signaler dans ce paragraphe une autre possibilité d'utilisation des ordinateurs dans l'enseignement que nous appellerons expérimentation guidée par ordinateur. Un bon exemple est le programme EVE. Ceci consiste à proposer aux élèves d'étudier une notion particulière, qui aura pu être abordée sous une autre forme dans le cours. Les élèves (de préférence par groupes) vont mener cette étude en étant "guidés" par un programme rédigé par le professeur. Ils discuteront leurs résultats avec le professeur et l'ensemble de la classe. Il est souvent intéressant dans ce cas de leur demander de rédiger un "mémoire".

5. *Conclusions sur l'E.A.O.*

Nous avons essayé de décrire un peu toutes les possibilités de l'E.A.O., au sens classique du terme:

- enseignement programmé sur ordinateur dans un but de transmission de connaissances et en utilisant les ressources des machines pour la réalisation du "dialogue élève - ordinateur" et la mémorisation des travaux des élèves.
- exercices d'entraînement et expérimentation guidée par ordinateur permettant d'aborder des notions de façon plus rigoureuse et plus approfondie.

Terminons sur deux points:

- Ces méthodes permettent, en plus de l'individualisation du rythme de travail des élèves, de prendre en compte les erreurs qu'ils commettent. Il apparaît en effet qu'il ne faut pas essayer de supprimer l'erreur (ce qu'aurait tendance à faire l'Enseignement Programmé) mais bien au contraire d'analyser les erreurs et même d'amener les élèves à les analyser eux-mêmes, ou avec l'aide du pédagogue.
- La deuxième remarque sera pour dire qu'il ne faut pas concevoir des programmes fermés et se suffisant à eux-mêmes. Il faut bien tenir compte de "l'environnement" pédagogique dans lequel ils doivent prendre place (notions exposées préalablement, suivi du travail des élèves sur les terminaux, exploitation des résultats de ce travail). En particulier, il serait vain de penser que l'on peut prévoir et programmer toutes les erreurs des élèves; l'analyse de cheminements erronés sera souvent faite de façon plus rapide et plus efficace par l'enseignant que par programme. C'est ce qui explique les arrêts d'exécution et l'affichage de messages du type "Allez voir votre professeur" que vous pourrez rencontrer dans des programmes.

III - UN PROGRAMME D'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE

a) *Présentation*

Une équipe du C.R.E.E.M.(1) a voulu voir, d'autre part, ce que pouvait donner l'Enseignement assisté par ordinateur (E.A.O.) en mathématiques au niveau de l'enseignement supérieur, pour les élèves du C.N.A.M.

Nous avons choisi pour commencer l'Algèbre linéaire, dont l'expérience montre qu'elle présente pas mal de difficultés pour ces élèves.
De plus, elle nous a semblé se prêter, mieux que l'Analyse peut-être, aux possibilités matérielles des terminaux (machines à écrire à boule I.B.M.) de l'ordinateur: des écritures telles que $\frac{d}{dt}$ ou $\int$ par exemple, n'y sont pas nécessaires (cependant il peut se présenter des indices ou des tableaux).
Enfin, elle est enseignée et utilisée dans plusieurs autres cours du C.N.A.M., par exemple dans le cours d'Algèbre matricielle.

Après avoir choisi le sujet, les membres de l'équipe qui enseignent les mathématiques ont préparé en commun un avant-projet, articulant diverses parties, indépendamment du support informatique.

De leur côté, les informaticiens préparaient le terrain pour l'implantation en machine. Puis la rédaction du programme lui-même s'est faite avec l'équipe au complet, la forme définitive s'écartant souvent de l'avant-projet. Cette phase de mise en forme est très importante et demande beaucoup de minutie, de discussions et de temps (non seulement pour la logique du programme, mais au niveau des détails: vocabulaire, notations, prévision des réponses des utilisateurs ...). La présence de non-mathématiciens au cours de ce travail a permis de mieux concevoir certaines réactions des utilisateurs, et d'en tenir compte.

Après l'entrée en machine, il a fallu faire de nombreux essais et corrections puis des expérimentations sur des publics volontaires (collègues, professeurs du secondaire, ...) car les élèves du C.N.A.M., travaillant dans la journée, n'ont guère le temps de servir de cobayes et nous ne voulions

---

(1) Le Centre de Recherche et d'Expérimentation sur l'Enseignement des Mathématiques, se compose actuellement des chercheurs dont les noms suivent:

MM. BELAGE, BINDER, BONNARD, CHASTENET de GERY, Directeur,
CHEMLA, DEWEZ, HOCQUENGHEM Serge, SOURDILLAT, THEODOR.

les faire travailler que sur un programme fonctionnant déjà à peu près correctement. Ces tâtonnements, même quand ils mettaient en évidence des imperfections, ont toujours été riches d'enseignements, pour nous comme pour les utilisateurs.

b) Forme pédagogique du programme CALIN

Le programme est constitué de blocs ou "chapitres" qui sont actuellement enchaînés dans un ordre imposé avec cependant des parties optionnelles (voir le schéma en annexe à la fin de ce rapport). Mais dans chaque chapitre on pose des questions (généralement précédées d'informations) à l'élève; celui-ci répond (après réflexion) et sa réponse est analysée par l'ordinateur qui réagit alors en fonction du contenu de la réponse (et quelquefois aussi des précédentes) de sorte que le cheminement dans un chapitre peut être assez différent d'un élève à l'autre. Chaque chapitre est divisé en unités pédagogiques (munies d'une étiquette) groupant plusieurs questions (éventuellement une seule).

En règle générale, l'élève peut répondre librement: un exemple typique en est la première question du programme, dans laquelle, après avoir demandé de calculer le carré d'une matrice donnée, la question posée est: "Que remarque-t-on de particulier ?". Notons d'ailleurs que cette question, un peu déroutante a priori par sa grande liberté de réponses, est bien acceptée et que l'analyse de la réponse est pratiquement toujours correcte; bien sûr il y a vraiment une chose à remarquer, même si les façons de l'exprimer sont variées: (A ↑ 2 = A ; A est idempotent ; ...).

Les réponses nécessitent généralement de l'élève un travail (sur ses feuilles de brouillon), calculs ou démonstration, qui peut être plus ou moins complexe, plus ou moins long. Parfois les étapes du calcul ou de la démonstration sont demandées.

Le problème délicat, mais intéressant, pour les auteurs du programme, a été justement l'analyse des réponses libres (et parfois longues). Il a fallu essayer d'envisager toutes les réponses vraisemblables (bonnes, partiellement bonnes, mauvaises) avec leurs diverses formulations possibles et prévoir le traitement des réponses non prévues. On a ensuite cherché à simplifier au maximum, tout en excluant autant que possible les ambiguïtés de façon à dégager les groupements de mots, ou même les mots (éventuellement réduits à des squelettes), qui ont un rôle discriminatoire. Bien sûr il a fallu faire des impasses, raisonnables. Mais l'expérimentation du programme met en évidence des réponses non prévues intéressantes, ou des réponses inexactement traitées par la machine; le programme est aussitôt modifié en conséquence (ce qui est infiniment plus facile avec l'ordinateur qu'avec MITSI). Bien entendu si un spécialiste veut à tout prix mettre en défaut la machine, il pourra y arriver quelquefois.

Cependant, dans certains cas de dégrossissage d'une question complexe (cas peu nombreux), la réponse se fait en choisissant dans une liste de réponses proposées (question dite: Q.C.M.). Exemple dans CALIN: la question étiquetée PRODIG1 .

De plus, avant de répondre à une question, l'élève peut lui-même poser une question à la machine. Celle-ci ne peut répondre qu'aux questions générales (par exemple, demande d'une définition) et non pas contextuelles (en tout cas dans leur forme, par exemple: "Que veut dire le second membre de l'égalité précédente ?").

Un choix d'exemples d'applications est proposé parfois, en digression, et dans la suite il peut être fait allusion par le programme à l'exemple précisément choisi antérieurement par l'élève qui passe. Le programme est ainsi plus individualisé.

De même l'élève peut parfois choisir librement l'objet mathématique sur lequel il va calculer (polynomes par exemple), et la machine suit l'élève dans ce choix tout au long du calcul et répond en conséquence.

Enfin, des dessins faits par la machine ont été prévus dans le programme, mais le temps de frappe est assez long et les possibilités sont limitées.

c) Table synoptique du contenu mathématique du programme C.A.L.I.N.

	Résumé des chapitres	Etiquettes rencontrées dans le chapitre : de début d'unité	secondaires	de branchement aux exemples
Chap. I	Introduction de la notion de projecteur sur un cas particulier. Matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: $A^2 = A$; représente un endomorphisme f de $\mathfrak{R}^3$; $f^2 = f$; Image et noyau de f sont supplémentaire dans $\mathfrak{R}^3$. Dessin.	Q11 Q12 Q13 Q10 Q20 Q30	DESS 1 - DESSF	
Chap. II	Définition générale des projecteurs: $f^2 = f$ et f linéaire Exemples, contre-exemples.	DEFPRO PREX		
	* Exemples, au choix, développés			EXPAR 1 EXDIV 1 EXDIV 2
Chap. III	P projecteur $\Longleftrightarrow$ I-P projecteur $P_\circ [\![I-P]\!] = 0$, $Im(P) = Ker(I-P)$ $X \in Im(P) \Longleftrightarrow P(X) = X$ $Im(P) \dot{+} Ker(P) = déf(P)$ $[E' \dot{+} E''] \Longleftrightarrow [\exists P, Im(P) = E', Ker(P) = E'']$	PROSUP RSUP2 PRSUP3 LEM1 PRSUP4 PRSUP5 PRSUP6 PRSUP7	PROSP 1 - PRSUP 2	
	* Suite des exemples développés (en option pour EXINV1)	DIG1	DIG 11	EXINV1 EXPAR2
Chap. IV	0 et 1 sont les seules valeurs propres que peut avoir un projecteur. $P \neq 0 \Rightarrow$ P admet la valeur propre 1 $P \neq 1 \Rightarrow$ P admet la valeur propre 0	PROPRO PROPR1 PROPR2 PROPR3		
Chap. V	Dans un espace de dimension finie, un projecteur est toujours diagonalisable.	PRODIG1 PROD2G	SAUT	
Chap. VI	Dans un espace de dimension finie, le rang d'un projecteur est égal à sa trace.	RANPRO RANPR1 RANPR2		

Chap. VII	Caractérisation des projecteurs de rang 1.	DIGEN0 DIGEN1 DIGEN2
Chap. VIII	Un endomorphisme diagonalisable est une combinaison linéaire de projecteurs supplémentaires dans leur ensemble.	DIGEN3 PART1 PART2

PART 11

Résumé des exemples optionnels (pour leur place d'appel voir la partie précédente) — Principales Etiquettes

Involutions et Symétries — EXINV1

Symétrie de $\mathcal{R}^3$ par rapport au plan $\mathcal{R}\times\mathcal{R}\times\{0\}$

$S : U \mapsto V$; soit W le milieu de UV.

$U \mapsto W$ est un projecteur dont la matrice dans la base naturelle est A (du début),

donc $f = \frac{1}{2}\left[I + S\right]$; dessin .

En général, si S est une involution linéaire de E,

$P = \frac{1}{2}\left[I + S\right]$ est un projecteur de E .

Réciproquement, si P est un projecteur de E ,

$S = 2P - I$ est une involution linéaire de E;

au projecteur supplémentaire $I - P$ est associé l'involution linéaire $I - 2P = - S$. Dessin.

Fonctions paires, fonctions impaires — EXPAR1

(sur $[-2 ; 2]$, à valeurs réelles) $P(f) = g$

avec $g(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]$,

P est un projecteur ("partie paire" de f)

Im(P) : fonctions paires sur $[-2 ; 2]$

Ker(P) : fonctions impaires sur $[-2 ; 2]$.

Soit S l'involution linéaire associée à P, et h l'image de f par S ; calculer h. — EXPAR2.

<u>Division suivant les puissances décroissantes</u> (des polynomes sur $\mathbb{C}$) A polynome donné; au polynome Y on fait correspondre les polynomes Z et R tels que: $Y = AZ + R \quad \text{avec} \quad d°(R) < d°(A)$; $R = f(Y)$ où f est un projecteur $Im(f)$: polynomes de degré $< d°(A)$ $Ker(f)$: polynomes "multiples" de A.	EXDIV1

Soit g le projecteur supplémentaire de f ; choisissez vous-même un polynome Y , recherche de $g(Y)$.	EXDIV2

<u>Résumé des questions actuellement prévues</u>

(sous diverses formes)

Somme de sous-espaces vectoriels ?	SOMESP
Somme directe ?	SOMDIR
Sous-espaces supplémentaires ?	ESPSUP
Endomorphisme ?	DEFEND
Noyau ? Image ? Rang ?	DEFKER , DEFIM , RANG
Valeurs propres ? Polynome caractéristique ?	VALPRO , POLCAR
Projecteur ?	DEFPRO
Involution ?	DINVOL

(IV) - L'ORDINATEUR DES MAINTENANT, POUR L'AVENIR DE NOTRE ECOLE

L'informatique, née des rêves de mathématiciens, atteint désormais, grâce à la puissance des ordinateurs, une efficacité telle que ne pas en tenir compte dans notre travail d'enseignement c'est condamner notre Ecole à péricliter dans un bref délai. "Nos ancêtres les Gaulois" périrent faute, en partie, d'avoir su utiliser à temps le langage écrit. La culture de la Renaissance n'aurait pu s'épanouir sans la diffusion par le livre imprimé. Déjà la radio et la télévision ont profondément rénové les modes de transmission de pensée. Mais, seule, l'informatique pourra organiser les échanges nécessaires, gérer les "questions et réponses" qui permettront à chacun de construire sa pensée — de sa propre initiative dans un fonds commun de culture.

Ainsi, bien avant de pouvoir disposer du traitement automatisé, nous avons commencé nos recherches au Centre National de Télé-Enseignement de Vanves (en 1964) dans la perspective d'une aide de l'informatique à l'enseignement. C'était l'époque où les désillusions concernant les techniques de l'enseignement programmé commençaient justement à l'emporter sur le courant d'enthousiasme naïf des premiers novateurs. Il est toujours facile a posteriori de les critiquer: chez tout chercheur sincère, en sciences humaines et en recherche didactique en particulier, on peut trouver un fond de vérité — et seules les outrances dans la mise en pratique réduisent à des caricatures ce que l'on rêvait d'obtenir. Rendons hommage à SKINNER, même si son modèle de la progression linéaire la plus courte possible et par petites étapes "atomisées" a donné prétexte à des cours très ennuyeux et a le plus souvent abouti (dans les cas de succès) à un apprentissage par "réflexes" étroitement conditionnés.

Quant au principe de ramification de CROWDER, s'il nous a séduit par la liberté qu'il apporte aux élèves au niveau des aiguillages, il s'avère très difficile à appliquer — pour ne pas dire impraticable par un seul professeur. Chacun, maître ou élève, ne suit avec conviction que son propre chemin — et la force persuasive d'un exposé de cours s'atténue beaucoup dans les dérivations.

C'est pourquoi nous avons distingué rapidement deux voies de recherches, deux activités complémentaires, dans notre métier:

- l'exposé du cours, la présentation d'un modèle où le maître reste le soliste qui impose son interprétation du programme en "concertant" avec sa classe;
- et la phase d'apprentissage où les élèves s'efforcent de construire chacun son propre modèle.

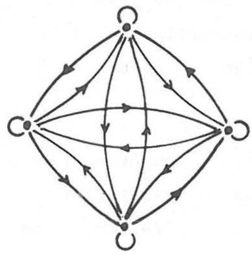
Pour répondre aux divers tempéraments de nos élèves, il faudrait mettre à leur disposition diverses interprétations — donc enregistrer plusieurs de ces interprétations. Mais afin d'éviter de sombrer dans le monologue (comme c'est trop souvent le cas avec les cours imprimés) il faut chercher à introduire dans le déroulement de la pensée la <u>concertation</u>, le <u>dialogue avec les élèves</u>. Ces deux exigences, jointes à la possibilité de gestion en fonction des besoins de chaque élève , peuvent trouver peu à peu, grâce à l'effort de tous, un début de solution par l'informatique.

Les trésors d'invention que, depuis des siècles et à nouveau chaque jour dans chaque classe, nous gaspillons dans le temps qui passe, doivent pouvoir être notés. Le français "oral" peut s'enregistrer sur disques ou se transcrire à défaut (nous ne parlons pas comme dans les livres !). Les questions les plus significatives des élèves peuvent et doivent être relevées — et le discours marqué de temps de réflexion (questions) où tous s'efforcent de répondre.

En attendant d'avoir les moyens de gérer le déroulement de mes cours par ordinateur, je me suis efforcée de ponctuer mes rédactions de cours par des questions (avec réponses en autocorrection) — et d'adopter un style à plusieurs langages simultanés (français "oral", dessins, exemples à plusieurs niveaux de concret, schémas, écriture symbolique — le tout sur une même page qui se termine par une question, une pause de réflexion individuelle).

A l'intérieur de mon cours imprimé (faute de moyens plus modernes) l'élève peut "circuler" librement: commencer par la fin, lire les conclusions, regarder les images, aller chercher les réponses aux questions sans avoir pris le temps de les élaborer lui-même complètement. Il ne faudrait pas, sous prétexte de guider nos élèves, les priver de cette souplesse dans l'étude — ni surcharger nos cours informatisés (aidés par l'ordinateur) d'exigences qui tueraient la spontanéité de l'élève et lui feraient perdre l'élan de la démarche du professeur.

La conquête de la connaissance
dans l'Ecole de l'Avenir



Un groupe d'opérateurs: l'image de la liberté

De plus, il n'est pas possible à un maître, si "bon" soit-il, de répondre à toutes les exigences, à tous les tempéraments de tous les élèves. L'ordinateur devrait pouvoir mettre, lui, selon le même principe de guidage souple, plusieurs cours pour un même sujet à la disposition des élèves. Cette stratégie de libre circulation au sein de la matière informative, fondée sur un groupe d'opérateurs de déplacement, m'a été suggérée, il y a plus de vingt ans, par une conférence de notre Collègue J. ULLMO, alors professeur à l'Ecole Polytechnique. Elle me semble reposer sur de profondes exigences psychologiques, sur la nécessité de raccorder les observations de plusieurs points de vue (au réel comme au figuré) pour aboutir à une synthèse d'expériences de nos réactions dans le domaine à explorer.

En se plaçant à un niveau plus général, nous pouvons rêver d'une Ecole de l'Avenir, où chacun (quel que soit son âge et son niveau) pourrait puiser hors des contraintes de lieu et d'horaire dans le fonds commun de culture de notre civilisation humaine. Ce n'est plus une utopie, mais une vue prospective dans la mesure où les éducateurs sauront se grouper pour obtenir les moyens et apprendre les méthodes de l'informatique — dans une mise au service de leur fonction. Il s'agit de faire plus et mieux avec l'informatique — mais bien sûr, sans pour autant renoncer pour l'essentiel au travail "en direct", seule source de la réelle inspiration dans notre art (Les disques n'ont pas supprimé les concerts, et l'enseignement musical tout entier y a gagné).

Enfin un tel système de diffusion de cours devrait être complété par une "banque de renseignements" — une possibilité pendant l'étude de poser soi-même des questions (et pas seulement de répondre aux questions posées) pour obtenir une définition, une précision sur l'usage d'une règle... bref une information qui manquerait pour comprendre. Cela n'alourdirait pas le cours proprement dit, mais réduirait les abandons.

Cependant, alors que nous ne pouvions pas disposer de moyens informatiques permettant en particulier le travail "en temps réel" avec l'ordinateur (il n'y a pas de centre de calcul au C.N.T.E. de Vanves, ni à plus forte raison de réseau de terminaux — même en nombre réduit !) nous avons fait porter notre effort sur l'autre direction de recherche: la conduite des apprentissages, celle de la construction par l'élève de ses propres modèles.

Nous avons peu à peu mis au point une méthode d'interrogation par grilles (à 90 cases où l'on répond par des croix) en cherchant à respecter nos principes de libre activité en cours de travail. Nous procédons (presque toujours) par nuances de concepts (pour les postes réponse numérotés de $\boxed{0}$ à $\boxed{9}$) et par nuances de situations d'utilisation de ces concepts (pour les questions numérotées de A à I).

Ainsi l'élève analyse chaque situation en répondant à chaque question: c'est du Q.C.M. (questionnaire à choix multiple) mais un Q.C.M. riche à 1024 manières de répondre par question; et qui fournit les matériaux de la réponse sans induire en erreur par la rédaction d'une réponse fausse.

Puis, par le jeu des comparaisons, l'élève accède à la synthèse du sujet. Il a alors la possibilité de rectifier ses premières réponses avant de s'engager en responsabilité, après mûre réflexion. (Pour plus de détails, se reporter au numéro 299 du Bulletin de l'A.P.M.E.P.).

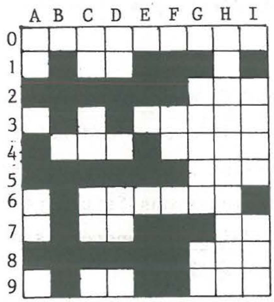
L'ordinateur n'est intervenu dans notre méthode qu'après 1970 grâce à l'obligeance de A. POLY, de l'E.N.S. de Saint Cloud, et de son équipe — que nous remercions beaucoup — et qui a soutenu notre recherche pendant six ans. Actuellement, c'est l'équipe du S.C.S.S. de Messieurs LEWKOWIEZ et PINO qui assure ce travail.

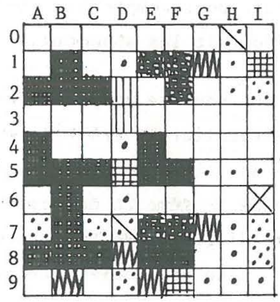
La possibilité de distribuer automatiquement nos corrections a donné une dimension et une qualité nouvelles à notre entreprise: la rapidité et la personnalisation plus poussée par stockage après analyse statistique des types de

TABLEAUX DE CONTINGENCE

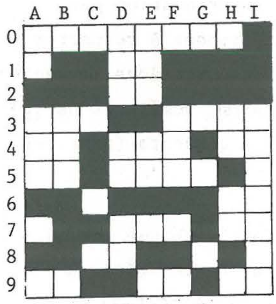
Modèles booléens

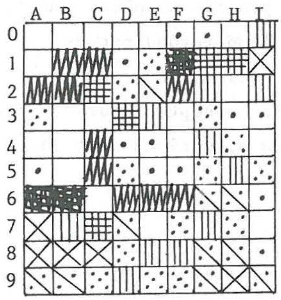
Réponse floue
(statistique - %)





B01
Premier Cycle
Secondaire
563 élèves





A05
Second Cycle
Secondaire
Scientifique
109 élèves

- 100%
- [90%, 100%[
- [80%, 90%[
- [70%, 80%[
- [60%, 70%[
- [50%, 60%[
- [40%, 50%[
- [30%, 40%[
- [20%, 30%[
- [10%, 20%[
- [0%, 10%[

(Réponses de l'enseignement "oral")
(de janvier 1974 à juin 1976)

$\boxed{\text{B01}}$ Arithmétique

$\boxed{7}$ "1 est-il premier ?" : les avis sont partagés.

Question D : La définition de "nombre primaire" n'est pas comprise.

$\boxed{\text{A05}}$ Relations internes

$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ étude de la transitivité : la réponse est très "floue".

Un corrigé d'exercices comporte de 200 à 300 branchements, suivant les types de réponse - environ 500 cartes avec les messages.

comportement d'élèves et calcul de l'adressage de messages mémorisés dans la machine. Nos élèves purent recevoir ainsi leur corrigé au bout de huit à dix jours — et nos professeurs correcteurs virent leur tâche harassante de correction à la main nettement allégée. Nos élèves sont, de plus, heureux de ne pas avoir tout leur travail à rédiger en français (la communication par croix est très rapide). Le travail en temps réel avec ordinateur n'est d'ailleurs pas, pour l'apprentissage, la meilleure formule: à la console d'ordinateur, on a trop tendance à vouloir répondre tout de suite quelque chose pour voir comment réagira le système conversationnel. Cette hâte gêne le raisonnement. Il me semblerait souhaitable de recevoir le corrigé d'un devoir le lendemain du jour où on l'a exécuté — mais pour cela aussi il faudrait un réseau de terminaux (par exemple, dans les divers C.N.T.E. ou dans des établissements scolaires) afin de réduire pour nos élèves les délais postaux de transmission à une journée au plus dans chaque sens.

Ainsi, heureusement surpris nous-mêmes des avantages de l'emploi de l'ordinateur, nous avons en octobre 1973 ouvert une "Bibliothèque de Q.C.M." pour associer (gratuitement) à nos recherches et au bénéfice du fonctionnement de nos sujets, les Collègues de l'Enseignement Public qui nous en feraient la demande: l'ordinateur "corrige" presque aussi vite des centaines de devoirs que des dizaines. Depuis trois ans et demi, nous avons ainsi étendu considérablement notre expérience: sur 850 professeurs inscrits à notre service de documentation, plus de 200 ont pratiqué dans leurs classes au moins un des 55 sujets (6 en sciences naturelles, les autres en mathématiques) pour 27 000 devoirs corrigés. Ils nous ont envoyé leurs remarques constructives (nous organisons systématiquement la contestation, gage du progrès permanent) et ont déjà rédigé eux-mêmes cinq sujets en fonctionnement — et en préparent d'autres.

> La qualité de notre service dépend de la quantité de grilles (remplies avec sérieux) qui précisent les comportements d'élèves.

Il faut des centaines de réponses de chaque catégorie d'élèves pour obtenir une stabilisation statistique (à 5% relatif au moins des taux en %). Aucun professeur ne peut accéder seul à une telle expérience avec ses élèves. (Nous envoyons les résultats statistiques globaux nationaux de même catégorie à ceux qui ont fait l'étude pour leur classe).

Dans la mesure de nos moyens, nous tenterons d'accueillir le plus de projets nouveaux de questionnaires, pour créer peu à peu une "banque de sujets" aussi divers que possible (en maths ou dans d'autres disciplines). La technique informatique doit avant tout permettre les confrontations, les échanges, la liberté des options, la lutte contre l'uniformisation stérilisante des modes de pensée.

Mais pour atteindre un tel objectif social, nous avons besoin de la participation coopérative de tous — rendue enfin possible par l'économie d'énergie d'organisation apportée par l'informatique. A la mise en œuvre des lois de la conservation de l'énergie qui permit l'essor industriel du XIXème siècle et du début du XXème, doit succéder celle du cumul et de la circulation des informations.

> Je te donne un dollar,
> Tu me donnes un dollar:
> Nous avons chacun un dollar.
>
> Je te donne une idée,
> Tu me donnes une idée:
> Nous avons chacun deux idées.
>
> *Proverbe américain*
>
> La lutte contre l'ignorance, le désordre (l'augmentation d'entropie) est créatrice de richesses tant matérielles que culturelles. Elle va dans le sens de la vie.

Pour obtenir les conditions d'une rénovation profonde des conditions de l'exercice de notre profession, il faut dès maintenant, tous ensemble, investir en "logiciel", en réflexion et mise en forme "informatisable" de documents didactiques (ne serait-ce que des sujets de questionnaires); conquérir les langages de communication actuels et justifier de plus en plus nos demandes de "matériel": la création par exemple d'un Centre National d'Informatique pour l'Enseignement, muni d'un Centre de calcul et d'un réseau de terminaux — qui serait notre "maison" à tous.

Et il faut faire vite — car nos sociétés humaines se développent par crises successives; et si nous tardons trop à réagir, notre système actuel d'enseignement ne trouvera plus en lui-même les forces d'inventer les méthodes de sa rénovation. Un tel service national (et pourquoi pas international) permettrait enfin de décharger les enseignants des tâches répétitives d'exposition de cours, et des séances lassantes d'apprentissage. Nous remplissons actuellement constamment "un tonneau des Danaïdes". Nous réinventons chacun devant chaque classe d'élèves les méthodes pour faire passer notre message sans stocker, sans mémoriser les modalités de notre action. L'informatique peut apporter à notre art son écriture et les possibilités de progrès qui en découlent. Cela demande, et demandera, à tous les professeurs un gros effort initial d'élaboration et une vigilance constante par la suite. Mais cet investissement fait, nous disposerions d'un Centre de Documentation qui laisserait enfin au maître face à ses élèves le meilleur rôle: celui de déclencher chez l'élève la créativité, l'imagination, le goût de la recherche personnelle et de l'émulation au sein d'un travail en équipe. L'esprit d'une classe sera celui que nous saurons créer.

Pour l'enseignement par correspondance, par écrit, l'énergie libérée par la machine nous permettra de corriger "à la main" des problèmes "ouverts".

Quant à l'esprit de groupe, nous pourrons plus tard le créer en organisant également grâce à l'ordinateur des dialogues entre élèves — et dès maintenant en diffusant des résultats statistiques et des remarques d'élèves. Les participants (même par courrier postal) peuvent ainsi s'insérer dans la vie collective; et c'est ce que nous faisons aussi pour les professeurs de notre Bibliothèque de Q.C.M. en envoyant chaque fois que possible les statistiques "globales" et les échos des réactions pour le reste du pays. L'ordinateur doit réussir à rompre l'isolement tant des élèves que des professeurs. Il peut répondre à la fois à chacun et animer aussi bien l'activité individuelle que collective.

Pour terminer, je voudrais enfin insister sur la nécessité, en sciences humaines et naturelles, de veiller à ne jamais établir que des automatisations partielles complétées par des dérivations hors machine pour régler les cas litigieux ou les problèmes les plus subtils. Nous voulons être aidés, déchargés par l'informatique — mais nous ne voulons en aucun cas renoncer à notre engagement individuel en responsabilité dans l'exercice de notre art. Dans l'état actuel de nos connaissances en psychopédagogie, il serait dangereux de renoncer à l'intuition "en direct" pour juger nos élèves. L'attribution de "notes" à un examen suppose un travail d'équipe soigneux, un consensus sur les barèmes, la hiérarchie des comportements. On peut envisager une aide de l'informatique à la notation des devoirs avec examen direct individuel des cas "difficiles" — mais pas une notation définitive "à la machine" (pas plus que l'aide informatique au diagnostic en médecine ne remplace le diagnostic du médecin). D'autre part, il serait très injuste de noter des élèves à un examen après une interrogation utilisant des procédés qui n'auraient pas contribué à enseigner ces élèves au cours de leurs études. C'est pourquoi nous ne notons pas à l'ordinateur les devoirs mis en Bibliothèque de Q.C.M. — mais nous observons, testons nos sujets par l'examen de nombreux élèves. C'est pourquoi aussi nous rédigeons des sujets de devoir, des documents d'apprentissage, et non des sujets d'examen, des tests où des "pièges" savamment glissés nous renseigneraient sur la vigilance des élèves à les déceler. Nous voulons créer un climat de confiance pour l'élève. (L'examen, s'il est un mal nécessaire, ne pourrait prendre la forme "par grilles" que bien plus tard).

Déjà certains de nos Collègues utilisent nos sujets dans cet esprit — créant dans leur classe une sorte de "libre service d'exercices d'entraînement" qu'ils conseillent à leurs élèves. Le sérieux du travail est assuré par le fait que le professeur reçoit toujours en double les listages de correction (et peut en garder un). Cependant, toutes les utilisations en classe quelles qu'elles soient sont "licites" — et un professeur qui, lui, connaît les conditions de passage d'un sujet (en temps limité, après un cours ou une révision, ou "par surprise", en devoir fait à la maison...) est le seul juge de l'évaluation (notée ou non) du travail de ses élèves.

Quant à nous, nous ne voulons juger ni les élèves, ni les maîtres pour leurs rédactions ou pour le travail de leurs élèves — n'étant ni qualifiés pour le faire, ni au fait des conditions locales du travail pédagogique (aucune statistique n'est faite par professeur — et nous garantissons l'anonymat à tous, sauf aux rédacteurs de sujets pour la "signature" de leurs sujets).

Pour conclure:

Dès maintenant et tous ensemble, nous pouvons et nous devons conquérir l'aide de l'informatique pour assurer l'avenir de notre Ecole.

Joignez-vous à notre équipe, si ce n'est déjà fait.

Quelques adresses utiles pour vous informer sur les recherches et services d'enseignement "aidés par ordinateur" (concernant le niveau secondaire, en particulier en mathématique):

C.N.A.M.

Centre National des Arts et Métiers
292, rue Saint-Martin - 75141 PARIS CEDEX 03

- CREEM : M. J. CHASTENET DE GERY
  (stagiaires 3ème cycle, Math; lien avec l'U.E.R. de D.D. Paris VII)
- Laboratoire de psychologie: Mme A. VIDAL - MADJAR
  (psychologie, informatique et statistique)

C.N.T.E.

Centre National de Télé-Enseignement
60, Boulevard du Lycée - 92171 VANVES

- Bibliothèque de Q.C.M.: Melle G. LOPATA
  (correction de devoirs)

E.S.E.

Ecole Supérieure d'Electricité
Plateau du Moulon - 91190 GIF SUR YVETTE

- Compilateur L.S.E. (avec système conversationnel): M. J. HEBENSTREIT

E.N.S. SAINT CLOUD

Ecole Normale Supérieure de SAINT CLOUD
Service Informatique - 4, rue des Ecoles
92210 SAINT CLOUD

- Logiciels XØ (correction de devoirs) et ENSPI (en L.S.E., générateur automatique de programmes)

C.N.D.P.

Centre National de Documentation Pédagogique
29, rue d'Ulm - 75230 PARIS CEDEX 05

- Section: Informatique et Enseignement (coordination de l'expérience d'introduction de l'informatique dans l'Enseignement)
  58 Lycées en France, équipés de T 1600 ou MITRA 15
  500 stagiaires "lourd" (un an à plein temps, ou à mi-temps)

6000 professeurs en "formation légère" par correspondance (diffusion C.N.T.E.)

IREM de NANCY   2 bis, boulevard Charlemagne - 54000 NANCY

- Mme GRANBASTIEN et M. QUERE (Etudes de comportement d'élèves et d'évaluation)
- M. J. P. FINANCE (en liaison avec le C.N.D.P.)
- M. J. VERDIER (évaluation (tests, Q.C.M.) et correction de devoirs en liaison avec le C.N.T.E.)

O.P.E.   Ordinateur pour Etudiants
2, place Jussieu - 75221 PARIS CEDEX 05

- M. J. JACOUD (Méthode générale; plus spécialement pour l'enseignement secondaire: Melle RICHE)

U.E.R. de PARIS VIII   Faculté de Vincennes, route de la Tourelle,
75571 PARIS CEDEX 12

- Département d'Informatique : M.P. GREUSSAY

Université Médicale et Scientifique de GRENOBLE

Mathématiques appliquées - Informatique
B.P. 53/38041 GRENOBLE CEDEX

- M. J. KUNTZMANN (liaison avec l'IREM de GRENOBLE, B.P. 38401 SAINT MARTIN D'HERES)

Nota : Cette liste n'est pas limitative.

Voici un rapport de M. J.P. FINANCE donnant quelques précisions sur le travail fait à l'IREM de NANCY.

GREIE : Groupe de recherche en informatique.
Constitué de trois sous-groupes:
- 1 concernant la classe de quatrième;
  lieu de réunion : NANCY (Mme JARAY)
- 1 concernant la classe de seconde;
  lieu de réunion : LUNEVILLE (M. RAVAINE)
- 1 concernant la classe de seconde;
  lieu de réunion : METZ (M. PARISOT).

Objectifs :

Utilisation de l'informatique et surtout de l'algorithmique pour introduire certaines notions mathématiques.

Cette utilisation revêt deux aspects extrêmes complémentaires:

a) L'ordinateur est un outil de contrôle ou d'approfondissement de connaissances. Les membres de GREIE ont ainsi écrit un certain nombre de programmes posant des questions à l'élève et testant sa réponse (résolution d'équations, détermination de la valeur de vérité d'une phrase, nature d'une relation, etc...)

b) On part de l'hypothèse que l'algorithmique est un bon moyen d'apprendre aux élèves à maîtriser certaines notions mathématiques et à résoudre certains problèmes. En particulier l'activité de conception d'un programme est très proche de celle mise en œuvre pour la résolution d'un problème. On étudie ainsi une progression pédagogique au cours de laquelle on demande aux élèves d'écrire certains algorithmes (en quatrième: calcul de puissance; en seconde: recherche d'un élément neutre, résolution d'équation, etc...)

Mode de travail :

Etude systématique de certaines parties de programme et redéfinition d'une progression faisant appel à l'un ou l'autre des deux aspects précédents en mettant l'accent sur le deuxième.

Matériel :

Lycées équipés dans le cadre de sensibilisation à l'informatique dans le secondaire (MITRA 15 et T 1600)

Langage: L.S.E.

Etat actuel :

Quelques-unes des fiches produites ont été expérimentées dans certaines classes au cours de cette année scolaire 1976-1977, ce qui a conduit à des aménagements de ces travaux.

Perspectives :

Travail très important qui rencontre plusieurs obstacles:

- Ignorance actuelle du niveau de complexité d'un algorithme que peut appréhender un élève d'un âge donné;

- Difficulté de suivre le découpage des programmes actuels au niveau algorithmique;
- Lourdeur matérielle du passage sur machine.

Un développement de ce type d'approche passe certainement par une adaptation des programmes actuels. On peut penser que cette manière de voir les choses, plus constructive que l'approche axiomatique actuelle, peut apporter à cette dernière un complément nécessaire.

Monologue d'un élève sérieux

(Ou organigramme avec boucle complètement folle !)

— *Bon ... j'y suis ... fiche 3 ... msieur, par où j'commence ? Bon ... option B ... Borrcrbrmm ... allez à la P 101 ... Bon ... Zut, elle n'est pas libre. Bon ça fait rien ... Option A . Bon ... vvrrrzzbacc ... Qu'est-ce que ça veut dire ... msieur ? Zut, le prof est pas libre. Bon, vite à la machine ! Bon j'y suis ... Option B ... Zut, où est ma fiche ... msieur ? y m'a pris ma fiche ... Bon y a quelqu'un à la machine ... Bon Option A ... Remplissez le tableau ... moinsquatreplustroiszz ... zut y a pas la place ... Ca y est la machine est libre ... Vite ... Zut, ma chaussure ... Ouf ... j'y suis ... Option B ... Zut y a plus de papier ... Msieur ? zut, il n'est pas libre ! Bon à ma place, Option B ...*

CHAPITRE 5

INFORMATIONS DIVERSES

(I) - DES CALCULATRICES ... CRITERES DE CHOIX

CHOIX D'UN CRITERE...

Le critère retenu pour cette étude a été essentiellement celui du prix des machines, d'où, dans cet article, l'étude des possibilités et des caractéristiques des machines dont le prix, en mars 1977, est inférieur à 5 000 Francs. Nous retrouverons donc deux types de matériels différents: d'une part pratiquement toutes les "mini-calculatrices" et d'autre part quelques matériels de bureau.

Nous n'avons pas voulu, même si cela peut s'avérer pratique pour le lecteur, donner, comme dans les brochures de l'I.N.R.D.P., de tableaux de caractéristiques des matériels existants sur le marché à l'heure actuelle, car ces caractéristiques et les prix de revient sont en progression permanente et rapide, trop rapide pour qu'un tel travail reste plus de un à deux ans d'actualité.

Une des tâches du groupe "informatique" de l'A.P.M.E.P. est d'ailleurs de tenir les enseignants au courant, au jour le jour, des nouveautés en la matière par l'intermédiaire du Bulletin.

UNE CALCULATRICE : POUR QUOI FAIRE ?

L'enseignant qui a la chance de se voir attribuer des crédits pour une dotation en petit matériel de calcul doit bien sûr tout d'abord déterminer l'utilisation qu'il désire en faire et qui doit guider son choix. En résumé, et faisant abstraction du type de matériel, voici une première classification possible:

- dans le Premier Degré :
  Les quatre opérations, obtenues de manière aussi naturelle que possible. Ceci sera permis aussi bien avec certaines machines de bureau, manuelles ou électriques, qu'avec (et à un coût bien moindre) le bas de gamme des calculatrices de poche.
- en Sixième, Cinquième :
  En sus des quatre opérations, il semble bon que la machine possède également le choix du nombre de décimales, le changement de signe, un facteur constant et les fonctions $\frac{1}{x}$ et x^2.
  On peut souhaiter de plus la partie entière et la partie décimale et les conversions et calculs dans des bases autres que dix, ainsi que les calculs et les conversions dans les systèmes sexagésimal et décimal. Aucun matériel spécifique pour l'enseignement n'étant, à l'heure actuelle, développé, certaines de ces fonctions ne se trouveront que sur des machines plus sophistiquées qu'il n'est utile à ce niveau.
- en Quatrième, Troisième :
  On utilisera également le positionnement de la virgule, les fonctions trigonométriques, le %, $\sqrt{x}$, valeur absolue. La présence de plusieurs mémoires est aussi souhaitable.
- en Seconde, Première et Terminale :
  Pratiquement toutes les fonctions des modèles élaborés peuvent alors être utilisées; citons en vrac :

  Log et log , e^x , 10^x , y^x , ...
  Transformations polaires - cartésiennes
  Fonctions statistiques
  Factorielle
  Diverses conversions (mesure des angles, octal - décimal - binaire - ...)
  Etc...

NOTATION ALGEBRIQUE OU NOTATION POLONAISE ?

Remarquons tout d'abord que ces systèmes de calcul ne sont pas les seuls, même si c'est le cas pour les mini-calculatrices; en effet les autres matériels (matériels de bureau) sont souvent différents (notation algébrique spéciale, calcul dans les mémoires).

Développons un exemple simple; pour calculer 2 + 3 , il faudra appuyer sur les touches suivantes:

- en notation algébrique:

  $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

  et le résultat s'inscrira sur l'écran ou la bande de papier.

- en notation polonaise inversée :

  $\boxed{2}\ \boxed{\text{ENTER}}\ \boxed{3}\ \boxed{+}$

  et on obtient le résultat.

- en notation algébrique spéciale (ex: DIEHL) :

  $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{\star}$

- si le calcul se fait dans les mémoires (ex: P 101 Olivetti) l'écriture devient plus complexe:

  $\boxed{2}\ \boxed{\downarrow}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{A}\boxed{\diamond}$

  dans le cas le plus simple.

Il faut aussi remarquer que la spécificité des notations ne s'arrête pas à la présentation des calculs simples comme celui-ci. Chaque notation s'accompagne d'avantages et d'inconvénients plus profonds et, là encore, tout dépend de l'utilisation que l'on compte faire de la machine.

Par exemple, la notation algébrique, simple et proche du calcul "à la main" dans les cas simples, nécessite l'emploi de parenthèses dès que plusieurs opérations sont à effectuer. Le nombre de niveaux de parenthèses est toujours limité (une dizaine au mieux). D'autre part, le calcul en chaîne n'est pas toujours possible (surtout dans le bas de gamme). Enfin notons que toutes les machines à bas prix (4 opérations) procèdent par notation algébrique.

A l'opposé, la notation polonaise inversée, peu naturelle au départ, prend tout son intérêt à l'occasion de problèmes complexes, en particulier quand il y a programmation. Mais cette notation n'existe que sur des machines dites "scientifiques" relativement élaborées et ne se situant pas dans la première gamme de prix.

Les systèmes plus particuliers que l'on retrouve à peu près exclusivement sur les machines de bureau de conception plus ancienne sont dictés par certaines considérations techniques (possibilité d'affecter une constante commune à plusieurs opérations pour limiter l'encombrement en mémoire des programmes, en particulier).

En guise de conclusion, remarquons cependant que méthode de calcul simple (c'est-à-dire proche du calcul à la main) n'est pas nécessairement synonyme de méthode de calcul formatrice (en particulier pour des élèves jeunes), des méthodes apparemment plus complexes et moins pratiques pouvant parfois mieux mettre en évidence le "fonctionnement" réel des opérations élémentaires (l'exemple type est celui des CURTA) avec une valeur pédagogique certaine.

ETRE OU NE PAS ETRE (PROGRAMMABLE) ?

La programmation est utile pratiquement à tous les niveaux du second degré. Elle n'est certes pas indispensable, mais c'est grâce à elle seule que peuvent s'ouvrir certains problèmes.

Ses avantages immédiats, amplement développés dans les autres chapitres de ces ouvrages, sont de permettre en classe

- de faire la synthèse de méthodes de calcul
- d'éviter les calculs répétitifs sans intérêt qui gaspillent du temps sans rien apporter à la compréhension du cours
- d'utiliser des exemples non triviaux, inaccessibles sans outils de calcul puissants ...

Il ne s'agit pas, bien sûr, d'utiliser la machine comme un jouet ou un gadget: l'élève de Terminale qui branche sa calculatrice de poche pour déterminer $\sqrt{625}$ fait évidemment une mauvaise affaire, celui qui écrit un programme permettant le calcul des coordonnées des points d'une courbe, en vue de son tracé, substitue à un calcul mécanique lassant un raisonnement intéressant.

Les différents critères de choix concernant la programmation forment un tout qui caractérise la capacité de la machine à résoudre des problèmes plus ou moins complexes. Les critères principaux sont les suivants:

- nombre de pas de programme
- nombre de mémoires utilisables en calcul programmé (certaines machines,

parmi les plus anciennes, possèdent des mémoires mixtes enregistrant soit des constantes, soit des instructions, mais pas les deux simultanément)
- type de sauts (inconditionnels, nombre de tests, existence de "flags", etc...)
- existence de "sous-programmes" (GOSUB et RETURN, ...)
- mode d'introduction des variables (direct ou uniquement dans des mémoires)
- mode d'affichage des résultats (dans le cas des machines sans imprimante: par touche R/S (arrêt - départ) ou possibilité de "pause" (arrêt temporaire permettant la lecture) programmable directement)
- etc...

Insistons encore sur le fait que la programmation forme un tout, où toutes les caractéristiques sont liées: par exemple, les 100 pas de programme et les 10 mémoires d'un Combitron DIELH permettent moins de possibilités que les 50 pas et les 8 mémoires d'une HP 25, en raison des autres possibilités de chacune des deux machines !

LA CONSERVATION DES RESULTATS ET DES PROGRAMMES

Le défaut majeur des calculatrices programmables de poche est de ne laisser aucune trace écrite ou enregistrée (réexploitable) des programmes effectués ou des résultats obtenus.

Le souvenir écrit des calculs ne s'obtient qu'à l'aide de machines pourvues (d'origine ou non) d'imprimantes (calculatrices programmables ou non): on trouve là l'ensemble des machines de bureau et, depuis peu, quelques dérivées des "mini" de haut de gamme (HP 97). Un constructeur propose également une imprimante utilisable sur diverses machines de sa gamme (Texas Instrument).

Les imprimantes permettent aussi en général, d'obtenir, sous forme plus ou moins codée, un "listing" du programme effectué qui remplace ou complète la feuille de programmation manuscrite.

La manière la plus sophistiquée et la plus efficace de conserver un programme consiste à l'enregistrer sur carte magnétique (ou sur bande perforée dans les machines plus anciennes). Les avantages de cette méthode sont nombreux et importants: constitution dans la classe ou l'école d'une bibliothèque commune de programmes, possibilité d'exploitation en plusieurs séances (surtout si le programme est long à taper au clavier), possibilité pour le maître d'utiliser des programmes sans en expliciter la construction devant les élèves (l'ordinateur, mini ou non, est, en effet, avant tout un outil ...) .

Notons que quelques machines permettent en outre la conservation sur carte ou fiche magnétique des données et des résultats.

Remarquons enfin que, grâce à la technologie des circuits C.MOS, certaines machines, une fois mises hors circuit, conservent en stock le dernier programme effectué (pendant 10 à 15 jours) et ce, sans carte magnétique (HP 25C).

DEUX MOTS SUR LA "QUINCAILLERIE" (HARDWARE) ...

Une calculatrice de poche est composée d'un clavier, de 1 à 3 circuits intégrés, d'un affichage et d'une source de tension.

Le clavier doit être à la fois souple et franc ("clavier à déclic") afin d'éviter de frapper une touche par mégarde et d'éviter les rebonds des touches (frappe de 33 au lieu de 3).

Si l'électronique est sérieusement testée chez les "grands" constructeurs et pour les machines de haut de gamme, il n'en est pas toujours de même pour certaines sous-marques et pour les machines bon marché; donc bien se renseigner avant un achat, surtout s'il est collectif !

Technologiquement, l'affichage peut être de deux types: à diodes électroluminescentes (LED's) ou à cristaux liquides. Le premier se présente en rouge ou en vert, consomme plus de courant mais est visible dans n'importe quelle condition d'éclairage. Le second, dont la consommation est quasi-nulle, n'est visible que bien éclairé. Par ailleurs, le choix ne se pose que pour les calculatrices peu élaborées, celles de milieu et de haut de gamme étant toutes pourvues d'un affichage à LED.

Le mode d'introduction des nombres sur l'écran mérite aussi quelque attention:

en effet, suivant le type de machine, pour introduire par exemple 3,14 on frappe successivement les touches

$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{4}$

et sur l'écran s'affichent :

soit:	soit:
3	3
3.	3.
3.1	3.1
3.14	3.14

Il y a donc là encore un choix à faire, en remarquant toutefois que la première méthode est quasi-généralisée dans le haut de gamme et la seconde dans le bas.

Trois types de sources d'énergie sont généralisées: les piles, les accumulateurs cadmium-nickel et le secteur. La solution la plus économique à l'usage est aussi la plus onéreuse à l'achat: c'est celle qui consiste à avoir des accumulateurs cadmium-nickel qu'on recharge par l'intermédiaire d'un bloc adaptateur sur le secteur. La machine peut alors fonctionner soit en fixe (branchée sur une prise de courant) soit en portable (ce qui évite les fils qui traînent dans une salle de classe !) sur ses accus.

Toutes les machines peuvent être utilisées ainsi, mais pour les moins chères l'achat des batteries et du chargeur peut en augmenter le coût initial de près de 80%. Notons que les affichages à cristaux liquides permettent une utilisation sur piles économique (c'est en effet l'affichage qui représente 90% de la consommation d'énergie quand il est à LED's).

Les imprimantes des mini-calculatrices sont toutes du même type, à impression électrique silencieuse, et ne nécessitant que peu d'entretien. Il faut quand même mettre en garde: le papier spécial utilisé est cher.

EN CONCLUSION ...

Avant de passer à l'achat d'une calculatrice, ou a fortiori d'un parc de calculatrices, il convient de définir précisément l'utilisation qui en sera faite; quand de plus auront été données les limites de prix possible, on s'apercevra que le choix, qui semblait vaste au départ, se sera singulièrement réduit et posera moins de problèmes que prévu !

A ce sujet, une remarque sur un type d'achat pas toujours usité: dans les exemples donnés ci-dessus, certains font intervenir des machines qui ne sont plus vendues dans le commerce depuis quelques années (P 101 Olivetti, Combitron Dielh, ...) mais qui, vu leur robustesse, sont encore aptes à rendre de grands services et pour lesquelles existe un marché de l'occasion relativement important où les prix sont très compétitifs.

ET L'AVENIR ?

Au vu de l'orientation actuelle, il semble que l'avenir soit au microprocesseur, à la fois machine informatique très complexe et composant électronique hyper-miniaturisé. Déjà, grâce à cet élément, tout un chacun, sachant faire une soudure et utiliser un oscilloscope, peut, pour le prix d'une petite voiture, réaliser à domicile un système informatique complet, programmable en langage évolué, avec affichage sur la télévision familiale et enregistrement des programmes et des données sur n'importe quelle mini-cassette. En la matière, l'avenir est plein d'espoirs ...

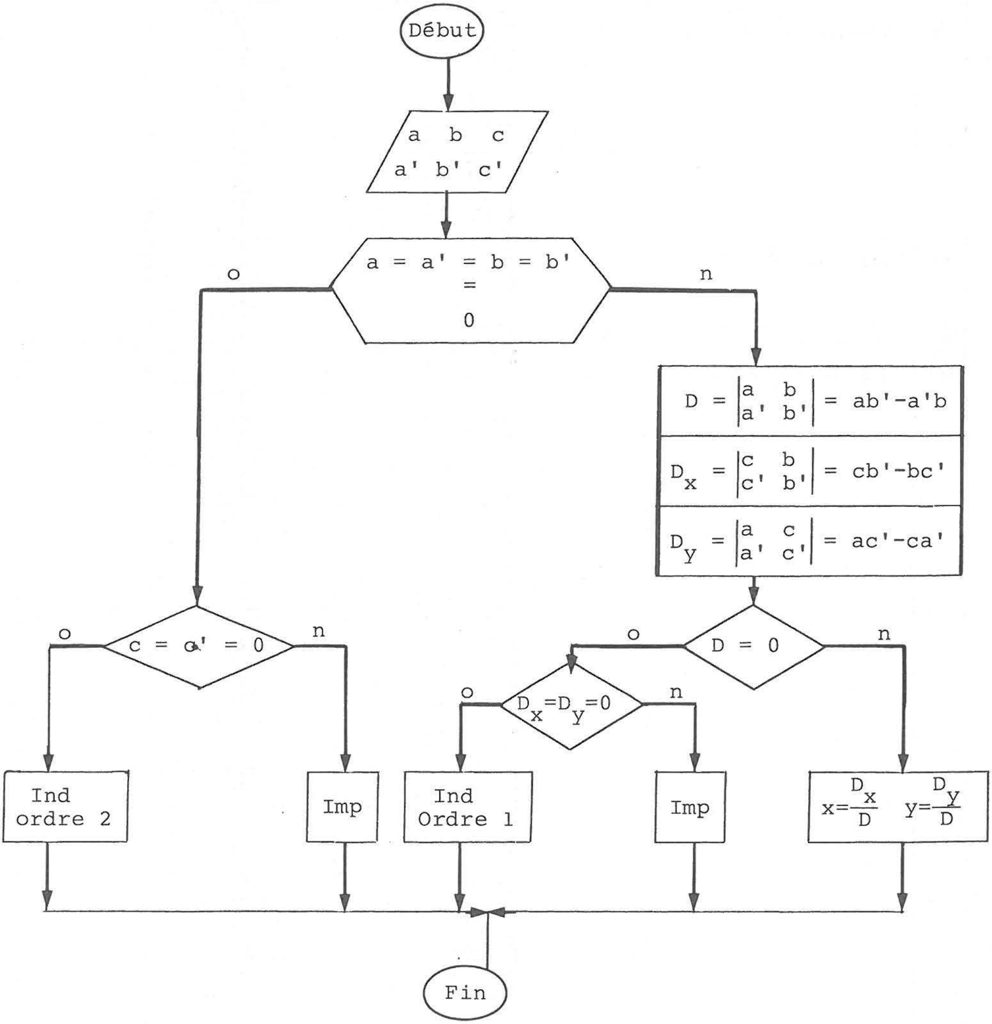
ANNEXE : EXEMPLE D'UTILISATION

On suppose connue la théorie des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues et on cherche à l'illustrer sur une calculatrice programmable.

Document 1 : Ordinogramme de résolution
Document 2 : Résolution sur HP 25
Document 3 : Résolution sur SR 56
Document 4 : Résolution sur Combitron DIELH.

DOCUMENT 1

Système d'équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$



DOCUMENT 2

MODE OPÉRATOIRE DU HP-25

Titre Résolution de $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ Page

N°	INSTRUCTIONS	DONNÉES	TOUCHES				RÉSULTATS
1	Introduire le programme		PRGM				
2	Initialiser		RUN	F	PRGM		
3	Stocker les données	a	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
		a'	STO	4			
		b'	STO	5			
		c'	STO	6			
4	Calcul si $D \neq 0$		R/S				x STO en 3
			R/S				y STO en 7
4a	Calcul si $D = D_x = D_y = 0$		R/S				9. (Ind.)
4b	Calcul si $D = 0$; D_x ou $D_y \neq 0$		R/S				0. (Imp.)

FEUILLE DE PROGRAMMATION POUR LE HP-25

Titre ______ Page ______

Appuyez sur BST en mode RUN, passez en mode PRGM, puis introduisez votre programme

AFFICHAGE PAS	CODE	TOUCHES	X	Y	Z	T	COMMENTAIRES
00							
01	f	FIX…					Choix des décimales
02		RCL 1					
03		RCL 6					
04		×					
05		RCL 3					
06		RCL 4					
07		×					
08		−					
09		STO 7					Calcul de D_y
10		RCL 3					
11		RCL 5					
12		×					
13		RCL 2					
14		RCL 6					
15		×					
16		−					
17		STO 3					Calcul de D_x
18		RCL 1					
19		RCL 5					
20		×					
21		RCL 2					
22		RCL 4					
23		×					
24		−					
25		STO 0					Calcul de D
26	g	$x=0$					Test sur D
27		GTO 35					
28		STO ÷ 3					Calcul de x
29		STO ÷ 7					Calcul de y
30		RCL 3					Affichage de x
31		R/S					
32		RCL 7					Affichage de y
33		GTO 00					
34		R/S					
35		RCL 3					
36	g	$x=0$					Test sur D_x
37		GTO 42					
38		0					
39	f	FIX 0					0. (Impossibilité)
40		GTO 00					
41		R/S					
42		RCL 7					
43	g	$x\neq 0$					Test sur D_y
44		GTO 38					
45		9					
46	f	FIX 0					9. (Indétermination)
47							
48							
49							

REGISTRES	
R_0	D
R_1	a
R_2	b
R_3	c / D_x / x
R_4	a'
R_5	b'
R_6	c'
R_7	D_y / y

TITLE Résolution de $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ PAGE ____ OF ____

PROGRAMMER ____ DATE ____

SR-56 User Instructions

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS				DISPLAY
1	Introduire le programme		LRN				
2	Initialiser		LRN	RST			
3	Introduire	a	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
		a'	STO	4			
		b'	STO	5			
		c'	STO	6			
4	Calcul si $D \neq 0$		R/S				x (STO 8)
			R/S				y (STO 7)
4a	Calcul si $D = D_x = D_y = 0$		R/S				9. (Ind)
4b	Calcul si $D = 0$; D_x ou $D_y \neq 0$		R/S				0. (Imp.)

DOCUMENT 3

TITLE ______ PAGE ____ OF ____

PROGRAMMER ______ DATE ______

SR-56 Coding Form

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	2nd	FIX	
01		....	nbre. de décimales
02		(	
03		RCL	
04		1	
05		x	
06		RCL	
07		6	
08		-	
09		RCL	
10		3	
11		x	
12		RCL	
13		4	
14		)	
15		STO	
16		7	Calcul de Dy
17		(	
18		RCL	
19		3	
20		x	
21		RCL	
22		5	
23		−	
24		RCL	

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
25		2	
26		x	
27		RCL	
28		6	
29		)	
30		STO	
31		8	Calcul de Dx
32		(	
33		RCL	
34		1	
35		x	
36		RCL	
37		5	
38		−	
39		RCL	
40		2	
41		x	
42		RCL	
43		4	
44		)	
45		STO	
46		9	Calcul de D
47	2nd	x=t	Test sur D
48		6	
49		3	

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
50		INV	
51	2nd	PROD	
52		8	Calcul de x
53		INV	
54	2nd	PROD	
55		7	Calcul de y
56		RCL	
57		8	Affichage de x
58		R/S	
59		RCL	
60		7	Affichage de y
61		R/S	
62		RST	
63		RCL	
64		8	
65	2nd	x=t	Test sur Dx
66		7	
67		3	
68		0	
69	2nd	FIX	
70		0	0. (Imp)
71		R/S	
72		RST	
73		RCL	
74		7	

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
75		INV	
76	2nd	x=t	Test sur Dy
77		7	
78		0	
79		9	
80	2nd	FIX	
81		0	9. (Ind)
82		R/S	
83		RST	
84			
85			
86			
87			
88			
89			
90			
91			
92			
93			
94			
95			
96			
97			
98			
99			

REGISTERS	
0	
1	a
2	b
3	c
4	a'
5	b'
6	c'
7	Dy y
8	Dx x
9	D

NOTES

-267-

DOCUMENT 4

Problème
résolution de $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Numéro de classement
A. 13

Répartition des Programmes et des Constantes

P = Programme ⊻ = Constante

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	P	P	P	P	P	P	P		

Programmation

N = Nombres F = Fonction

	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F	N	F
		P		P		P		P		P		P		P		P				
		0		1		2		3		4		5		6		7				
1	a		a'			×	c			#		⊼		⊼		J				
2		#		#		⊼		#		⊻		8		7		0				
3		⊻		⊻		7		⊻		8		×		=						
4		9		7		S̲		6		=		⊼		−						
5		×	b'			◊S		=		−		9		*						
6	b			#		:		+		*		=		:						
7		#		⊻		=		⊼		:		+		*S						
8		+		6		⊼		8		◊S		⊼		=						
9		⊻		S		6		×		=		6		#						
10		8		*		×	c'			#		×								
11		A		A		A		A		A		A		A						
12																				

Si D = 0 il y a impression de F et on repart en tapant : 1, = JO

Nota : il n'y a pas distinction automatique du cas "impossible" et du cas "indeterminé".

(II) - COMMISSION "INFORMATIQUE et MATHEMATIQUE"

Cette commission est créée au sein de l'A.P.M.E.P. .

Ces objectifs sont les suivants:

1. *Tenir à jour un fichier sur les calculatrices*
   a) de poche, entre 0 et 5 000 Francs.
   Responsables: MANDRILLE et FACIOT à l'IREM de REIMS.
   b) mini-ordinateurs, entre 5 000 et 100 000 Francs.
   Responsables: J. MARTINIE ou J. Cl. ORIOL à l'IREM de GRENOBLE.

   Ce fichier, tenu à jour grâce aux informations centralisées à REIMS et GRENOBLE, sera systématiquement envoyé, aux "correspondants de la commission" et, sur demande, aux adhérents A.P.M.E.P. Il pourra être publié annuellement dans le bulletin.

2. *Diffuser aux adhérents A.P.M.E.P. les informations suivantes:*
   a) Liste des documents disponibles sur le sujet dans les IREM, CRDP, régionales ou autres organismes.
   b) Liste des équipes de recherche, et titre de la recherche, par académie.
   c) Recensement des établissements utilisant des matériels pour l'enseignement avec indication de ce matériel.

   Le recueil continu de ces informations est effectué par un correspondant de la commission par régionale.

Organisation du travail

. Il est essentiellement fait par correspondance entre les membres de la commission.
Une réunion annuelle est prévue lors de chaque congrès de l'A.P.M.E.P., une autre ayant lieu à l'occasion, par exemple, d'une réunion INTER-IREM sur l'informatique.

. Les correspondants tiennent à jour l'ensemble des informations recueillies. Leur adresse figure dans le Bulletin afin que chaque adhérent puisse obtenir auprès de lui les documents désirés.
Ils reçoivent les informations des autres régionales à partir de PARIS.

En effet: ces renseignements sont centralisés à PARIS par A. DELEDICQ et R. HEBENSTREIT, responsables de la commission pour 1977.
Un extrait significatif sera publié annuellement dans le Bulletin.

. La liste des correspondants des régionales représentées ce jour figure dans le Bulletin A.P.M.E.P. N° 307, page 176.
Les régionales non représentées sont invitées à nommer un correspondant et à en informer A. DELEDICQ.

. R. HEBENSTREIT est chargée de la liaison avec la COPREM.

III - INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

- Stern - Lepetit - Chabanas: "Initiation pratique à l'informatique". Dunod.
- J.P. Boyer, "Cours élémentaire d'Informatique". Editions Radio.
- Font et Quiniou, "Les ordinateurs - Mythes et Réalités". N.R.F. (Collection Idées)
- Bestougeff - Guilpin - Jacques, "La technique informatique" . Masson.
  Tome I : Principes généraux et programmation
  Tome II : Algorithmes numériques et non numériques
- Charet, "Cours d'Analyse Numérique". Sedes - Informatique.
- Arsac, "Les systèmes de conduite des ordinateurs". Dunod.
- Meinadier, "Structure et fonctionnement des ordinateurs". Larousse.
- Trathenbrot, "Algorithmes et machines à calculer". Monographie Dunod.
- Recherches pédagogiques (INRDP)
  Numéro 54
  Numéro 75 - Calculateurs programmables dans les Collèges et les Lycées.
- Les I.R.E.M., l'I.N.R.P. et d'autres organismes (C.N.D.P., C.R.D.P., Ecoles Normales, Universités, O.C.D.E., ...) ont édité diverses brochures et films exploitables sur le plan pédagogique. Se renseigner auprès de chacun d'eux pour les conditions d'envois, de prêts ou de ventes.

IV - A MATERIEL EXISTANT DANS LES I.R.E.M.

1° - Calculatrices de poche non programmables

2° - Calculatrices de poche programmables

3° - Calculatrices de bureau programmables - Mini-ordinateurs.

IREM d'AMIENS

1° - 2 HP 35
1 HP 45
1 SR 50

2° - 10 SR 52

IREM de BESANCON

1° - 10 calculatrices IME
10 calculatrices TI 4 000

2° - 4 HP 25
4 HP 65

3° - HP 10 (+ table traçante)
WANG 2 200
Imprimante BASIC

IREM de BORDEAUX

1° - 1 commodore scientifique

2° - 5 HP 25

3° - 1 Combitron S DIELH
1 MONROE 1 265 WI
1 MONROE 1 665 WI
1 MONROE 1 880
4 K octets (+ table traçante)

IREM de BREST

2° - 2 HP 65
5 HP 25

3° - 1 HP 20 + table traçante

IREM de CAEN

1° - 120

2° - 4

IREM de CLERMONT

1° - 12 T.I. 1270

3° - 6 combitrons DIEHL + 1 Dilector
1 alphatronic
1 HP 9810 A + table traçante
+ 1 lecteur
1 HP 9821 A
1 Programma 102

IREM de DIJON

1° - 10

2° - 36 HP 25

3° - Hewlett Packard, Modèle 15 (HP 9815A)
+ table traçante (9862)

IREM de GRENOBLE

1° - 20

2° - 1 HP 65

3° - 1 HP 10 + table traçante
1 WANG 2200 + imprimante traçante

IREM de LILLE

1° - 40 TI 2550
10 HP 21
4 SR 50

2° - 2 SR 52 dont 1 avec imprimante
1 HP 97

3° - 2 Olivetti P 101
1 P 602
1 P 652 avec un clavier
Editor 4 + table traçante.
1 MONROE 1880 + lecteur cartes graphitées
1 micro ordinateur Alcyane MBC
1 micro ordinateur PICODIDAC

IREM de LYON

1° - 276 Curta
12 Colos
6 HP 35

2° - 1 HP 65

3° - 1 HP 10
1 HP 20
1 HP 30
+ table traçante
2 Olivetti P 101

IREM de MARSEILLE

1° - 20 Rockwell (model 63 R)
1 Texas Intr. SR 10
1 Texas Intr. SR 11
1 Texas Intr. SR 50

2° - 14 HP 25

3° - 1 WANG 2000
2 HP 9820 A + table traçante
1 Motorola 6800

IREM de NICE

1° - 16 TI 1250
8 DATAMATH II

3° - 1 HP 9820 + table traçante
1 SOBAX 2700

IREM de NANCY

1° - 16 ANIMEX

2° - 1 HP 25

3° - 2 HP 10 + table traçante

IREM de NANTES

2° - 5 HP 65
25 HP 25
2 HP 97

3° - 1 WANG 2000 S (Basic)
1 P 6060 Olivetti (Fortran, Basic)
1 IBM 5100 (APL Basic)

IREM de PARIS

1° - 17 HP 45

2° - 37 HP 25
2 HP 65

3° - 1 WANG 2000 + table traçante
3 HP 20 + table traçante

IREM de POITIERS

1° - 2 HP 46
15 HP 21
30 TI 30

3° - 3 P 101 Toshiba
4 HP 10
1 HP 20
1 HP 30 (Basic)
2 traceurs de courbes
1 imprimante
1 terminale TEK 4005-1

IREM de REIMS

2° - 1 HP 25
1 Texas SR 52

3° - 1 IBM 1130 + table traçante BENSON

IREM de RENNES

1° - 4 HP 35
1 HP 45
10 Olympia
20 Prinztronic

2° - 1 HP 65
19 HP 25

3° - 1 HP 97
1 HP 9810 + table traçante
3 P 101

IREM de STRASBOURG

1° - Calculatrices mécaniques CURTA

2° - 5 HP 25 C
1 HP 65

3° - 1 HP 97

IREM de TOULOUSE

1° - 14 HP 35

2° - 12 HP 25
10 HP 65

3° - 2 HP 9820 + table traçante

IV - B LYCEES EQUIPES D'ORDINATEURS

Les Lycées dont les noms suivent sont équipés d'ordinateurs de Type MITRA 15 de la C.I.I. (noté M) ou T 1600 de la TELEMECANIQUE (noté T). L'année de l'équipement est également mentionnée.

Académie d'AIX-MARSEILLE

Lycée Vauvenargues
60, Boulevard Carnot
13100 AIX EN PROVENCE 74/M

Lycée Technique
Avenue Adam de Crapone
13300 SALON DE PROVENCE 73/T

Académie d'AMIENS

Lycée Polyvalent de Creil
7, rue de Gournay
60100 CREIL 73/M

Lycée Pierre d'Ailly
18, rue d'Ulm
60200 COMPIEGNE 75/M

Académie de BESANCON

Lycée de Belfort
Avenue F. Roosevelt
90000 BELFORT 75/M

Académie de CLERMONT-FERRAND

Lycée Banville
39, rue de Paris
03000 MOULINS 75/M

Académie de CRETEIL

Lycée de Thiais
Rue du Pave de Grignon
94320 THIAIS 73/T

Académie de DIJON

Lycée nationalisé du Creusot
72, rue Jean Jaurès
71200 LE CREUSOT 74/T

Académie de GRENOBLE

Lycée des Eaux Claires
Rue de Dunkerque
38100 GRENOBLE 72/T

Lycée Technique Jean Bart
Rue Léon Jouhaux
38000 GRENOBLE 75/T

Lycée Nationalisé Edouard Herriot
Boulevard Edouard Herriot
38500 VOIRON 73/T

Lycée Jean Jacques Rousseau
26, Boulevard des Bains
74200 THONON LES BAINS 74/T

Académie de MONTPELLIER

Lycée Joffre
Allée de la Citadelle
34000 MONTPELLIER 74/T

Académie de NANCY-METZ

Lycée Jacques Callot
Rue Jacques Callot
54500 VANDOEUVRE LES NANCY 72/M

Lycée Frédéric Chopin
41, rue du Sergent Blondeau
54000 NANCY 74/T

Cité scolaire mixte Ernest Bichat
Case officielle 162
Avenue du Docteur Paul Kahn
54031 LUNEVILLE 74/M

Lycée technique nationalisé
9, Place du Roi George
57000 METZ 73/T

Lycée d'Etat Charlemagne
15, avenue G. Clemenceau
57100 THIONVILLE 74/M

Lycée Jean Zay
Rue de la Tuilerie
54800 JARNY 75/T

Lycée Technique Margueritte
61, rue Saint Sauveur
55100 VERDUN 75/M

Académie de NICE

Lycée Dumont d'Urville
Avenue de Lattre de Tassigny
83100 TOULON 73/T

Lycée A. Calmette
5, avenue du Maréchal Foch
06000 NICE 75/M

Académie d'ORLEANS

Lycée Nationalisé Rabelais
Quai Danton
37500 CHINON 75/M

Académie de PARIS

Lycée Fénelon
2, rue de l'Eperon
75006 PARIS 74/T

Lycée Jacques Decour
12, avenue Trudaine
75009 PARIS 74/M

Lycée Gabriel Fauré
81, avenue de Choisy
75013 PARIS 73/T

Lycée Victor Duruy
33, Boulevard des Invalides
75007 PARIS 75/T

Lycée Honoré de Balzac
2, avenue de la Porte de Clichy
75017 PARIS 75/T

Lycée Claude Bernard
1, avenue du Parc des Princes
75016 PARIS 75/M

Lycée Technique Diderot
60, Boulevard de la Vilette
75019 PARIS 73/T

Lycée Bergson
27, rue Edouard Pailleron
75019 PARIS

Lycée Maurice Ravel
89, Cours de Vincennes
75020 PARIS 73/T

Académie de POITIERS

Lycée Technique Nationalisé
Bernard Palissy
Rue de Gascogne
17100 SAINTES 75/M

Académie de RENNES

Lycée Bréquigny
Avenue de Bréquigny
35000 RENNES 74/T

Lycée Technique du Vau Méno
Rue Mansart
22000 SAINT BRIEUC 75/T

Lycée de Saint Marc
Place de Strasbourg
29200 BREST 74/M

Lycée Alain Lesage
20, rue W. Churchill
56000 VANNES 75/T

Lycée Polyvalent de Cornouailles
8, avenue des Oiseaux
29000 QUIMPER 75/M

Académie de ROUEN

Lycée des Fontenelles
BP 168
27400 LOUVIERS 75/M

Académie de STRASBOURG

Lycée Fustel de Coulanges
1, Place du Château
67000 STRASBOURG 74/M

Académie de TOULOUSE

Lycée Raymond Naves
139, route d'Albi
31200 TOULOUSE 72/T

Lycée Saint Sernin
Place Saint Sernin
31000 TOULOUSE 74/T

Lycée Rive gauche
Chemin de Fourton
31000 TOULOUSE 74/M

Lycée Technique
Route de Pamiers
31600 MURET 73/M

Lycée Nationalisé
La Borde Basse
81100 CASTRES 74/T

Lycée Technique d'Albi
10, rue de la République
81000 ALBI 75/T

Lycée Technique de Montauban
Cité scolaire
Boulevard Edouard Herriot
82000 MONTAUBAN 75/T

Lycée de Foix
5, rue du Lieutenant P. Delpech
09000 FOIX 75/T

Académie de VERSAILLES

Lycée Hoche
73, avenue de Saint Cloud
78000 VERSAILLES 74/T

Lycée Corneille
Avenue Pierre Corneille
78170 LA CELLE SAINT CLOUD 72/M

Lycée International
Château d'Hennemont
Rue du Fer à Cheval
78100 SAINT GERMAIN EN LAYE 74/T

Lycée Technique
Parc Vilgénis
74, rue de Versailles
91300 MASSY 74/M

Lycée Corot
Place Davout
91600 SAVIGNY SUR ORGE 74/M

Lycée d'Etat Mounier
35, rue des Prés Hauts
92290 CHATENAY MALABRY 73/M

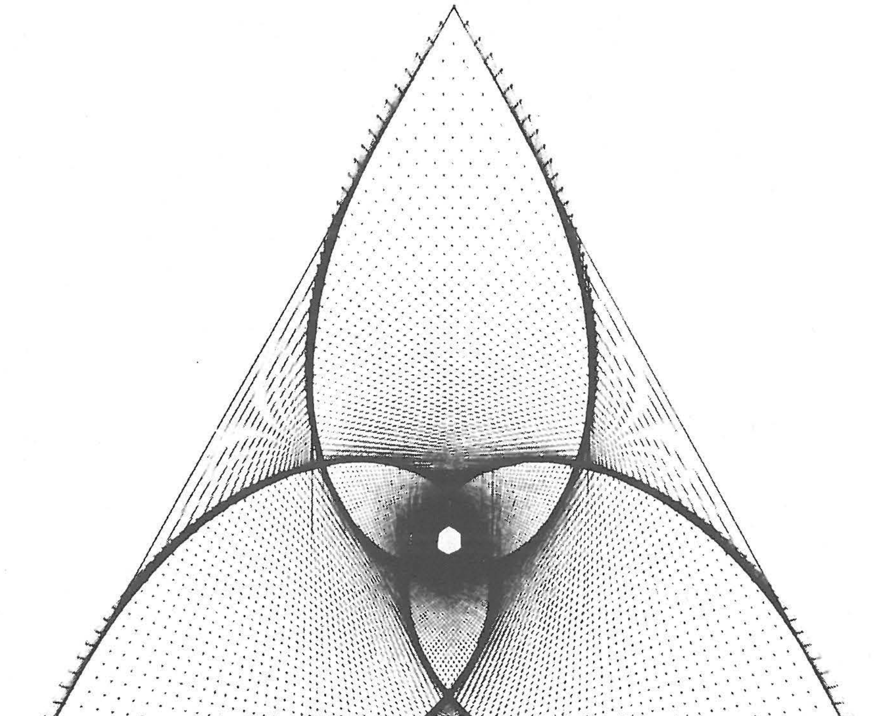
Lycée de Garches
104, boulevard R. Poincarré
92380 GARCHES 74/M

Lycée d'Etat
101, Route de l'Empereur
92500 RUEIL MALMAISON 74/T

Lycée Pilote
1, rue Léon Journault
93310 SEVRES 74/M

Lycée de Rambouillet
3 bis avenue du Général Leclerc
78120 RAMBOUILLET 75/T

(V) - LISTE DES THEMES ET/OU SITUATIONS MATHEMATIQUES CITES DANS CETTE BROCHURE



Imprimerie Vaudrey - LYON