I.R.E.M. DE TOULOUSE

S A V O I R M I N I M U M

A LA RECHERCHE DU

NOYAU

DES

PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES

DU

PREMIER CYCLE

E N F I N D E T R O I S I E M E

A.P.M.E.P.

AVERTISSEMENT

L'ESSENTIEL DU TRAVAIL TECHNIQUE A ETE REALISE PAR L'I.R.E.M. DE TOULOUSE, MAIS CETTE BROCHURE N'AURAIT PAS PRIS NAISSANCE SANS LA PARTICIPATION DES I.R.E.M. DE DIJON, GRENOBLE, LIMOGES, LYON, MONTPELLIER, NICE, PARIS, POITIERS ET STRASBOURG.

SOMMAIRE

UN TITRE...
UNE BROCHURE...

Certains collègues se sont émus du titre "Savoir Minimum", lui assignant une signification qui n'était pas dans nos intentions.

Dans notre esprit, ce titre est synonyme de "Tentative contre la surcharge des programmes de mathématiques du Premier Cycle", de "Limitation des exigences dans le Premier Cycle", de "Coup d'arrêt contre l'inflation du vocabulaire et des programmes dans ce même cycle", ..., de "Notions fondamentales nécessaires à une activité et un développement MAXIMUM des élèves".

Afin d'éviter toute polémique, nous vous prions de ne pas lui attacher d'autre objectif.

Souhaitez-vous établir un lien entre les utilisateurs, ou lecteurs, de cette brochure ?

Si oui, écrivez-nous à l'adresse ci-dessous.

Si vos envois de remarques, critiques, améliorations ... sont nombreux, nous éditerons une petite plaquette que recevront tous les enseignants qui auront complété L'ETIQUETTE que vous trouverez page 205 et qui l'enverront à :

Equipe SM 3^e
I.R.E.M. de TOULOUSE
118, route de Narbonne
31400 TOULOUSE

EN GUISE D'INTRODUCTION

I – Pourquoi cette brochure ?

L'enseignement des mathématiques en France se trouve actuellement aux prises avec des problèmes dus à une longue tradition et à une inflation galopante et anarchique du vocabulaire.

Dans ces conditions, une réflexion appronfondie sur les aptitudes que cherche à développer notre enseignement paraît indispensable. Nous l'avons commencée : elle est à la base de notre conception des programmes dite "Noyau-Thèmes".

Mais il nous a paru que, jusqu'à présent, trop de professeurs avaient tendance à se croire obligés de traiter en classe la réunion des programmes, des commentaires, des manuels, des annales ... Aussi, *pour une action plus immédiate*, nous avons essayé de dégager un savoir minimum (pour l'ensemble du premier cycle par exemple, ultérieurement en fin de sixième-cinquième, etc...) qui serait plutôt une intersection. Il est difficile d'inverser la tendance ; c'est pourtant, à notre avis, une nécessité.

II – Pour qui cette brochure ?

- Elle s'adresse aux enseignants, en particulier :

— aux professeurs isolés pour les informer,
— aux professeurs peu informés pour les rassurer,
— aux professeurs très rassurés pour leur faire sentir la "relative vérité" de ce qui paraît essentiel.

- Elle n'est pas un livre de classe, donc elle n'est aucunement destinée aux élèves.

III – Comment a-t-elle été réalisée ?

Il s'agit d'une *oeuvre collective*, réalisée par l'A.P.M.E.P. et les I.R.E.M. intéressés. Le travail en équipes, entre autres vertus, force chacun à prendre conscience que d'autres ne s'expriment pas comme lui, n'ont pas les mêmes exigences et les mêmes objectifs que lui. Confrontation éprouvante pour notre naïveté un tantinet prétentieuse, mais salutaire pour nous et pour nos élèves.

Nous nous sommes placés dans le *cadre des programmes actuels du premier cycle.* Cela ne signifie pas que nous les approuvions.

Il nous semble utile de rappeler à nos collègues que les Commentaires officiels n'ont pas valeur de programme, et que les mots, les notions et exercices y figurant ne sont pas obligatoires.

En revanche, nous avons tenu compte de la circulaire du 19 février 1973 et de l'interprétation qui en a été donnée dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 295, p. 736 (''La circulaire du 19-2-1973, connais pas ! '').

Le B.E.P.C. est une réalité ; beaucoup d'entre nous souhaitent sa suppression. Quoi qu'il en soit, nous pensons qu'il faut adapter cet examen, tant qu'il subsistera, à l'enseignement dans les classes, et non l'inverse.

Nous n'avons pas voulu limiter la **liberté de chaque maître en matière de progression et de vocabulaire.** Eventuellement nous nous sommes mis d'accord pour émettre des réserves sur tels ou tels mots et notions des programmes, et nous l'avons dit.

Cette brochure est un outil de travail qui pourra être adapté et amélioré par votre contribution.

$\boxed{\text{Ce n'est pas le Journal Officiel ...}}$

En fait, dans notre esprit, ce travail n'est qu'une étape vers "les noyaux-thèmes" réclamés, et peu à peu élaborés, par l'A.P.M.E.P.

Il s'inscrit dans une réflexion et une recherche plus vaste, mais il peut être utilisé quels que soient les choix pédagogiques, la progression mathématique, les manuels utilisés.

IV — Une centaine de professeurs ont effectivement travaillé à la réalisation de cette brochure. Mais elle n'aurait pas vu le jour sans le dévouement et la détermination d'une équipe qui est très désireuse de recevoir vos remarques, suggestions, améliorations à l'adresse suivante :

Equipe Savoir Minimum en fin de Troisième
Claude LASSAVE
I.R.E.M. de Toulouse
118, route de Narbonne — 31400 TOULOUSE

Présentation de la brochure

• Elle se présente sous la forme de rubriques plus ou moins fournies.

• Chaque rubrique porte le nom d'un thème auquel elle se rapporte, et précise :

1°) *les mots ou expressions*

et 2°) *les notations*,

qui doivent être familiers à l'élève et pouvoir être illustrés par un ou plusieurs exemples et contre-exemples de sa fabrication, même s'il n'est pas capable d'en donner une définition mathématique formellement irréprochable.

> *Par exemple :* le professeur dit : "solution d'une équation" ; l'élève doit être capable d'évoquer une phrase du type : "$2x - 4 = 2$ n'est pas toujours vraie dans **N**, elle l'est en remplaçant x par 3 : 3 est une solution de l'équation, dans **N**, $2x - 4 = 2$.
> 2 n'est pas une solution de cette même équation".

Remarque relative aux notations. Tout symbole n'est qu'affaire de conventions *à un moment donné.* Les notations évoluent ...

3°) *les énoncés* que l'élève doit connaître et savoir utiliser. A leur sujet, nous n'avons pas précisé leur nature : axiome, définition, théorème, qui dépend de la progression choisie par le professeur.

IMPORTANT

> Il paraît essentiel, d'autre part, que l'élève soit apte à *illustrer* tel théorème ou telle définition ou tel axiome par un dessin, un exemple et éventuellement un contre-exemple,...
> Chaque fois que le dessin risquait de se révéler par trop particulier, nous ne l'avons pas retenu.

Nous avons volontairement *privilégié* pour chaque énoncé un ou deux modes d'expression [mais il paraît souhaitable que l'élève, *sans les mémoriser*, soit apte à les transcrire dans un langage soit plus mathématique, soit mieux rédigé en français], sans que nous prétendions imposer telle ou telle rédaction.

Lorsque la formulation d'un énoncé ne pose pas de problème, nous ne l'avons pas toujours explicitée.

4°) *les savoir-faire*, habitudes, comportements ... que nous pensons pouvoir exiger des élèves.

IMPORTANT

> Ce que nous souhaitons, dans cette optique minimum, est écrit *explicitement*. A de rares exceptions près — car des oublis sont toujours possibles — si tel ou tel vocable ou notion ne figure dans aucune rubrique, c'est qu'il n'est nullement indispensable dans un Savoir-Minimum.
> Chaque professeur reste libre de l'utilisation de ce minimum, qu'il peut enrichir selon les besoins de sa classe.
> Il serait désirable que, TOUS, nous acceptions de n'exiger des élèves du premier cycle que nous recevons, que le seul minimum proposé, sur lequel nous fonderons notre enseignement de début d'année. Connaître les mots, notations, énoncés cités dans cette brochure ne signifie pas "être capable de donner une définition, de formuler la "chose" en question", mais "être capable de l'*illustrer* par des *exemples* ou *contre-exemples*, de *connaître* sa signification dans une phrase".

• La brochure se termine par un INDEX ALPHABETIQUE DE MOTS rencontrés en mathématique dans le premier cycle. Nous les avons classés en :

- mots indispensables $\boxed{***}$, que l'on rappelle en tête de chaque rubrique,
- mots non indispensables mais recouvrant une notion indispensable $\boxed{\Delta}$,
- mots commodes $\boxed{*}$,
- mots superflus $\boxed{S}$,

et nous précisons la rubrique (ou les rubriques) où vous êtes susceptible de rencontrer ce mot.

• Chaque rubrique comporte un *extrait* de cette liste : mots relatifs au thème de la rubrique.

chapitre I

ENSEMBLES RELATIONS

ENSEMBLES

MOTS

ensemble — élément — est élément de
distinct

ensemble de départ *ou* source	il ne paraît pas indispensable de donner les deux vocables
ensemble d'arrivée *ou* but	idem

l'ensemble vide
partie ou sous-ensemble d'un ensemble
est un sous-ensemble de, est inclus dans, est une partie de
ensemble des parties d'un ensemble (1)
partition d'un ensemble (voir "relation d'équivalence") (1)
complémentaire d'un ensemble dans un ensemble (1)
ensemble produit cartésien d'un couple d'ensembles (voir rubrique *Relations*)
accolades et parenthèses

Remarques

- Eviter de dire "2 est dans A" ; dire plutôt "2 est élément de A".
- Il semble, au moins au début, préférable de dire "2 est élément de A" plutôt que "2 appartient à A". En effet, ce livre appartient à Pierre mais n'est pas élément de Pierre ; de plus, "appartenir" peut créer une confusion entre "partie" et "élément".

Mots commodes

différence de deux ensembles
paire pour l'opposer à *couple*
singleton pour différencier un élément d'un ensemble à un élément

(1) Il s'agit de *savoir distinguer* l'ensemble des parties de E et une partition de E.

Remarquer que :

$\{1\ ;3\}$ est une paire,
mais $\{1\}$, $\{1\ ;1\}$ et $\left\{1\ ;\frac{3}{3}\ ;\sin\frac{\pi}{2}\right\}$ sont des écritures différentes du même singleton (la première étant évidemment la plus commode).

Mots non indispensables (mais les notions sont indispensables)

Référentiel (ou univers)

Exemple : l'isométrie des diagonales caractérise les rectangles dans l'ensemble des parallélogrammes, mais non pas dans l'ensemble des quadrilatères.

Ensemble fini et infini

Ne pas croire que, sans conventions, 2 17 25 représente N.

Mots inutiles

ensemble défini *en extension* (on peut dire "défini par l'énumération de ses éléments") ;

ensemble défini *en compréhension* (on peut dire "défini par une propriété que possèdent ses éléments et eux seuls").

NOTATIONS

$$A = \{1\ ;2\ ;3\ ;a\} \qquad 1 \in A \qquad 8 \notin A$$

Remarque

Si les éléments ont été codés, le codage doit être explicite.

Exemple : *$A = \{a\ ;b\ ;1\}$ sachant que :*

a désigne mon ami Anatole (tout le monde le connaît)

b désigne la soeur d'Anatole

1 désigne le numéro de leur maison

ϕ [savoir distinguer *zéro* et ϕ]

$E \subset F$

Le symbole $\complement_E^A$ est peu pratique et difficile à utiliser par de jeunes enfants. L'expérience montre qu'on peut, dans le premier cycle, le remplacer très avantageusement par le symbole plus général $E \setminus A$ comme on l'a fait dans l'exemple ci-dessous :

$\dfrac{1}{(x-8)(x-12)}$ désigne un réel si et seulement si $x \in \mathbf{R} \setminus \{8;12\}$.

Certains manuels utilisent encore la notation $E - A$ qui tend à disparaître. D'autre part, il y a intérêt à utiliser pour la différence ensembliste une notation différente de celle qui est utilisée pour la différence de deux nombres.

ENONCES

- L'ensemble vide est unique.

- A est une partie de / un sous-ensemble de / inclus dans B

signifie

Tout élément de A est élément de B.

Il en découle que :

$$\phi \subset E \quad \text{et} \quad E \subset E .$$

Remarque : Pour justifier $\phi \subset E$:

$\phi \not\subset E$ veut dire : il existe au moins un élément de ϕ qui n'est pas élément de E.
Cette proposition étant fausse, $\phi \subset E$ est vraie.

- K désignant l'ensemble des parties de E,

$a \in E$, $\{a\} \subset E$ et $\{a\} \in K$ sont des phrases synonymes ;

$A \subset E$ équivaut à $A \in K$.

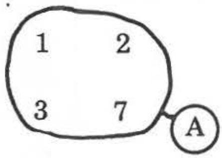
- Si A et B désignent le même ensemble, on écrit : $A = B$

Exemple : Si $E = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$
et si F désigne l'ensemble des naturels pairs inférieurs à 9,
alors $E = F$.

SAVOIR-FAIRE

- Distinguer un ensemble de ses diverses représentations.

Exemple :



n'est pas l'ensemble A,
mais un dessin de A.

• Pour un ensemble, savoir substituer une détermination à une autre (définitions, représentations graphiques, relation d'appartenance ...)

• Utilisation d'un arbre (ou d'un autre moyen) pour la recherche des parties d'un ensemble fini.

Classification des MOTS se rapportant au thème ENSEMBLES

Mots	Code	Mots	Code
accolades	***	est inclus dans	***
appartenance	*	inclusion	△
but	*	infini	△
cardinal	S	paire	*
Carroll	*	parenthèses	***
communs (éléments)	*	partie	***
complémentaire	***	partie pleine	S
compréhension (défini en)	S	partie propre	S
diagramme	*	partition	***
différence de deux ensembles	*	produit cartésien	***
disjoints	***	référentiel (univers)	△
distincts	*	singleton	*
élément	***	source	*
ensemble	***	sous-ensemble	***
équipotent	S	Venn	S
extension (défini en)	S	vide (ensemble)	***

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	△

OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

LE POINT SUR LE MOT "OPERATION"

Citons le dictionnaire de l'A.P.M.E.P. :

(1) *Opération* : application d'une partie de $E \times F$ vers G.

(2) *Loi de composition* : application de $E \times F$ vers G. Si $E = F$ et $G \subset E$, l'opération (ou la loi de composition) est dite *interne*.

Dans le premier cycle, le cas le plus fréquent est celui où $F = G = E$; on peut alors dire *loi dans E* [cas (2)] ou *opération dans E* [cas (1)].

MOTS ET EXPRESSIONS

- intersection de deux ensembles,
- réunion de deux ensembles,

désignent aujourd'hui aussi bien l'opération que son résultat ; lorsque le contexte est insuffisant, il est bon de savoir préciser, par souci de clarté, *ensemble-intersection* ou *opération-intersection* ou *loi-intersection* (1),

- différence de deux ensembles
- et
- ou
- ensembles disjoints (le mot *disjoint* est commode).

Remarque. Cette notion indispensable est souvent confondue avec celle *d'ensembles distincts.*

NOTATIONS

$\cap$ $\boxed{A \cap B}$

$\cup$ $\boxed{A \cup B}$

$\setminus$ $\boxed{A \setminus B}$

(1) Si E est un ensemble, l'union, l'intersection et la différence sont des lois dans l'ensemble $\mathcal{P}$ (E) des parties de E ; il n'en est pas de même pour le produit cartésien.

Remarque

$\boxed{A \cap B}$ est un *ensemble.*

$\boxed{A \subset B}$ est une *phrase mathématique.*

Les analyses grammaticales des écritures mathématiques sont des activités importantes.

ENONCES

- Définition de l'*intersection* de deux ensembles.
- Définition de la *réunion* de deux ensembles.

Pour ces objets, notre ambition est de les reconnaître et de les utiliser dans des situations diverses. Si l'on est amené à énoncer des définitions à leur sujet, on pèsera le pour et le contre de l'emploi de *et*, de *ou*, de l'abstention.

On s'efforcera de ne pas faire de ces notions ni le chapitre 1, ni le chapitre 7 (encore que ce serait moins grave) du cours de sixième, mais de prévoir la distillation, au cours de toute l'année, de situations justifiant le recours à ces notions et à leurs représentations(2). On verra bien, les années suivantes, si une synthèse, ou une reprise, s'impose et sous quelle forme.

SAVOIR-FAIRE

- Savoir traduire une situation simple (mathématique, vie courante ...) :

— du français à un schéma,

— du français à une écriture symbolique ($\cap$, $\cup$, ...),

— de cette écriture à un schéma, et d'un schéma à cette écriture,

— d'un type de schéma à un autre type de schéma (mais ce dernier objectif, très louable, peut paraître bien ambitieux dans certains cas).

(2) Pour que les élèves distinguent bien *notion mathématique* et *dessin*, on suggère de multiplier les exemples variés de ces représentations.

Classification des MOTS se rapportant au thème
OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

Liste des mots	Code	Liste des mots	Code
couple	***	loi	***
différence de deux ensembles	*	n - uplet	S
		opération	***
différence symétrique	S	ou	***
disjoints (ensembles)	***	Pythagore (table de)	Δ
et	***	référentiel	Δ
inclusif	Δ	réunion	***
inter	*	schéma	*
intersection	***	union	*

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

PRODUIT CARTÉSIEN RELATIONS

ENONCES

- Définition du *produit cartésien* d'un couple d'ensembles.
- Une *relation binaire* est déterminée par :

— un ensemble E appelé *ensemble de départ,*
— un ensemble F appelé *ensemble d'arrivée,*
— un *graphe* (partie de $E \times F$) donné en extension ou par tout autre moyen.

(Lorsque $E = F$, on parle de "relation binaire dans un ensemble" ou même (par abus) de "relation dans un ensemble").

NOTATIONS

$E \times F$

(x, y) ou $(x\,;y)$ (pour un couple).

Pour signifier que (x, y) est élément du graphe G de la relation $\mathcal{R}$, on écrit parfois $x\,\mathcal{R}\,y$: cette notation n'est pas indispensable, ni même recommandable ; $\mathcal{R}(x, y)$ présente la même commodité, avec l'avantage de ne pas privilégier les relations binaires. Enfin $(x, y) \in G$ est encore plus naturel et plus cohérent vis-à-vis de l'introduction du terme *graphe.*

MOTS

produit cartésien d'un couple d'ensembles
ensemble de départ *ou* source (la connaissance(1) des deux vocables n'est pas indispensable)
ensemble d'arrivée *ou* but (1)
graphe
couple

(1) *Remarque* : pour éviter l'inflation du vocabulaire, bon nombre de collègues suggèrent l'emploi des mots "ensemble de départ" et "ensemble d'arrivée" au lieu de "source" et "but".

image ; antécédent (mot commode)
relation d'un ensemble *vers* un ensemble
relation *dans* un ensemble
le mot "expression" (dans le sens de "lien verbal") est dangereux
inverse d'une relation : expression dangereuse pour désigner la réciproque d'une relation, à cause du risque de confusion avec l'application dans $\mathbf{R}_*$ $\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Remarque
La composition des relations n'est pas au programme.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir parfaitement utiliser les mots *un, un et un seul, au moins un, au plus un* dans l'étude des *images* ou des *antécédents.*

• L'utilisation exclusive d'un type de *représentation* dans l'introduction des notions précédentes et dans leur justification est un appauvrissement regrettable.

• Le passage d'une représentation à une autre (tableau cartésien, schéma sagittal, liste des éléments du graphe G, caractérisation simple des éléments de G...) doit être acquis, en remarquant que les divers types de représentations ne permettent pas de dégager les *mêmes* propriétés (par exemple, schéma sagittal d'une relation dans un ensemble E avec double représentation de E, ou avec simple représentation de E).

• Savoir dégager systématiquement pour toute relation *ensemble de départ, ensemble d'arrivée, graphe* (ou façon de le construire).

Un point de méthode

Les élèves confondent souvent *relation dans un ensemble* et *loi dans un ensemble* (au niveau des propriétés ; en particulier, que de *relations binaires associatives* et de *lois transitives* !).

Classification des MOTS se rapportant au thème
PRODUIT CARTESIEN — RELATIONS

Mots	Code	Mots	Code
antécédent	*	inclusion	Δ
arrivée (ensemble d')	*	lien verbal	S
associé	S	n - uplet	S
binaire	S	produit cartésien	***
but	*	projection (1ère et 2ème — d'un couple)	S
composant / composante d'un couple	S	relation	***
coordonnée d'un couple	S	source	*
correspondance	S	terme d'un couple	S
couple	***	triplet	S
départ (ensemble de)	*	tous - tout	***
graphe	***	un (seul ; au moins — ; au plus —)	***
idempotent	S	valeurs (ensemble des)	S
image	***		

Une prochaine PUBLICATION A.P.M.E.P.

MATHEMATIQUES POUR FORMATION D'ADULTES

par Philippe LOOSFELT et Daniel POISSON, C.U.E.E.P.
Centre Université Economie d'Education Permanente.
Université des Sciences et Techniques de Lille.

192 pages, format Bulletin A.P.M.
Prix de souscription : 15 F (12 F + 3 F de port)
Prix après souscription : 18 F port compris (15 F sans port)

La souscription sera close le 1er JUIN 1976

Voir au verso une *présentation* de la brochure par les auteurs, et dans le Bulletin 302, pages 202 et 203, un *extrait* de la brochure.

POUR SOUSCRIRE,

Veuillez vous conformer strictement aux indications suivantes (en respectant le compte à rebours) :

3. Remplir complètement et lisiblement le présent bulletin et **l'étiquette** qui servira à l'expédition de l'ouvrage souscrit.

2. Remplir les trois volets d'un chèque postal au compte de l'A.P.M.E.P. Paris 5708-21 et en y faisant figurer le montant correspondant à votre souscription.

1. Envoyer le tout, bulletin de souscription et les trois volets du virement postal, sous enveloppe affranchie au secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P. : M. André BLONDEL, 154, avenue Marcel Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.

NOM : .... Prénom : ....

Adresse : ....

Nombre d'exemplaires souscrits : $a =$

Montant du virement postal : $a \times 15$ F =

Date : ....

ETIQUETTE à remplir très lisiblement : adresse où vous désirez recevoir l'ouvrage souscrit.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC, 29, RUE D'ULM, PARIS, 5e

M. ....

....

....

....

ORDRE - COMPARER

Remarque

Le programme de cinquième *indique* : "exemples de relations d'ordre" et non "relation d'ordre" ; de plus, la forme nuancée des commentaires : "De *nombreux exemples de relations d'ordre* seront nécessaires avant que le professeur *ne songe* à en donner les propriétés caractéristiques" et le libellé du programme "Relation d'équivalence associée à une partition" nous font penser que le professeur *reste libre* d'introduire les termes de : *réflexivité, antisymétrie, symétrie, transitivité* et leurs définitions formelles. Bien qu'ils soient jugés par beaucoup comme commodes, nous ne les plaçons pas dans le Savoir Minimum.

MOTS

ordre

croissant : indispensable dans l'expression : "rangés par ordre croissant" (il s'agit d'ordonner !)

décroissant : idem

intervalle. Les mots "intervalle ouvert, intervalle fermé, diamètre, distance de deux réels, centre, milieu, bornes" sont commodes et préparent l'avenir

comparer deux nombres (entiers, décimaux, réels) pour une relation d'ordre.

NOTATIONS

Dans **N, Z, D, Q, R** :

$\leqslant$ se lit "est inférieur au sens large à", ou "est inférieur ou égal à".

$<$ se lit "est inférieur (au sens strict à)", ou "est plus petit que".

De même pour $\geqslant$ et $>$.

Des notations telles que :

$[41 ; 58]$, $]2 ; 3]$, $[10 ; 20[$, $]2 ; 5[$

peuvent être commodes.

ENONCES

- Quels que soient les réels a et b :

$$a \geqslant b \quad \text{signifie} \quad a - b \in \mathbf{R}^+ .$$

- Quels que soient les réels a, b, c :

$$a \leqslant b \quad \text{est synonyme de} \quad a+c \leqslant b+c .$$

- Quels que soient les réels a, b, c :

si $c \in \mathbf{R}_*^+$: $a \leqslant b$ est synonyme de $ac \leqslant bc$;

si $c \in \mathbf{R}_*^-$: $a \leqslant b$ est synonyme de $ac \geqslant bc$.

SAVOIR-FAIRE

- Savoir ordonner des décimaux, donnés numériquement par une écriture à virgule, sans calculer leur différence.

- Savoir comparer mentalement deux quotients simples tels que : $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\ldots$.

- Savoir démontrer que A est inclus dans B (en montrant que tout élément de A est aussi un élément de B) ; mais savoir que, de deux sous-ensembles, il n'y en a pas toujours un qui soit inclus dans l'autre.

- Savoir associer un *intervalle* à sa représentation sur une droite munie d'une graduation.

- Savoir déterminer l'intersection de deux *intervalles*, par exemple à l'aide d'un dessin.

- Savoir traduire $x \in [a,b]$ par $a \leqslant x \leqslant b$

  (ou par $a \leqslant x$ et $x \leqslant b$).

- Insister sur le fait qu'il n'existe pas seulement une relation d'ordre dans un ensemble : par exemple, dans N on a les relations d'ordre "$\leqslant$" et "est un diviseur de".

En outre, pour la première on peut toujours comparer deux éléments de N, tandis que deux naturels ne sont pas toujours comparables par la relation "est un diviseur de".

Le diagramme sagittal simplifié (par suppression des flèches qui expriment la réflexivité et la transitivité), qui peut être ou ne pas être une "chaîne", fera toucher du doigt les notions d'ordre total et d'ordre partiel. Dans ce cas le vocabulaire "ordre total", "ordre partiel" (très suggestif) pourra être proposé ; ces expressions seront spontanément retenues par certains enfants, cependant que le plus grand nombre les oubliera.

Elles ne doivent pas faire partie du vocabulaire exigible.

ÉQUIVALENCE

MOTS

partition d'un ensemble
relation d'équivalence dans un ensemble
classe d'équivalence, classe d'une partition.

Remarque :

Ne pas confondre une classe d'équivalence et un de ses éléments (ou représentant).

ENONCES

• *Partition.* Dans un ensemble E, un ensemble de parties, non vides, tel que chaque élément de E soit élément d'une et d'une seule de ces parties, est une *partition* de E.

$\{E\}$ est une partition de E.

• *Relation d'équivalence.* Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation (binaire) associée à une partition de E ("associée" pris exclusivement au sens du paragraphe ci-dessous).

• *Relations d'équivalence et partitions* (à l'usage du professeur).

— Si $\mathcal{F}$ est une partition de E, on lui associe la relation suivante dans E, que nous noterons $\mathcal{R}$ et qui est une relation d'équivalence : on dit que : (x,y) est élément du graphe de $\mathcal{R}$ si et seulement si x et y appartiennent à une même classe de $\mathcal{F}$ (laquelle est une partie de E).
On dit que $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence *associée à* $\mathcal{F}$.
Les classes de $\mathcal{F}$ sont appelées *classes d'équivalence* de $\mathcal{R}$ (ou par $\mathcal{R}$).

— Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E, on lui associe l'ensemble des classes d'équivalence de E par $\mathcal{R}$ qui est une partition $\mathcal{F}$ de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est la partition *associée à* $\mathcal{R}$.

Remarque :

On peut, suivant les cas, se donner d'abord une partition, ou d'abord une relation d'équivalence : si la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est associée à la partition $\mathcal{F}$, la partition $\mathcal{F}$ est associée à la relation $\mathcal{R}$, et réciproquement.

Classification des MOTS se rapportant au thème

EQUIVALENCE - ORDRE - COMPARER

Mots	Code	Mots	Code
amplitude	S	intervalle	***
antiréflexivité	S	majorant	S
antisymétrie	*	milieu	S
bornes	*	minorant	S
centre	*	modulo	S
chaîne	S	négatif	***
classe	***	ordonné (ensemble)	*
classer	***	ordonner	***
comparable	S	ordre	***
comparaison	*	ouvert	*
comparer	***	partiel (ordre)	S
congru	S	partition	***
contraire (inégalités de sens)	*	positif	***
croissant (par ordre)	***	rayon	S
décroissant (par ordre)	***	réflexivité	*
diamètre (d'un intervalle)	*	relation d'équivalence	***
distance (de deux réels)	*	relation d'ordre	***
encadrement	***	sens (inégalités de même)	*
ensemble quotient	S	strict	*
équivalence	***	supérieur à (est)	***
équivalent	***	supérieur au sens large à (est)	***
fermé	*	supérieur ou égal à (est)	***
inférieur à (est)	***	symétrie	*
inférieur au sens large à (est)	***	symétrique	*
inférieur ou égal à (est)	***	total (ordre)	S
		transitivité	*

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	△

APPLICATION - BIJECTION

Les programmes disent :

En quatrième : *Exemples de fonctions polynomes* (*applications de* R *dans* R). Cette parenthèse met bien en évidence l'inutilité, jusqu'ici, du mot *fonction*.

En troisième : *Exemples de fonctions polynomes ... exercices de calcul sur des fonctions rationnelles.*

Est-il nécessaire d'imposer aux élèves l'étude des deux notions *application* et *fonction*, d'exiger la recherche de l'*ensemble d'existence* d'une fonction, alors que par la suite il ne travaillera que sur l'*application associée* à cette fonction ?

(Si f est la fonction de A vers B, de graphe G et d'"existentiel" E, l'*application associée* à f est l'application de E vers B, de graphe G).

Ne pourrait-on éviter le piège (recherche de l'ensemble d'existence de la fonction) que les professeurs tendent aux élèves ? Il suffirait de dire :

"Soit l'application g $\left|\begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \{4\} \longrightarrow \mathbf{R} \\ u \longmapsto \dfrac{2+3u}{u-4} \end{array}\right.$

Pourquoi l'ensemble de départ choisi n'est-il pas **R** ? "

Ainsi, l'exercice est conservé, le piège est supprimé, la notion de fonction apparaît comme non indispensable.

NOTATIONS COMMUNES

- f $\left|\begin{array}{l} E \longrightarrow A \\ u \longmapsto 2u+3 \end{array}\right.$

se lit : l'application f

— a pour ensemble de départ E,
— a pour ensemble d'arrivée A,
— et l'image de u par f est 2u + 3.

- f(u) désigne l'image de u par f . Donc :

$$f(u) = 2u + 3$$

APPLICATION

MOTS

application affine ; application linéaire
application affine par intervalles
application en escalier
application - polynome

application identique application constante	commodes
application nulle injection, injective surjection, surjective	MOTS SUPERFLUS

ENONCES

• *La relation f est une application* signifie : Par cette relation, chaque élément de l'ensemble de départ a une image et une seule.

• La composée de deux *applications* est une *application.*

• Soit E un ensemble ; la composition des <u>applications</u> de E vers E est une loi associative.

BIJECTION

MOTS

bijection d'un ensemble vers un ensemble
bijection dans un ensemble
bijection réciproque d'une bijection (commode pour l'étude des translations, des symétries et des applications affines)

<u>MOTS SUPERFLUS</u>

"correspondance biunivoque", puisque l'on dispose des mots *relation* et *bijection* "cardinal" : préférer *nombre d'éléments* (L'existence d'une bijection de A vers B (A et B finis) assure que les ensembles A et B ont le même nombre d'éléments).

involutive

permutation

ENONCES

La relation b est une bijection

signifie :

La relation b est une application et sa relation réciproque est aussi une application.

ou

Par la relation b, chaque élément de l'ensemble de départ a une et une seule image, et chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un et un seul élément de l'ensemble de départ.

SAVOIR-FAIRE

- Savoir utiliser le vocabulaire :
  un et un seul, un unique,
  un au moins, au moins un,
  un au plus, au plus un.

- Savoir calculer l'image d'un élément de l'ensemble de départ par l'application proposée.

- Lorsque l'on donne une application de E vers **R**, savoir contrôler que l'ensemble E a été bien choisi pour que cette relation soit une application.

Mais il semble aussi important que les élèves sachent trouver le sous-ensemble de **R** pour tout élément duquel $\frac{4}{5x-2}$, ou $\sqrt{x-2}$, ... représente un réel.

Classification des MOTS se rapportant au thème

APPLICATION — BIJECTION

Mots	Code	Mots	Code
addition des applications	S	fonction	*
affine (application)	***	graphique	*
application	***	identique (application)	*
bijection	***	injection — injective	S
biunivoque	S	invariant	S
cardinal	S	inverse (d'une application)	S
coefficient (d'une application linéaire)	*	involutif	S
composée de deux applications	*	linéaire	***
constante (application)	*	moins (au moins)	***
correspondance biunivoque	S	nulle (application)	S
croissante (application)	S	permutation	S
décroissante (application)	S	plus (au plus)	***
définition (ensemble de)	S	rationnelle (fonction)	S
déplacement	S	réciproque (bijection- ; d'une bijection)	*
domaine (de définition ou d'existence)	S	relation	***
existentiel	S	restriction	S
existence (ensemble d')	S	somme de deux applications	S
expression	S	surjection, surjective	S
		transformation	S
		un et un seul	***
		unique	S

REPRÉSENTATIONS ET SCHÉMATISATIONS

Cette fiche a deux buts :

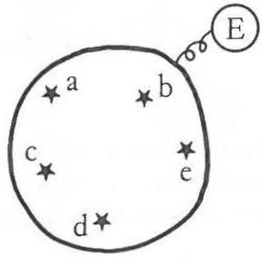
— attirer l'attention sur certains points et rappeler des *EXEMPLES* de représentations et schématisations ;

— chemin faisant, préciser le "savoir minimum" de l'élève à l'issue du premier cycle.

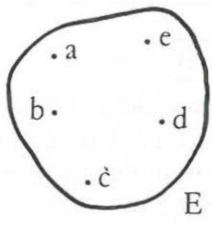
Nous ne nous intéressons pas ici aux symboles et notations des objets mathématiques, ni au vocabulaire lié à la représentation des objets géométriques.

REPRESENTATIONS D'ENSEMBLES ET D'ELEMENTS

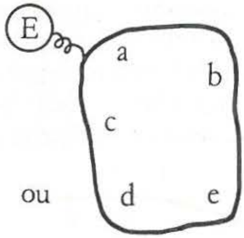
• Les ensembles sont souvent représentés par l'intérieur d'une courbe fermée, et cela de façons diverses comme le montrent les exemples ci-dessous :



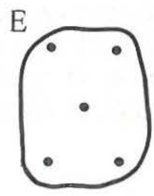
ou



ou



ou



ou ...

En particulier, si l'ensemble à représenter possède un grand nombre d'éléments, ou une infinité, ou un nombre non précisé, on peut ne pas représenter d'éléments à l'intérieur de la "frontière", ou en représenter seulement certains.

L'essentiel est que les *CONVENTIONS* sur lesquelles reposent ces représentations *soient précisées chaque fois*, en particulier quand on n'est pas absolument sûr qu'elles sont connues :

- unicité de la représentation d'un élément ;
- seuls les points de la région intérieure du dessin peuvent représenter des éléments de E (ces conventions sont à la base des diagrammes d'*Euler*, de *Venn* et de *Carroll*) ;
- E peut avoir, ou non, d'autres éléments que ceux qui sont marqués.

• Pour représenter plusieurs ensembles, et en particulier quand on s'intéresse à leur réunion, leur intersection, etc... on utilise souvent ce que les livres appellent :

diagramme de *Venn*

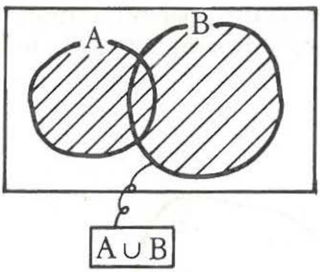
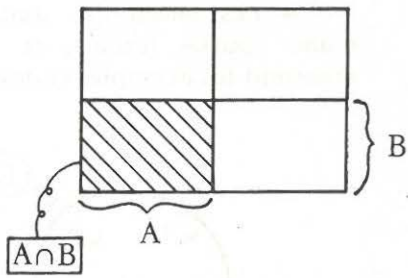
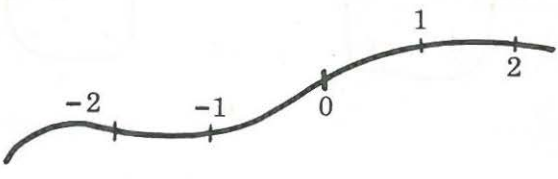


diagramme de *Carroll*

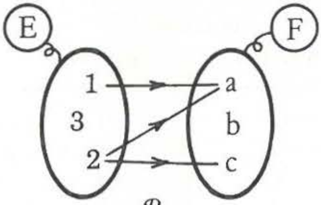


Le deuxième schéma est particulièrement intéressant pour mettre "sur pied d'égalité" un ensemble et son complémentaire, mais le premier est plus commode lorsqu'on a plus de deux ensembles à représenter.

• D'autres représentations sont possibles ; par exemple un ensemble totalement ordonné peut être représenté par une ligne, droite ou pas. Il faut remarquer qu'un tel dessin représente à la fois l'ensemble et la relation d'ordre (ou plutôt, sauf convention supplémentaire, la relation d'ordre et sa relation réciproque).

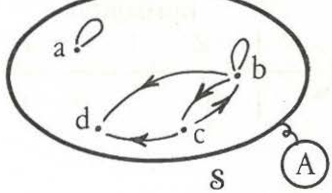


REPRESENTATIONS DE RELATIONS, D'APPLICATIONS.



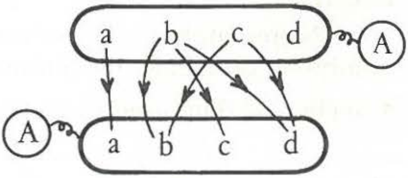
$\mathcal{R}$

Schéma sagittal ou fléché



$\mathcal{S}$

Il est parfois commode de représenter deux fois (ou davantage) le même ensemble quand on veut distinguer son rôle d'ensemble de départ de son rôle d'ensemble d'arrivée (exemple : pour la relation $\mathcal{S}$ ci-contre ou pour étudier les composées d'applications).

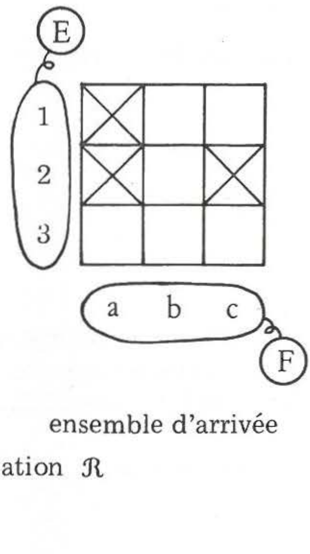


relation $\mathcal{S}$

Au contraire, c'est l'unicité de la représentation de A qui fera apparaître les propriétés d'une relation dans A.

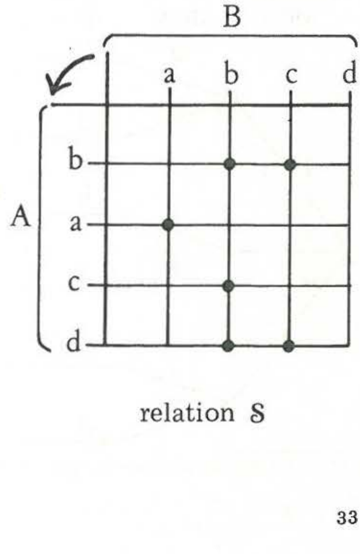
Tableau ou schéma cartésien, à cases, à double entrée, zéro-un, ligne-colonne, à noeuds, etc...

ensemble de départ



ensemble d'arrivée

relation $\mathcal{R}$



relation $\mathcal{S}$

Tous les modes de représentation convenables pour les relations conviennent évidemment aussi pour les applications. Pour représenter une application on peut aussi utiliser un tableau

horizontal

-2	-1	0	1	4
4	1	0	1	4

ou

vertical

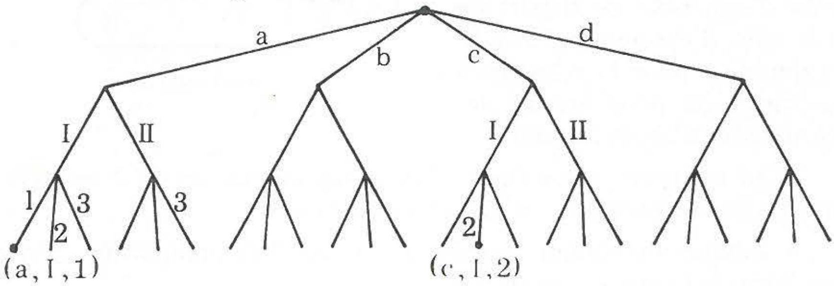
départ	arrivée
-2	4
-1	1
0	0
1	1
4	4

ARBRES

Exemples

Représentation des solutions et méthode de recherche de nombreux problèmes de dénombrement.

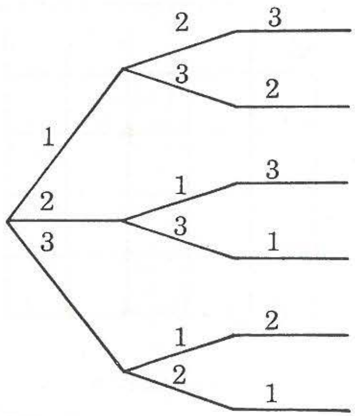
- recherche d'un produit cartésien d'ensembles (1)



- image de a   image de b   image de c

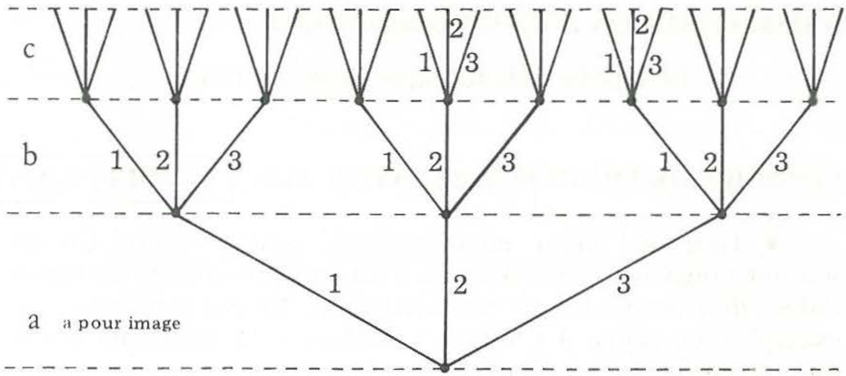
graphe

$\{(a,1), (b,2), (c,3)\}$



Cet arbre permet de trouver toutes les bijections de $\{a,b,c\}$ vers $\{1;2;3\}$.

(1) à l'usage du professeur, mais les exercices concrets abondent.



Cet arbre permet de trouver toutes les applications de {a,b,c} vers {1;2;3} .

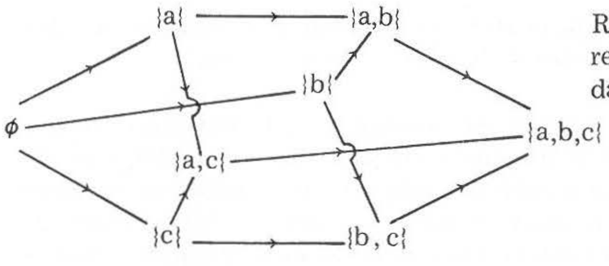
Remarques

• Il existe d'autres types d'arbres (en particulier "arbre tronqué").

• L'arbre "oui-non", qui permet de trouver l'ensemble des parties d'un ensemble, est un arbre "exponentiel" (Le dernier arbre dessiné est aussi un arbre exponentiel).

TREILLIS (1)

Exemple



Représentation de la relation "est inclus dans" dans $\mathcal{P}$ ({a,b,c})

Il faut noter que l'on a abandonné les flèches qui résultent de la réflexivité et de la transitivité (ce n'est donc pas un schéma sagittal de la relation).

(1) "Treillis" est aussi un mot de la théorie mathématique relative à l'ordre ; ici, il est employé dans le sens de "dessin" (ou "schéma").

SCHEMATISATION D'UN RAISONNEMENT

(se reporter à la rubrique *Démonstration*)

CONSEILS DE PRUDENCE RELATIFS AUX $\boxed{\text{SAVOIR-FAIRE}}$

• Tous les objets mathématiques sont abstraits. On est souvent obligé de les représenter. *Il est indispensable de distinguer l'objet de chacune de ses représentations.* Ne pas confondre, par exemple, l'ensemble $A \times B$ avec le tableau à double entrée qui en est une représentation fréquente.

• Il n'existe pas de codification générale des représentations : *les codages, conventions... doivent donc être toujours explicités* (ils peuvent varier d'un problème à l'autre) :

— sur le diagramme dit de *Carroll*, la place des ensembles A,B... n'est pas codifiée. Il y a intérêt à varier ces places sur les schémas ;

— pour des relations, ensemble de départ et ensemble d'arrivée seront de même souvent changés de place.

• Pour toute relation, il est bon, à côté de la représentation, d'écrire un nom de cette relation.

• L'ensemble vide peut être représenté sur un dessin par des hachures, ou par l'absence de hachures... selon les cas.

• Un schéma sagittal est souvent plus lisible si les flèches sont d'une couleur autre que celle des noms des éléments de l'ensemble. Avec une troisième couleur, on peut même représenter sur le même dessin *deux* relations (exemple : deux relations réciproques l'une de l'autre). Par contre, l'emploi de deux couleurs pour représenter une seule relation (sous le prétexte de distinguer réflexivité et symétrie) n'a aucun sens.

• Sur un schéma cartésien, la réflexivité, la symétrie et l'antisymétrie ne sont facilement visibles que *si* les éléments sont placés dans le même ordre côté source et côté but.

MOTS

Les mots : "représentation, schéma, tableau, diagramme" sont commodes (il n'est pas nécessaire de les employer tous) ; "diagonale principale du tableau, Carroll, Venn" : sont superflus.

"Cartésien" (ou "à double entrée", ou "ligne colonne" ...), "sagittal" (ou "fléché" ...) sont commodes pour certains, superflus pour d'autres.

"Flèche, aller-retour, aller sans retour, raccourci" sont commodes à certains niveaux parce qu'imagés mais deviennent ensuite superflus.

"Représentation graphique" (d'une application affine ou d'une application linéaire) : mot et notion indispensables.

"Courbe représentative" : superflu, mais il est nécessaire que les élèves sortant de troisième ne croient pas que toute représentation graphique est une droite !

Classification des MOTS se rapportant au thème
REPRESENTATIONS

Mots	Code	Mots	Code
arbre	*	maximum (d'une repré-	S
Boole	S	sentation graphique)	dangereux
boucle	*	minimum (d'une repré-	S
Carroll	S	sentation graphique)	dangereux
cartésien (tableau)	*	noeud (d'un quadril-	*
cartésien (schéma)	*	lage)	
chaîne	S	organigramme	*
coder	*	patate	S
courbe représentative	S	Pythagore (table de)	Δ
diagonale principale		quadrillage	***
(d'un tableau)	S	repère	***
diagramme	*	repère orthonormé	***
escalier (fonction en)	*	représentation	***
flèche	*	sagittal	S
fléché (schéma)	*	schéma	*
graphique	*	table	*
latin (carré)	S	tableau	*
machine	S	treillis	Δ
		Venn	S

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

LOI DANS UN ENSEMBLE · GROUPE

MOTS

loi (de composition) dans un ensemble
associativité d'une loi
commutativité d'une loi
élément neutre pour une loi
éléments symétriques pour une loi (s'il existe un élément neutre pour cette loi)
groupe

Remarque :

Le dictionnaire de l'A.P.M. dit :

"opération : *application d'une partie de $E \times F$ vers G*
loi de composition : *application de $E \times F$ vers G*

Si $E = F$ et si $G \subset E$, l'opération (ou la loi de composition) est dite interne."

Pratiquement on a souvent besoin de préciser E, F, G en disant par exemple "opération (ou loi) pour (E, F, G)" ; mais le cas le plus fréquent est celui de la loi relative à (E, E, E) qu'il est commode d'appeler : "loi dans E" (le mot "interne" est inutile) (voir "Opérations classiques").

ENONCE

Si (G , $*$) est un groupe (*ou* : si $*$ est une loi de groupe sur G) et si a et b sont des éléments de G,

l'équation en x : $a * x = b$ admet une solution unique égale à (sym a) $*$ b	et	l'équation en x : $x * a = b$ admet une solution unique égale à b $*$ (sym a)

(c'est la même si (sym a) $*$ b = b $*$ (sym a), ce qui est vrai quels que soient a, b, éléments de G, si la loi est commutative).

Cet énoncé est donné ici sous sa forme générale, mais on ne peut en exiger la formulation et l'application que dans les cas particuliers des groupes du programme. De même pour la notion de régularité (elle est utile pour justifier l'énoncé précédent).

> Les mots *anneau, corps, vectoriel* ne font pas partie des programmes du premier cycle et leur connaissance ne peut être exigée des élèves. La seule structure qu'ils doivent connaître est celle de groupe.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir reconnaître si tel couple (E, $*$) est un groupe (éventuellement commutatif) en commençant par se demander si $*$ est bien le signe d'une loi dans E.

En particulier, savoir illustrer la notion de groupe par des exemples [$(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{R}_*, \bullet)$, $(\mathcal{U}, \oplus)$ ...] et des contre-exemples [$(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{D}_*, \bullet)$ ...]. (Que les ensembles choisis ne soient pas tous des ensembles numériques ...).

• Etre conscient des analogies entre les propriétés, les calculs, pour les différents groupes rencontrés dans le programme ou dans les exercices.

Classifications des MOTS se rapportant au thème
LOI DANS UN ENSEMBLE — GROUPE

Mots	Code	Mots	Code
absorbant	S	latin (carré)	S
anneau	S	loi	***
associativité	***	modèle	Δ
commutatitivé	***	neutre	***
compatible	S	opération	***
composition (loi de)	Δ	opposé	***
corps	S	régulier	S
groupe	***	sous-groupe	S
intègre	S	stable	S
interne	S	structure	S
inverse	***	symétrique	***
inversible	S	symétrisable	S
isomorphisme	S	vectoriel	S

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

Une ancienne brochure de l'A.P.M.E.P. :

L'ENSEIGNEMENT DE LA MECANIQUE

reste disponible : l'exemplaire 2 F (franco 3,50 F)

Au sommaire de cette brochure de 40 pages :

Paul GERMAIN : Principes et notions fondamentales de la mécanique classique.

R. MAZET : Les méthodes de la mécanique vibratoire des structures déformables.

J. KAMPE DE FERIET : Les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus.

P. GERMAIN : Pour l'introduction d'éléments de dynamique dans le programme de Mathématiques de la classe de Mathématiques Elémentaires.

chapitre II

ENSEMBLES NUMÉRIQUES

OPÉRATIONS CLASSIQUES

MOTS

E étant un ensemble de nombres (N, D, etc) :
opération dans E
loi (de composition) dans E

Vocabulaire :

Opérations	Composants	Composé	Symétriques
addition	termes	somme	opposés
soustraction	1er terme, 2nd terme	différence	
multiplication	facteurs	produit	inverses
division	dividende, diviseur	quotient	
élévation à une puissance	base (commode) exposant	puissance (carré, cube)	

• Ne pas confondre : *somme* et *addition*, etc...
Dire "calculer (*ou* effectuer) une somme" plutôt que "faire une addition".

• Ne pas confondre : *terme*, *facteur*, *membre*.

• Ne pas confondre *puissance* et *exposant* (ce que font les programmes officiels quand ils parlent des "puissances négatives de 10" ! !) ; pour cela, a^b se lit *a exposant b* (et non *a puissance b*).

Propriétés des lois : Connaître leurs noms, et s'astreindre à préciser, par exemple :

• commutativité de l'addition dans **Z** (et non "commutativité" tout court) ;

• élément neutre pour la multiplication dans **R** (et non "élément neutre") ;

• *associativité* de la multiplication dans **R** ;

• éléments *inverses* pour la multiplication dans **R**.

NOTATIONS

Connaître et utiliser les diverses notations pour un produit :
3×7 (éviter 3.7 ; et proscrire 37 ! !)
$3 \times a$; 3.a ; 3a (éviter a3)
$a \times b$; a.b ; ab

ENONCES

Définitions

• *Loi* dans E : application de $E \times E$ vers E.

• *Opération* dans E : application de $E \times E$, ou d'une partie de $E \times E$, vers E.

• Savoir donner une définition correcte pour telle propriété de telle loi dans tel ensemble ; par exemple :

"L'addition dans **R** est *commutative*"
signifie
"Quels que soient les réels a et b, $a + b = b + a$".

A ce sujet les seules propriétés exigibles seraient : *commutativité*, *associativité*, existence d'un *neutre*, d'éléments *symétriques*, *distributivité* de ... sur ..., pour les *lois* usuelles dans les ensembles numériques **N, Z, D, Q**, $\mathbf{R}_*$, **R**.

• L'*opposé* de a se note $-a$

• $(-a) = (-1).a$
$= -1.a$

• L'*inverse* de a se note $\frac{1}{a}$. (mais cette écriture ne s'impose que lorsqu'il n'y en a pas d'autre).

• 0 est le seul réel qui n'a pas d'inverse.

• *Deux réels sont opposés* signifie *la somme de ces deux réels est égale à 0.*

• L'opposé de la somme de deux réels est égale à la somme des opposés de ces réels.

a et b désignant deux réels :

$$-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$$

On en déduit :

$$-(a-b) = b - a = (-1).(a-b)$$

• *Deux réels sont inverses* signifie *le produit de ces deux réels est égal à 1.*

$$-(ab) = (-a).b = a.(-b) = -ab = (-1).(ab)$$

• Quels que soient les réels a et b : $a - b = a + \text{opp}(b)$.

• Dans **R** : *soustraire* b, c'est *additionner l'opposé* de b.

• x, b, et a désignant trois réels, les égalités suivantes sont équivalentes :

$\boxed{x + b = a}$ $\boxed{x = a + (-b)}$ $\boxed{x = a - b}$

• Dans $\mathbf{R}_*$: *diviser par* b, c'est *multiplier par* l'inverse de b.
On a donc, quels que soient les réels a et b (si $b \neq 0$) :

$$a : b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

• y, c et d désignant trois réels, les égalités suivantes sont équivalentes (si $d \neq 0$) :

$\boxed{y \times d = c}$ $\boxed{y = c \times \frac{1}{d}}$ $\boxed{y = \frac{c}{d}}$

Remarque

$\frac{c}{d}$ se note aussi $c : d$ ou c/d .

• Dans **R** :

$\boxed{ab = 0}$ est synonyme de $\boxed{\boxed{a = 0} \text{ ou } \boxed{b = 0}}$

• Quels que soient les réels a, b, c, si $b \neq 0$ et si $c \neq 0$:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \text{opp}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$a \times 0 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}$$

• a, b, c, d désignant des réels, b et d étant non nuls :

$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ est synonyme de $\boxed{ad = bc}$

• Pour tout réel a, $a^1 = a$.

• Pour tout naturel non nul n, $0^n = 0$.

• Pour tout réel a non nul, et quels que soient les $\boxed{\text{entiers}}$ n et p :

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$(a^n)^p = a^{np} \quad ; \quad a^n \times a^p = a^{n+p}$$

• Quels que soient les réels non nuls a, b, c, et quel que soit $\boxed{\text{l'entier}}$ n :

$$a^n \times b^n \times c^n = (abc)^n$$

Remarque

MAIS, peut-être, pour les énoncés ci-dessus relatifs aux puissances, peut-on se contenter des exposants naturels (et aller pour les puissances de dix jusqu'aux exposants négatifs).

SAVOIR-FAIRE

• Techniques opératoires dans **D**.

• Calcul mental d'un *ordre de grandeur*.

• Savoir réduire à un *dénominateur* commun (autant que possible le plus petit) en vue d'additionner ou de soustraire des *écritures fractionnaires*.

• Penser à simplifier les *écritures fractionnaires* : au départ, en cours de calcul, à l'arrivée.

• Savoir utiliser les propriétés des opérations pour :
— calculer plus rapidement ;
— simplifier les écritures ;
— justifier, par exemple, une résolution d'équation.

Remarque

On utilise souvent *conjointement* la commutativité et l'associativité d'une même loi.

• Distinguer, à propos des propriétés des lois, entre :
— l'illustrer par des exemples (ainsi, $3 + 5 = 5 + 3$ illustre la commutativité de l'addition dans N) ;
— l'énoncer ;
— la démontrer (en fait beaucoup d'entre elles sont admises dans le premier cycle).

• Puisque la distributivité fait intervenir deux lois, savoir préciser celle qui est distributive sur l'autre.

• Distinguer entre propriétés et *conventions d'écriture* ; par exemple :

(Associativité) $(a * b) * c = a * (b * c)$

(Convention) $a * b * c$ signifie $(a * b) * c$

En particulier, les élèves devraient connaître les deux *conventions* (il ne s'agit que de cela) :

1) En l'absence de parenthèses, et lorsqu'il s'agit d'addition et de soustraction, l'ordre normal des calculs est l'ordre de gauche à droite. *Exemple* 24-7-2 signifie (24-7)-2.

2) En l'absence de parenthèses : priorité de la multiplication sur l'addition et de l'élévation à une puissance sur la multiplication.

• Savoir que $a * b$ ($a \in E$, $b \in E$, $*$ est le signe d'une loi dans E) représente un *élément de E*, et non pas une consigne enjoignant d'effectuer un calcul.

Exemple

$$2 + 1 \quad ; \quad \sqrt{9} \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 15/5 \quad ; \quad 5 \times 7 - 4 \times 8$$

sont cinq désignations d'un naturel (unique).

Remarque sur *facteur* :

Signalons au passage un fréquent abus de langage :
3x (2y — 7) est souvent lu "3x *facteur* de 2y — 7" au lieu de : "3x multiplié par (2y — 7)".

Classification des MOTS se rapportant au thème OPERATIONS CLASSIQUES

Mots	Code	Mots	Code
absorbant	*	exposant	***
addition	***	facteur	***
algébrique (somme)	S	fraction (écriture fractionnaire)	***
associativité	***		
base (d'une puissance)	*	inverse	***
carré d'un nombre	***	inverser	S
commun (facteur)	*	inversible	S
commutativité	***	loi	***
composant (pour une loi)	S	multiplication	***
		neutre	***
composé (pour une loi)	*	numérateur	***
convention	***	opération	***
corps	S	opposé	***
crochet	*	parenthèse(s)	***
cube d'un nombre	*	produit	***
dénominateur	***	puissance	***
différence	***	quotient	***
distributivité	***	somme	***
dividende	***	soustraction	***
diviseur	***	table (de Pythagore)	Δ
division	***	terme	***

Code	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

PARENTHÈSES ET PRIORITÉS

MOTS

parenthèses
opération ; loi
calcul
mettre entre parenthèses

NOTATIONS ( ) et accessoirement [ ]

ENONCES

(1) *Introduction pour le professeur*

• Des écritures aussi simples que celles du type $3 \times 5 + 2 \times 7$; $72 : 2 : 6$ sont susceptibles de plusieurs interprétations puisqu'y figurent plusieurs signes opératoires.

Il importe que chaque *écriture* ait une interprétation unique.

Il faut donc fixer des règles d'écriture et de lecture des écritures numériques et littérales.

Elles utilisent : le "parenthésage",
les règles de *priorité* (fixées par convention).

• Un parenthésage "complet" (il devrait y avoir autant de couples de parenthèses que de signes opératoires) suffirait, mais il conduit à une écriture surchargée.

Les règles de priorité sur les opérations permettent de réduire le nombre des *parenthèses* ou de n'en laisser subsister aucune, donc de simplifier les écritures.

(2) *Enoncés pour les élèves*

a) *Règles d'écritures*

• Deux signes opératoires ne se suivent jamais, ni immédiatement, ni séparés par des parenthèses.

• L'opposé d'un nombre a se note $(-a)$.

• Lorsqu'une écriture comporte des signes fonctionnels : $|a|$, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{a}$... ces signes sont à considérer comme des parenthèses ; dans $(-a)$, le signe *moins* est fonctionnel.

b) *Conventions d'écriture et règles de priorité*

• En calcul numérique et littéral, en l'absence de parenthèses, la multiplication a priorité sur l'addition et sur la soustraction.

• En l'absence de parenthèses, l'élévation à une puissance a priorité sur la multiplication [donc sur l'addition et la soustraction].

Exemples

$3 + 2 \times 5$ signifie $3 + (2 \times 5)$.

$-3a^2$ signifie $(-3) \times (a^2)$ ou $-(3 \times (a^2))$,
et non pas $(-3a)^2$.

$7x + 8y^2$ signifie $(7 \times x) + (8 \times (y^2))$.

et bien sûr $7x + 8y^2 \neq 7x + (8y)^2$.

Remarque

Les règles adoptées :
priorité 1 — Elévation à une puissance
priorité 2 — Multiplication et division
priorité 3 — Addition et soustraction
laissent parfois un certain choix :

— parce qu'elles ne définissent pas un ordre total sur l'ensemble des calculs à effectuer,

— en vertu des propriétés de ces opérations (associativité, commutativité ...).

SAVOIR-FAIRE

(1) En entrant en sixième l'enfant pense souvent :

"Les calculs se font toujours dans l'ordre normal d'écriture, c'est-à-dire de gauche à droite".

Il y a lieu de lui proposer la méthode suivante :

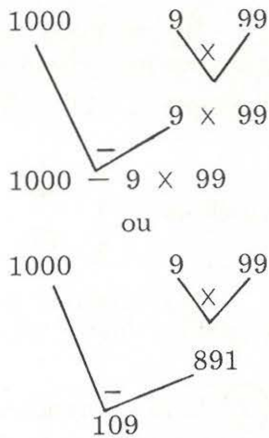
Les calculs se faisant dans l'ordre de priorité des opérations, les diverses étapes de l'exécution d'un calcul sont les suivantes :

(a) Analyser l'ordre des opérations, en particulier en le décrivant par un arbre, une chaîne ou tout autre moyen.

Exemple 1 :

1000 − 9 × 99

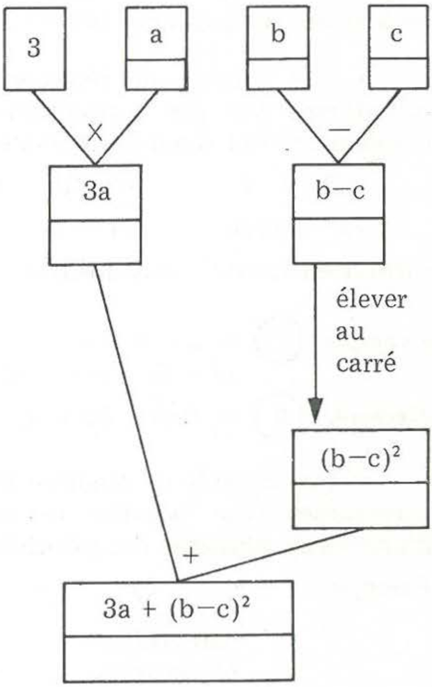
② ①



Exemple 2 :

$$\underbrace{\underbrace{3a}_{2} + \underbrace{\underbrace{(b-c)}_{1}{}^{2}}_{2}}_{3}$$

L'écriture $\boxed{a}$ offre une possibilité d'expliciter simultanément une valeur numérique.



(b) se poser la question : les propriétés des opérations en présence permettent-elles de modifier l'ordre des opérations ?

Exemple : 11 + 7 + 13

au choix: ① ② ou ② ① — grâce à l'associativité de l'addition

(c) exécuter le calcul dans l'ordre le plus "efficace" (rapidité, sûreté), en gardant trace des calculs intermédiaires.

(2) Dans l'enseignement du premier cycle, le calcul littéral prenant une place de plus en plus grande au cours des années, cette méthode (a) (b) (c) reste exploitable.

Mais la "suppression" des parenthèses (voir *Opérations classiques*) est une action courante, trop souvent non explicitée ou trop souvent automatisée, et il paraît important de mettre en relief les activités suivantes des élèves :

• être capable de replacer dans une écriture donnée les parenthèses que des conventions d'écritures ou des propriétés d'opérations ont rendues implicites :

$-2a + 4 \qquad ((-2) \times a) + 4$

$7a - 14ab \qquad (7 \times a) - ((14 \times a) \times b),$

surtout en cas de "substitutions" :

Exemple (1) Si $a = b + c$:
$ad = (b + c)\,d$ et non pas $ad = b + cd$

Exemple (2) Si $f(x) = 2x + 3$, $f(-5) = 2 \times (-5) + 3$

• être capable de modifier l'aspect d'écritures et la place de parenthèses (qui peuvent devenir implicites) par application d'une ou de plusieurs des priorités des opérations en présence.

Exemple : $\underbrace{a\,(b + c)}_{\text{parenthèses obligatoires}} = \underbrace{(ab) + (ac)}_{\text{parenthèses facultatives}}$

• être capable de supprimer les parenthèses dont la présence n'est pas obligatoire afin "d'alléger" l'écriture et de la rendre exploitable.

Exemple : savoir écrire :

$$(-1) + (+4) - (-6) \ldots = -1 + 4 + 6 \ldots$$
$$(-7-2a)(1-2x^2)$$

à la place de

$$[(-7) - (2 \times a)] \times [1 - (2 \times x^2)]$$

• savoir traduire :

a(b+c) par "produit de a par la somme de b et de c" et inversement ;

etc...

Classification des MOTS se rapportant au thème
PARENTHESES — PRIORITES

Mots	Code
crochet	*
décrire	Δ
écriture	***
parenthèse(s)	***
phrase	*
priorité	***
simplifier	*

ÉGALITÉ

ENONCES

$$a = b$$

signifie

a et b désignent le même $\left\langle \begin{matrix}\text{objet}\\ \text{être}\end{matrix} \right\rangle$ mathématique.

Une *égalité* est une phrase (le signe = se lit *égale* ou *est égal à*). Il existe des *égalités* vraies et des *égalités* fausses ; mais, en principe, de même que pour les autres phrases mathématiques et sauf avis contraire : écrire une *égalité*, c'est affirmer qu'elle est vraie (voir rubrique "Connecteurs - Quantificateurs").

Le signe = sépare deux $\left| \begin{matrix}\text{désignations}\\ \text{noms}\\ \text{écritures}\\ \text{étiquettes}\end{matrix} \right.$ d'un seul être mathématique.

• Si $A = B$, on peut en toute circonstance substituer A à B ou B à A ; cette substitution requiert l'introduction de parenthèses qui dans certains cas peuvent être supprimées.

Exemples. Si on sait que :

$$\mathrm{a} = 3 + \mathrm{b}$$

on peut écrire :

$$4 \times \mathrm{a} = 4 \times (3 + \mathrm{b})$$

et

$$8 + \mathrm{a} = 8 + (3 + \mathrm{b})$$

Dans ce dernier cas, on écrira :

$$8 + \mathrm{a} = 8 + 3 + \mathrm{b}$$

mais on n'écrira pas bien sûr :

$$4 \times \mathrm{a} = 4 \times 3 + \mathrm{b}$$

De façon plus générale, dans le cas où $\mathrm{b} = \mathrm{c}$:

- si f est une application : $\mathrm{f(b)} = \mathrm{f(c)}$
- si p( ) ou p(□) est un "moule à phrases", p(b) et p(c) sont tous deux vrais ou tous deux faux.

Exemple : pour le "moule à phrases" : $\square \in a$:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \in a$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \in a$ sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses.

— si $*$ est le signe d'une loi, pour tout u :

$$b * u = c * u$$

De même :

si $a = b$ et $c = d$ alors : $a * c = b * d$ et $a * d = b * c$

En revanche : de $b * u = c * u$ on ne peut déduire $b = c$ si on ne sait rien de plus sur $*$, b, c et u.
[si $*$ est une loi de groupe, $b * u = c * u$ entraîne $b = c$]

- si $a = b$ alors $b = a$
- si $a = b$ et $b = c$ alors $a = c$

A l'usage du professeur :

Dans tout ensemble d'objets mathématiques la relation d'égalité, désignée par $=$, est une relation d'équivalence : chaque classe d'équivalence pour cette relation contient un seul élément.

On peut aussi, si l'on veut, considérer le signe $=$ comme celui d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des *écritures* (étiquettes, désignations ...) d'objets mathématiques. Deux écritures, distinctes ou non, sont équivalentes pour cette relation si et seulement si elles désignent le même objet ; ainsi $7 + 1$, 2^3 et 2×4 sont trois écritures distinctes,équivalentes pour cette relation ; elles désignent toutes le même objet mathématique.

Cette relation sur les écritures peut se traduire par : *a même signification que,* ou de façon plus opératoire par : *peut être, en toute circonstance, substitué à.*

MOTS

égalité $\left\{\begin{array}{l}\text{vraie}\\ \text{fausse}\end{array}\right.$

vérifier

est égal à, égale

distinct, différent

membres d'une égalité

les expressions : "parfois", "toujours", "jamais", d'emploi commode, mais pédagogiquement discutable, à la place de *il existe quelques ... tels que, pour quelques* ou à la place de *quel que soit, pour tout* ou *pour aucun*, recouvrent des notions indispensables.

Etre conscient du fait que le pluriel "égaux" est la plupart du temps un abus de langage.
Par exemple : "les nombres a et b sont égaux" peut être avantageusement remplacé par "a et b désignent le même nombre" (qui n'est pas plus long).

• *Inégalité :* en bonne logique ce mot devrait être réservé aux phrases où le verbe est "n'est pas égal à", comme par exemple $3 \neq 4$. L'usage veut qu'on l'emploie aussi (et surtout) pour des phrases du type $3 < 4$, etc... au lieu de *comparaison* qui a été proposé, mais sans grand succès et c'est regrettable.

Expressions commodes :

$3 < 4$ et $6 > 5$ sont deux inégalités de *sens contraire.*

$3 < 4$ et $5 < 6$ sont deux inégalités de *même sens.*

NOTATIONS

• "$3 \times 2 = 6$" se lit "*3 multiplié par 2 est égal à 6*" (ou *égale*, mais non *égal à*)

$3 \times 2 = 7$ est une égalité fausse.

• $3 \times 2 \neq 7$. $\neq$ se lit *n'est pas égal à* ou *est différent de.*

• $a = b = c$ est un abus remplaçant $a = b$ *et* $b = c$.

Il est tolérable du fait de la transitivité de la relation d'égalité (de même pour $a < b < c$; mais pas pour $a \neq b \neq c$ ...).

• On ne devrait pas rencontrer l'erreur suivante : $3 + 4 = 7 \times 2 = 14$, etc... On reviendra sur la signification de l'égalité chaque fois que l'on rencontrera une faute de ce type.

• Emplois erronés du signe $=$:

— "L'ensemble $A = \{4 ; 5 ; 6\}$ est une partie de N"

— "Soit $A = \{4 ; 5 ; 6\}$"

— "Posons $A = \{4 ; 5 ; 6\}$"

Dans ces phrases, le signe $=$ se lit "égal à" ; ce n'est plus un verbe.

Cet abus est très répandu chez les mathématiciens et chez les professeurs. Quant il est conscient, il est sans doute considéré comme un abus sans importance. Mais, pour de jeunes élèves, il contribue à accroître les difficultés qu'ils éprouvent à bien comprendre la notion d'égalité.

Il serait facile à éviter ; on peut dire par exemple : "Notons A l'ensemble $\{4 ; 5 ; 6\}$; A est une partie de N". Une telle formulation a l'avantage supplémentaire de distinguer deux actions :

— donner une étiquette à un ensemble ;

— affirmer une propriété de cet ensemble.

SAVOIR-FAIRE

- Savoir substituer (voir énoncés).

- Réserver, en principe, une ligne complète à chaque égalité. Si l'égalité est trop "longue", la "couper" au signe = et non pas au milieu d'un membre (dans le cas d'une équation par exemple), ou utiliser la disposition suivante dans le cas d'un "calcul" :

A = ...
A = ...
A = ...

- Etre capable de comprendre la question :

"3 vérifie-t-il $x^2 - 9 = 0$?"

Une réponse affirmative n'assure pas d'avoir *toutes* les solutions.

Classification des MOTS se rapportant au thème

EGALITE

Mots	Code	Mots	Code
comparaison	*	de même sens (inégalités)	*
différent	***	de sens contraire (inégalités)	*
distinct	***	faux	***
égal (être — à)	***	membre	***
égaler	***	moule	*
égalité	***	substituer	*
équivalentes (égalités)	S	vérifier	***
inégalité	***	vrai	***

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

ÉQUATION - INÉQUATION

MOTS

équation
inéquation
membre
solution $\left\{ \begin{array}{l} \text{la} \\ \text{une} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{les} \\ \text{des} \end{array} \right.$
résolution d'une équation
ensemble des solutions
distinguer : solution *et* résolution
$\left.\begin{array}{l}\text{inconnue d'} \\ \text{résoudre} \\ \text{vérifier}\end{array}\right\}$ une (in)équation
mettre un problème en équation

Remarques

1) Le programme de troisième ne contient pas "résolution d'équations", mais il comporte "*mise en équation* de problèmes variés, mathématiques ou non", ce qui met l'accent sur le passage d'une situation à l'équation qui la traduit.

2) L'*équation* dans **R** $2t - 3 = 8$, l'*équation* dans **Z** $2t - 3 = 8$, sont distinctes ; en principe "l'équation $2t - 3 = 8$" ne signifie rien (même remarque pour *inéquation*).

3) L'expression "Résoudre dans E $f(x) = g(x)$ (ou, si E est ordonné, $f(x) > g(x)$, ou $f(x) \geqslant g(x)$,...)" invite à donner une description aussi précise que possible de l'ensemble des solutions :

— si cet ensemble est fini, en général en donnant la liste exhaustive de ses éléments ;

— sinon, en donnant une propriété simple caractérisant les solutions.

Dans le premier cycle, la question et sa réponse pourraient être formulées en français (exemple : "ensemble des solutions de l'équation dans R $f(x) = g(x)$ " ; "ensemble des réels plus grands que 3").

Impossible et *indéterminée* nous semblent, non pas superflus, mais à bannir ; *infinité de solutions* est trop vague.

On s'intéresse à l'ensemble S des solutions : il peut, dans certains cas, être vide ou comporter une infinité d'éléments. On aura ainsi suivant les cas les réponses :

S est l'ensemble vide.

Exemple. Résoudre dans **D** : $3x = 7$.

S est une partie infinie de E, autre que E.

Exemple. Résoudre dans **R** : $|x| = -x$.

S est E.

Exemple. Résoudre dans **R** : $(x-2)^2 \geqslant 0$.

Les notations du type $\{x\,;\,x \in \mathbf{R} / f(x) = g(x)\}$ sont superflues dans le premier cycle.

ENONCES

• Si l'on ajoute un même réel aux deux membres d'une *(in)équation*, on obtient une nouvelle *(in)équation* ayant le même *ensemble des solutions* que la précédente.

• Si l'on multiplie les deux membres d'une *équation* par un même réel non nul, on obtient une nouvelle *équation* ayant le même *ensemble des solutions* que la précédente.

• Si l'on multiplie les deux membres d'une *inéquation* par un même réel strictement positif, on obtient une *inéquation* ayant le même *ensemble des solutions* que la précédente.

• Si l'on multiplie les deux membres d'une *inéquation* par un réel strictement négatif et si on change le sens de l'*inéquation*, on obtient une nouvelle inéquation ayant le même *ensemble des solutions* que la précédente.

• "a est *solution* de $f(v) = g(v)$" signifie "$f(a) = g(a)$".

(Même formulation pour les inéquations).

• Toute *équation* dans **R** d'inconnue *b* des types

$$bx = y \quad (x \neq 0)$$

et

$$x + b = y$$

a une solution unique.

• L'ensemble des solutions de

$$A(y) \times B(y) = 0$$

est la réunion des ensembles des solutions de

$$A(y) = 0$$

et de

$$B(y) = 0$$

SAVOIR-FAIRE

• Etre habitué à des désignations variées de l'*inconnue.*

• Ne pas confondre *résoudre* et *trouver une solution.*

• Contrôler (par simple substitution) qu'un nombre donné *vérifie l'(in)équation* (c'est-à-dire en est une *solution*, cela en gardant conscience que cet élément n'est pas nécessairement la *seule* solution).

• Etre capable de représenter sur une droite graduée l'*ensemble des solutions d'une inéquation.*

• Bien différencier les attitudes suivantes de l'élève :
— *résoudre l'(in)équation* sans commenter les calculs ni les écritures intermédiaires ;
— *résoudre l'(in)équation* en commentant cette résolution (en particulier en fournissant les justifications de l'équivalence de deux équations).

• Savoir conclure une *résolution* (ne pas s'arrêter à "x = 3" qui est elle aussi une *équation*).

• S'il s'agit d'un problème qui a été *mis en équation*, passer de la *résolution de l'équation* à la réponse au problème (après examen des conditions imposées à l'inconnue).

Trois remarques pour conclure

1) Pourquoi ne pas proposer des équations à *résoudre par tâtonnement* afin de ne pas donner l'idée fausse qu'on aura *toujours la possibilité de résoudre par le calcul* ?

2) Le vocable d'*équation* doit-il être lié au numérique ? Non. (Ne peut-on donner à résoudre dans l'ensemble des parties de $\{a, b, c, d, e, f\}$ l'équation $\{a, b, c\} \cap X = \{b, c\}$?)

3) Proscrire des écritures comme
$3 = 5x - x = 4x$ (mélange d'équations et d'identités).

Au niveau de la troisième, on ne peut exiger autre chose que la résolution dans **R** (ou dans une partie de **R**) :

— des équations d'inconnue x "$ax + b = 0$", "$x^2 + a = 0$", et des équations se ramenant directement à l'une des précédentes, telles les "équations-produits" ;

— des inéquations d'inconnue y "$ay + b > 0$", "$ay + b < 0$", "$ay + b \geqslant 0$", "$ay + b \leqslant 0$".

Et, bien entendu, pas d'(in)équations à paramètres dans le premier cycle.

CONJONCTION (SYSTEME) D'(IN)EQUATIONS DANS $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, DU PREMIER DEGRE

Système est courant ; mais le mot *conjonction*, qu'on retrouvera plus tard en logique, distingue bien de la *disjonction* qui s'introduit pour $A(y) \times B(y) = 0$.

MOTS

$$\left.\begin{array}{c}\text{conjonction}\\ \text{ou}\\ \text{système}\end{array}\right\}\ \text{d'(in)équations dans } \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ du premier degré}$$

ENONCES

• Trois cas pour les conjonctions de deux équations dans **R** × **R** du premier degré :

— une solution unique,

— pas de solution,

— une infinité de solutions : l'ensemble des solutions est une partie de **R** × **R** (à préciser) autre que **R** × **R**.

SAVOIR-FAIRE

• Posséder une (au moins !) méthode pratique de résolution ; mais il serait souhaitable d'en connaître plusieurs.

• Savoir que les *solutions* éventuelles sont des couples (l'inconnue est un couple).

Pas question d'exiger que soient connues les formules dites de "Cramer" !

Les *conjonctions d'(in)équations* ne devraient pas être l'objet de travaux systématiques.

• Savoir que $ax + by + c = 0$ $[(a,b) \neq (0,0)]$ a pour représentation graphique une droite, et être capable de la dessiner.

• Etre capable de représenter graphiquement dans le plan l'*ensemble des solutions d'une conjonction d'équations* du premier degré dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

On escamote donc une étape indispensable si l'on ne traite que des équations dans $\mathbf{R}$ d'une part et des systèmes de deux équations dans $\mathbf{R}^2$ d'autre part.

Le maillon indispensable — la résolution d'équations dans $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Z}^2$, $\mathbf{R}^2$ — a tout intérêt à s'introduire très tôt (dès la sixième).

Ainsi, il est intéressant de comparer les solutions de :

"$x + y = 1$ dans $\mathbf{N}^2$" et "$x + y = 1$ dans $\mathbf{Z}^2$".

Le problème de la conjonction est alors bien compris comme recherche de l'intersection de deux ensembles des solutions.

Classification des MOTS se rapportant au thème
EQUATION — INEQUATION

Mots	Code	Mots	Code
chercher	Δ	moule	*
combinaison linéaire	S	paramètre	S
conjonction de deux (in)équations	Δ	racine	S
contrôler	***	référentiel	Δ
égalité	***	remplacer	***
équation	***	résolution	***
équations équivalentes	Δ	résoudre	***
existentiel	S	sens (d'une iné-quation)	*
impossible	S	solutions (ensemble des)	***
incompatible	S	substituer	*
inconnue d'une (in)équation	***	supposer	Δ
indéterminé	S	système de deux (in)équations	*Δ
inéquation	***	transposer	dangereux
infinité de solutions	*	variable	Δ
membre	***	vérifier	***
mettre en équation	Δ		

APPLICATION - POLYNOME
ÉCRITURE - POLYNOME

Le mot *polynome* a plusieurs sens. Dans le premier cycle, on l'utilise seulement dans les deux sens suivants :

— écriture-polynome ;

— application-polynome.

C'est ainsi que l'application dans **R** :

$$h \longmapsto h^{13} - h - 1$$

est une *application-polynome*, et que
"$h^{13} - h - 1$" est une *écriture-polynome en h*.

De même, l'écriture $(x^3 - 1)(x - 7)$ est une écriture-polynome en x.

$3^x + x$, $\sqrt{x^4} + 1$ ne sont pas des écritures-polynomes en x ; mais

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^4} + 1 \end{array}\right.$$

est une *application-polynome.*

Certains emploient *polynome-en-x* au sens d'écriture-polynome en x, d'autres font de "polynome" un synonyme *d'application-polynome.* Chaque professeur, après avoir fait son choix, le précisera à ses élèves.

Quoi qu'il en soit, il est important que les élèves distinguent les deux notions : l'application et l'écriture.

En effet, l'écriture-polynome en y "$y^2 + 1$" n'est pas une écriture de *l'application-polynome* dans **R** :

$$y \longmapsto y^2 + 1$$

MOTS

polynome, monome
application-polynome, application-monome
écriture-polynome, écriture-monome
application linéaire, application affine

Voir ci-dessus

termes d'une écriture-polynome

coefficient d'une écriture-polynome ou d'une application-polynome, degré d'une application-polynome, degré d'une écriture-polynome (idem pour monome)

facteur commun

développer (ou encore "écrire sous forme de somme de monomes")

factoriser (ou encore "écrire sous forme d'un produit de polynomes")

application-quotient de deux applications-polynomes

écriture-quotient de polynomes

> Les expressions : "fonction rationnelle", "fraction rationnelle", sont superflues.
>
> Pour beaucoup d'élèves : $x \longmapsto \dfrac{x\sqrt{2}+1}{x^2+4}$ n'est pas une fonction rationnelle puisqu'il y a un radical ! Il est plus logique et moins dangereux d'employer, dans le premier cycle, les expressions précédentes.

MOTS COMMODES

réduire

ordonner

variable, constante

ENONCES

- Toute application du type : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ v \longmapsto av + b \end{array} \right.$

(a,b) désignant un couple connu de réels, est appelée *application affine* dans **R.**

- La représentation graphique (dans un plan repéré) d'une *application affine* est une droite.

- Si $a \neq 0$, *l'application affine* dans **R** :

$$x \longmapsto ax + b$$

est une bijection.

● Toute application du type : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto ax \end{array} \right.$

a désignant un réel connu, est appelée *application linéaire* dans **R**.

Les *applications linéaires* dans **R** sont des *applications affines*.

● Quels que soient les réels a et b ,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

SAVOIR-FAIRE

● Savoir reconnaître que :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto 7t^2 \end{array} \right.$$

est une *application-monome* de *coefficient* 7 et de *degré* 2.

● Savoir reconnaître que :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ u \longmapsto \frac{1}{3}u^2 + 7{,}2u - 2 \end{array} \right.$$

est une *application-polynome* de *degré* 2, de *coefficients* $\frac{1}{3}$ et 7,2 et -2.

En vue de l'utilisation des mathématiques dans d'autres sciences, il est dangereux de laisser penser aux élèves que les polynomes sont toujours "en-x". Exemples :

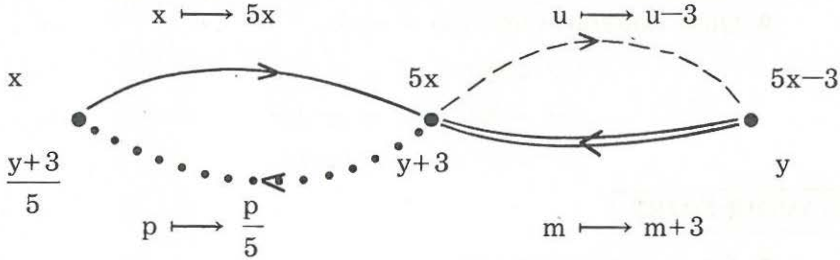
$\frac{1}{2}gt^2$ est un monome-en-t ; $I \longmapsto RI$ est une *application-monome* (de [0;5] vers [0;100] par exemple).

● Savoir représenter graphiquement, dans un repère donné, une *application affine* donnée, et en particulier, une *application linéaire* donnée (Penser à l'auto-contrôle : choix d'un troisième point par exemple).

● Savoir reconnaître si un point, dont on connaît le couple de coordonnées, est un point de la droite qui représente une *application affine* donnée.

● Savoir définir l'application réciproque d'une *application affine* non constante donnée dans **R**.

Pour cela, il paraît souhaitable de poursuivre, dans le premier cycle, l'utilisation de schémas de compositions d'applications, déjà utilisés à l'école élémentaire :



● Savoir *factoriser un polynome* dans des cas très simples :

— application immédiate des "identités remarquables" ou de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

— mise en évidence d'un facteur commun (ou de plusieurs : ne pas s'arrêter en route ...).

— factorisation séparée des termes d'une somme, puis factorisation de celle-ci.

Exemple $(8x + 4) + (4x^2 - 1)$

- première factorisation : $(8x + 4) = 4(2x + 1)$
- deuxième factorisation : $(4x^2 - 1) = (2x + 1)(2x - 1)$
- troisième factorisation :
  $4(2x + 1) + (2x + 1)(2x - 1) = (2x + 1)[4 + (2x - 1)]$ ...

— savoir contrôler le résultat d'une factorisation en développant le produit obtenu, ou en calculant les images de quelques réels bien choisis par l'application-polynome considérée.

Dans le premier cycle, il FAUT PROSCRIRE, du savoir minimum, les exercices de factorisation qui demandent une certaine virtuosité. Les factorisations se prêtent à des abus. Désirer que l'élève soit apte à suivre le professeur sur des exemples plus complexes est différent d'exiger qu'il possède les dites techniques de factorisation.

• Savoir trouver l'écriture réduite d'une somme, d'un produit de polynomes.

• Si A, B, C, D sont des écritures-polynomes du premier degré, savoir résoudre, dans **R**, les équations :

$$A.\,B.\,C.\,D. = 0 \qquad \text{et} \qquad A.\,B = A.\,C$$

• Savoir calculer f(x) lorsque x a une valeur numérique fixée, c'est-à-dire :

— calculer l'image d'un réel donné par une application-polynome, en utilisant la forme la plus commode pour chaque réel : forme factorisée, forme réduite, ou autre forme ;

— organiser le calcul avec clarté.

• Savoir simplifier, lorsque c'est possible, une écriture-quotient de polynomes.

On pourra, par exemple, proposer des exercices de la forme suivante :

Soit p l'application :

$$p \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \left\{4\,;\dfrac{5}{2}\right\} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(3x-7)^2 - (2x-3)^2}{(x-4)(3x-2) - (x-4)(5x-7)} \end{array} \right.$$

1° Pourquoi l'ensemble de départ de l'application p est-il $\mathbf{R} \setminus \left\{4\,;\dfrac{5}{2}\right\}$ et non **R** ? (Pour répondre à cette question on factorisera le dénominateur de p(x)).

2° Simplifier p(x).

Classification des MOTS se rapportant au thème

POLYNOME

Mots	Code	Mots	Code
addition (des polynomes)	S	identité remarquable	*
		membre	***
affine (application)	***	monome	Δ
binome	S	multiplication (des polynomes)	S
coefficient directeur	*		
coefficients d'un polynome	***	nul	***
		polynome	***
commun (facteur)	*	quotient	***
constante	*	rationnelle (fraction)	S
degré	***	réduire	*
développer	*	réduit	*
écriture	***	semblables (termes)	Δ
égalité	***	simplifier	*
expression algébrique	S	terme	***
facteur	***	trinome	S
factorisation	*	valeur (d'une expression)	S
factoriser	Δ		
fonction rationnelle	S	variable	Δ
fraction rationnelle	S	variation (tableau de)	S

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

DIVISION EUCLIDIENNE

MOTS

division euclidienne
dividende
diviseur euclidien
quotient euclidien
reste

• Ne pas confondre : *quotient euclidien de a par b* (a et b désignant des naturels ; $b \neq 0$), et *quotient de a par b*, noté $\frac{a}{b}$ ou a : b (a et b désignant des réels ; $b \neq 0$).

Et savoir quand ces deux quotients sont égaux.

NOTATIONS

Ecrire
"Le quotient euclidien de 16 par 3 est 5, et le reste est 1"
sous la forme suivante :

$$16 = 3 \times 5 + 1 \quad \text{et} \quad 1 < 3 .$$

Ne pas écrire $16 : 3 = 5 + 1$
ni $16 : 3 = 5$ reste 1 .

ENONCES

1 A tout couple de naturels (a,b), $b \neq 0$, la *division euclidienne* associe un couple unique de naturels (q,r) tel que :

$$bq \leqslant a < b(q+1) \quad \text{et} \quad r = a - bq$$

ce qui est synonyme de :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad r < b$$

Remarque :

Si $a < b$, $a = 0 \times b + a$ et $a < b$;

donc, dans ce cas également la division euclidienne est bien définie : elle associe au couple (a,b) le couple (0,a).

(2) Soit a, b, q et r des naturels tels que :

$$b \neq 0 \quad , \quad a = bq + r \quad \text{et} \quad r < b \quad .$$

- q est l'*approximation entière par défaut* du rationnel $\frac{a}{b}$.

- Le fait que $r = 0$ est caractérisé par l'une quelconque des phrases suivantes :

a est *multiple* de b ;
a est *divisible* par b ;
b est *un diviseur* de a .

SAVOIR-FAIRE

— Ne pas oublier $r < b$.

— Bien savoir que, quel que soit le naturel a, le couple (a,0) n'a ni *quotient euclidien* ni *reste*.

— Savoir traduire :

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array} \quad \text{par} \quad 23 = (5 \times 4) + 3 \quad \text{et} \quad 3 < 5 \,.$$

Note :

Le mot *euclidien* est commode car il évite de dire : "division avec reste (le reste pouvant être nul)" et "quotient entier par défaut".

Classification des MOTS se rapportant au thème DIVISION EUCLIDIENNE

Mots	Code
approximation entière par défaut	*
dividende	***
diviseur	***
divisible	***
division euclidienne	***
multiple	***
quotient euclidien	***
quotient exact	S
reste	***

VALEUR ABSOLUE

MOT

valeur absolue

NOTATION

$|a|$

ENONCES

- $|a|$ est un réel positif (au sens large).
- Si a est un réel positif (au sens large) : $|a| = a$
- Si a est un réel négatif (au sens large) : $|a| = -a$
- Quels que soient les réels a,b,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Si $b \neq 0$,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$$

- Quels que soient les réels a, b :

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \ .$$

- $|a|$ est le plus grand des deux réels a et $\mathrm{opp}(a)$.

SAVOIR-FAIRE

- Les écritures $|5|$ ou $|-5|$ ou $|\pi-3|$ ou $|3-\pi|$ ne doivent pas figurer plusieurs fois dans une suite de calculs, mais être remplacées le plus tôt possible par l'écriture simplifiée.

Remarque

Ne pas oublier que les barres de valeur absolue imposent, comme des parenthèses, des modifications dans l'organisation d'un calcul (voir rubrique *Parenthèses et priorités*).

- L'étude des applications dans **R** du type :

$x \longmapsto |2x - 3|$

ou $y \longmapsto |2y - 3| + |7 - y|$

n'est pas exigible.

RACINE (S) CARRÉE (S)

MOTS

racine carrée
radical
rationnel
irrationnel

ENONCES

• Quel que soit le réel strictement positif A, on démontre et nous admettrons qu'il existe deux nombres réels, l'un positif, l'autre négatif, dont le carré est égal à A. (En d'autres termes l'équation dans **R** $x^2 = A$ admet deux solutions opposées).

Les points de vue divergent au niveau des notations et des définitions.

Pour les uns (1)

Par définition, les deux nombres ci-dessus sont appelés *les deux* racines carrées du réel positif A ; l'un est la racine carrée positive, l'autre est la racine carrée négative. La racine carrée positive est notée $\sqrt{A}$, ce qui se lit "radical de A" ou "racine carrée positive de A", qu'il y aura intérêt à dire assez longtemps en troisième.

Pour les autres (2)

Par définition, celui des deux nombres qui est positif est appelé *la* racine carrée de A. On le note $\sqrt{A}$ et cette écriture se lit "racine carrée de A". Le symbole "$\sqrt{\ }$" est appelé un "radical".

DISCUSSION DE CES DEUX POINTS DE VUE

Point de vue n° 1 : On pense à l'avenir. Dans d'autres classes on parlera, avec un autre ensemble, *des* racines carrées d'un nombre réel, *des* racines cubiques d'un nombre réel.

Point de vue n° 2 : Tout nombre positif A admet une et une seule racine carrée représentée par l'écriture $\sqrt{A}$. Si l'on adopte ce point de vue :

— on n'a pas de mot pour éviter la périphrase "les nombres réels dont le carré est 5",

— on restreint immanquablement le champ de sa pensée aux positifs, alors que l'on avait réussi en introduisant **Z** en sixième à lutter contre l'unique présence des positifs jusqu'à 13 ans, et à inhiber le réflexe qui conduirait à écrire :

"Si $x^2 = 4$, alors x est un des nombres dont le carré est 4, d'où $\sqrt{4} = \pm 2$".

Le programme, lui, se borne à rappeler :

"Le symbole $\sqrt{a}$ désigne le nombre réel positif ou nul b, appelé racine carrée de a, tel que $b^2 = a$".

Cette phrase n'exclut pas le point de vue (1).

Dans l'usage courant, l'écriture $\sqrt{2}$ est lue "racine de 2" et non "radical de 2" (voir "trigo", $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en physique). Mais, si on lit "racine de 2", de laquelle des 2 racines s'agit-il dans l'esprit de l'élève ?

- Quel que soit le réel b : $\sqrt{b^2} = |b|$
- Pour tout réel positif b : $(\sqrt{b})^2 = b$
- Si a et b désignent des réels positifs,

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (à rapprocher de $a^2 b^2 = (ab)^2$)

si de plus $b \neq 0$,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (à rapprocher de $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$)

Mais en général

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (à rapprocher de $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$)

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (à rapprocher de $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$)

- Un réel strictement négatif n'a pas de racine carrée.

SAVOIR-FAIRE

- Savoir passer *directement* de l'écriture $\sqrt{(-3)^2}$ à 3 et de l'écriture $(3 - \sqrt{b})(3 + \sqrt{b})$ à $9 - b$.

- En présence de $\sqrt{z}$, se préoccuper d'abord de savoir si $z \geqslant 0$.

Exemple : $\sqrt{16+49}$, $\sqrt{\pi-4}$, $\sqrt{(-5)^2}$, $\sqrt{-3^2}$, $\sqrt{3^2-2^2}$, $\sqrt{3^2+2^2}$, ... :
reconnaître dans cette liste les écritures qui représentent un réel.
Par contre, on réservera pour la seconde des exercices comme :
Ensemble d'existence des fonctions dans **R** :

$$x \longmapsto \sqrt{3-x}\,,\quad u \longmapsto \sqrt{u^2+1}\,;\quad y \longmapsto \sqrt{y^2+5y+1}\ \ldots$$

• Avoir conscience que le symbole $\sqrt{\ }$ joue le rôle d'un couple de parenthèses en ce qui concerne les priorités.

<u>NE PAS CONFONDRE :</u> $\sqrt{a+b}$ avec $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

• Savoir trouver un encadrement de $\sqrt{a}$ en utilisant une table de carrés.

Remarque

Il est utile d'accompagner la résolution de l'équation dans **R** $x^2 = 7$ du calcul d'une approximation de chaque solution, par exemple :

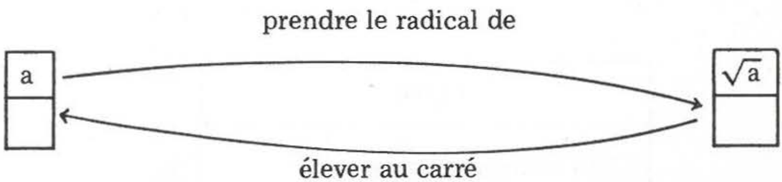
$$\sqrt{7} \simeq 2{,}65 \quad \text{et} \quad -\sqrt{7} \simeq -2{,}65$$

• Savoir passer de $\sqrt{75}$ à $5\sqrt{3}$ et vice-versa, mais :

Ne pas expulser systématiquement les radicaux des dénominateurs. Il arrive qu'on sanctionne, A TORT, au B.E.P.C., les candidats qui donnent comme réponse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$! ! !

Par contre, montrons aux élèves l'avantage qu'il y a souvent à s'intéresser simultanément à deux écritures d'un même nombre.

• Savoir compléter des schémas du type :



où *a* est un réel positif, numériquement connu.

• Savoir résoudre les équations du type $x^2 + a = 0$ (a étant un réel numériquement donné).

NOTATIONS

La notation $\sqrt{a}$ est indispensable.

La notation $a^{\frac{1}{2}}$ paraît superflue dans le premier cycle.

Classification des MOTS se rapportant au thème
RACINE(S) CARREE(S)

Mots	Code
carré d'un nombre	***
carré parfait	S
conjugués (réels)	S
irrationnel	***
racine carrée	***
racine cubique	S
radical	***
radicande	*
rationnel	***
table	*

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

ENSEMBLES NUMÉRIQUES

MOTS ET NOTATIONS

Dans le dictionnaire de l'A.P.M.E.P. :

ensemble des *naturels* (zéro compris) : **N**
ensemble des *entiers* : **Z**
ensemble des *décimaux* : **D**
ensemble des *rationnels* : **Q**
ensemble des *réels* : **R**

$\mathbf{R}_*$: ensemble des réels privé de 0

$\mathbf{R}^+$: ensemble des réels positifs (y compris 0)

$\mathbf{R}^-$: ensemble des réels négatifs (y compris 0)

Chiffre ; "chiffres décimaux" ou mieux "décimales", chiffre des unités, des dizaines, etc...

Ecriture chiffrée d'un nombre.

Naturel à trois chiffres (en base *dix*).

Nombre ; numération, systèmes de numération, base d'un système de numération

Nombres écrits sous la forme :
24° 8' 13" et 3 heures 40 mn 10 s.

Naturel pair, naturel impair, naturel premier

Fraction est un mot du langage courant ; on doit le prendre dans le sens de "*écriture* fractionnaire" (le quotient de 1 par 2 a pour écriture fractionnaire $\frac{1}{2}$, pour écriture décimale : 0,5; etc...). Numérateur, dénominateur (se reporter à la brochure A.P.M.E.P. "MOTS").

ENONCES

- **N** est inclus dans **Z** (on identifie **N** et $\mathbf{Z}^+$).
  Z est inclus dans **D** ; **D** est inclus dans **Q** ;
  Q est inclus dans **R** .

- Beaucoup d'énoncés essentiels se trouvent déjà dans d'autres rubriques : *Equations, Opérations classiques, Parenthèses et priorités, Calculs approchés ...*

Compte tenu de ce qui est dit dans ces fiches, le savoir minimum d'un élève de troisième au sujet des ensembles numériques se résume aux savoir-faire.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir modifier l'écriture d'un *réel* pour mettre en évidence son appartenance à certains sous-ensembles de **R** : **N, Z, D, Q** .

• Pour chacune des équations en x suivantes :

$$a + x = b \quad , \quad ax = b \quad , \quad x^2 = a \quad ,$$

a et b étant donnés numériquement et pour chacun des référentiels choisis parmi **N, Z, D, Q** et **R**, savoir si l'ensemble des solutions est vide ou non.

• Savoir calculer dans **R** (voir fiche *Opérations classiques*). En particulier calculs sur *durées, écarts angulaires.*

• Savoir utiliser une table de *carrés* et de *racines carrées.*

• Savoir que l'on peut écrire un *naturel* en *base* autre que *dix* et savoir retrouver une méthode pour changer de *base.*

OBJECTIFS ESSENTIELS DU PROFESSEUR

• Faire percevoir un nombre comme un être mathématique susceptible de plusieurs *représentations.* On ne "voit" jamais un nombre, on n'en perçoit que diverses représentations (écrites ou orales) qu'il conviendra de choisir suivant les besoins que l'on aura.

• Faire distinguer *chiffre* et *nombre.*

Les *chiffres* sont des symboles utiles pour représenter les nombres. Le chiffre "3" représente un naturel. Les chiffres "7", "3", "2" écrits dans un certain ordre : "732", constituent l'écriture chiffrée (en base ...) d'un *naturel* qu'on appelle "naturel 732" pour "naturel qui s'écrit "732" en base ...".

• Faire percevoir qu'un nombre ne s'écrit pas toujours avec seulement des *chiffres*, certains s'écrivant même sans aucun chiffre :

$$-2 \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \sqrt{3} \; ; \; 5{,}6 \; ; \; \pi \; ; \; \text{cinq} \; .$$

Faire percevoir que "somme des chiffres d'un naturel a" est un abus commode, remplaçant "naturel somme des naturels de un chiffre codés par chacun des chiffres figurant dans l'écriture de a".

• Il est utile de situer historiquement les problèmes des ensembles de nombres et du codage des nombres ; en particulier, l'insuffisance d'un ensemble de nombres pour résoudre un ou plusieurs problèmes pourra constituer une motivation, parmi d'autres, à l'introduction d'une extension de cet ensemble.

• *Ecriture des entiers*

L'écriture choisie dans chaque classe, lors de l'introduction des entiers, devra laisser la place au moment choisi par le professeur (de préférence fin de cinquième ou en quatrième) au codage classique. Ce codage classique doit être familier aux élèves à la fin de la quatrième, au plus tard en troisième.

Classification des MOTS se rapportant au thème

ENSEMBLES NUMERIQUES

Mots	Code	Mots	Code
base (de numération)	***	nombre complexe	S
binaire (système de numération)	S	numération	***
chiffre	***	numérateur	***
codage	*	pair	***
coder	*	période	*
crible	S	périodique (écriture)	*
décimal	***	pi (π)	***
décimale (unité)	***	positif	***
dénombrement	*	premier	***
dénominateur	***	rapport (de deux réels)	S
développement périodique	S	rationnel	***
écriture	***	réel	***
entier	***	relatif (entier)	S
fractionnaire (écriture)	***	rond (chiffre)	S
illimitée (suite)	S	signe	***
impair	***	simplifier (une fraction)	*
irrationnel	***	suite décimale	S
irréductible	*	symbole	***
naturel	***	système de numération	***
négatif	***	unités (chiffre des)	*
nombre	***	virgule	***
		zéro	***

chapitre III

QUELQUES PRATIQUES

ORDRE DE GRANDEUR ET CALCULS APPROCHÉS

MOTS

calcul approché
encadrement
intervalle
ordre de grandeur (ou évaluation)
table(s)

L'ordre de grandeur s'écrit en général (ou souvent ...) en physique sous la forme d'un nombre ayant sa partie entière comprise entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10.

Exemple : $1,2 \times 10^{-4}$ et non 12×10^{-5}.

Remarque

L'accord sur les mots suivants : *valeur approchée*, *valeur approchée par défaut*, *valeur approchée par excès*, *à* 10^{-2} *près* ... est difficile et il serait souhaitable qu'il se fasse sur la position prise par l'A.P.M.E.P. sur le mot *approximation* (recherche de l'approximation d'un nombre au sens du dictionnaire A.P.M.E.P. 1969, 3/4, n° 271).

Exemples

Nombres	π	$-\sqrt{5}$
Approximation décimale (1) d'ordre 1, par défaut	3,1	– 2,3
Approximation décimale (1) d'ordre 2, par excès	3,15	– 2,23

(1) *Décimale* est souvent sous-entendu

NOTATIONS

Trois formulations peuvent être utilisées :

$3{,}5 \leqslant x < 3{,}6$ ou $35 \times 10^{-1} \leqslant x < 36 \times 10^{-1}$
3,5 est l'approximation d'ordre 1, par défaut, de x
3,6 est l'approximation d'ordre 1, par excès, de x

A la rigueur, $x \in [3{,}5\,;\,3{,}6[$ pourra être utilisé.

> *Remarque*
>
> L'écriture littérale
>
> $$a\,.\,10^p \leqslant x < (a+1)\,.\,10^p$$
>
> ne pourra être exigée.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir passer de l'écriture de l'intervalle à l'encadrement correspondant et inversement.

• Savoir évaluer, si possible mentalement, ou encadrer, la somme et le produit de deux décimaux, le quotient de deux naturels, la racine carrée positive d'un naturel (en particulier savoir penser au contrôle en évaluant mentalement l'ordre de grandeur d'un résultat).

• Savoir utiliser une table de carrés, de racines carrées, d'inverses (nous aimerions que les élèves du premier cycle aient eu l'occasion, la plus fréquente possible, de constituer et d'utiliser des tables, en particulier pour encadrer l'image d'un réel par une application lorsque cette image ne figure pas dans la table de l'application).

Exemple 1

$f(x) = x^2 - 4x + 12$

x	f(x)
− 2	. . .
6	24
7	33
⋮	⋮

Exemple 2

Dans R^+

x	x^2
3	9
. . .	16
2,2	. . .
$\sqrt{y}$	y

Exemple 3

$f(x) = \sin_D x$

x	f(x)	
. . .	. . .	. . .
30	0,5	60
. . .	. . .	. . .
	g(y)	y

$g(y) = \cos_D y$

Mais la pratique de l'interpolation linéaire ne saurait être exigée.

Classification des MOTS se rapportant au thème

ORDRE DE GRANDEUR ET CALCULS APPROCHES

Mots	Code	Mots	Code
approché (calcul)	*	incertitude	Δ
approximation	***	indécidable	S
arrondi	S	interpolation linéaire	S
défaut (par)	***	intervalle	***
diamètre d'un intervalle	*	milieu d'un intervalle	S
		ordre de grandeur	***
encadrement	***	précision	Δ
erreur	*	table	Δ
évaluation à ... près	*	valeur approchée à ... près	S
excès (par)	***		

MOTS I et II

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire : égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (brochure 1974) ; représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition, équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (brochure 1975).

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 × 21, sont perforées. La première brochure (1974) a 106 pages ; la suivante (1975) en a à peu près autant.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants :

chacune des deux brochures : 6 F (port compris : 8 F)

Pour se les procurer, s'adresser à la Régionale (ou à la Départementale) de l'APMEP.

CONSOLIDATION ET APPROFONDISSEMENT DU CALCUL NUMÉRIQUE ÉTUDIÉ A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

MOTS

contrôler (voir fiche "auto-contrôle")
multiple ; diviseur ; naturel premier

A ce niveau le mot "algorithme" ne semble pas nécessaire.

ENONCES

• Quels que soient les naturels a et b, les phrases suivantes sont synonymes :

a est *multiple* de b	b est *diviseur* de a	il existe un naturel k tel que $a = k \times b$

Remarque :

On devra accepter une formulation analogue où "entier" aurait remplacé "naturel".

• a et b désignant des naturels,

$$\text{si} \left\{ \begin{array}{l} a \text{ est } \textit{multiple} \text{ de } b \\ a \neq 0 \end{array} \right. , \quad \text{alors } a \geqslant b$$

• Existence et unicité de la $\left|\begin{array}{l}\text{factorisation}\\ \text{décomposition}\end{array}\right|$ d'un naturel en produit de naturels premiers.

• Les critères (ou caractères) de divisibilité par 2, 3... ne figurent pas au programme du premier cycle.

Il semble pourtant utile de les connaître.

On pourra les traiter en les replaçant dans le contexte d'exercices de calculs mentaux où on cherche à reconnaître si a est multiple de b.

Exemple 759 est-il multiple de 7 ?

$$759 = 700 + 59$$
$$= 700 + 49 + 10. \quad \textit{Non.}$$

Devraient être connus les critères de divisibilité par 2, 5, 3, 9 et, pour un naturel n donné numériquement, par 10^n.

Des exercices pourront conduire à trouver rapidement les critères de divisibilité par 4 et par 25.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir écrire un naturel non premier, pas trop grand, sous forme de produit de *naturels premiers* (*exemple* $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$) ou sous la forme condensée (*exemple* $48 = 2^4 \times 3$).

• Savoir reconnaître qu'un naturel, pas trop grand, est *premier*.

La méthode "classique" : diviser successivement le naturel n par les naturels premiers plus petits que $\sqrt{n}$, est superflue, mais *l'utilisation* (après l'avoir confectionnée en particulier) d'une *table* de naturels premiers est une connaissance indispensable (cela sous-entend la possession par l'élève d'une telle table).

• Savoir calculer le P.G.C.D. et le P.P.C.M. de deux naturels.

• *Opérations.* Pratique de la multiplication des nombres décimaux positifs, et de la division des naturels. (La division de deux décimaux positifs se ramène à la précédente si la technique de "simplification d'écritures fractionnaires" est dominée).

Classification des MOTS se rapportant au thème
CONSOLIDATION ET APPROFONDISSEMENT DU CALCUL ETUDIE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Mots	Code	Mots	Code
algorithme	S	impair	***
approché	***	itération	S
approximation	***	moyenne	*
calcul	***	multiple	***
calculer	***	naturel	***
compter	*	naturel premier	***
contrôler	***	nombre à virgule	*
critère (caractère		opération	***
de divisibilité)	Δ	opérateur	S
		pair	***
diviseur	***	P.G.D.C.	***
divisibilité	*	P.P.M.C.	***
facteur	***	primaire (écriture)	S
factorisation	Δ *	terme	***
factoriser	Δ *	vérifier	Δ

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

LONGUEUR, AIRE, VOLUME

MOTS

• Trois sortes d'êtres sont habituellement considérés quand on veut analyser les pratiques de mesurage :

— l'objet,
— la classe des objets de même mesure,
— la valeur de cette mesure relativement à une unité donnée.

Le vocabulaire voudrait permettre la succession de ces étapes (surface → aire → mesure de l'aire).

• D'autre part, les mots *surface*, *aire*, *mesure de l'aire* sont utilisés (surtout le premier) dans la vie courante et il semble souhaitable de ne pas isoler la notion mathématique de son utilisation habituelle (même abusive).

• Il semble sage d'être plus exigeant sur la pratique du mesurage et la manipulation des unités de mesure que sur l'utilisation (ou non) par les élèves de mots tels que "mesure de la surface", "superficie", "mesure de l'aire d'une surface", etc...

De toute manière, il semble exagéré de pénaliser des élèves qui emploieraient — ou non — de telles expressions.

Remarque

Bien des difficultés sont introduites par les différents sens du mot *mesure*. Le mot *mesurage* est commode. Il permet de réserver le mot *mesure* pour désigner le nombre résultat du mesurage.

NOTATIONS

en cm : mes C = 4
en mm^2 : mes S = 28
en m^3 : mes V = 30

ou, si par convention s est la mesure, en mm^2, de S :

$$s = 28$$

Remarques

1 Un point essentiel étant celui de l'incertitude sur la lecture d'une évaluation, la notation ... < s < ... facilitera la réponse écrite (sous forme d'encadrement).

2 Il paraît nécessaire que les élèves aient découvert (par la pratique *effective* de mesurages avec diverses unités), donc sachent, que la mesure d'un objet est d'autant plus grande que l'unité choisie est plus petite.

3 L'utilisation d'unités familières non normalisées sera maintenue (hectare, are ...)

SAVOIR-FAIRE

• *Formules*
— le périmètre (ou longueur) du cercle,
— l'aire du carré, du rectangle, du triangle, du disque,
— le volume du cube, du parallélépipède rectangle.

• *Savoir utiliser* ces formules pour évaluer l'aire de polygones simples, en particulier du trapèze, du parallélogramme.

• *Savoir changer d'unité* (trouver la mesure en mm^2 à partir de la mesure en cm^2).

• Pour des objets concrets donnés, *savoir apprécier* l'ordre de grandeur d'une mesure.

• *Savoir encadrer* la mesure de l'aire d'un polygone donné à l'aide :
— d'un quadrillage,
— d'encadrements des mesures des dimensions pour les figures simples.

Classification des MOTS se rapportant au thème LONGUEUR – AIRE – VOLUME

Mots	Code
agraire	S
aire	***
angström	S
approché (calcul)	***
are	*
capacité	S
centimètre	***
décimètre	***
distance	***
encadrement	***
évaluation	*
hectare	***
hectomètre	***
kilomètre	***
largeur (d'un rectangle)	*
longueur (d'un rectangle)	*
longueur (d'un segment)	*
mesure	***
mètre	***
micron	*
millimètre	***
ordre de grandeur	***
périmètre	***
pi (π)	***
superficie	S
surface (dans le sens de mesure)	S
unité de mesure	***
volume	***

LA RÈGLE DE TROIS... A-T-ELLE DISPARU ?

• Le mot "proportionnalité" ne figure pas d'une manière explicite dans les programmes du premier cycle ; mais quelques années d'expérience montrent que cette notion *indispensable* fait partie intégrante des activités suivantes (et de bien d'autres ...) :

— sixième : relations numériques (échelles, changements d'unités, mesurages ...).

— cinquième : multiples et étude des applications dans **Z** notées $\times n$, prolongement des "opérateurs" de l'école élémentaire ...

— quatrième : énoncé de Thalès et lien avec les égalités de quotients de réels.

— troisième : applications linéaires dans **R**.

• Remarques pour les professeurs :

a) L'énoncé :

$$\text{Si } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ alors } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{ma + nb}{ma' + nb'}$$

n'est qu'une traduction (partielle, car elle suppose que les dénominateurs sont non nuls) de :

Si f est une application linéaire, alors $f(ma+nb) = mf(a) + nf(b)$

b) L'habitude ancienne de traduire l'existence d'une application linéaire par une suite d'égalités de quotients a le tort d'escamoter le couple (0,0).

MOTS

pourcentage (et sa notation %)

"Les nombres a, b, c ... sont proportionnels aux nombres a', b', c' ..." : expression inutile ; on pourra tout de même signaler aux élèves qu'ils peuvent la rencontrer, et leur donner un ou deux énoncés contenant cette expression ; on lui préférera :
"La suite de nombres (a, b, c ...) est *proportionnelle* à la suite de nombres (a', b', c' ...)".

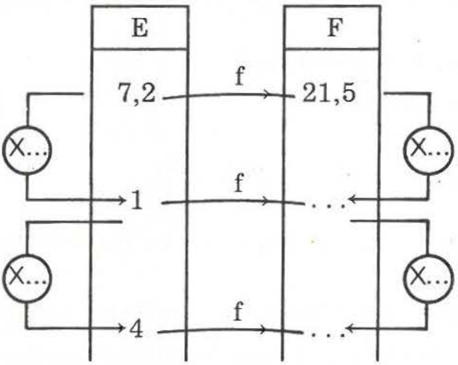
SAVOIR-FAIRE

L'ensemble des méthodes qui suivent recouvre et remplace avantageusement la "règle de trois".

• En troisième, savoir reconnaître des *applications linéaires* dans des problèmes de la vie courante. L'expression, à leur sujet, de "situation de proportionnalité" peut être commode à la *condition* que l'*application linéaire* sous-jacente soit parfaitement définie (source, but, graphe ou coefficient).

• Savoir dire pourquoi une situation concrète donnée n'est pas une situation de proportionnalité.

• Une *application linéaire* f de E vers F étant donnée, savoir compléter des tableaux du type :



Le passage par "l'élément 1" n'est pas obligatoire.

et savoir les traduire en français,

par exemple en disant :
"si l'image de 7,2 est 21,6, alors l'image de 7.2 : 7,2 est 21,6 : 7,2 (linéarité de f). L'image de 1 étant donc 3, l'image de 4×1 est 4×3, c'est-à-dire 12".

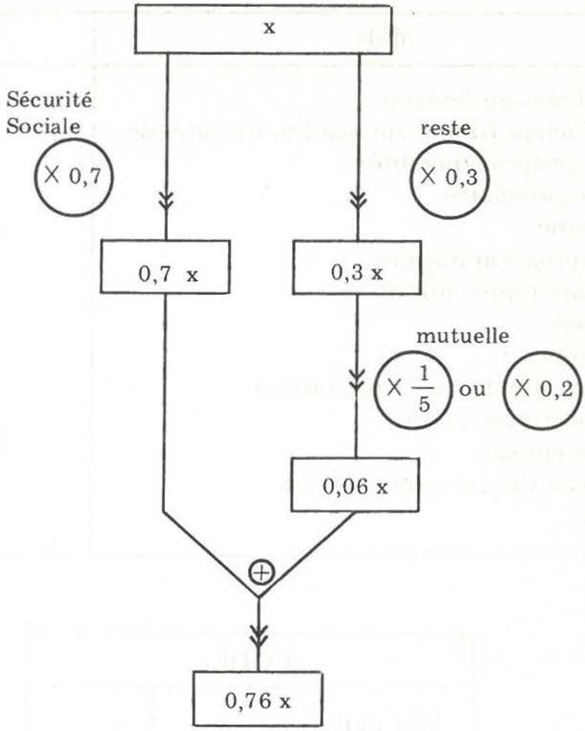
Dès la sixième, ce type de tableau peut être utile, renouant ainsi avec des problèmes vraiment concrets (échelles par exemple). Les livres de géographie utilisent largement ce moyen ; il semble souhaitable qu'une présentation en soit faite par le professeur de mathématique.

• Savoir passer de 80 % à $\times\ 0,8$, de 150 % à $\times\ 1,5$.

• Savoir utiliser la notion d'*application linéaire* dans des situations diverses ; en particulier, reconnaître un *pourcentage* comme *coefficient d'une application linéaire.*

Exemples

1) Savoir analyser : "La Sécurité Sociale lui rembourse 70 % des frais et sa mutuelle les 20 % du reste" et traduire ce texte par un schéma :



2) On peut illustrer la conversion "degrés-grades" par un tableau de correspondance :

mesure en degrés	mesure en grades
0	0
180	200
x	$x \times \frac{10}{9}$

$\times \frac{10}{9}$

Classification des MOTS se rapportant au thème
PROPORTIONNALITE

Mots	Code
combinaison linéaire	S
coefficient (d'une application linéaire, de proportionnalité)	*
correspondance	S
extrême	S
interpolation linéaire	S
linéaire (application)	***
moyen	S
proportion	S
proportionnalité (situation de)	*
proportionnels(elles)	*
pourcentage	***
tableau (de correspondance)	*
taux	S

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

TRIGONOMÉTRIE [*]

Il s'agit ici de "mathématiques appliquées" (dites "pratiques"). Les savoir-faire suivants en seront l'essentiel.

SAVOIR-FAIRE

• α étant un écart angulaire numériquement donné, savoir relever dans une table trigonométrique

$$\cos_D \alpha \ , \ \cos_G \alpha \ , \ \sin_D \alpha \ , \ \sin_G \alpha \ , \ \mathrm{tg}_D \alpha \ , \ \mathrm{tg}_G \alpha$$

ou un encadrement des réels précédents.

• Savoir représenter $\cos_D \alpha$, $\cos_G \alpha$, $\sin_D \alpha$, $\sin_G \alpha$ à l'aide d'un demi-cercle de rayon 1 (demi-cercle dit "trigonométrique"), et savoir utiliser cette représentation pour retrouver

$$-1 \leqslant \cos_D \alpha \leqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant \sin_G \alpha \leqslant 1 \ ...,$$

les signes de ces réels, ainsi que quelques valeurs particulières.

• Savoir calculer, en utilisant les propriétés du triangle rectangle, du triangle isocèle ou du triangle équilatéral :

$\cos_D 60$, $\sin_D 60$, $\mathrm{tg}_D 60$, $\sin_D 30$, $\cos_D 30$, $\mathrm{tg}_D 30$, $\sin_D 45$, $\cos_D 45$, $\mathrm{tg}_D 45$.

ENONCES

• Dans tout triangle ABC rectangle en A :

$$\sin_D B = \frac{d(A,C)}{d(B,C)} \qquad \cos_D B = \frac{d(A,B)}{d(B,C)}$$

$$\mathrm{tg}_D B = \frac{d(A,C)}{d(A,B)}$$

• Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

• α et β représentant des écarts angulaires en degrés,

$$\alpha + \beta = 90 \ \text{ entraîne } \ \cos_D \alpha = \sin_D \beta$$
$$\text{et } \ \cos_D \beta = \sin_D \alpha \ .$$

[*] Voir aussi la rubrique *Angles*.

• Quel que soit le réel α compris entre 0 et 180,

$$(\cos_D \alpha)^2 + (\sin_D \alpha)^2 = 1$$

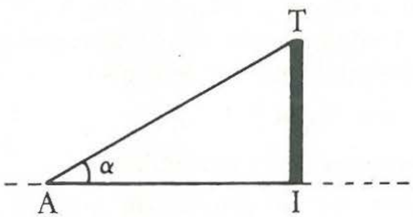
• Quel que soit le réel α, différent de 90 et élément de [0,180],

$$\mathrm{tg}_D\,\alpha = \frac{\sin_D \alpha}{\cos_D \alpha}$$

Remarque fondamentale

La connaissance des énoncés précédents suppose l'aptitude à les utiliser dans des situations concrètes.

Exemple :



Recherche de la hauteur d'une tour :

· à l'aide d'un goniomètre on repère l'écart angulaire α ;

· au sol il est souvent possible de mesurer d(A,I).

MOTS

cosinus indice D (resp. indice G) d'un écart angulaire indice D (resp. indice G), sinus indice D (resp. indice G) d'un écart angulaire indice D (resp. indice G), tangente indice D (resp. indice G) d'un écart angulaire indice D (resp. indice G).

Bien que non conformes au programme, l'expression "cosinus d'un angle" (et la notation "cos 45°") seraient préférables.

table trigonométrique

Le mot "radian" ne figure pas au programme de troisième.

NOTATIONS

$\cos_D 30$ $\sin_G 15$ $\mathrm{tg}_D 22$

UNE REMARQUE

"Tôt et progressivement" ... : il est souhaitable de ne pas attendre la fin de la classe de troisième pour parler de "trigonométrie". En particulier, on peut traiter cette partie du cours sans les isométries (voir "Enoncés").

Classification des MOTS se rapportant au thème

TRIGONOMETRIE

Mots	Code	Mots	Code
angle	***	radian	S
cotangente	S	rapport (de projection orthogonale)	*
cosinus	***	sinus	***
degré	***	table	*
grade	***	tangente	***
interpolation linéaire	S	trigonométrie	Δ
ligne trigonométrique	S	trigonométrique (demi-cercle)	*
mesure	***		
pente	S		
quadrant	S		

UNE NOUVELLE PUBLICATION DE L'A.P.M.E.P. POUR L'ECOLE ELEMENTAIRE

En 1972, l'A.P.M.E.P. publiait **La Mathématique à l'Ecole Elémentaire** ; cet ouvrage collectif est maintenant épuisé. Ce succès, ainsi que les nombreuses demandes de publications analogues, ont amené l'A.P.M.E.P. à regrouper, dans une plaquette d'une cinquantaine de pages, quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Elémentaire parus dans le Bulletin durant les trois dernières années.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes.

ELEM-MATH 1

CHOIX D'ARTICLES POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

publiés dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

est disponible au prix de 3 francs (4,15 F port compris).

Demandez-le à votre Régionale ou à votre Départementale.

Faites-le connaître à vos collègues instituteurs.

chapitre IV

GÉOMÉTRIE

LES OBJETS ÉLÉMENTAIRES DE LA GÉOMÉTRIE

MOTS

point
plan ; demi-plan
droite ; demi-droite ; direction
segment
perpendiculaire ; parallèle ; sécante

Par contre, les mots : "euclidien", "affine", "partie propre", "partie pleine" sont superflus.

NOTATIONS

Sans rien prohiber, il paraîtrait sain de prendre comme notation principale des objets géométriques la notation la plus simple : la droite AB, le triangle ABC, le segment BC ...

Mais il peut être utile dans certaines écritures condensées d'utiliser d'autres notations.

- Sont couramment employées :
  - — pour le segment AB : [AB] ;
  - — pour la droite CD : (CD) ;
  - — pour la demi-droite fermée 0x : [0x) ;
  - — pour la distance de A à B : d(A,B).

Plus généralement, quelle que soit la notation choisie pour un objet mathématique, on indiquera :

— l'existence de notations synonymes pour le même objet (et on en donnera explicitement certaines) ;

— le fait que la même notation peut, suivant le contexte, désigner deux objets mathématiques différents.

On ne cachera pas aux élèves l'absence de consensus sur le problème des notations (géométriques en particulier) et on en profitera pour faire sentir la nécessité de bien préciser la signification des conventions de langage écrit et oral que l'on adopte.

- Notations usuelles devant être connues des élèves :

  $\perp$ pour "est perpendiculaire à"

  // pour "est parallèle à"

ENONCES

Aucun ne paraît absolument indispensable, sauf :

- Une *droite* est déterminée par deux points.
- Tout point appartient à une, et une seule, *perpendiculaire* à une *droite* donnée.
- Tout point appartient à une, et une seule, *parallèle* à une *droite* donnée.
- Si l'intersection de deux *droites* est un singleton, elles sont dites *sécantes.*
- Deux *droites* d'un plan non *sécantes* sont dites *parallèles.*
- La relation de parallélisme entre droites du plan est une relation d'équivalence ; en particulier chaque droite est parallèle à elle-même.

Les classes de la partition qu'elle détermine sont les *directions.*

Si d et d' sont des droites du plan,

d et d' sont *parallèles*

est synonyme de

d et d' appartiennent à la même *direction*

SAVOIR-FAIRE

- Savoir utiliser une règle, un compas, une équerre.
- Savoir dessiner la perpendiculaire, passant par un point donné, à une droite donnée.
- Savoir dessiner la parallèle, passant par un point donné, à une droite donnée.
- Savoir qu'on ne représente que des *portions* de droites du "plan physique" (ou "plan matériel") et que l'extension du dessin est souvent utile.

Classification des MOTS se rapportant au thème OBJETS ELEMENTAIRES DE LA GEOMETRIE

Mots	Code	Mots	Code
affine (droite ; plan)	S	extrémité	***
axe (structure d')	S	incidence	S
bande	*	intersection (point d')	***
commun (point)	*	médiane	***
concourante(s)	*	médiatrice	***
concours (point de)	*	parallèle	***
demi (-droite ; -plan)	***	partie pleine	S
direction	***	partie propre	S
droite	***	plan	***
Euclide (axiome d')	S	point	***
euclidien (plan)	S	sécante(s)	***
euclidienne (droite)	S	segment	***

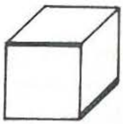
VOCABULAIRE COURANT DE LA GÉOMÉTRIE

Chacun des mots cités dans cette fiche est utilisé avec plusieurs acceptions. Cette polysémie pose des problèmes mais nous devons nous en arranger.

Exemples

• En géométrie physique des droites *parallèles* sont distinctes, alors qu'en mathématique elles peuvent être confondues.

• Certaines situations concrètes dans l'espace (par exemple les arêtes d'un cube) exigeront des précisions quant à l'emploi du mot *parallèle* ; celui-ci est utilisé correctement dans le plan sans avoir été défini.



• Un *rectangle* est : un ensemble de quatre points, ou une ligne, ou une intersection de quatre demi-plans, et suivant le contexte il est possible ou non que ce soit un carré !

• *Diamètre* désigne, selon les cas, un segment, une droite, une longueur, un nombre ...

• Le mot *perpendiculaire* est connu des élèves de sixième ; il est souvent rattaché à des situations expérimentales ; il n'est pas question de s'en priver, même avant qu'il ait été introduit "officiellement" au cours de la troisième.

Un essai de classement peut être tenté à partir de la répartition en mots indispensables (***), mots commodes (*) et superflus (S) et des situations où ils interviennent le plus souvent.

***	construire dessiner "se couper" joindre marquer	plan demi-plan	carré côté diagonale losange parallélo- gramme polygone quadrila- tère rectangle	angle arc cercle corde diamètre disque rayon	bissectrice côté équilatéral hauteur isocèle médiane médiatrice milieu rectangle (triangle—)	diamètre distance périmètre rayon
*	commun prolonge- ment tracer	courbe figure	bande	circonscrit	extrémité opposé	longueur (d'un segment)
S			hexagone pentagone . . .	cocyclique concen- trique inscrit		dimension largeur pente

L'apprentissage de nombreux autres mots peut se faire lors de l'examen de situations intéressantes motivant des discussions entre élèves et des comptes rendus de leur part (oblique, points alignés, points d'intersection ...).

Le vocabulaire relatif au triangle est plus ou moins tombé dans l'oubli. Il ne s'agit pas de le réhabiliter globalement mais de l'*associer à des comportements* et de s'assurer que l'élève ne manque pas de mots pour des descriptions assez naturelles (manipulation d'un miroir, équilibre d'une plaque triangulaire ...).

SAVOIR-FAIRE

• Etre capable de lire un texte comportant des mots codés "***" et "*" et de le traduire par un dessin ; des initiatives personnelles doivent pouvoir être prises : choix d'un point, d'une mesure, ... en tenant compte du contexte et cela sans se placer dans une situation particulière souvent rassurante et parfois trompeuse.

• Etre capable d'associer à un dessin une analyse de situation. Suivant l'objectif poursuivi, le dessin peut être :

— une incitation à la découverte de résultats qui devront être confirmés par un raisonnement déductif ou infirmés par un autre dessin ou par un raisonnement déductif,

— l'occasion d'une étude physique expérimentale, qui ne nécessitera pas un retour à une théorie axiomatique.

Exemple N° 1 : A la question "Les longueurs étant exprimées en centimètres, existe-t-il des triangles dont les côtés ont pour longueur 2, 3 et 4 ?" il est possible de donner deux types de réponse :

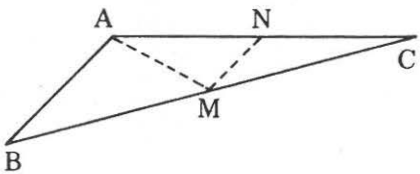
a) Oui, car je l'ai démontré.

b) Oui, car j'en ai dessiné un.

Dans les deux cas, la recherche s'appuie sur le dessin, mais évidemment de façon différente. Chacun des deux types d'activité devrait être familier aux élèves.

Exemple N° 2 : Il est tiré d'un test américain (mars 75) qui proposait 40 exercices de niveaux variés (troisième à terminale D) ; le candidat devait répondre en encadrant une des cinq réponses proposées.

Dans les conseils figurait cette phrase "... après réflexion, calcul exact, *dessin exact*, essai ..."

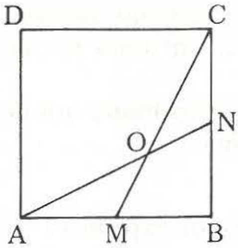


Le triangle ABC est tel que :
d(A,B) = 4,
d(A,C) = 8,
M est le milieu de (B,C),
et d(A,M) = 3.
Quelle est la longueur de [BC] ?

a) $2\sqrt{26}$ b) $2\sqrt{31}$ c) 9 d) $4 + 2\sqrt{13}$ e) information insuffisante.

Le candidat qui introduit le milieu N de [AC] et qui remarque que d(M,N) = 2 peut trouver la réponse correcte même s'il ne sait pas calculer BC ; en construisant au compas le triangle AMN, il obtient ABC et la mesure de [BC] avec une précision (erreur d'au plus 2 mm) qui lui permet d'éliminer les réponses a,b,c, et e (puisqu'il a pu construire).

Exemple N° 3 (extrait du même test) :



Dans la figure ci-contre ABCD est un carré ; M est le milieu de [AB] et N celui de [BC] ; AN et CM ont pour point commun O.

Le quotient

$$(\text{aire AOCD}) : (\text{aire ABCD})$$

vaut :

$$\frac{5}{6} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{\sqrt{3}-1}{2} \; ?$$

La résolution est simple. Mais le candidat peut aussi procéder ainsi : la figure lui montre que le nombre cherché est compris entre :

$$\frac{1}{2} \text{ et } \frac{3}{4}.$$

Or, des 5 nombres proposés seul $\frac{2}{3}$ appartient à cet intervalle. Le texte précédent constitue un exercice de sixième (avec par exemple 0,85 ; 0,7 pour les deux derniers choix).

- Etre capable d'associer à un dessin un ensemble de mesures et réciproquement (la réalisation du dessin s'accompagnera d'encadrements).

Des résultats obtenus par un calcul pourront être contrôlés par la lecture du dessin associé (ordre de grandeur).

POLYGONES
POLYÈDRES

Programme de sixième : "Etudes d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures" : "solides : cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution ; volumes, masses, masses volumiques".

Dans le *programme de cinquième* on relève : "sommets, faces et arêtes d'un tétraèdre et d'un pavé oblique".

Le mot "polygone" n'apparaît nulle part.

Il semble pourtant qu'il y ait mieux à faire en sixième-cinquième que :

— des manipulations pour "redécouvrir" ou justifier les formules relatives aux aires et aux volumes ;

— des exercices pour appliquer ces formules.

Ces travaux ont contre eux :

— d'être du "déjà vu" pour tous — et ceux qui en ont tiré le plus petit bénéfice ne sont pas mieux disposés à les reprendre que les autres ;

— de ne pas approfondir la vision spatiale, la prise de conscience des relations (plans parallèles, perpendiculaires, droites non sécantes orthogonales, plans de symétrie, centre de symétrie ...).

Par contre, nous trouvons dans les besoins du futur élève, du futur apprenti et du futur homme, une justification de ces derniers objectifs. Cette rubrique propose des activités qui donnent davantage accès à des expériences géométriques plus intéressantes et qui permettent d'ailleurs l'assimilation des "formules".

Il faut préciser que certains termes définis de façon pragmatique pour des activités matérielles, qui n'excluent pas la réflexion, devront être redéfinis dans le cadre d'une théorie déductive.

FORMULES

Il serait sage de les considérer comme des informations que l'on trouve ... dans un formulaire. Au premier cycle, les professeurs auraient avantage à prendre l'habitude de fournir ces formules chaque fois qu'une application s'en présente. Tant mieux si un jour ils s'entendent demander "Pourquoi $\frac{1}{3}$ bh ? Est-ce qu'on pourrait le prouver ? ".

NOTIONS

avec lesquelles une *familiarisation* est souhaitable :

- plan ; plans parallèles, perpendiculaires, plan de symétrie ;
- droite, droites parallèles, perpendiculaires ; droite de symétrie ;
- polygone convexe, polygone régulier ;
- prismes réguliers, pyramides régulières ;
- symétries comme applications de l'espace (du plan) sur lui-même.

MOTS

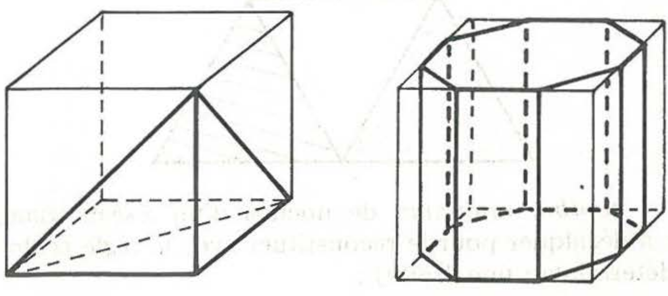
point, sommet
segment, côté, diagonale
droite de symétrie, centre de symétrie
polygone, triangle, quadrilatère, parallélogramme, rectangle, losange, carré
isocèle, équilatéral, rectangle (triangle)
hauteurs, médianes, médiatrices (d'un triangle)
parallélépipède rectangle, cube, pavé

La triple insuffisance du programme, des commentaires et de beaucoup de manuels sur ce sujet nous paraît justifier un paragraphe de plus :

STOCK D'EXPERIENCES A DEVELOPPER

Il peut énormément varier d'une classe à une autre tout en favorisant la formation des mêmes images mentales. L'énumération ci-dessous n'est qu'un exemple de ce qui peut être fait en sixième-cinquième.

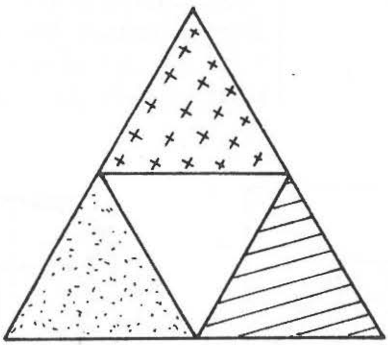
Matériel	Activités
Papier uni	Exercices de pliage, de découpage et de réassemblage.
Papier quadrillé	Recherche des tétraminos, pentaminos. Utilisation pour des puzzles.
Tubes extérieurs des stylos à bille usés, fils	Matérialisation de lignes brisées, de polygones, d'un cube (non rigide), d'un tétraèdre (rigide).
Compas	Triangle équilatéral ; hexagone régulier ; rosaces ; réseau régulier triangulaire, réseau hexagonal ...
Rapporteur	Réseau régulier triangulaire ...
"Treillage" régulier	Cheminements ; confection de polyèdres.
Papier quadrillé	Recherche des patrons du cube ; perspective cavalière du cube.
Bristol, règle, équerre, ciseaux, lame de rasoir, fils	Cube avec hublots et diagonales.
Pâte à modeler Pommes de terre	Polyèdres obtenus en tronquant un cube. Equipartition du cube. Représentation des polyèdres obtenus en perspective cavalière (à partir de celle du cube).



Bristol	Construction de polyèdres.
Miroirs de poche Débris de vitre	Dessiner l'image d'une lettre dans le miroir ; contrôler.
Deux miroirs ; scotch ; noyau d'abricot, caillou ...	Observation des images quand l'angle du dièdre varie.
Equerre ; calque	Avec un motif, composition de symétries pour deux droites à 45°, à 60°.
Kaléidoscopes : trois rectangles en verre épais, peinture noire, canson noir	Observation. Construction (faire un prisme droit avec les verres peints sur une face sur les 19/20 de la longueur ; maintenir avec le canson).
Papier	De combien de manières peut-on emboîter une vitre carrée dans son cadre ? (Cf. fiches NUFFIELD, O.C.D.L. Problèmes série rouge N° 21).

- Etudes du plan et de l'espace se mêlent étroitement.
- De plus ces activités sont faciles à intégrer à d'autres :

— *dénombrement* des coloriages de ce triangle équilatéral avec quatre couleurs, des tétraèdres différents qu'on en déduit ;



— *nombre minimum* de noeuds d'un réseau triangulaire régulier à décalquer pour le reconstituer avec la règle seule (deux points déterminent une droite) ;

— *cheminements* sur les arêtes d'un cube ; notion de distance ;

— *transformations affines* (transports de réseaux) ;

— *dessins des treillis* des diviseurs de naturels ayant 1, 2, 3 ou 4 diviseurs premiers ;

— *groupe du carré* (Cf. NUFFIELD, O.C.D.L. Problèmes série rouge n° 21 AB) ;

etc ...

ENONCES

Polygone. Il est prudent de ne pas chercher à donner une définition formelle d'une ligne brisée et par suite d'un polygone.

On remarquera que, sous certaines conditions, une ligne brisée fermée (ensemble de points A) détermine une portion de plan qui peut être appelée "intérieur du polygone" (ensemble de points B).

Dans "Un hexagone régulier est convexe", le polygone c'est B, ou $A \cup B$, mais pas A.

Les segments de la ligne brisée sont les *côtés* du polygone, leurs extrémités sont les *sommets* du polygone.

Deux sommets, extrémités d'un même côté, sont dits *consécutifs.* Tout segment délimité par deux sommets non consécutifs est une *diagonale.*

Triangle : polygone de trois côtés.

Triangle *isocèle* : triangle ayant au moins deux côtés isométriques ou triangle ayant au moins une droite de symétrie.

Triangle *équilatéral* : triangle ayant trois côtés isométriques ou triangle ayant trois axes de symétrie.

Quadrilatère : polygone de quatre côtés.
Parallélogramme, rectangle, losange, carré (Cf. rubrique *Parallélogramme*).

SAVOIR-FAIRE

- Mener une *perpendiculaire* à l'équerre ; à main levée.
- Tracer des *parallèles* avec la règle et l'équerre.

- Utiliser le rapporteur.

- Utiliser le compas pour construire un triangle *équilatéral*, un *triangle* de *côtés* donnés, un *losange*.

- Dessiner, en perspective cavalière, un *parallélépipède rectangle*.

- Faire une figure d'après un texte simple.

- Reconnaître une *droite de symétrie*,
  un *centre de symétrie*.

- Identifier un *parallélogramme*, un *rectangle*, un *losange*, un *carré*, grâce à la donnée d'une propriété caractéristique.

Classification des MOTS se rapportant au thème POLYGONES — POLYEDRES

Mots	Code	Mots	Code
acutangle	S	longueur (d'un rectangle)	*
aire	***	longueur (d'un segment)	*
arête	*	losange	***
axe de symétrie (ou *droite* de symétrie)	***	médiane	***
base (d'un triangle, d'un trapèze ...)	S	médiatrice	***
carré	***	milieu	***
concave	S	oblique	S
cône	S	orthocentre	S
convexe	*	parallèle	***
coplanaire	S	parallélépipède rectangle	***
côté	***	parallélogramme	***
cube	***	pavé	*
diagonale	***	perpendiculaire	***
domaine	S	polyèdre	S
équilatéral	***	polygone	***
espace	*	prisme droit	S
face	*	pyramide	S
fermé	S	quadrilatère	***
figure	*	rectangle	***
frontière	S	régulier (polygone — ; polyèdre —)	S
gravité (centre de)	S	solide	*
hauteur	***	sommet	***
hypoténuse	***	tétraèdre	S
intérieur	*	trapèze	S
isocèle	***	triangle	***
largeur (d'un rectangle)	*	volume	***
ligne	*		

CERCLE - DISQUE

MOTS

cercle, rayon, corde, arc, diamètre, demi-cercle
intérieur d'un cercle, extérieur d'un cercle
disque (fermé)
tangente ; point de contact
sécante

ENONCES

• C désignant le cercle de centre 0 et de rayon R, P désignant un point du plan,

"$P \in C$" signifie "$d(0,P) = R$".

• D désignant le disque (fermé) de centre 0 et de rayon R, P désignant un point du plan,

"$P \in D$" signifie "$d(0,P) \leqslant R$".

• Si C est un cercle de centre 0 et M un point de ce cercle, la perpendiculaire en M à la droite 0M est appelée tangente au cercle.

• Par trois points non alignés il passe un cercle et un seul (ayant pour centre le point commun aux trois médiatrices).

• Soient A, B et C trois points du plan.

Si les droites AB et AC sont perpendiculaires, le cercle de diamètre [BC] contient le point A.

Si le cercle de diamètre [BC] contient le point A, distinct de B et de C, alors les droites AB et AC sont perpendiculaires.

SAVOIR-FAIRE

• Savoir trouver la longueur d'un cercle, l'aire d'un disque (les élèves devant être capables de préciser ce que désignent les lettres utilisées dans les formules, et le système d'unités choisi).

• Symétries d'un cercle (voir fiche *Isométrie*).

• Ne pas confondre la longueur d'un arc de cercle et la mesure de cet arc (en degrés ou en grades).

• Savoir que deux arcs de même longueur ou de même mesure ne sont pas, en général, isométriques.

• A titre d'exercice de dessin, savoir utiliser un rapporteur pour repérer un point M sur un demi-cercle contenant A à l'aide de la mesure de l'arc AM.

• Savoir construire à l'aide d'un compas :
- un triangle équilatéral,
- un triangle quelconque connaissant les mesures des trois côtés,
- la médiatrice d'un segment,
- un triangle rectangle.

Classification des MOTS se rapportant au thème
CERCLE – DISQUE

Mots	Code	Mots	Code
arc	***	inscrit	S
centre	***	intérieur	*
cercle	***	périmètre (d'un cercle) (1)	S
circonférence	S	pi (π)	***
circonscrit	*	puissance (par rapport à un cercle)	S
circulaire	S	quart de cercle	S
cocyclique	S	rayon	***
concentrique	S	rotation	S
contact (point de)	*	sécante	*
corde	*	secteur circulaire	S
demi-cercle	***	tangence (point de)	S
diamètre	***	tangente	***
disque	***		
fermé (disque)	S		
inscriptible	S		

(1) *Cercle* désignant une "ligne", et non une "surface", l'expression "périmètre d'un cercle" paraît malheureux et devrait être remplacée par "longueur d'un cercle".

QUADRILATÈRES

Strictement à l'usage du professeur.

PROGRAMMES

- Sixième : Etude *d'objets géométriques* et physiques donnant lieu à mesures.
- Cinquième : Définition *d'ensembles convexes.*
- Quatrième : *Parallélogramme* propre ou aplati.

La définition de *quadrilatère* soulève des difficultés. Le mot *quadrilatère* était employé dans la géométrie traditionnelle avec des sens divers ; la modernisation du langage (sans éliminer ces usages) a créé de nouvelles équivoques.

Suivant le contexte, *quadrilatère* signifie :

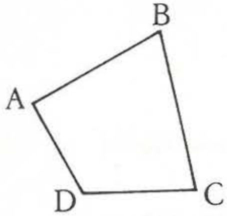
1) soit ensemble des points "à l'intérieur" d'une ligne brisée, fermée, réunion de quatre segments (surface, plaque ...) ;
2) soit réunion de quatre segments (côtés) ;
3) soit ensemble de quatre droites ;
4) soit ensemble de quatre points.

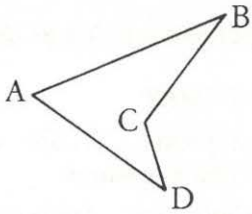
Un quadrilatère ne peut pas être défini comme un quadruplet (A,B,C,D), puisque les huit quadruplets (A,B,C,D), (B,C,D,A), ... (A,D,C,B), (D,C,B,A), ... sont huit objets mathématiques distincts [(A,B,C,D) $\neq$ (B,C,D,A) à moins que A = B = C = D], alors que l'on considère le plus souvent que le *quadrilatère* ABCD est aussi le *quadrilatère* BCDA.

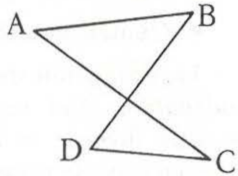
I. Pour certains usages, on pourra se contenter de dire qu'un *quadrilatère* est un *ensemble de quatre points distincts.*

II. Mais si l'on s'intéresse aux sens 1, 2 et 3 du mot *quadrilatère*, une telle définition est en général insuffisante. En fait, quatre points distincts du plan A,B,C,D donnent naissance à trois ensembles de quatre paires telles que chacun des quatre points soit commun à deux paires exactement :

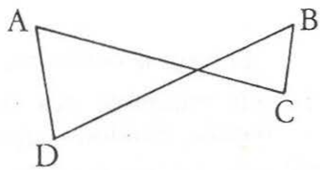
$\{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{D,A\}\}$:







$\{\{A,C\}, \{C,D\}, \{D,B\}, \{B,A\}\}$:



$\{\{A,C\}, \{C,B\}, \{B,D\}, \{D,A\}\}$:

Nous vous proposons de convenir que chacun de ces trois ensembles est un *quadrilatère*.

Le premier par exemple peut être noté, conformément aux habitudes, de huit façons synonymes : ABCD, BCDA, CDAB, DABC, DCBA, CBAD, BADC, ADCB. Le deuxième : ABDC, etc... A, B, C, D sont les *sommets*.

Deux *sommets sont consécutifs* s'il existe dans le quadrilatère une paire dont ils sont les éléments, sinon ils sont *opposés*. Les *côtés* sont les segments (ou les droites) joignant deux sommets consécutifs. Les *diagonales* sont les segments (ou les droites) joignant deux sommets opposés.

Si l'intersection des segments diagonaux est non vide, on a un *quadrilatère convexe*.

Dans les quadrilatères non convexes

— ou bien il existe une paire de "côtés-segments" opposés dont l'intersection est non vide : alors le quadrilatère est un *quadrilatère croisé* ;

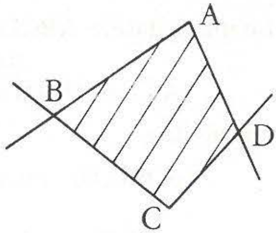
— ou bien l'intersection est vide pour chacune des deux paires de côtés-segments opposés : alors le quadrilatère est un *quadrilatère concave.*

La réunion des quatre "côtés-segments" peut être appelée *ligne quadrilatère.*

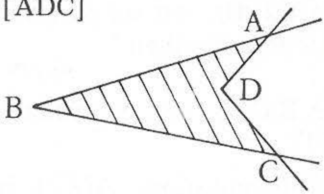
Si, dans un quadrilatère non croisé, on considère :

— dans le cas d'un quadrilatère convexe, l'intersection des deux secteurs saillants

$\widehat{[ABC]}$ et $\widehat{[ADC]}$



— dans le cas d'un quadrilatère concave, l'intersection du saillant $\widehat{[ABC]}$ et du rentrant $\widehat{[ADC]}$



l'ensemble de points obtenus peut être appelé *surface quadrilatère.*

> Dans le premier cycle il ne paraîtrait pas scandaleux que tout quadrilatère ait quatre sommets *distincts.*

PARALLELOGRAMME

MOTS

parallélogramme
milieu
parallèle
translation
sommets } consécutifs, opposés
côtés }
diagonale

Remarques pour le professeur

• Deux définitions possibles :

1) E étant un ensemble de quatre points :

E est un parallélogramme
est synonyme de
E possède un centre de symétrie.

2) En application de ce qui précède relativement à *quadrilatère,*

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme
signifie
(A,C) et (B,D) ont le même milieu

On pourra donc dire :

{A,B,C,D} est un parallélogramme
ou
ABCD est un parallélogramme

mais la deuxième phrase est plus précise ; elle est synonyme de

" {A,B,C,D} est un parallélogramme tel que (A,C) et (B,D) ont le même milieu"

ou encore,

" {A,B,C,D} est un parallélogramme de diagonales [AC] et [BD]".

Les huit notations ABCD, BCDA, ... désignent alors *un seul* parallélogramme (comme, dans le cas général, elles désignent *un seul* quadrilatère).

• Si {A,B,C,D} est un parallélogramme, les quatre points A, B, C et D peuvent être alignés ou ne pas l'être. Par contre, les cas dégénérés (deux, trois ... ou même quatre sommets égaux) ne méritent pas que l'on s'y attarde, surtout dans le premier cycle, et cela bien qu'ils soient susceptibles d'apparaître dès l'instant que l'on projette un parallélogramme sur une droite.

ENONCES

• Chacune des deux phrases suivantes :

{A,B,C,D} est un *parallélogramme* de diagonales [AC] et [BD]	ABCD est un parallélogramme

est synonyme de chacune des trois phrases suivantes :

(A,C) et (B,D) ont le même *milieu*	Il existe une *translation* t telle que : t(A) = B et t(D) = C	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

• Si les quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés, les phrases suivantes sont synonymes :

1 ABCD est un parallélogramme

2 {A,B,C,D} est un *parallélogramme* de diagonales [AC] et [BD]

3 Les droites AB et CD sont parallèles *et* les droites AD et BC sont parallèles.

• Les trois phrases suivantes sont synonymes :

{A,B,C,D} (*) est un *losange*

{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme et les diagonales sont perpendiculaires	{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme et il existe deux côtés consécutifs isométriques

• Les trois phrases suivantes sont synonymes :

{A,B,C,D} (*) est un *rectangle*

{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme et il existe deux côtés consécutifs perpendiculaires	{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme et les diagonales sont isométriques

• Les quatre phrases suivantes sont synonymes :

{A,B,C,D} (*) est un *carré*

{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme dont les diagonales sont isométriques et perpendiculaires	{A,B,C,D} est un rectangle et un losange

(*) ... ou ABCD.

{A,B,C,D} (*) est un parallélogramme et il existe deux côtés consécutifs isométriques et perpendiculaires

SAVOIR-FAIRE

- Etre capable de dessiner un parallélogramme à partir d'un des énoncés ci-dessus (en particulier "(A,C) et (B,D) ont le même milieu").
- Etre capable de justifier l'existence d'un parallélogramme dans un contexte donné.

Classification des MOTS se rapportant au thème
QUADRILATERE – PARALLELOGRAMME

Mots	Code
aplati (parallélogramme)	*
carré	***
centre de symétrie	*
concave	S
consécutif	***
convexe	*
côté	***
croisé	S
diagonale	***
inscriptible	S
isométrique	*
losange	***
opposé	***
parallèle	***
parallélogramme	***
perpendiculaire	***
quadrilatère	***
quadruplet	S
rectangle	***
sommet	***
symétrie centrale	Δ*
translation	***

(*) ... ou ABCD.

REPÉRAGE SUR LA DROITE

Introduction

Les expressions : *droite repérée, droite graduée, droite munie d'un repère, droite munie d'une graduation*, sont des synonymes.

Le mot *axe* figure au *programme* dans l'expression "rapport de projection d'un axe sur un axe" où il signifie "droite munie d'un vecteur unitaire" (toutefois il est plus souvent utilisé dans l'expression *axe de coordonnées* où il signifie "droite graduée"), et dans l'expression *axe de symétrie* où il signifie "droite de symétrie".

Par contre l'expression "droite réelle" est dangereuse (confusion avec la "droite matérielle").

MOTS

vecteur unitaire
repère
origine
abscisse d'un point d'une droite pour une graduation de celle-ci

NOTATIONS ET ENONCES

On peut traiter les programmes de quatrième-troisième (et à fortiori du second cycle) en n'utilisant *jamais* le symbole $\overline{MN}$ qui provient d'une époque où le calcul vectoriel n'osait pas dire son nom.

Il est inutile en quatrième-troisième, lorsqu'on choisit une axiomatisation où la multiplication des vecteurs du plan par les réels précède la notion de graduation d'une droite.

On trouvera dans les ouvrages scolaires des formulations simples et efficaces de l'énoncé de Thalès qui n'utilisent pas ce symbole.

Pour laisser (enfin) toute liberté aux professeurs de traiter le programme comme bon leur semble, il serait très souhaitable que les professeurs qui proposent des sujets de B.E.P.C., de concours d'entrée à l'E.N., d'examen d'entrée en seconde, s'interdisent l'emploi de ce symbole, et que nous acceptions de ne pas le placer dans le savoir minimum. La définition de $\overline{MN}$ (lire indifféremment "surligné de MN ", "MN barre", "réel associé au couple (M,N)", "coordonnée du vecteur $\overrightarrow{MN}$ ") ne demande que peu de moyens.

• Les écritures $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ (A, B, M alignés) et $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (A, B, A', B' non alignés) sont correctes. L'écriture $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}}$ (les droites AM et AB étant parallèles) est dangereuse bien qu'elle ait un sens, et l'écriture $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A'B'}}$ (les droites AB et A'B' étant non parallèles) est dépourvue de sens (au moins dans le premier cycle).

— *Choix n° 1.* Si l'on choisit de supprimer $\overline{MN}$ du savoir minimum, l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et sa conséquence $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}$ permettent de se passer des énoncés que l'on trouvera plus loin (choix n° 2).

En effet :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} \\ \overrightarrow{BC} = y\,\vec{i} \\ \overrightarrow{AC} = z\,\vec{i} \end{array}\right\} \text{ entraîne } x + y = z$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IN} = n\,\vec{i} \\ \overrightarrow{IM} = m\,\vec{i} \\ \overrightarrow{MN} = c\,\vec{i} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{entraîne } c = n - m \\ \text{et en particulier} \\ c = (\text{abscisse de N}) - (\text{abscisse de M}) \end{array}$$

Exemple :

Sur la droite graduée d'origine A, de vecteur unitaire $\vec{i}$, les points M, N ont pour abscisses respectives (— 4) et (3). Quelle est la coordonnée de $\overrightarrow{MN}$?

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{MN} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{i}$ Réponse : 7

$\overrightarrow{MN} = 7\,\vec{i}$

— *Choix n° 2.* Si on choisit de conserver $\overline{MN}$ dans le savoir minimum, les énoncés suivants sont utiles :

· Quels que soient les points M, N, I d'une droite munie d'une graduation g :

$$(\overline{MN})_g = g(N) - g(M) = (\overline{IN})_g - (\overline{IM})_g$$

· Quels que soient les points A, B, C d'une droite graduée :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

• Si la graduation g a pour repère (O,I), les deux phrases suivantes sont équivalentes :

1) abscisse de M pour $g = g(M) = x$
2) $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI}$

• Une droite graduée est déterminée :

— soit par la donnée d'un couple (A,B) de points distincts,
— soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur unitaire $\vec{u}$;

on appelle *repère* de la droite graduée aussi bien (A,B) que $(A,\vec{u})$.

SAVOIR-FAIRE

Une droite matérielle étant munie d'un repère, la graduation étant représentée de façon régulière :

• savoir placer un point connaissant son abscisse ;

• connaissant un point, savoir donner son abscisse, éventuellement de façon approchée ;

• savoir calculer l'abscisse d'un point dans un nouveau repère dans des cas simples : translation du repère, changement du vecteur unitaire sans changement d'origine.

Remarque

L'utilisation des vecteurs dispense souvent de considérer des graduations sur les droites et unifie les problèmes du plan et de la droite.

REPÉRAGE DANS LE PLAN

MOTS

coordonnées d'un point
ordonnée et abscisse d'un point
repère
repère orthonormé
axe de coordonnées

NOTATIONS

Aucune notation n'est privilégiée, l'essentiel étant que l'élève sache ce qu'est le couple de coordonnées d'un point et le couple de coordonnées d'un vecteur, qu'il sache que cela présuppose le choix d'un repère pour le point, d'une base pour le vecteur et que le couple de coordonnées du point M est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (O étant l'origine).

ENONCES

- Un repérage du plan est déterminé :
  — soit par la donnée d'un triplet de points non alignés : (A, B, C) ;
  — soit par la donnée d'un point A et d'un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ non colinéaires ;
  on appelle *repère* du plan aussi bien (A,B,C) que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

A, B, C étant donnés, les repères (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C) sont distincts.

- Un repère étant choisi, soit (O,I,J), soit $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$,

M a pour *couple de coordonnées* (a,b)
signifie
$$\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{OI} + b\,\overrightarrow{OJ}$$

- *Coordonnées du milieu* K de (A,B) *dans un repère* (O,I,J) :

$$\left.\begin{array}{c} A(x_A\ ;y_A) \\ \text{et} \\ B(x_B\ ;y_B) \end{array}\right\} \quad \text{entraîne} \quad K\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

SAVOIR-FAIRE

Le plan étant muni d'un repère, sur un quadrillage régulier :

- savoir placer un point connaissant ses coordonnées ;
- connaissant un point, savoir donner, éventuellement d'une manière approchée, ses coordonnées.

Pour plus de détails, se reporter aux rubriques *Vecteur* et *Milieu*.

Classification des MOTS se rapportant au thème

REPERAGE

Mots	Code	Mots	Code
abscisse	***	norme	Δ
axe	*	ordonnée	***
bipoint	S	orientée (droite)	S
coordonnées	***	origine	***
couple (de points)	***	pas	S
couple (de coordonnées)	***	quadrillage	***
graduation	***	réelle (droite)	dangereux
graduée (droite)	Δ	repérage	Δ
invariant	S	repère	***
munie (droite munie d'une graduation)	*	repère normé	*
		repère orthonormé	***
		unitaire (vecteur)	*

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

PROJECTION ET FORMULATIONS DE L'ÉNONCÉ DE THALÈS

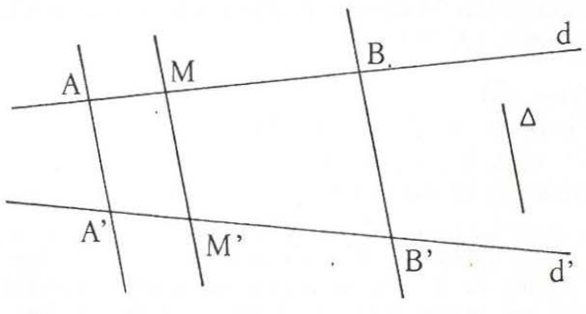
MOTS

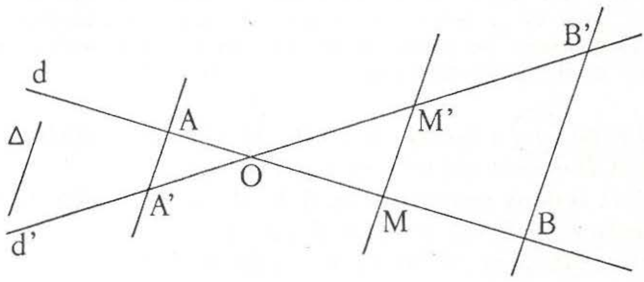
projection
projeté d'un point
direction de projection
énoncé de Thalès
projection orthogonale

ENONCES

A propos des diverses façons de formuler *l'énoncé de Thalès*, il est apparu souhaitable que l'élève ne s'attache pas à leur mémorisation, mais qu'il soit capable de les illustrer par des exemples, des contre-exemples, et de les utiliser dans certaines situations (voir Savoir-faire).

On notera la diversité des formulations de *l'énoncé de Thalès*.





Hypothèses : Dans la *projection* de la droite d sur la droite d' suivant la *direction* Δ ($d \notin \Delta$ et $d' \notin \Delta$), les images des points A, B, M de d sont (dans l'ordre) les points A', B' et M' de d'.

Les énoncés sont donnés avec les notations et les hypothèses indiquées ci-dessus.

• *forme* ① : Quels que soient les points A , B , M de d ,

$$\text{si} \quad A \neq B : \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$$

• *forme* ② : Il existe un réel k , unique, tel que : quels que soient les points A et B, distincts, de d , $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$. Ce réel k dépend des droites graduées d et d' , et de la direction Δ. Il s'appelle "rapport de projection de d sur d' pour Δ".

• *forme* ③ : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$

est synonyme de

$$\overrightarrow{A'M'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$$

• *forme* ④ : Quels que soient les points A , M , B de d , si $A \neq B$, l'abscisse de M dans le repère (A,B) est égale à l'abscisse de M' dans le repère (A',B').

• *forme* ⑤ :
Si les abscisses de A , B , A' , B' , M
sont 0 , 1 , 0 , k , x ,
alors l'abscisse de M' est kx .

Remarque : Pour les formes ④ et ⑤, parler du "repère (A,B)" suppose l'existence d'une infinité de graduations sur d ; on fait donc appel à la "structure affine" de d . Ne devrait-on pas préférer une formulation où chaque droite est munie d'une graduation *choisie* une fois pour toutes, c'est-à-dire dont on a précisé le repère ("choisie" sous-entend qu'il y a plusieurs graduations. Les élèves doivent être conscients de cette infinité, sans pour autant savoir qu'il s'agit d'une "structure affine") ?

• *forme* (1') : Soient d et d' des droites graduées.
Soit Δ une *direction* qui ne contient ni d , ni d' .
Soient A et B deux points distincts de d , A' et B' leurs images par p , *projection* de *direction* Δ de d sur d' .
Soient M un point de d , M' un point de d' .

M' est l'image de M par p
si et seulement si :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} .$$

Remarque : La forme (1') contient à la fois la forme (1) et ce que l'on appelle habituellement la "réciproque" de *l'énoncé de Thalès*. On aurait pu donner des formulations analogues pour les énoncés (2), (3), (4), (5). Chacune pourrait légitimement être appelée *énoncé de Thalès.*

SAVOIR-FAIRE

- Savoir représenter le *projeté* d'un point connaissant la *direction* de *projection* et la droite ensemble d'arrivée.
- Etant donnée une *projection* d'une droite (ou du plan) sur une droite, savoir représenter le (ou les) antécédent(s) d'un point.
- Savoir reconnaître une situation où *l'énoncé de Thalès* est applicable.

Classification des MOTS se rapportant au thème PROJECTION

Mots	Code
direction	***
graduation	***
parallèle	***
projection	***
projection orthogonale	***
projetante	S
projeté	*
rapport de projection	*
rapport de projection orthogonale	*
repère	***
Thalès	***

MILIEU

MOTS

milieu d'un couple de points
milieu de deux points
milieu d'un segment

NOTATIONS

Il n'y a pas lieu de généraliser l'emploi du signe * (ou de tout autre) pour "l'opération milieu".

ENONCES

• Si A et B sont deux points d'un plan, les phrases ci-dessous sont synonymes.

M est le milieu de (A,B)	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	Pour tout point O du plan, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ est le vecteur nul	

• Si A et B sont deux points d'une droite graduée δ, les phrases suivantes sont synonymes.

M est le milieu de (A,B)	M est le point de la droite δ tel que : $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$
M est le point de la droite δ tel que : $d(M,A) = d(M,B)$	Si g est la graduation choisie sur la droite δ : $g(M) = \frac{1}{2}[g(A) + g(B)]$

SAVOIR-FAIRE

- Savoir représenter le milieu de deux points.
- Savoir calculer les coordonnées du milieu de deux points.
- Si possible, savoir marquer le milieu à l'aide d'un compas.
- Savoir, suivant le problème, utiliser les différentes phrases vues plus haut.

BARYCENTRE

L'intérêt de la recherche du barycentre, même s'il s'agit seulement du barycentre de deux points, réside bien plus dans l'activité de représentation mathématique d'une certaine réalité (mobile, point d'équilibre, moyenne pondérée ...) et de généralisation du problème associé, que dans la connaissance de l'égalité

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

et du mot "barycentre".

Cette notion offre l'occasion de multiples calculs vectoriels (ou analytiques).

MOTS

$\left.\begin{array}{l}\text{barycentre}\\ \text{coefficients}\end{array}\right\}$ non indispensables

SAVOIR-FAIRE

a) Sur une droite graduée, deux points A et B ont des abscisses données numériquement, α et β sont deux réels donnés ; savoir rechercher l'ensemble des points M tels que :

$$\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = 0$$

b) Dans le plan, deux points A et B étant donnés, ainsi que deux réels α, β (donnés numériquement), savoir étudier le problème suivant : rechercher l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

On devra reconnaître d'emblée que M, *s'il existe*, est sur la droite AB.

SEUL ⓐ OU ⓑ DEVRAIT POUVOIR ETRE EXIGE (le "ou" pouvant être exclusif ; tout dépend de la démarche suivie pour l'étude du plan et de la droite).

Classification des MOTS se rapportant au thème
MILIEU, BARYCENTRE

Mots	Code
barycentre	*
centre (de gravité)	*
coefficients	*
couple de points	***
milieu	***

VECTEUR

MOTS – NOTATIONS

- *vecteur*

Le couple de points (A,B) détermine un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.
Deux notations sont possibles :

Notation (1) $\quad \mathrm{v} = \overrightarrow{AB}$

C'est la seule acceptable en toute rigueur si l'on considère la flèche comme un signe fonctionnel, celui d'une application de $P \times P$ vers $\mathcal{V}$ (P étant le plan affine, $\mathcal{V}$ le vectoriel des vecteurs géométriques du plan).

Notation (2) $\quad \vec{v} = \overrightarrow{AB}$

La flèche de $\vec{v}$ est utilisée comme signe distinctif des vecteurs en quatrième et troisième. Cette notation, commode, peut éviter des confusions entre vecteurs et réels, notamment à propos de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Aucune de ces notations n'est actuellement universelle dans l'enseignement français.

- *coordonnées d'un vecteur*

$\vec{u}(a,b)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ou $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ou $u = ai + bj$

ou $\vec{u}_{(\vec{i},\vec{j})}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Il n'y a pas lieu de privilégier l'une quelconque des notations précédentes ; d'autres notations sont d'ailleurs possibles ; par exemple

$$c(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} .$$

Lecture : "Le couple de coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ est ..."

L'essentiel est que l'élève sache ce que sont "le couple de coordonnées" d'un point et "le couple de coordonnées d'un vecteur", que cela présuppose le choix d'un repère ou d'une base, et que le couple de coordonnées du point M est aussi le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (O étant l'origine du repère).

Que traduit l'écriture $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$?

Suivant le contexte :

ou bien c'est une *phrase* qui signifie : le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour couple de coordonnées (x,y),

ou bien c'est un *terme*, un substantif (en tous cas pas une phrase) qui signifie : le vecteur $\overrightarrow{AM}$, de couple de coordonnées (x,y).

Nous conseillons fortement la première interprétation.

Remarque :

Le mot "composantes" (d'un vecteur) est superflu.

- le *vecteur nul* ($\vec{0}$ ou $\vec{\theta}$ ou θ ou ...)
- *norme* d'un vecteur
- *addition* des vecteurs, *opposé* d'un vecteur
- *multiplication d'un vecteur par un réel*

Les expressions "vecteurs colinéaires", "vecteurs parallèles" ne sont pas indispensables. Elles ont en tous cas des sens différents :

$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$
signifie
Il existe des réels a, b, non tous deux nuls, tels que
$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$
signifie
Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux non nuls.

La relation dans $\mathcal{V}$ (ensemble des vecteurs) de lien verbal "est colinéaire à" n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas transitive). La relation dans $\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}$ "est parallèle à" en est une.
Au lieu de "vecteurs parallèles", on dit encore "vecteurs de même direction". Mais :
— on peut dire "deux vecteurs directeurs de deux droites sécantes" ou "deux vecteurs définissant deux directions de droites distinctes" ou "deux vecteurs dont aucun n'est colinéaire à l'autre".

- translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la notation $t_{\overrightarrow{AB}}$ est couramment utilisée).

Remarque : "Représentant" d'un vecteur.

La légitimité de l'écriture $(A,B) \in \vec{v}$ (ou $(A,B) \in v$) est liée à une façon de concevoir, ou plutôt de construire, les vecteurs du plan affine :

- ou bien $\vec{v}$ est image de (A,B) dans l'application Φ qui définit $\mathcal{E}$ comme espace affine à l'aide du vectoriel $\mathcal{V}$; alors (A,B) est un antécédent de $\vec{v}$ (et non pas un élément de $\vec{v}$),
- ou bien, si f est une translation dans le plan Π, on peut considérer le vecteur $\vec{v}$ comme graphe de la translation f ; alors (A,B) est un élément de $\vec{v}$,
- ou bien $\vec{v}$ est une classe d'équivalence et alors (A,B) est élément de $\vec{v}$.

L'écriture $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ (ou v) semble acceptée par tous ; alors le mot *représentant*, jugé commode, peut se définir ainsi :

Tout couple de points (A,B) tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ est dit représentant du vecteur $\vec{v}$.

De plus, le mot *représentant* est commode au niveau de la *représentation* dans le *plan physique*, tout comme il peut être commode de *représenter* une direction δ par une droite élément de δ (par exemple dans le cas d'une projection suivant la direction δ).

Il serait souhaitable que l'élève de troisième ait conscience de l'intérêt de l'outil vectoriel (pour démontrer que deux droites sont parallèles ou perpendiculaires, que trois points sont alignés ...). Cependant nous ne retenons, dans le Savoir Minimum, que les énoncés et savoir-faire suivants.

ENONCES

- Quels que soient les points A, B, C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- Quels que soient les points A, B, C du plan :

Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$
est synonyme de
Les points A, B, C appartiennent à une même droite

- $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ entraîne $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$

ou $u\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ entraîne $u+v\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$

- k désignant un réel, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ entraîne $k\vec{u}\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$.

- A et B désignant deux points distincts :

Il existe un réel k tel que :

$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{EF}$ [ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ et $X = kX'$ et $Y = kY'$]

entraîne
Les droites AB et EF sont parallèles.

Et réciproquement :

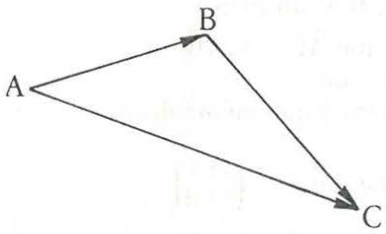
Les droites AB et EF sont parallèles
entraîne
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{EF}$

• Connaître, ou savoir retrouver, les différentes équivalences relatives au parallélogramme.

SAVOIR-FAIRE

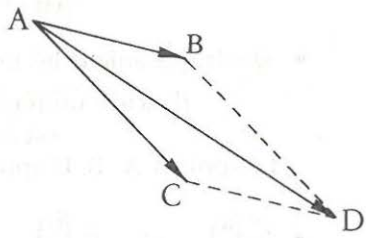
• Savoir reconnaître des translations.

• Savoir associer égalités vectorielles et dessins dans les cas suivants :

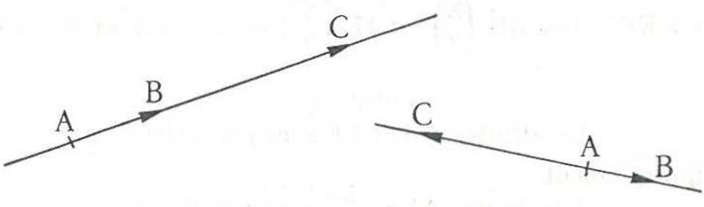


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

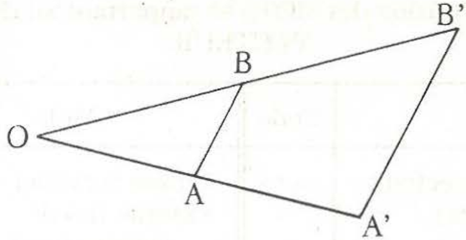


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

(et si la droite est graduée, de repère (A,B), l'abscisse de C est k).



si		si
$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$	ou	$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$
alors $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$		alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

• Savoir traduire, au moyen de coordonnées, une égalité vectorielle (Exemple : connaissant A, B, C, trouver les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Savoir traduire, au moyen d'égalités vectorielles, le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, ce qui suppose que les propriétés liées à la structure d'espace vectoriel soient connues implicitement.

• Savoir effectuer correctement des calculs simples sur réels et vecteurs.

• Sur des exemples numériques :

— reconnaître qu'un vecteur est colinéaire à un autre ;
— reconnaître à partir de leurs équations que deux droites sont parallèles ; qu'elles sont confondues ;
— savoir chercher si deux droites dont on a des équations sont perpendiculaires, par exemple en appliquant le théorème de Pythagore :

soit à un triangle HAB (H étant le point d'intersection des deux droites et A, B étant des points arbitraires pris sur chacune) ;
soit à un triangle obtenu en remplaçant les deux droites par leurs parallèles menées par l'origine.

Les critères de colinéarité et d'orthogonalité de deux vecteurs ($XY' - X'Y = 0$; $XX' + YY' = 0$) ne figurent pas au programme. Ceux qui rédigent des sujets d'examen devraient y penser lorsqu'ils évaluent le temps nécessaire pour répondre.

Evidemment il n'est pas question de pénaliser les élèves qui les connaissent et les emploient correctement !

Classification des MOTS se rapportant au thème VECTEUR

Mots	Code	Mots	Code
addition des vecteurs	***	espace vectoriel	S
alignés (points)	*	externe (loi de composition)	Δ S
base	*	forme (linéaire)	S
bipoint	S	liés (vecteurs)	dangereux
Chasles	*	multiplication d'un vecteur par un réel	***
colinéaire	*	norme	***
combinaison linéaire	S	représentant	*
composantes	S	scalaire (produit)	S
coordonnées	***	sens (avoir le même)	*
couple de points	***	translation	***
déterminant	S	translaté	*
différence (de deux vecteurs)	*	vecteur	***
directeur (vecteur)	Δ	vecteurs opposés	***
droite vectorielle	S	vectoriel	S
équipollence	*	unitaire (vecteur)	*
équipollent	*		

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

ISOMÉTRIES

MOTS

isométrie du plan

translation

symétrie-centrale ou symétrie-point ou symétrie par rapport à un point. Ce point est appelé centre de symétrie

symétrie-droite ou symétrie orthogonale par rapport à une droite. Cette droite est appelée "droite de symétrie". On dit encore parfois "symétrie axiale" et "axe de symétrie".

NOTATIONS

$t_{\vec{u}}$ (ou t_u) : translation de vecteur $\vec{u}$ (ou de vecteur u).

S_0 : symétrie par rapport au point 0.

S_d : symétrie par rapport à la droite d.

Ces notations, utilisées d'une manière courante, *ne sont pas universelles*. Les notations employées doivent être précisées à chaque occasion.

ENONCES

- J est une ISOMETRIE du plan

signifie

1/ J est une bijection dans le plan ;
2/ A et B étant deux points quelconques du plan,
si J (A) = A′ et J (B) = B′, alors $d(A,B) = d(A',B')$

On peut dire : "Une *isométrie* du plan conserve les distances".

On parlera de "segments *isométriques*" et plus généralement de "figures *isométriques*", et *non* de "figures égales" si elles sont distinctes. L'expression "*est isométrique à*" est commode, en particulier pour les segments, comme synonyme de "a même longueur que".

• Les *translations*, les *symétries-point*, les *symétries-droite* sont des *isométries* (il y en a d'autres ...).

SAVOIR-FAIRE

L'élève doit être apte à "sentir", "contrôler sur un dessin", puis "justifier" la présence d'un *centre*, de *droite(s) de symétrie* d'un ensemble de points.

Par exemple

droites de symétrie

- d'un rectangle,
- d'un carré,
- d'un triangle équilatéral,
- d'un cercle,

. . .

centre de symétrie

- d'un parallélogramme,
- d'un cercle,

. . .

Des manipulations nombreuses de figures *isométriques*, en particulier de représentants d'angles, seraient profitables (en sixième, cinquième, quatrième et troisième).

A cet effet, on utilisera papier calque, quadrillage et instruments de dessin usuels ou non.

Classification des MOTS se rapportant au thème ISOMETRIES

Mots	Code	Mots	Code
axe (de symétrie)	*	orthogonale (symétrie)	*
axiale (symétrie)	*	symétrie-point	***
centrale (symétrie)	*	symétrie-droite	***
centre (de symétrie)	*	symétrique	***
isométrie (du plan)	***	translation	***
isométrique	*		

DISTANCE ET ORTHOGONALITÉ NORME D'UN VECTEUR

MOTS ET NOTATIONS

distance

Si A et B sont des points, on peut désigner leur distance par d(A,B) ou encore, s'il n'y a pas d'ambiguïté, par AB.

Par définition, dans certaines présentations, $d(A,B) = |\overline{AB}|$, dans d'autres $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

orthogonalité de deux droites, de deux directions ; les mots *perpendiculaire* et *orthogonal* sont synonymes, mais bon nombre de professeurs réservent le premier aux droites, demi-droites et segments, le deuxième aux vecteurs et aux directions.

Le symbole $\perp$ doit être connu. Sa lecture la plus usuelle est "est perpendiculaire à".

médiatrice

projection orthogonale, projeté d'un point

distance d'un point à une droite

norme d'un vecteur ; la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$

repère orthonormé

Si A, B et C sont des points distincts tels que les droites AB et AC soient orthogonales, il est commode de dire que le triangle ABC est *rectangle en A* et que [BC] est *l'hypoténuse* de ce triangle. (*Hypoténuse* désigne aussi quelquefois la droite BC, et souvent la distance d(B,C)).

ENONCES

Dans les théories déductives, la *distance* et l'orthogonalité sont souvent définies axiomatiquement. Dans la pratique, elles sont définies grâce au double-décimètre et à l'équerre (ou aux pliages, ou à l'usage du compas). Il est indispensable de relier fortement théorie déductive et pratique des instruments de dessin.

Un plan affine muni d'une orthogonalité et d'une distance compatibles est un plan euclidien ; il est superflu d'utiliser les expressions "plan euclidien" et "plan affine".

Les propriétés suivantes, qu'elles soient :

— choisies comme axiomes,

— démontrées, ou admises, à titre de théorèmes,

— constatées, à titre de propriétés physiques,

sont importantes.

• La distance d est telle que :

A,B,C étant des points quelconques du plan :

$d(A,B) = 0$ est synonyme de $A = B$

$d(A,B) = d(B,A)$

$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$ (inégalité triangulaire)

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

est synonyme de

B est un point du segment [AC].

Le milieu de (A,B) (ou du segment [AB]) est à égale distance de A et B.

• Si D est une droite (du plan), tout point du plan appartient à une et une seule droite perpendiculaire à D.

• *Orthogonalité et parallélisme.*

Quelles que soient les droites d et d′ du plan,

1) *si* $d \perp d'$ *et* $d' \perp d''$ alors $d \parallel d''$;

2) *si* $d \perp d'$ *et* $d' \parallel d''$ alors $d \perp d''$.

C'est en somme utiliser la notion de directions orthogonales.

• Soient A et B des points distincts. L'ensemble des points qui sont à égale distance de A et de B est la droite perpendiculaire à la droite AB qui passe par le milieu de (A,B). Cette droite est appelée la *médiatrice* de (A,B) (ou de [AB]) ; donc :

un point M appartient à la médiatrice de (A,B)

est synonyme de

$d(M,A) = d(M,B)$.

• Soient A,B,C des points distincts.

Les droites AB et AC sont *perpendiculaires*
entraîne
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad [*]$$
et
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
entraîne
Les droites AB et AC sont perpendiculaires.

Le premier des deux énoncés ci-dessus est appelé, très souvent, *énoncé de Pythagore.* MAIS l'énoncé suivant peut, aussi légitimement, être appelé *énoncé de Pythagore* :

Les droites AB et AC sont perpendiculaires
est synonyme de
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad [*]$$

• Soient A,B,C des points distincts.

Le point A est sur le cercle de diamètre [BC]
est synonyme de
Les droites AB et AC sont perpendiculaires

(théorème qu'il peut être souhaitable d'énoncer sous forme de deux théorèmes).

• La *distance d'un point A à une droite a* est, par définition, la distance de A à son projeté orthogonal sur a.

• Si l'on note H ce projeté, quel que soit le point M de a distinct de H, $d(A,H) < d(A,M)$.

On peut préférer à cet énoncé le suivant :

Dans tout triangle AHB rectangle en H
$$d(A,H) < d(A,B)$$
c'est-à-dire : l'hypoténuse est le plus "grand" des trois côtés.

• Soit (O,I,J) un repère orthonormé. Les deux énoncés suivants sont interchangeables ; il suffit que les élèves soient capables d'appliquer l'un d'eux à des exemples numériques (mais il n'y a pas lieu de pénaliser des élèves qui préféreraient utiliser directement l'énoncé de Pythagore).

[*] Il convient que les élèves sachent passer d'une écriture des distances à une autre.

a) Si, pour ce repère, $A(x_A , y_A)$ et $B(x_B , y_B)$,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

b) Si $\overrightarrow{AB} = X\,\overrightarrow{OI} + Y\,\overrightarrow{OJ}$,

$$d(A,B) = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Remarque :

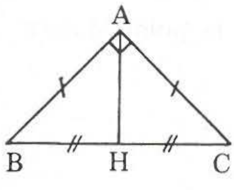
Il en découle que : dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$, l'énoncé de Pythagore peut se traduire par :

$$XX' + YY' = 0$$

SAVOIR-FAIRE

• Savoir utiliser les énoncés ci-dessus faisant intervenir la relation d'orthogonalité et la relation de parallélisme entre droites du plan, c'est-à-dire savoir déduire "d'informations" relatives au parallélisme et à l'orthogonalité de droites du plan de nouvelles "informations" d'orthogonalité et de parallélisme.

• Savoir reconnaître que deux droites sont perpendiculaires, ou qu'un triangle est rectangle.



Remarquer qu'il ne faut pas abuser d'exercices d'application du théorème de Pythagore, qui n'apportent aucune contribution positive à la formation de l'esprit, à la déduction, et sont, au contraire, responsables d'une certaine sclérose ; exemple : On donne un triangle rectangle isocèle ABC ; H est le milieu de l'hypoténuse [BC], et $d(A,B) = a$. On amène à démontrer $\widehat{H} = 90^\circ$ par l'application du théorème de Pythagore, alors qu'on aurait dû diriger la recherche vers la médiatrice.

• Savoir calculer la distance de deux points (soit par l'utilisation d'une graduation de la droite, soit par l'application de l'énoncé de Pythagore, soit par l'utilisation des coordonnées des points dans un repère orthonormé).

• Savoir dessiner à l'aide d'un compas et d'une règle la médiatrice d'un segment, et à l'aide d'une équerre la perpendiculaire à une droite donnée contenant un point donné.

Classification des MOTS se rapportant au thème
DISTANCE, NORME, ORTHOGONALITE

Mots	Code	Mots	Code
bipoint	S	normé	*
distance	***	orthogonal	***
distance (d'un point à une droite)	***	orthonormé	***
distance de deux droites parallèles	Δ	perpendiculaire	***
équidistant	***	projection orthogonale	***
euclidien	S	Pythagore (énoncé de)	***
hypoténuse	*	rapport de projection orthogonale	*
médiatrice	***	rectangle en A	*
mesure	***	rectangle (triangle)	***
norme	***	repère	***
		repère orthonormé	***

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

ANGLE

Voici une des fiches où il importe de ne pas oublier l'objectif de cette brochure : définir un savoir minimum à l'issue de la scolarité obligatoire.

La trilogie du vocabulaire de la mesure (objet - classe d'objets de même mesure - valeur de cette mesure) entraîne dans tous les domaines un certain flottement dans le langage et l'écriture. Les angles ne font pas exception : IL NE SAURAIT ETRE QUESTION DE PENALISER LES ELEVES qui commettraient des abus de langage, souvent légitimes. Mais il n'y a pas de raison non plus d'exagérer les difficultés de cette notion.

Bien que les notions d'angle et d'écart angulaire ne soient indispensables qu'au niveau des manipulations et des savoir-faire, une première partie de la fiche fera le point sur les notations et définitions. Elle est EXCLUSIVEMENT réservée aux professeurs.

I Pour l'information DES PROFESSEURS

Définitions et notations.

① On peut définir *secteur saillant* comme étant l'intersection de deux demi-plans (de frontières sécantes), et *secteur rentrant* comme étant la réunion de deux demi-plans (de frontières sécantes).

Une paire de demi-droites de même origine et non opposées, $\{0x, 0y\}$, détermine deux secteurs, l'un saillant, l'autre rentrant (pour lesquels le dictionnaire A.P.M.E.P. propose comme notation respectivement $[\widehat{x0y}]$ (ou $]\widehat{x0y}[$), $[\overset{\smile}{x0y}]$ (ou $]\overset{\smile}{x0y}[$), selon qu'ils sont fermés ou ouverts, mais IL N'EST PAS INDISPENSABLE de disposer, en classe, d'une notation pour les secteurs).

② *Angle géométrique* signifie "classe d'équivalence, par isométrie, de couples de demi-droites de même origine".

L'angle géométrique dont un représentant est $(0x , 0x)$ s'appelle l'*angle nul*.

En fait, les couples (0x, 0y) et (0y, 0x) sont des représentants d'un même angle. Il est donc possible — contrairement à ce que fait le programme — de définir un angle géométrique comme classe d'isométrie de paires de demi-droites de même origine, étant entendu que, pour l'angle nul, les paires sont remplacées par des singletons.

③ *Notation pour l'angle* :

a) Le dictionnaire A.P.M.E.P. adopte, pour l'"angle-de-paires" (qui est l'"angle géométrique" du programme de troisième) la notation :

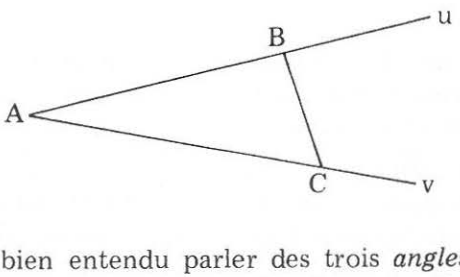
$$\widehat{\{0x\ ,\ 0y\}}$$

(et réserve la notation $\widehat{(0x\ ,0y)}$ pour l'angle-de-couples, anciennement appelé "angle orienté", et qui est en dehors du programme de troisième). L'angle nul, classe des singletons, est alors noté :

$$\widehat{\{0x\ ,\ 0x\}}$$

La notation $\widehat{x0y}$, pour l'"angle géométrique" de troisième, est satisfaisante aussi.

b) Nous pensons que la notation $\widehat{BAC}$ (ou même $\widehat{A}$ quand il n'y a pas de confusions possibles) est commode et légitime pour désigner l'angle-en-A du triangle ABC, c'est-à-dire l'angle $\widehat{\{AB,AC\}}$ ou $\widehat{\{Au,Av\}}$ en désignant par Au la demi-droite d'origine A passant par B et par Av la demi-droite d'origine A passant par C.



On peut bien entendu parler des trois *angles* d'un triangle ABC : l'angle-en-A, l'angle-en-B, l'angle-en-C ; ils peuvent être différents ou non.

c) D'autres notations pour les *angles* seront proposées plus loin.

④ *Remarques*

• Un *angle* n'a ni sommet, ni côtés. Le point 0 est le sommet commun aux deux secteurs déterminés par $\{0x,0y\}$; on peut dire aussi qu'il est le sommet de cette paire. 0x et 0y sont les côtés des deux secteurs. Un angle n'a pas non plus de bissectrice (mais une paire de demi-droites en a une, un secteur aussi) ; on ne saurait non plus parler d'angles adjacents (mais des secteurs peuvent être adjacents).

• Il est correct de parler de *l'angle* des triangles équilatéraux ; cependant il est usuel de dire que les *trois angles* d'un triangle équilatéral sont égaux. Si l'on voulait censurer cet usage, on ne pourrait plus dire, par exemple, "la somme de deux nombres" a et b lorsque a = b.

⑤ Dans tout ce qui précède, il n'apparaît à propos des *angles* aucun nombre.

Expérimentalement, le rapporteur gradué en degrés associe, à tout secteur saillant, un nombre compris entre 0 et 180.

Mathématisant cette situation, on peut définir une bijection de l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles géométriques vers l'intervalle fermé [0;180], par laquelle l'image d'un angle est *l'écart angulaire* de cet angle, pour l'unité "degré" ; ce même réel s'appelle aussi écart angulaire de toute paire de demi-droites représentant de cet angle, et de tout secteur saillant associé.

La notation des premiers commentaires des programmes est : $E_{180}(\alpha)$; mais il n'est pas fait mention de l'écart angulaire dans la circulaire du 19 février 1973.

Définition et notation analogues pour l'écart angulaire "en grades".

L'écart angulaire "en radians" n'est pas au programme.

Quand il s'agit d'un triangle ABC, il est toujours loisible de donner un nom à un écart angulaire, par exemple β pour l'écart angulaire (en degrés) de l'angle-en-B (on évite ainsi la notation $E_{180}\ (\widehat{ABC})$, qui est lourde).

Remarque :

Du point de vue mathématique, un écart angulaire n'est pas une "mesure d'angle" puisque l'appellation "mesure" pour une application m suppose que :

si $m(A \cap B) = 0$, alors $m[A \cup B] = m(A) + m(B)$

ce qui n'est pas vrai ici. Mais il n'y a pas lieu de pénaliser les éléves qui écriraient "mesure des angles".

⑥ Puisqu'un écart angulaire est un nombre, la notation "53°" ne désigne pas un écart angulaire. Nous pensons qu'elle est toute désignée pour représenter *l'angle* dont l'écart angulaire, en degrés, est 53 ; *le degré est un angle.* Ainsi, *l'angle droit* peut se noter 90° ou 100 gr, et il est légitime d'écrire : 90° = 100 gr, etc... De même, *l'angle nul* peut se noter 0° ou 0 gr.

Remarques :

a) La somme des écarts angulaires en degrés des trois angles d'un triangle est 180.

b) Dans le langage courant, on emploie l'expression "un angle de 60°" pour dire "un représentant de l'angle 60°". Il n'y a pas de raison de l'écarter.

⑦ a) Le programme n'introduit le mot *cosinus* que dans l'expression "cosinus d'un écart angulaire" (de même pour *sinus* et *tangente*).

Il introduit donc deux fonctions de **R** vers **R**, notées $\cos_D$ et $\cos_G$.

Si d et g sont les écarts angulaires, respectivement en degrés et en grades, d'un même angle α, $\cos_D d$ et $\cos_G g$ désignent le même réel. Par exemple :

$$\cos_D 45 = \cos_G 50 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et} \quad \cos_D 45 \neq \cos_G 45.$$

Mais $\cos_D \alpha$ est égal au "cosinus de l'angle α" (voir ci-dessous b));aussi les utilisateurs (physiciens, technologues) écrivent couramment cos 45° (au lieu de $\cos_D 45$).

b) Soit un angle α, et $\{0x,0y\}$ un de ses représentants. Le produit scalaire des vecteurs unitaires des demi-droites 0x et 0y est invariant par isométrie (le programme l'appelle "rapport de projection orthogonale" de 0x sur 0y, ou de 0y sur 0x). Il s'appelle "cosinus de l'angle α" (le programme ne mentionne pas cette appellation, ce qui est une position contestable). On définit une application de l'ensemble des angles de paires vers **R**.

II Savoir Minimum ELEVES

MOTS

angles plat, droit, nul, aigu, obtus ; angles supplémentaires, complémentaires

degré, grade, et leurs subdivisions (le mot "radian" ne figure pas au programme)

ENONCES (admis sans démonstrations)

- Pour tout triangle ABC, $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$

$$\text{ou} \quad \beta + \gamma + \alpha = 180$$

(si β, γ, α, désignent les écarts angulaires, en degrés, des angles du triangle).

- Si $d(A,B) = d(B,C) = d(C,A)$, alors
$\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60°$.

- Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

- Si $d(A,B) = d(A,C)$, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

SAVOIR-FAIRE

- La demi-droite [Ox) étant donnée, savoir tracer une demi-droite [Oy) telle que $\{\widehat{Ox,Oy}\}$ soit un angle donné par son écart angulaire.

- Conversion Grades-Degrés (1 gr = 0,9°) avec encadrement éventuel du résultat.

Par exemple : $67{,}2\ \text{gr} < 60°30' < 67{,}3\ \text{gr}$

• Addition et soustraction de nombres "sexagésimaux" (ce mot est d'ailleurs superflu ; plus important est de veiller à ce qu'aucune "somme" d'angles ne dépasse 180°).

• Usage du rapporteur pour encadrer la "mesure" d'un angle donné par l'un de ses représentants.

• Usage des tables trigonométriques.

Classification des MOTS se rapportant au thème

ANGLES

Mots	Code	Mots	Code
adjacent	S	écart (angulaire)	*
aigu	***	grade	***
angle	***	obtus	***
bissectrice	***	plat	***
complément	*	rentrant (secteur)	*
complémentaires (angles)	***	saillant (secteur)	*
		secteur ("angulaire")	*
côté (d'un secteur angulaire)	*	sexagésimal	S
		sommet	*
degré	***	supplémentaires (angles)	***
droit	***		

chapitre V

RAISONNEMENT LANGAGE

AUTO-CONTROLE (comportement)

REFLEXIONS

Pourquoi *auto-contrôle* ? L'erreur nous guette tous, maîtres et élèves. Relire ses calculs n'est pas souvent très efficace car l'erreur est telle qu'il y a de fortes chances qu'on ne la voie pas en relisant. Il est donc important que maîtres et élèves aient toujours en tête pour objectif *l'auto-contrôle.*

Si l'on donne à remplir un tableau numérique un peu compliqué, certains élèves développent parfois des stratégies pour s'épargner de la peine, mais aussi pour *s'auto-contrôler.* Peut-être devrions-nous introduire dans certains exercices : "Imagine un *auto-contrôle* de ton résultat", pour développer chez l'élève ce doute sain : "Est-ce que ce résultat que je donne est le bon ?".

L'objectif global est de donner à l'élève l'habitude, le besoin, presque le goût, de *s'auto-contrôler* spontanément. Façon comme une autre de développer en lui le sens des responsabilités, la prudence, la modestie.

En outre, le travail en équipes offre l'occasion de contrôles mutuels.

QUELQUES PISTES

1) *Auto-contrôle de lecture du texte donné*

— Ai-je bien lu l'écriture donnée ?

- vecteur $\overrightarrow{NM}$ et non vecteur $\overrightarrow{MN}$,
- $2 + 3x \neq (2 + 3)x$,
- ....

— Ai-je bien répondu à la question ?

- "factoriser" signifie "arriver à une écriture sous forme de produit" ;
- "développer" signifie "arriver à une écriture sous forme de somme".

2) *Auto-contrôle des résultats*

— *Auto-contrôle* de vraisemblance. Quand on aboutit à un résultat, savoir prendre du recul et se demander s'il est plausible.

Le nombre d'éléments d'un produit cartésien d'ensembles est le produit des nombres d'éléments de chaque ensemble.

Le nombre d'éléments du graphe d'une relation est le nombre de flèches du schéma sagittal ; etc...

Le nombre de termes du développement (avant réduction) d'un produit de polynomes est le produit des nombres de monomes de chaque polynome ; etc...

En calcul numérique, *auto-contrôle* :

- par les chiffres des unités : $(...3) \times (...9) = ...7$;
- par comparaison du résultat et de ses prévisions (recherche mentale d'un *ordre de grandeur* ou éventuellement d'un *encadrement* du résultat) ;
- du calcul d'une différence par le calcul d'une somme.

— Contrôle par 9 (ou test par 9) (plutôt que "preuve par neuf") et connaissance de la portée limite d'un tel contrôle.

— En géométrie, *auto-contrôle par le dessin* (ou parfois par plusieurs dessins car un dessin trop particulier peut donner des idées fausses).

— Les nombres (resp. les couples de nombres) qu'on vient de trouver en résolvant une équation (resp. un système d'équations) sont-ils bien des solutions ? *Auto-contrôle par substitution à l'inconnue.* Cependant, un tel contrôle ne garantit pas qu'on n'ait pas oublié des solutions (à moins que le nombre des solutions soit connu d'avance grâce à un théorème général).

— Contrôle de la représentation d'une application affine à l'aide d'un troisième point suffisamment éloigné et judicieusement choisi.

— Contrôle de l'équation d'une droite : la droite passe-t-elle bien par un (ou plusieurs) point(s) dont les coordonnées vérifient l'équation proposée ?

— *Auto-contrôle* d'une factorisation par un développement (si ce n'est pas trop long).

— *Auto-contrôle* d'une identité en donnant aux lettres des valeurs numériques simples.

— *Auto-contrôle* d'homogénéité :

Exemple : en développant $(ab+bc+ca)^2$ on ne peut obtenir que des "mots" de quatre lettres (des monomes du quatrième degré).

— *Auto-contrôle* d'un résultat général par l'examen de cas particuliers simples.

— Garde-fous :

- Le carré de tout réel est positif.
- Tout cosinus est compris entre -1 et $+1$.
- etc...

Remarque de vocabulaire.

Vérifier est à la fois un synonyme de *contrôler* et un vocable mathématique précis signifiant "rendre vrai".

Exemple 3 vérifie l'égalité $2x = 6$, car :
l'égalité $2 \times 3 = 6$ est vraie.

QUELQUES ATTITUDES

En sixième et cinquième, on peut :

— tantôt souligner quelques mots dans un texte qu'on distribue ;

— tantôt demander aux élèves de souligner des mots, des informations qui faciliteront le contrôle de leurs premières lectures ;

— écrire parfois : "Avant de continuer ce travail, contrôle si tu n'as pas oublié une précaution imposée par des mots soulignés" ;

— ou bien écrire : "Ce travail exigeant beaucoup d'attention, invente des "garde-fous" pour achever sans erreur".

Auto-contrôle de "l'individu-classe". On pourrait imaginer que certaines écritures au tableau ne soient pas, dans un premier temps, correctes. La possibilité d'erreurs, volontaires ou non, provoque une attention beaucoup plus soutenue de la part de "l'individu-classe", son intervention pouvant être sollicitée à tout instant.

Tout cela engendre une contradiction entre les objectifs de rapidité et ceux qui sont précisés ci-dessus. MAIS mieux vaut un énoncé lu sans hâte et contrôlé qu'un énoncé lu rapidement ... mais mal compris.

Classification des MOTS se rapportant au thème

AUTO-CONTROLE

Mots	Code
analyse - analyser	Δ
calcul (présentation d'un)	***
calculer	***
chercher	Δ
comparer	***
construction	S
construire	*
contrôler	***
décrire	Δ
étudier	*
exemple	***
intuition	Δ
justifier	***
observer	*
ordre de grandeur	***
organigramme	*
organiser	*
prévoir	Δ
programme	S
problème	***
rédiger	Δ
traduire	***
trouver	*
vérifier	***

DESCRIPTIONS ET NOTATIONS

I. OBSERVATIONS ET DESCRIPTIONS

Pour décrire les objets et relations mathématiques, les opérations que nous effectuons sur eux, nous utilisons, outre les termes mathématiques, un langage (ou métalangue) dont les mots n'appartiennent pas à la théorie mathématique proprement dite ; ce sont des termes et des tournures de phrases, parfois vagues, mais utiles.

Il est souhaitable que, par l'usage et dans des cas simples, les élèves en comprennent certains :

• *de façon analogue, de façon semblable, par un calcul analogue.*

Exemple 1 :

On a démontré que la somme de deux naturels pairs est un naturel pair.

Démontre *de façon analogue* que la somme de deux naturels multiples de 7 est un multiple de 7 ; *ou* que le produit de deux naturels pairs est pair ; *ou* que la somme de deux naturels impairs est paire.

Exemple 2 :

Après avoir démontré que :

si $x = a - ay$ et $y = b - bx$ alors $(1 - ab)x = a(1 - b)$

on pourrait parler d'une *écriture analogue* pour $(1 - ab)y$ ou d'une *égalité analogue* en y.

• *de même nature que* paraît moins heureux.

• *être de la forme de* peut être commode.

Exemple 3 :

On pourra parler des entiers *de la forme* $3k + 1$, où k est élément de $\mathbb{Z}$.

Remarque :

Ces expressions ne devraient être employées qu'avec précaution, après s'être assuré que les élèves en comprennent le sens.

• Les mots *respectivement* et *respectifs*, commodes pour certains, paraissent superflus à d'autres.

• Les mots *différents, distincts* sont commodes. Le signe $\neq$ est indispensable et se lit *est différent de*, ou *n'est pas égal à*, ou *est distinct de*.

Remarque : Signalons la confusion fréquente entre distincts *et* disjoints.

• Le mot *CONTRAIRE* semble dangereux car il est générateur de nombreuses confusions.

Exemple 4 :

Le contraire de "croissant" serait "décroissant", et de ce fait toute application qui n'est pas croissante serait décroissante.

1) Dans "2 et − 6 *sont de signes contraires*",
on peut dire :

"sont de signes *différents*".

2) Dans l'expression "*inégalités de sens contraire*".
on peut dire :

"*inégalités de sens opposés*".

• Le mot "(le, la) même" est également dangereux : on ne sait pas s'il est synonyme d'*analogue* ou d'*égal*.

II. NOTATIONS

Pour parler commodément des objets, il est nécessaire de les désigner (par un nom, une lettre, ou un autre symbole). Les élèves comprennent cette nécessité, ils ont du goût pour ces *codages*.

• On utilise des expressions telles que : appelons, notons, posons, soit..., considérons..., donnons-nous...

Exemples 5 :

5.1. Appelons d la droite dont deux éléments sont A et B.

5.2. Notons T l'ensemble des translations.

5.3. Soit M un point du plan.

5.4. Considérons un réel x .

5.5. Posons : $b = 1 - 3a$ (b apparaissant pour la première fois) ou encore $1 - 3a = b$.

• Il existe des *abus*... sans lesquels il ne serait pas possible de faire des mathématiques ; les plus fréquents consistant à désigner par un même symbole deux objets distincts.

Exemples 6 :

6.1. Le signe + désigne une loi dans **R** *et* une loi dans l'ensemble des vecteurs du plan.

6.2. Dans l'écriture : $4 - (-3)$, les deux signes − ont évidemment des sens différents.

Cet abus va parfois jusqu'à identifier deux objets isomorphes.

Exemple : $(\mathbf{N}, +)$ et $(\mathbf{Z}^+, +)$

Il est indispensable que les élèves soient capables de faire ces *abus d'écriture* (mais pas n'importe lesquels, ni n'importe comment ! !) et de les décoder. Il semble souhaitable qu'au cours d'exercices une analyse de la nature et du rôle des signes soit faite régulièrement (dans la description des propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel, par exemple).

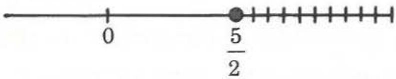
- Proposer des désignations nouvelles relève de *conventions.*

Comprendre ce qu'est une *convention* est difficile pour les élèves, si on ne leur en fait pas sentir la nécessité ou la commodité (en particulier les règles de priorité en calcul, la suppression des signes $\times$ dans certaines écritures ...).

Il faut distinguer les *conventions* quasi-universelles et les conventions valables pour une heure de cours ou un problème, en particulier s'il s'agit d'obtenir des élèves la précision de *leurs propres désignations et conventions.*

Exemple 7 :

Si on représente l'ensemble des solutions de l'inéquation dans $\mathbf{R}$: $2x \geqslant 5$ par le dessin :



il est indispensable de préciser le rôle des hachures et du petit disque noir.

III. COMMENTAIRES

Les mathématiques seraient devenues totalement incohérentes sans *commentaires* et remarques qui peuvent :

- donner de façon explicite, en français, tous les arguments (définitions, axiomes, conventions, théorèmes) utiles, dans une démonstration, pour passer d'une écriture à une autre ;

- donner seulement les grandes lignes d'une démonstration ;

- porter un jugement sur la façon dont elle a été menée ;

- souligner les erreurs qui auraient pu être commises (par exemple : pour exploiter l'égalité : $ad - bc = 0$, on note souvent $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mais on ne peut le faire qu'après avoir supposé $bd \neq 0$. Il est souvent bon de souligner qu'on aurait commis une erreur si l'on n'avait pas traité à part le cas : $bd = 0$).

MOTS

analogue, semblable
différent, distinct
convention, abus (de langage, d'écriture)

SAVOIR-FAIRE

• Savoir distinguer entre *une convention* et un fait mathématique : définition, théorème ...

Exemple :

Associativité de la loi $*$: $(a * b) * c = a * (b * c)$

Convention : $(a \perp b) \perp c = a \perp b \perp c$ (même si la loi $\perp$ n'est pas associative : par exemple la soustraction !).

• Savoir reconnaître, décoder, utiliser les *abus d'écriture* les plus usuels (dès qu'ils ne sont plus dangereux pour l'élève).

Classification des MOTS se rapportant au thème
DESCRIPTIONS ET NOTATIONS

Mots	Code	Mots	Code
abus (de langage, d'écriture)	***	métalangue	S
analogue	***	nature (de même)	S
commentaire	Δ	notons (noter)	*
considérons (considérer)	*	posons (poser)	*
		remarque	*
contraire	dangereux	respectif	Δ
convention	***	respectivement	Δ
différent	***	semblable	*
distinct	***	soit	*
forme (être de la)	*	symbole	***
indice	*		

QUANTIFICATEURS - CONNECTEURS

Sauf la dernière partie, cette fiche est destinée plus aux professeurs qu'aux élèves.

INTRODUCTION

Il est exclu que l'enseignement du premier cycle aboutisse à une formalisation totale, ou même poussée, du langage mathématique.

L'objectif primordial est que chaque *phrase* (1) du langage mathématique déclenche, comme une sorte de réflexe, les questions préalables :

— Cette phrase a-t-elle un sens ? si oui, est-elle vraie ? est-elle fausse ? n'est-elle ni vraie ni fausse ?

Répondre à la première de ces questions, c'est assurément traquer d'éventuelles fautes d'écriture. C'est aussi, souvent, se demander dans quel ensemble on travaille.

Voici des *phrases* :

"$3 < 5$"	c'est une phrase vraie.
"$3 > 5$"	c'est une phrase fausse.
"Dans **R** $\forall x \quad x + 1 = 3$"	c'est une phrase fausse.
"Dans **R** $\exists x \quad x + 1 = 3$"	c'est une phrase vraie.
"$x \in$ **R** et $x^2 + 1 = 8$"	c'est une phrase qui n'est ni vraie, ni fausse.

Certains trouvent commode de distinguer par deux vocables :

— les phrases contenant des variables non quantifiées (exemple : la cinquième phrase ci-dessus) ;

— les autres phrases (exemple : les quatre premières ci-dessus).

(1) ou *énoncé* ou *proposition* ou ...

Par CONVENTION, et sauf avis contraire expressément formulé, toute *phrase* écrite est considérée comme vraie ; c'est pourquoi :

— on écrit : "$3 > 5$ est une phrase fausse" ;

— on n'écrit pas *d'équation* sans prévenir que l'on a affaire à une équation ;

— dans le raisonnement par l'absurde, pour introduire la *phrase* que l'on veut démontrer être fausse, on dit : "supposons que..." ;

— etc...

Mais cette convention n'exclut pas qu'une (ou plusieurs) partie d'une phrase vraie soit une phrase fausse : le cas est fréquent dans l'implication et l'équivalence logique (ce qui les rend d'un emploi très délicat dans le premier cycle) et dans l'emploi du mot *ou*.

Exemple :

$$\frac{1}{3} \in \mathbf{D} \quad ou \quad \frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$$

est une phrase vraie, bien que

$$\frac{1}{3} \in \mathbf{D}$$

soit une phrase fausse.

QUANTIFICATEURS

Les expressions : *pour tout* (ou encore : *quel que soit*), *pour au moins un* (ou encore : *il existe au moins un ... tel que*), *pour un ... et un seul* (ou encore : *il existe un ... et un seul tel que ...*) recouvrent des *notions indispensables*.

Mais les notations $\forall$, $\exists$, $\exists\,!$, ne sont pas indispensables, ni le mot *quantificateur*.

Ce qui importe, c'est d'habituer les élèves à *exprimer en français* le plus souvent possible les quantificateurs qui sont sous-jacents à la plupart des théorèmes. Par exemple :

Quels que soient les réels a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Pour tout triangle ABC rectangle en A,

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

Il existe au moins un réel dont le carré est 3
Il existe au moins un naturel k tel que : $91 = 13 \times k$
(traduction explicite de : "91 est multiple de 13").

Remarque :

Si l'on décide d'utiliser des *symboles* quantificateurs, on veillera naturellement à leur emploi correct, à savoir :

- ne jamais les utiliser comme signes sténographiques placés au milieu de mots de français ; une expression telle que
  "pour $\forall$ x réel tel que $x > 1$, on a $x^2 > 1$"
  est à proscrire absolument, de tels usages conduisant en effet à la confusion de pensée ;
- les faire porter sur une lettre et non sur un assemblage . $\exists f(x)$; $\forall (x+y)$; etc... sont à proscrire rigoureusement ;
- les faire toujours *suivre* de la phrase qu'ils affectent : donc ne jamais écrire $\forall x$ tout court ; ni par exemple :

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1, \quad \forall x .$$

Exemples

(1) "$x^2 = 3$" est une phrase qui n'est ni vraie, ni fausse ; quand on dit que c'est une équation en x dans **R**, c'est qu'on se propose de caractériser l'ensemble des réels x tels que $x^2 = 3$.

(2) "$\forall x \quad x^2 = 3$" est une phrase fausse dans **R**.

(3) "$\exists x \quad x^2 = 3$" est une phrase vraie dans **R** ; elle ne constitue pas la réponse complète au problème "Résoudre l'équation en x dans **R** $x^2 = 3$" ; elle indique seulement que l'ensemble des solutions de cette équation n'est pas vide.

(4) "$\exists x \quad \forall y \quad |x| \leqslant |y|$" est une phrase vraie dans **R**, mais "$\forall y \quad |x| \leqslant |y|$" est une phrase qui n'est ni vraie ni fausse bien qu'un quantificateur y figure. Pour être assuré qu'une phrase est une phrase vraie ou est une phrase fausse, il suffit de constater que toutes les lettres qui y figurent sont quantifiées (nous négligeons ici les phrases indécidables ; on n'en rencontrera jamais dans le premier cycle).

(5) On voit souvent écrit : "Dans **R**, la phrase $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est vraie".

IL EST CEPENDANT DANGEREUX DE SOUS-ENTENDRE LES QUANTIFICATEURS AVEC DES DEBUTANTS ;

aussi préférera-t-on écrire :

Quels que soient les réels a *et* b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ou, si l'on utilise les quantificateurs :

$$\textit{Dans } \mathbf{R}, \ \forall a \quad \forall b \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On pourra également écrire :

$$\textit{Dans } \mathbf{R}, \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \textit{est une identité}$$ (2)

Il n'est cependant pas sûr que le mot *identité* souligne suffisamment la présence implicite de quantificateurs.

CONNECTEURS

Sont accessibles et utiles dans le premier cycle les connecteurs notés *et* et *ou* (*ou* étant pris au sens non-exclusif).

Exemples :

- la *conjonction* (ou le système) d'équations

$$3a + 4b - 8 = 0 \quad \textit{et} \quad 2a - b = 7$$

peut se noter aussi :

$$\begin{cases} 3a + 4b - 8 = 0 \\ 2a - b = 7 \end{cases}$$

N'est-il pas souhaitable dans le premier cycle d'écrire le plus souvent :

$$\begin{cases} 3a + 4b - 8 = 0 \\ \textit{et} \\ 2a - b = 7 \quad ? \end{cases}$$

- L'équation dans **R**

$$(2t - 1)(4 - t) = 0$$

a même ensemble de solutions que :

$$2t - 1 = 0 \quad \textit{ou} \quad 4 - t = 0$$

etc...

---

(2) Beaucoup d'élèves comprennent mieux cette identité lorsqu'on l'écrit sous la forme

$$(\bigcirc + \triangle)^2 = \bigcirc^2 + 2\,\bigcirc\triangle + \triangle^2$$

Cette idée peut être également intéressante dans d'autres domaines.

LES LIENS VERBAUX "ENTRAINE" ET "EST SYNONYME DE"

a) $\boxed{\text{Dans } \mathbf{R} : \ z > 3 \ \textit{entraîne} \ z > 1}$

peut être traduit par :

- Si z est un réel tel que $z > 3$, alors $z > 1$

ou par

- Quel que soit le réel z, si $z > 3$, alors $z > 1$

ou par

- Dans **R**, *chaque fois que* $z > 3$, *alors* $z > 1$

Remarque :

Cette dernière expression a l'avantage d'être simple et dynamique et le petit inconvénient d'introduire le temps là où il n'a que faire.

On reconnaît encore dans l'expression

Dans **R** : $z > 3$ *entraîne* $z > 1$

l'existence d'un quantificateur universel *implicite*, qu'il vaudrait mieux habituer les élèves à *expliciter*, par exemple par "*chaque fois que ... alors*".

b) Dans le plan, les points A,B,C n'étant pas alignés :

$$\boxed{d(A,B) = d(A,C) \quad \textit{est synonyme de} \quad \widehat{B} = \widehat{C}}$$

signifie

$$\boxed{\begin{array}{c} d(A,B) = d(A,C) \quad \textit{entraîne} \quad \widehat{B} = \widehat{C} \\ \textit{et} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \quad \textit{entraîne} \quad d(A,B) = d(A,C) \end{array}}$$

VOCABULAIRE ET NOTATIONS

Contrairement aux mots "équivalence" (ou "équivalence logique") et "implication", les expressions *entraîne* et *est synonyne de* sont d'un emploi commode dans le premier cycle.

Dans l'état actuel des choses, les notations sont très diverses selon les auteurs et les professeurs. Aussi suggérons-nous qu'on s'en tienne dans le premier cycle aux énonciations précédentes (ou toutes autres analogues), et que dans ce contexte on n'utilise ni les signes $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\vdash$, $\mapsto$, ni les mots "impliquer", "implication", "inférer", "inférence", "équivalence logique" (ou "équivalence" dans le sens d'"équivalence logique").

Par ailleurs, les tables de vérité ne sont pas au programme du premier cycle et sont *SUPERFLUES* ; il en est de même de l'étude des connecteurs.

SAVOIR-FAIRE ELEVES

En ce qui concerne les phrases contenant les locutions fondamentales :

"*Quel que soit l'élément de E ...*"

et "*Il existe au moins un élément de E tel que ...*"

l'élève peut être placé en face de quatre situations apparemment distinctes S_1, S_2, S_3, S_4.

S_1 : "Quel que soit l'élément x de E, p(x)" est une phrase vraie.

S_2 : "Il existe au moins un élément x de E tel que p(x)" est une phrase vraie.

S_3 : "Quel que soit l'élément x de E, p(x)" est une phrase fausse.

S_4 : "Il existe au moins un élément x de E tel que p(x)" est une phrase fausse.

Au point de vue du savoir-faire, il paraît souhaitable qu'un élève sache, sur des exemples, prendre la négation d'une phrase simple contenant ou bien *quel que soit...* ou bien *il existe au moins un* (mais pas les deux à la fois dans le premier cycle).

Ainsi, il doit savoir que démontrer qu'une phrase est fausse revient à démontrer que sa négation est vraie. Il aura ainsi, non pas quatre, mais deux situations seulement. Les phrases des situations S_3 et S_4 seront remplacées par des phrases synonymes S'_3 et S'_4 :

S'_3 : "Il existe au moins un élément x de E tel que non-p(x)" est une phrase vraie.

S'_4 : "Quel que soit l'élément x de E, non-p(x)" est une phrase vraie.

De ce fait, au point de vue des méthodes mises en oeuvre, on n'aura que deux situations, celles de S_1 et S_2.

Classification des MOTS se rapportant au thème
QUANTIFICATEURS – CONNECTEURS

Mots	Code	Mots	Code
assertion	S	ou	***
chaque	***	paramètre	S
conjonction	Δ	phrase	*
contradictoire	S	proposition	*
contraire	S	propositionnelle	
connecteur	S	(forme)	S
disjonction	Δ	propriété	*
énoncé	*	prédicat	S
entraîne	***	quantificateur	Δ
est synonyme de	***	quel que soit...	***
et	***	référentiel	Δ
faux	***	si... alors	*
formule	S	si et seulement si	*
il existe au moins un	***	signifie	***
implication	S	tout, tous	***
impossible	S	toujours	S
incompatible	S	unique	*
indécidable	S	un (seul)	***
indéterminé	S	au moins un	***
inférence	S	au plus un	***
le, la	***	variable	Δ
logique	S	vérité (table de)	S
moule	*	vérifier	***
négation	***	vrai	***

CODE	
Mot indispensable	***
Mot commode	*
Mot superflu	S
Notion indispensable	Δ

DÉMONSTRATION

TROIS RUBRIQUES SONT CONSACREES AUX PROBLEMES DE LA DEMONSTRATION.

LA PREMIERE, OU SONT DEVELOPPEES DES *GENERALITES*, EST ESSENTIELLEMENT RESERVEE AU PROFESSEUR.

DANS LA DEUXIEME SONT ETUDIEES QUELQUES *TECHNIQUES DE DEMONSTRATION*. ELLE EST DESTINEE AU PROFESSEUR, LES MOTS ET SAVOIR-FAIRE ELEVES ETANT REGROUPES EN FIN DE RUBRIQUE.

DANS LA TROISIEME, ENFIN, ON TROUVERA DIVERSES POSSIBILITES POUR *PRESENTER UNE DEMONSTRATION*. ELLE SERA ACCOMPAGNEE DE TROIS ANNEXES.

UNE LISTE GENERALE DE MOTS TERMINERA L'ETUDE DU THEME *DEMONSTRATION*.

DÉMONSTRATION 1
GÉNÉRALITÉS

I EN CE QUI CONCERNE LES INTENTIONS ...

1. Quand nous demandons une démonstration à nos élèves, quand nous en faisons une devant eux, quels *objectifs* poursuivons-nous ?

— s'agit-il de faire un "devis" du problème, c'est-à-dire d'expliciter hypothèse et conclusion, d'énumérer les théorèmes utiles ?
— s'agit-il de "calculer", de court-circuiter mentalement les étapes du raisonnement (c'est-à-dire de "savoir-faire") ?
— s'agit-il de faire prendre conscience des articulations de la démonstration ?
— s'agit-il de donner, sous une forme rapide, l'allure du raisonnement ?

— s'agit-il de faire une "démonstration complète", renfermant les étapes du raisonnement avec explicitation des théorèmes employés, c'est-à-dire de "justifier" ?
— s'agit-il de rédiger, c'est-à-dire de transmettre une information par l'intermédiaire d'un texte ?

2. Suivant l'objectif choisi (ou les objectifs), on choisira telle ou telle *présentation* de démonstration ; la multiplicité des objectifs conduira à varier les *présentations.*

3. L'un des problèmes pédagogiques de l'initiation à la démonstration réside dans l'existence d'étapes plus ou moins systématiquement passées sous silence.

Si l'on se permet couramment ce genre de pratique, les élèves ont du mal à réaliser ce qu'est une démonstration.

Il faut se livrer à une analyse extrêmement fine de la démonstration et à une *explicitation des divers chaînons* ou des *justifications des diverses étapes.* Cela ne peut pas se faire toujours aisément si la démonstration est rédigée entièrement en français ; d'autres procédés (organigrammes ; "chaînes de phrases" ; tableaux à deux colonnes, une pour les phrases, une pour les justifications de ces phrases ; ...) sont utiles, et parfois souhaitables, *dans un premier stade d'initiation.*

Il est dangereux de ne faire des démonstrations que dans le style qui nous est habituel, c'est-à-dire rédigées en français avec des étapes implicites : l'élève comprendra-t-il de lui-même ce qu'est une démonstration à "force d'en faire" ?

II UNE MOTIVATION A LA DEMONSTRATION : CONJECTURER !

Un objectif raisonnable est d'amener les élèves à ressentir la nécessité de *démontrer*, et à comprendre ce qu'est une *démonstration* et donc un *théorème.*

Placés devant des situations numériques ou géométriques appropriées, les élèves peuvent être amenés, par leurs observations, à émettre des prévisions sous forme de phrases. Ces phrases, vérifiées dans les situations étudiées, qui sont des cas particuliers, seront peut-être généralisables, si on en apporte la preuve, à d'autres situations.

Une situation sera d'autant plus motivante pour les élèves qu'elle sera, de leur part, source de conjectures.

Voici des exemples :

Exemple 1

● *12 est un multiple de 6 et 6 est un multiple de 3, et 12 est aussi un multiple de 3 ;*

1001 est un multiple de 91 et 91 est un multiple de 7, et 1001 est aussi un multiple de 7.

Conjecture possible : la relation dans **N** *"est un multiple de" est une relation transitive.*

Exemple 2

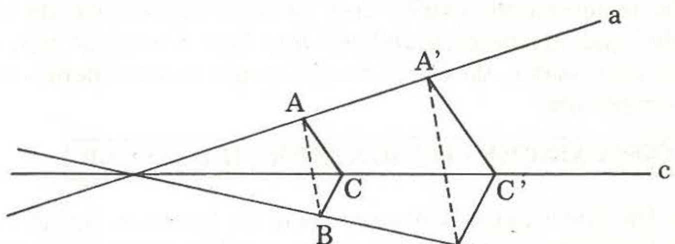
● *45 est un multiple de 3 et un multiple de 5, c'est aussi un multiple de 15 (c'est-à-dire de 3 × 5) ;*

48 est un multiple de 4 et un multiple de 6, c'est aussi un multiple de 24 (c'est-à-dire de 4 × 6).

Conjecture possible : si un naturel est un multiple de deux naturels, il est aussi multiple de leur produit.

Exemple 3

● *Après avoir dessiné les droites concourantes a, b et c et les points distincts A et A' sur a, B et B' sur b, C et C' sur c de façon que les droites BC et B'C' d'une part et les droites CA et C'A' de l'autre soient parallèles, on constate que les droites AB et A'B' sont aussi parallèles.*



Conjecture possible :

Il s'agit d'un hasard : dans d'autres dessins, différents mais respectant les mêmes hypothèses, les droites AB et A'B' ne seraient pas parallèles.

Il est souhaitable de placer les élèves, dès la sixième, dans des situations où ils feront des conjectures, certaines d'entre elles étant fausses (comme dans le deuxième et le troisième exemples proposés). Le fait que certaines conjectures plausibles se révèlent fausses après examen devrait être une incitation à faire des démonstrations.

Naturellement, surtout au début, les propriétés que l'on veut démontrer ne devraient pas être trop "évidentes", sous peine de faire apparaître la *démonstration* comme un jeu futile.

Les élèves étant mis en présence d'une phrase (conjecture), plusieurs attitudes sont possibles :

- se désintéresser de la dite phrase ;
- chercher à se forger une conviction, relativement à sa vérité, par l'étude d'un grand nombre de cas particuliers ;
- chercher un avis compétent (auprès d'une personne, d'un ouvrage ...) :
  - la démonstration de la phrase est possible mais trop délicate ou hors de portée des élèves ; ceux-ci l'admettent (ce qui revient, pour eux, à la poser comme *axiome* supplémentaire) ;
  - on décide que cette phrase est un *axiome* (sous réserve qu'elle soit compatible avec les autres axiomes de la théorie) ;
- chercher à démontrer que cette phrase est vraie (c'est alors un *théorème*), ou qu'elle est fausse.

La dernière attitude n'est pas la plus naturelle.

De toute façon, l'élève doit prendre conscience de ceci : la règle du "jeu mathématique" est que l'on n'accepte pas, s'il est possible d'en sortir, de rester dans le doute relativement à la vérité d'une conjecture.

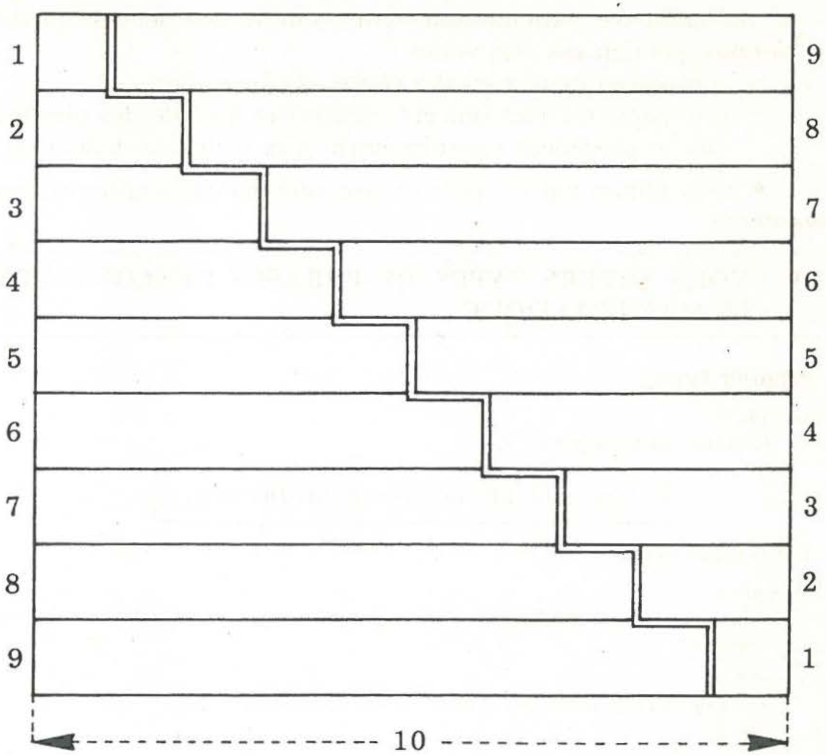
III CONVAINCRE - DEMONTRER - ILLUSTRER

• Un élève peut être convaincu de la vérité ou de l'intérêt d'un théorème par un commentaire, une illustration, une application ; une démonstration ne le convaincra pas toujours.

Exemple 4

La somme des n premiers naturels non nuls est $\frac{n(n+1)}{2}$. *Le dessin ci-dessous est-il convaincant pour la somme des neuf premiers naturels ? Est-ce une démonstration ?*

$$1+2\ldots+9=\frac{9\times 10}{2}$$



• A partir de calculs sur certaines puissances de nombres entiers, les élèves dégagent des règles de calcul. L'une s'énonce ainsi :

Quel que soit l'entier non nul a , quels que soient les naturels n et p ,

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

Les calculs effectués ne prouvent pas cet énoncé ; ils ne constituent pas une *démonstration* de ce *théorème* de la théorie des entiers. Ils peuvent servir d'introduction ou d'*illustration* à cette règle.

• Dans un premier temps, on peut dire qu'une *démonstration* :

— est un discours,

— a pour but de prouver qu'une phrase est vraie,

— se présente, très schématiquement, comme une succession de phrases que l'on sait être vraies :

- — soit parce que ce sont des vérités déjà connues,
- — soit parce qu'elles ont été construites à l'aide des phrases qui les précèdent conformément aux règles de déduction.

• Une phrase qui est prouvée par une démonstration est un *théorème.*

IV VOICI DIVERS TYPES DE PHRASES RENCONTREES EN MATHEMATIQUE

Premier type

Exemple 5

1260 est un multiple de 7.

> C'est une phrase sans quantificateur.

Deuxième type

Exemple 6

Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

Exemple 7

Tout naturel divisible par 2 et par 5 est divisible par 10.

Exemple 8

Quels que soient les réels a et b ,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ce sont des phrases du type :

> Tout élément de l'ensemble . . . vérifie la propriété : . . .

Troisième type

Exemple 9

Il existe au moins un décimal x tel que $x^2 = 7$.

Exemple 10

Etant données deux droites distinctes a et b du plan, il existe au moins une projection de a sur b .

Ce sont des phrases du type :

> Il existe au moins un élément de l'ensemble . . . qui vérifie la propriété : . . .

Troisième type (autre aspect)

Exemple 11

Il existe un et un seul réel x *tel que* : $3x = 7$.

Exemple 12

L'équation dans R $2x + 3 = 0$ *admet une et une seule solution.*

Ce sont des phrases du type :

Il existe un et un seul élément de l'ensemble . . . qui vérifie la propriété : . . .

Remarques.

a) Les phrases du deuxième type sont des "énoncés" de type universel, celles du troisième type sont de type existentiel.

b) Beaucoup de phrases sont "combinaisons" des deuxième et troisième types.

Exemple 13

Tout réel admet un inverse.

Exemple 14

Tout triangle admet un centre de gravité.

c) Un énoncé du deuxième type où l'on a, par abus, sous-entendu le quantificateur prend l'aspect d'un énoncé du premier type.

Exemple 15

$3k$ *est un multiple de* k

(au lieu de : "Quel que soit le naturel k, $3k$ est un multiple de k").

DÉMONSTRATION II
TECHNIQUES DE DÉMONSTRATION

I THEORIE MATHEMATIQUE

En simplifiant, une théorie mathématique est constituée quand on s'est donné :

— une liste de mots (ou de symboles) ;
— une liste de phrases.

Les mots pourront être appelés les termes premiers de la théorie, les phrases sont généralement appelées les *axiomes* de la théorie.

Exemples de mots : "point", "droite", "ϕ", "$\in$".

Exemple de phrase : "Si A et B sont des points distincts, il existe une droite d unique telle que $A \in d$ et $B \in d$".

Les axiomes et les termes premiers de la théorie ne sont pas toujours donnés explicitement dans le Premier Cycle.

II COMMENT PROUVER ? PREMIER CLASSEMENT

Il est commode de classer les démonstrations en trois catégories :

— celles où il suffit de fournir un *EXEMPLE*, ou un *CONTRE-EXEMPLE* ;

— celles où l'on explore complètement tous les cas possibles (ce qui suppose qu'ils forment un ensemble fini — et que leur nombre est relativement petit) ;

— les autres [1].

Ecrire une démonstration, c'est écrire une succession de phrases en respectant la règle suivante :

On n'écrit une phrase que si :

— on sait qu'elle est "vraie", c'est-à-dire qu'elle est un axiome (ou une définition) de la théorie, ou un théorème (c'est-à-dire qu'elle a été démontrée) ;

ou si :

— on sait qu'on peut la déduire par un "procédé de déduction" des phrases écrites antérieurement dans cette démonstration.

III PROCEDES DE DEDUCTION

Les procédés de déduction qui sont proposés ici sont les plus courants. Il est hors de question d'en faire une théorie aux élèves, ou même de leur en dresser la liste. Leurs noms (quand ils en ont) sont tout à fait superflus pour les élèves.

1 Procédés liés aux quantificateurs.

• *Quantificateur universel.*

[1] C'est le cas des exemples 7 - 8 - 12 de la partie "Démonstration 1". Il est alors nécessaire de faire appel aux procédés de déduction dans une théorie mathématique.

Exemple 1

On sait que : quel que soit x, $x \notin \phi$;

on peut affirmer : $3 \notin \phi$.

Exemple 2

On sait que :

quels que soient les réels a *et* b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

on peut affirmer : $(10 + 1)^2 = 10^2 + 20 + 1$.

D'une manière générale, si l'on sait que
"quel que soit l'élément x de l'ensemble E, x vérifie la phrase P"
et si a est un élément de l'ensemble E,
on peut affirmer que

a vérifie la phrase P.

- *Quantificateur existentiel.*

Exemple 1

$2 \in \mathrm{N}$ *et* $4 \in \mathrm{N}$ *et* $2^4 = 4^2$ *et* $2 \neq 4$; *on peut donc affirmer qu'il existe deux naturels distincts* x *et* y *tels que* $x^y = y^x$.

Exemple 2

$3 \in \mathrm{Z}$, $-2 \in \mathrm{Z}$ *et* $7 \times 3 + 5 \times (-2) = 11$; *on peut affirmer qu'il existe au moins un couple d'entiers* (x, y) *tel que* $7x + 5y = 11$.

D'une manière générale, si l'on connaît un élément de l'ensemble E qui vérifie la phrase P, on peut affirmer qu'il existe au moins un élément de l'ensemble E qui vérifie P.

2 Procédés liés aux connecteurs.

- *Règle du détachement.* Si l'on sait que P et Q sont des phrases, et si l'on sait que les phrases P et "si P alors Q" sont vraies, on peut affirmer que la phrase Q est vraie.

Exemple

On sait que :

"Quels que soient les entiers strictement positifs x *et* y, *si* $x < y$ *alors* $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$",

que 2 et 3 sont des entiers strictement positifs et que $2 < 3$.

On en déduit que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Dans cet exemple, comme très souvent dans la pratique de la classe, on a utilisé deux procédés en une fois :

— un procédé lié aux quantificateurs, qui permet de déduire de la phrase quantifiée la phrase suivante :

"Si $2 < 3$, alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$" ;

— la règle du détachement :

On sait : $2 < 3$	[p]
et si $2 < 3$ alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$	et [si p alors q]
On peut affirmer $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$	donc [q]

Cette règle du détachement est tellement utilisée en mathématiques qu'elle semble aller de soi ; et beaucoup négligent le plus souvent de l'expliciter.

• *Disjonction des cas.* Si l'on sait que "P ou Q", "si P alors R" et "si Q alors R" sont des phrases vraies, on peut affirmer qu'il en est de même pour R.

Exemple

n désignant un naturel, on sait que :	
n est pair ou n est impair ;	*P ou Q*
si n est pair alors n(n+1) est pair ;	*si P alors R*
si n est impair alors n(n+1) est pair.	*si Q alors R*
On peut conclure que :	
n(n+1) est pair.	*R*

Remarque.

On peut aussi quantifier P, Q, R par "quel que soit le naturel n , ...".

• *Contraposition.* Si l'on sait que "si P alors Q" est vrai, on peut affirmer que "si non Q alors non P" l'est aussi.

Exemple

d désignant la droite d'équation $3u + 2v = \sqrt{2}$, et (u,v) désignant un couple de réels, on sait que :
"Si M est un point de d , alors le couple de coordonnées de M vérifie $3u + 2v = \sqrt{2}$".

On peut affirmer que :
"Si le couple des coordonnées d'un point ne vérifie pas $3u + 2v = \sqrt{2}$, alors ce point n'est pas élément de d".

Remarque.

Ce procédé est commode, mais difficile à comprendre pour des débutants.

On se gardera de confondre la *contraposée* de "Si P alors Q" (qui est : "Si non Q alors non P") et la *réciproque* de "Si P alors Q" (qui est : "Si Q alors P").

Les élèves devraient savoir que, même si "Si P alors Q" est vrai, on ne peut pas affirmer a priori que "Si Q alors P" l'est. Autrement dit, ils devraient savoir que théorème "direct" et théorème réciproque nécessitent chacun une démonstration.

③ **Procédés liés à l'égalité** : se reporter à la rubrique *Egalité.*

Notre but n'était point de dresser la liste des procédés de déduction utiles en classe, mais d'attirer l'attention du *professeur* sur l'existence de tels procédés, qu'il serait plus dangereux qu'utile de détailler auprès des *élèves.*

IV QUELQUES TYPES DE DEMONSTRATION

① S'il s'agit de démontrer qu'il existe *un* élément qui possède une propriété donnée, il suffit de donner un *exemple.*

Ainsi, il existe au moins un couple d'entiers (u, v) tel que :

$$3u + 8v = 1 \quad \text{car} \quad 3 \times 3 + 8 \times (-1) = 1.$$

Cette preuve, par un seul *exemple,* est suffisante ; il est inutile, pour prouver ce théorème, de donner tous les couples (u , v) d'entiers tels que $3u + 8v = 1$.

② Si l'on veut démontrer qu'il est faux qu'une propriété est vérifiée par tous les éléments d'un ensemble, il suffit de donner un seul *contre-exemple.*

Ainsi la conjecture de l'exemple 13 de "Démonstration 1" est fausse car 0 n'a pas d'inverse. De même il est faux que l'élévation à une puissance dans $\mathbf{N}_*$ *soit une loi commutative, car* $2^3 \neq 3^2$.

③ Si l'on veut prouver que tous les éléments d'un ensemble fini ont une propriété donnée, il suffit de s'assurer que chacun de ces éléments, pris successivement, possède la propriété considérée.

Par exemple, considérons la loi dans $\{0 , 1\}$ *notée* $*$ *donnée par la table suivante :*

$*$	0	1
0	0	1
1	0	1

Comme

$(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * 0)$; $(0 * 0) * 1 = 0 * (0 * 1)$

$(0 * 1) * 0 = 0 * (1 * 0)$; $(1 * 0) * 0 = 1 * (0 * 0)$

$(0 * 1) * 1 = 0 * (1 * 1)$; $(1 * 0) * 1 = 1 * (0 * 1)$

$(1 * 1) * 0 = 1 * (1 * 0)$; $(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1)$

on peut affirmer que la loi $*$ *est associative.*

• Si on veut démontrer qu'il est faux qu'il existe un élément d'un ensemble fini possédant une propriété donnée, l'examen de tous les cas possibles sera une preuve suffisante.

Ainsi, il est faux qu'il existe un élément x *de* $\{0;1;2;3;4;5;6\}$ *tel que* $x^2 = x + 3$.

En effet :
$0^2 \neq 0 + 3$; $1^2 \neq 1 + 3$; $2^2 \neq 2 + 3$; $3^2 \neq 3 + 3$; $4^2 \neq 4 + 3$; $5^2 \neq 5 + 3$; $6^2 \neq 6 + 3$.

Il semble que, dès la sixième, des démonstrations des types précédents puissent - et doivent - être faites.

④ Hypothèse auxiliaire

Ce type de démonstration est utilisé très souvent.

Quand on veut établir qu'une phrase de la forme "si P alors Q" est vraie :
On suppose que P est vraie : P est *l'hypothèse.*
On fait une démonstration en utilisant P ; si l'on arrive à démontrer Q, qui sera alors la *conclusion*, on pourra affirmer : "si P alors Q".

Exemple

Démontrons que "si a *et* b *sont des multiples de 3,* $a + b$ *est multiple de 3".*

Faisons l'hypothèse que a *et* b *sont des multiples de 3.*
Soient p *et* q *les naturels tels que* $a = 3p$ *et* $b = 3q$;
$a + b = 3p + 3q$;
$3p + 3q = 3(p + q)$;
$a + b = 3(p + q)$;
$a + b$ *est un multiple de 3* (*conclusion*).

Nous pouvons affirmer : "si a *et* b *sont multiples de 3, alors* $a + b$ *est multiple de 3".*

⑤ Démonstration par l'absurde.

Ce type de démonstration est mal compris par de nombreux élèves. Dans toute la mesure du possible, il vaut mieux éviter de l'employer. Et il est hors de question qu'il fasse partie du savoir minimum de l'élève en fin de troisième.

⑥ Constante auxiliaire.

Dans cette méthode, on introduit un élément dont l'existence est certaine ; il participe à la démonstration, mais ne figure pas dans la conclusion.

Exemple

On se propose de démontrer qu'étant données deux droites a et b, il existe au moins une bijection de a vers b.

> *Soient a et b deux droites (hypothèse auxiliaire).*
>
> *Soit δ une direction qui ne contient ni a, ni b. (δ est la constante auxiliaire ; on peut en parler, car il existe de tels objets — il y en a d'ailleurs une infinité si le plan n'est pas fini).*
>
> *La projection de a vers b de direction δ est une bijection.*
>
> *Il existe une bijection de a vers b (la conclusion ne contient pas la constante auxiliaire δ).*
>
> *Si a et b sont deux droites, il existe au moins une bijection de a vers b.*

V MOTS ELEVES

démonstration, démontrer
théorème, théorème réciproque d'un théorème
axiome
définition
exemple
contre-exemple
hypothèse
conclusion

VI SAVOIR-FAIRE ELEVES

• Etre capable de reconnaître la nécessité d'une démonstration.

• Savoir reconnaître si un exemple (ou un contre-exemple) suffit à démontrer un théorème.

• Savoir reconnaître s'il est possible de démontrer un théorème en explorant tous les cas possibles.

• Savoir reconnaître dans une démonstration ce qui constitue :

— les "informations initiales" (hypothèse)
— l'aboutissement (conclusion)

par exemple dans la question :

"Les côtés opposés d'un parallélogramme sont-ils isométriques ? " [1].

[1] Il serait souhaitable que les énoncés soient mieux formulés (en séparant bien hypothèse et conclusion, en explicitant les quantificateurs s'il y a lieu).

• Savoir en quoi un discours ne constitue pas une démonstration :

— car l'on a utilisé une hypothèse supplémentaire sans s'être assuré de sa vérité,

— car des "chaînons" de la démonstration sont absents (un exemple classique est le suivant : soient deux ensembles A et B ; les élèves disent volontiers : "A est inclus dans B parce que tout élément de A est élément de B", cela sans le démontrer),

— car il existe des "chaînons" non préalablement établis, c'est-à-dire que le discours étudié renferme des "affirmations" non justifiables par des théorèmes ou définitions déjà connus,

— car on n'a pas respecté la "règle de construction logique" d'une démonstration rappelée au début de ce chapitre (voir page 184) (le cas le plus fréquent est : "Je vois sur la figure que I est le milieu de (A,B)", ou plus directement "I est le milieu de (A,B)" sans autre justification ni commentaire),

— car l'on a utilisé un théorème au lieu de sa réciproque.

DÉMONSTRATION III
ORGANISATION D'UNE DÉMONSTRATION

Il faut distinguer :

— ce qu'est une démonstration (voir "Démonstration II") ;

— la recherche d'une démonstration ; phase essentielle dont nous parlerons peu, ses processus étant mal connus ;

— la communication d'une démonstration, que nous abordons dans la partie III ci-dessous.

I LECTURE DYNAMIQUE DU PROBLEME

Etablir une démonstration nécessite en premier lieu compréhension et analyse de l'énoncé, c'est-à-dire une étude des données (qui formeront, à peu près toujours, l'hypothèse d'une démonstration par hypothèse auxiliaire), et une étude du résultat auquel on veut aboutir. Ce résultat sera presque toujours la conclusion de la démonstration. En résumé, il s'agit, dans cette première phase, de savoir lire un texte.

Faut-il apprendre aux élèves à lire et traduire un texte ? L'ANNEXE I, page 195, donne une approche de réponse à cette question.

II RECHERCHE DE LA DEMONSTRATION

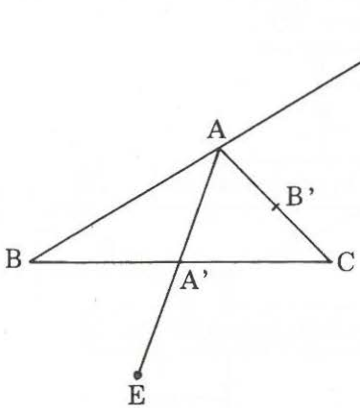
Quand l'énoncé du problème a été bien compris, commence la période de recherche proprement dite. C'est la phase la plus mal connue et la plus difficile à communiquer, celle des observations, des conjectures, des essais, de leurs vérifications, des tâtonnements, des preuves ; avoir une idée, la vérifier : c'est la succession de ces deux démarches qui est à la base du processus de recherche. Il n'existe pas de moyen d'établir mécaniquement une démonstration. Quelle est la place de l'intuition, de l'expérience, dans cette phase ?

III COMMUNICATION A AUTRUI D'UNE DEMONSTRATION

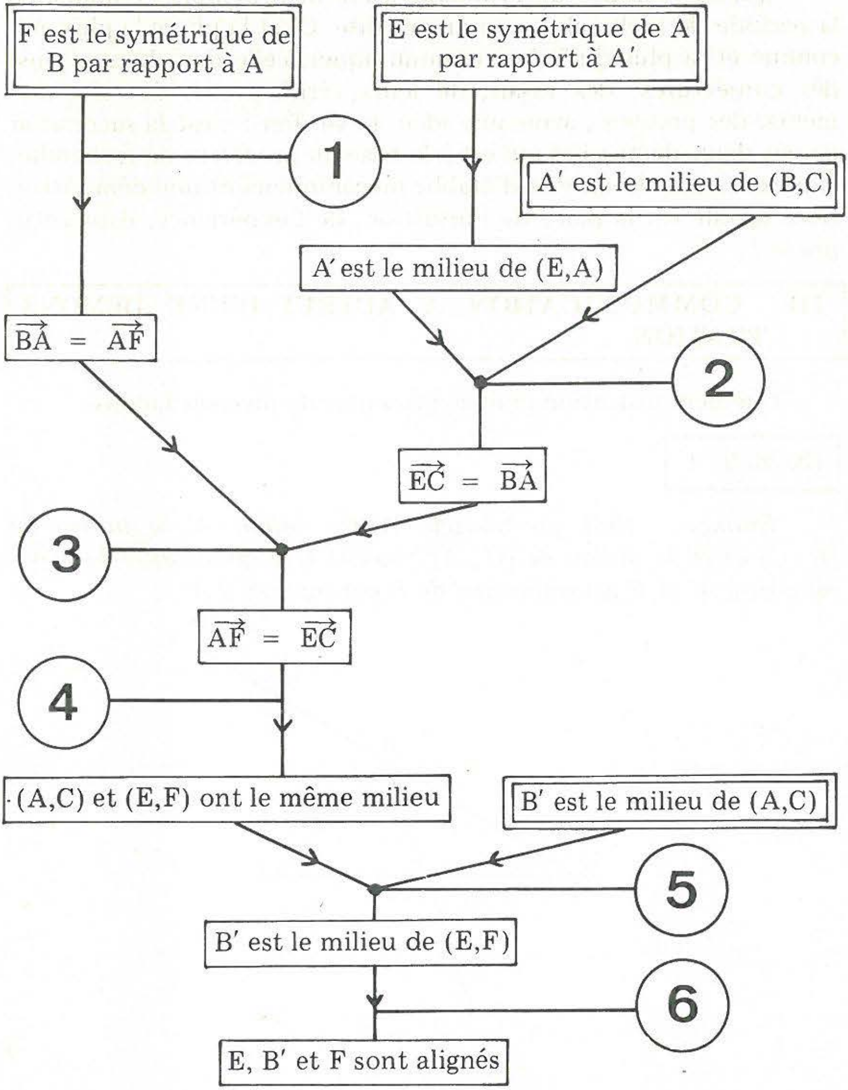
Une démonstration peut se présenter de diverses façons.

Exemple 1

Enoncé . Soit un triangle ABC ; soient A' le milieu de (B , C) et B' le milieu de (C , A) ; soient E le symétrique de A par rapport à A' et F le symétrique de B par rapport à A.



Démontrer que les points E, B′ et F sont alignés.



Remarques.

Certains utilisent, au lieu du trait simplement fléché $\longrightarrow$ (ou fléché plusieurs fois : $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow$), soit le signe $\Longrightarrow$, soit le signe $\longmapsto$, comme trait de liaison. Cette dernière pratique semble peu recommandable (voir rubrique *Quantificateurs - Connecteurs*).

Naturellement un tel schéma, dans une phase préparatoire, n'a aucune raison de ne comporter que des étapes nécessaires à la démonstration.

Par contre, on peut donner plus d'informations sur ce schéma en indiquant ce qui permet de déduire une phrase d'une ou plusieurs autres :

① Définition de la symétrie centrale.

② et ④ Propriétés des parallélogrammes :

"X Y Z T est un parallélogramme"

est synonyme de :

$$“\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{TZ}”$$

et de :

"(X,Z) et (T,Y) ont le même milieu".

③, ⑤ Transitivité de l'égalité.

⑥ Deux points et leur milieu sont sur une même droite.

Cette présentation peut être considérée comme une démonstration *rédigée* (bien que certains actuellement le contestent).

Si vous êtes intéressé par d'autres exemples d'organigrammes, reportez-vous à l'ANNEXE II, page 197.

Exemple 2

Soient x et y des réels ; démontrer que

si $x^2 = y^2$, alors $x = y$ ou $x = -y$.

Egalités	Justifications ou commentaires
[1] $x^2 = y^2$	Hypothèse
[2] $x^2 - y^2 = 0$	$-y^2$ a été ajouté aux deux membres, x^2 et y^2, de l'égalité [1].
[3] $(x + y)\ (x - y) = 0$	Quels que soient les réels x et y, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
[4] $x - y = 0$ ou [5] $x + y = 0$	Un produit de réels est nul si et seulement si l'un (au moins) des facteurs est nul.
[6] $x = y$ ou [7] $x = -y$	y a été ajouté aux deux membres, $(x - y)$ et 0, de l'égalité [4]. $-y$ a été ajouté aux deux membres, $(x + y)$ et 0, de l'égalité [5].

Remarque :

Dans l'exemple précédent, les cinq phrases se trouvant dans la colonne "égalités" sont équivalentes ; on pourrait donc démontrer d'un "seul coup" que "$x^2 = y^2$" et "$x = y$ ou $x = -y$" sont des phrases synonymes.

Si vous êtes intéressé par une présentation plus détaillée d'une démonstration, reportez-vous à l'ANNEXE III, page 199.

Une forme classique de présentation de démonstration est la "démonstration rédigée", ou "en français".

Voici, en *EXEMPLE 3*, une proposition de rédaction du problème de géométrie donnée plus haut (exemple 1) ; cette rédaction est une traduction de l'organigramme.

"Puisque E est le symétrique de A par rapport à A', le point A' est le milieu de (E,A) ; comme A' est aussi le milieu de (B,C),

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$. Puisque F est le symétrique de B par rapport à A, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AF}$; donc, comme l'égalité est une relation transitive, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AF}$.

Cette dernière égalité permet d'écrire que (E,F) et (A,C) ont le même milieu ; comme, par hypothèse, le milieu de (A,C) est B', le milieu de (E,F) est également B' : les points E , F et B' sont alignés".

Dans cette rédaction, les déductions ne sont justifiées explicitement, le plus souvent, que par l'hypothèse déterminante. En particulier, aucune justification n'est citée.

Vous trouverez en ANNEXE IV, page 200, un exemple de rédaction en français avec justifications explicites.

DÉMONSTRATION
ANNEXE I

Lecture dynamique du problème.

Voici par exemple un énoncé :

Soit un triangle ABC ; soient A' le milieu de (B,C) et B' le milieu de (C,A) ; soient E le symétrique de A par rapport à A' et F le symétrique de B par rapport à A. Démontrez que les points E, B', F sont alignés.

Sa lecture appelle :

— un recensement des données :

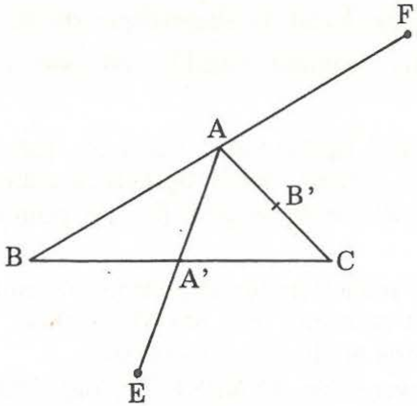
$\boxed{\text{E est le symétrique de A par rapport à A'}}$

$\boxed{\text{F est le symétrique de B par rapport à A}}$

$\boxed{\text{A' est le milieu de (B,C)}}$

$\boxed{\text{B' est le milieu de (C,A)}}$

— un dessin :



Ces données peuvent être traduites, puis reliées, par exemple de la façon suivante :

A′ est le milieu de (B,C) ⟶ $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$

B′ est le milieu de (C,A) ⟶ $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

E est le symétrique de A par rapport à A′ ⟶ A′ est le milieu de (E,A)

⟶ $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

ou encore :

F est le symétrique de B par rapport à A ⟶ A est le milieu de (F,B)
⟶ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AF}$
⟶ $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BF}$

Cette recherche d'informations, leurs différentes écritures, sont les départs de cheminements que vont découvrir les élèves.

Arrivé à ce stade, on peut continuer à explorer les données ; mais un *examen de la conclusion* peut s'avérer utile.

Ici, la conclusion proprement dite est difficilement exploitable. Mais le dessin suggère que B' est le milieu de (E, F) ; il suffirait de le démontrer pour arriver à la conclusion.

"B' est le milieu de (A,C)" est l'une des données de l'énoncé ; si l'on démontre que AFCE est un parallélogramme, il en résultera que B' est le milieu de (E,F).

Une telle analyse de l'énoncé peut donc conduire à un schéma tel que celui de la page 192 (cette description d'une *organisation* de la démonstration n'a pas la prétention de décrire réellement la dynamique de la recherche). Mais, une fois réduit à ses seuls éléments indispensables et organisé de façon lisible, un tel schéma peut être considéré comme le squelette d'une démonstration.

DÉMONSTRATION
ANNEXE II

ORGANIGRAMMES

L'organigramme est uniquement un procédé pédagogique pour familiariser avec l'idée de démonstration, les particularités de la déduction, le problème du passage à la communication.

$\boxed{\text{Exemple 1}}$

Enoncé. On te donne les informations suivantes où G désigne le graphe de la relation R.

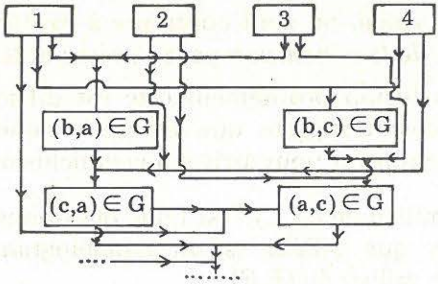
(1) R est symétrique.

(2) R est transitive.

(3) $(a,b) \in G$.

(4) $(c,b) \in G$.

Quelles informations peux-tu en déduire ?

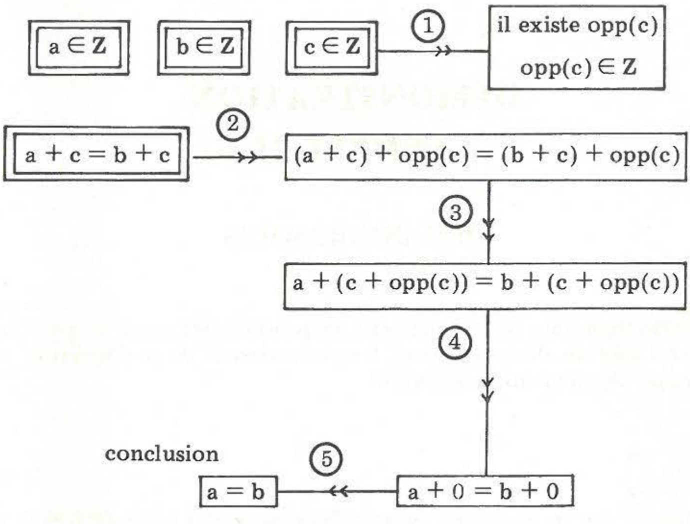


etc... jusqu'à $(a,a) \in G$.

Cet organigramme est, non pas un instrument de recherche, mais la synthèse où chaque élève aura la satisfaction d'identifier "son" raisonnement (en coloriant un chemin du réseau).

Exemple 2

Enoncé. a, b, c *désignant des entiers,* $a + c = b + c$ *entraîne-t-il* $a = b$ *?*



On peut écrire les justifications :

(1) Tout entier possède un opposé.

(2) Dans Z, si $u = v$, alors, quel que soit w , $u + w = v + w$.

(3) L'addition dans Z est associative.

(4) Définition de l'opposé d'un entier.

(5) 0 est l'élément neutre de l'addition dans Z.

DÉMONSTRATION
ANNEXE III

Un autre type de présentation d'une démonstration mérite d'être évoqué ; c'est celui qui se rapproche le plus d'une écriture formalisée des mathématiques, où chaque étape est détaillée et justifiée. Reprenons, à titre d'exemple, le début de la démonstration de l'exemple n° 1.

n°	Enoncés établis	Justifications
1	F est le symétrique de B par rapport à A	Hypothèse
2	Si X est le symétrique de Y par rapport à Z, Z est le milieu de (Y,X)	Définition de la symétrie par rapport à un point. (Remarque : en toute rigueur, pour suivre les recommandations de la fiche *Quantificateurs-Connecteurs*, l'énoncé ci-contre devrait être quantifié)
3	A est le milieu de (B,F)	Règle de déduction appliquée aux énoncés n° 1 et 2. (Substitution de F à X, B à Y, et A à Z ; règle du détachement compte tenu de l'énoncé n° 1)
4	Si X est le milieu de (Y,Z), $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XZ}$	Définition du mot "milieu"
5	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AF}$	Règle de déduction appliquée aux énoncés n° 3 et n° 4
6	E est le symétrique de A par rapport à A'	Hypothèse
7	A' est le milieu de (A,E)	(Une étape est sautée ici ; voir les énoncés n° 1, 2, 3)
8	A' est le milieu de (B,C)	Hypothèse

9	Le milieu de (A,E) est le milieu de (B,C)	Règle de déduction appliquée aux énoncés n° 7 et 8. (Il s'agit de la transitivité de l'égalité : l'énoncé 7 est une autre façon d'écrire "A' = milieu de (A,E)", et une remarque analogue peut être faite pour les énoncés 8 et 9)
10	Si (X,Y) et (U,V) ont le même milieu, alors $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{VY}$	Théorème
11	$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$	Règle de déduction appliquée aux énoncés 9 et 10
12	$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AF}$	Règle de déduction appliquée aux énoncés 5 et 11 (transitivité de l'égalité)
	etc ...	......

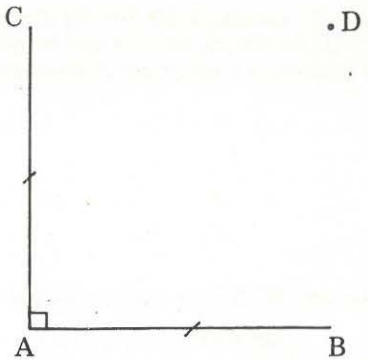
Il est bien évident qu'une telle forme de démonstration ne peut pas être exigée des élèves, ni développée de façon constante devant eux : sa minutie serait propre à tuer tout esprit de synthèse. Mais elle peut être salutaire à faible dose pour souligner avec force les articulations d'une démonstration ; et nous pouvons l'utiliser à dose un peu plus forte pour notre usage personnel afin de mieux comprendre les difficultés que nos élèves éprouvent devant certains problèmes.

DÉMONSTRATION
ANNEXE IV

REDACTION D'UNE DEMONSTRATION "EN FRANCAIS"

Par opposition à la rédaction de la page 194, dans la rédaction de la démonstration suivante chaque déduction est justifiée explicitement par une définition, un axiome ou un théorème, et une (ou des) hypothèse(s).

Enoncé. Si ABC est un triangle rectangle isocèle en A et ABDC un parallélogramme, alors ABDC est un carré.



Rédaction proposée :

ABC est un triangle rectangle en A, donc (AB) est perpendiculaire à (AC) par définition de "triangle rectangle en A".

Or ABDC est un parallélogramme, donc ABDC est un rectangle car tout parallélogramme ayant deux côtés perpendiculaires est un rectangle.

ABC est un triangle isocèle en A, donc d(A,B) = d(A,C) par définition de "triangle isocèle en A".

Or ABDC est un parallélogramme, donc ABDC est un losange car tout parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques est un losange. Donc ABDC est un carré car un parallélogramme qui est un losange et un rectangle est un carré.

Voici un exemple de rédaction de démonstration de type algébrique dans laquelle les phrases vraies (constituant la démonstration) sont accompagnées de commentaires indiquant brièvement pour quelles raisons (vérités antérieurement connues ou règles de déduction) elles sont vraies.

Les commentaires ont été mis entre crochets.

1 [*On sait que,*] *quels que soient les réels positifs* x, y *et* z,

si $x \leqslant y$, *alors* $xz \leqslant yz$.

2 [*En particulier,*] *quels que soient les réels positifs* x *et* y,

si $x \leqslant y$, *alors* $x^2 \leqslant yx$.

3 [*Et,*] *quels que soient les réels positifs* x *et* y,

si $x \leqslant y$, *alors* $xy \leqslant y^2$.

4 [*Donc,*] *quels que soient les réels positifs* x *et* y,

si $x \leqslant y$, *alors* $x^2 \leqslant yx$ *et* $yx \leqslant y^2$.

5 [*D'autre part,*] *la relation* $\leqslant$, *dans* $\mathbf{R}$, *est transitive.*

6 [*Donc,*] *quels que soient les réels positifs* x *et* y,

si $x \leqslant y$, *alors* $x^2 \leqslant y^2$.

Remarquez que le commentaire [*donc*] des phrases 4 et 6 est très succinct ; il permet tout au plus de deviner que ces phrases ont été construites suivant une règle de déduction à partir des phrases antérieures.

Liste des MOTS se rapportant au thème DEMONSTRATION

Les mots "expliquer", "commenter", "justifier", "faire des remarques" sont assez imprécis et donnent lieu à des activités variant chez les élèves en fonction des habitudes de leur classe. Le mot "démontrer" devrait, lui, ne pas donner lieu à des interprétations diverses : il serait réservé au cas des "*démonstrations complètes*".

Le mot "montrer" n'est pas, pour les élèves, synonyme de "démontrer".

Mots	Code
absurde (raisonnement par l')	S
admettre	*Δ
affirmation	*
analyse - analyser	Δ
appeler (s')	Δ
arbitraire	S
argument	S
auxiliaire (hypothèse - ; constante -)	S
axiome	***
car	***
caractéristique (propriété)	Δ
cas (distinguer divers)	*
chaque	***
chercher	Δ
comparer	Δ
conclusion	***
condition { nécessaire / suffisante	S
conjecturer	Δ S
conséquence	*
conséquent (par)	*
contradictoire	S
contraposition	Δ
contre-exemple	***
convaincre	Δ
corollaire	S
décrire	Δ
déduire	***
déduction	Δ
définition	***
démontrer	***
démonstration	***
déterminer	*
disjonction (des cas)	Δ S
donc	***
donné (étant)	S
effet (en)	***
entraîner	***
établir	*

Mots	Code
évident	S
exception	*
exemple	***
expliquer	*
faut (il - et il suffit)	S
généraliser	Δ
hypothèse	***
il existe (au moins un)	***
implication	S
inductif	S
inférence	S
justifier	***
lorsque	***
mais	***
montrer	dangereux S
nécessaire (condition)	S
notation - noté	*
or	***
organigramme (ou déductogramme)	*
parce que	***
postulat	S
pourquoi	***
preuve	Δ
prouver	Δ
puisque	***
quel que soit	***
raisonnement	Δ
réciproque (théorème)	***
règle	*
remplacer	***
résolution d'un problème	***
si ... alors	*
si et seulement si	Δ
substituer	*
suffisante (condition)	S
supposer	Δ
synthèse	Δ
théorème	***
théorie	S

MOTS...

L'index qui termine cette brochure a été établi en tenant compte du vocabulaire employé par les ouvrages scolaires et les professeurs dans leurs classes (1). Il comporte un nombre assez élevé de termes classés en quatre catégories :

I. Mot indispensable $\boxed{***}$ dont la connaissance est indispensable en fin de troisième.

II. Notion indispensable $\boxed{\Delta}$ qui doit être familière en fin de troisième.

III. Mot commode $\boxed{*}$ d'usage courant et utile, mais dont la connaissance ne devrait pas être exigée.

IV. Mot superflu $\boxed{S}$ dont la connaissance est superflue pour la majorité des activités des élèves du *Premier Cycle.*

La "bonne" lecture de cette classification suppose quelques mises en garde.

1. S'il n'y a pas lieu d'*exiger* tel ou tel vocable des élèves, il est, par contre, fondamental d'*utiliser* une langue variée et qui leur soit *adaptée.* De même qu'un langage riche — si ce n'est pas un langage "de perroquet" — exprime une pensée riche d'expériences, de même "appauvrissement du langage" sous-entend appauvrissement du contenu de l'enseignement. Prenons, par exemple, les mots :

(a) rentrant, saillant ;

(b) dessin à l'échelle, agrandissement, homothétie, ..., rotation.

Les premiers sont au programme et sont en fait inutiles (2). Les seconds n'y sont pas et sont pourtant inséparables d'une expérimentation géométrique riche et complète.

2. Si nous voulons élever, au sens large et pas seulement mathématique, les enfants qui nous sont confiés, nous devons *aussi* développer chez eux l'aptitude à *acquérir et utiliser des mots nouveaux* dès lors qu'ils *recouvrent et enveloppent* un contenu qui leur est familier et sont *nécessaires* pour abréger la communication

(1) Des oublis sont toujours possibles ... faites-les nous connaître.

(2) secteur saillant = secteur convexe ; secteur rentrant = secteur non convexe.

et la faciliter. Si la notion est clairement acquise, le mot qui la définit, la résume, est un outil commode dont l'acquisition est aisée. Si les notions mathématiques ne s'identifient qu'à ces mots ... cela peut être désastreux !

3. Le plus souvent la mauvaise assimilation d'un mot s'explique par une erreur pédagogique : introduction dogmatique ou prématurée.

4. En somme, l'objectif reste d'enrichir le vocabulaire des élèves chaque fois que les conditions du 2. sont remplies ; il n'est pas contradictoire avec l'établissement d'une liste réduite de termes dont la connaissance pourrait être exigée en fin de troisième. La publication d'une telle liste ne doit pas laisser croire que le meilleur enseignement sera le plus pauvre en termes mathématiques.

5. Au contraire, comme le rappelle le paragraphe 1., chacun se doit d'utiliser un vaste vocabulaire, parfois très personnalisé et temporaire ; mais ces mots, de la catégorie *, S ou non, ne sauraient faire partie d'un minimum exigible.

Voici l'étiquette dont il est question page 5 :

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC, 29 RUE D'ULM, PARIS, 5e

I.R.E.M. DE TOULOUSE
118 route de Narbonne 31400 TOULOUSE

M ....

professeur de mathématiques

....

....

INDEX ALPHABETIQUE. MOTS

ASSOCIATION DES
PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

29, rue d'Ulm - 75005 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Réunissant à ses débuts des professeurs de l'enseignement secondaire public, elle a progressivement étendu son recrutement à tous les degrés de l'Enseignement public : premier degré, second degré classique et technique, supérieur. A la fin de 1975, elle réunit **quinze mille membres.**

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, **"de la Maternelle à l'Université"**, mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc...).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services, avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'Association est organisée en Régionales académiques (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les I.R.E.M. sur des objectifs communs.

Un Comité national élu par correspondance, renouvelé par quart chaque année, désigne un Bureau qui assure le fonctionnement administratif de l'Association, exécute les décisions de l'Assemblée générale et représente l'Association auprès des autorités de l'Education Nationale.

Chaque année, l'A.P.M.E.P. organise des journées d'étude sur des thèmes pédagogiques et scientifiques (moyens audiovisuels, mise en application de la Réforme à divers niveaux, mathématisation du réel, etc...).

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : B.E.P.C., E.N., Baccalauréat, D.E.U.G.

Depuis 1960, l'A.P.M.E.P. édite des ouvrages de documentation pour les maîtres et les vend au prix coûtant. Devançant toute organisation administrative du "recyclage", elle a fourni aux maîtres soucieux de rénover leur enseignement une documentation abondante spécialement conçue pour eux, par des collègues particulièrement compétents et dévoués (consulter la liste des ouvrages dans le Bulletin). La diversité du contenu de ces brochures permet à chaque adhérent de choisir, quel que soit son niveau d'enseignement.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Liste des sections régionales et départementales

arrêtée au 1.11.75. Pour chaque section, nous donnons l'adresse d'un animateur à qui les Collègues s'adresseront pour avoir des informations supplémentaires sur l'activité de sa section. Entre crochets [ ], nous donnons les numéros des départements qui sont du ressort de la régionale. Entre doubles parenthèses (( )) le numéro de chèque postal quand il y a lieu (sauf avis contraire, l'intitulé du compte est "Régionale A.P.M.E.P. de...").

AIX-MARSEILLE [04, 05, 13, 84]
Pierre NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille ((Marseille 28-94-82)).

AMIENS [02, 60, 80]
Jean CAPRON, 12 rue A. Chénier, Les Primevères, 80000-Amiens. Tél. (22) 92.16.79 ((Lille 862 04)).
Janine PROTIN, résidence de l'Abbaye, A36, rue du Dr Calmette, 60200-Compiègne.

BESANCON [25, 39, 70, 90]
Martial THIRIOT, I.U.T., 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon ((Dijon 2505-45 V)).
Section du Jura : ROBBE, Les Prés Cantaux, 39-Salins.
Section de Belfort : J. DAUTREVAUX, 41 rue du Château-Essert, 90000-Belfort.

BORDEAUX [24, 33, 40, 47, 64]
Pierre LOUQUET, 47 cours de la Somme, 33000-Bordeaux ((Bordeaux 3902-91)).
Section de la Dordogne : Mlle MARCHIVIE, 12 rue des Vaures, 24100-Bergerac.
Section de la Gironde : TEXTIER, Boutus, Beychac et Caillau, 33-Saint-Germain-du-Puch.
Section des Landes : LAVIGNE, 40-Aire-sur-Adour.
Section du Lot-et-Garonne : DE LATAULADE, 1 rue Claude Rivemale, 47-Villeneuve-sur-Lot.
Section des Pyrénées-Atlantiques : CELHAY, allée de la Forêt, 64600-Anglet.

BREST [29]
LE ROUX, 24 rue de Vendée, 29-Brest ((Rennes 25-5927)).

CAEN [14, 50, 61]
Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu ((Rouen 1084-56 M)).

CLERMONT-FERRAND [03, 15, 43, 63] ((Clermont 1569-75))
André HENNETON, Sauvagnat Ste Marthe, 63500-Issoire.

DIJON [21, 58, 71, 89]
O. RENAUT, 38 bd. de l'Université, 21-Dijon ((Dijon 1751-05 V)).
Section de l'Yonne : D. REISZ, 11 rue du Saule, 89610-Vincelles.
Section de la Saône-et-Loire : MICHELOT, 32 avenue Boucicaut, 71100-Chalon-sur-Saône.
Section de la Nièvre : PUISSEGUR, 2 place de la Résistance, 58000-Nevers.
Section de Mâcon : Mlle DOMINIQUE, rue du Lavoir Charnay, 71000-Mâcon.

GRENOBLE [07, 26, 38, 73, 74]
C. BENZAKEN, 17 avenue du Vercors, 38240-Meylan ((Grenoble 349-49 U)).
Section de Chambéry : COMPAIN, Lycée Technique, 1 avenue du Colombier, 73000-Chambéry.
Section de Vienne : CHARNAY, Establin, 38780-Pont-Evêque.
Section d'Annecy : VIDIANI, B.P. 316, 74000-Annecy.

LILLE [59, 62]
MAS, Lycée Faidherbe, rue A. Carrel, 59-Lille ((Lille 4242-55)).
Section du Pas-de-Calais : LAURENT, 15 rue Albert-1er, 62-Arras.

LIMOGES [19, 23,87]
UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87100-Limoges ((Limoges 117-66 P)).
Section d'Egletons : HAKENHOLZ, CES Albert Thomas, 19300-Egletons.

LYON [01, 42, 69]
Gilbert CROS, 86 avenue Jean-Jaurès, 69007-Lyon ((Lyon 7081-18)).
Section de Saint-Etienne : M. BOUTEILLE, Résidence de l'Hippodrome, Bât. D4, 42390-Villars.
Section de Bourg : R. CHARNAY, E.N., 01-Bourg-en-Bresse.

MONTPELLIER [11, 30, 34, 48, 66]
Mme FUCHS, 10 rue des Glaïeuls, 34-Montpellier ((Montpellier 385-25 W)).
Section du Gard : J. CHABRIER, 10 rue de Loye, 30000-Nîmes.
Section des Pyrénées Orientales : GALTIE, 16 rempart Villeneuve, 66-Perpignan.
Section de l'Aude : Mlle CABANEL, Lycée Lacroix, 11-Narbonne.

NANCY [54, 55, 57, 88]
MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54-Nancy ((Nancy 1394-64 S)).
Section de la Moselle : E. SAUVADET, 17 rue du Fort, Longeville-les-Metz, 57000-Metz.

NANTES [44, 49, 53, 72, 85]
Mme PEYROT, 41 Les Hauts de l'Erdre, 44240-La Chapelle/Erdre.
Section de la Sarthe : KLAEYLE, 2 impasse Fizeau, 72100-Le Mans.

NICE [06, 20, 83] ((Marseille 5758-43))
J. MARIA, 5 ter rue Edith Cavell, 06000-Nice.
Section du Var : M.J. PAPAZIAN, La Colle d'Artaux, 83500-La Seyne.

ORLEANS-TOURS [18, 28, 36, 37, 41, 45]
P. MONSEILLER, Département de Mathématiques, Université d'Orléans 45045-Orléans Cedex ((La Source 1440-09)).
Section de Tours : Monique GODICHEAU, Appt. 235, 14 rue Léonard de Vinci, 37170-Chambray-lès-Tours.
Section de Montargis : KISTER, 52 rue des Vignes, 45120-Chalette.

PARIS [75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, 95]
J. ADDA, 10 rue Vandrezanne, 75013-Paris.
Section de la Seine-Saint-Denis : M. LOI, 68 rue des Ecoles, Bât. A 318, 93300-Aubervilliers.
((Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Paris 25 108 63)).
Bulletin de la Régionale : Gilbert GRIBONVAL, 129 avenue du Général Leclerc, 91120-Palaiseau.

POITIERS [16, 17, 79, 86]
J. BOROWCZYK, 1 rue de Provence, 86000-Poitiers ((Bordeaux 38-52-59)).
Section des Deux Sèvres : FROMENTIN, 29 avenue de Nantes, 79000-Niort.
Section de la Charente : MARRON, CES La Grande Garenne, rue Pierre Aumaître, 16000-Angoulême.
Section de la Charente Maritime : Y. DARDANT, 25 rue Philippe Vincent, 17000-La Rochelle.

REIMS [08, 10, 51, 52]
THIERUS, 57 rue David, 51100-Reims ((Châlons-sur-Marne 1262-80 L)).
Section des Ardennes : ZILLI, 8 Le Grenet Riglemont, 08100-Charleville Mézières.
Section de l'Aube : HAUBRY, 16 A rue Jules Didier, 10120-Saint-Andre-les-Vergers.
Section de la Haute-Marne : Mlle GODON, 8 rue de Lorraine, 52000-Chaumont.
Section de la Marne : SCHACHERER, 26 rue du Moulin à Vent, 51200-Epernay.

RENNES [22, 35, 56]
LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon ((Rennes 1707-29)).

ROUEN [27, 76]
Michèle CHOUCHAN, 16 rue du Bailliage, 76000-Rouen ((Rouen 1350-13 D)).
Section du Havre : PESTEL, 2 rue J. Langlois, 76-Le Havre.

STRASBOURG [67, 68]
SYLVESTRE, 17 rue Grimling, 67200-Strasbourg.
Section du Haut-Rhin : LEVASSORT, 27 rue Georges Sand, 68-Mulhouse-Dornach.
Section de l'Allemagne Fédérale : G. TOUYET, S.P. 69.037 F.F.A.

TOULOUSE [09, 12, 31, 32, 46, 65, 81, 82]
Line MAILHOS, Université Paul Sabatier, 31077-Toulouse Cedex ((Toulouse 2035-51)).
Section de l'Ariège : Mme GALY, 96 avenue V. Pilhes, 09400-Tarascon-sur-Ariège.
Section de l'Aveyron : SCHIOPETTO, CES La Penderie, 12000-Rodez.
Section du Gers : Mlle BORIES, 29 rue de Metz, 32000-Auch.
Section des Hautes-Pyrénées : TARBOULIER, 36 rue M. Lamarque, 65000-Tarbes.
Section du Tarn-et-Garonne : FOURNIE, CES Bourdelle, boulevard Herriot, 82000-Montauban.
Section du Lot : Mme PICARD, E.N., av. Henri Martin, 46000-Cahors.
Section du Tarn : Christine MANDIRAC, Lycée de Carmaux, 81400-Carmaux.

Pour les nouveaux adhérents et les adhérents ayant changé de résidence :

COUPON DE MISE A JOUR DU FICHIER REGIONAL

A détacher et à envoyer d'urgence au Président de votre Régionale (adresse ci-dessus)

Nom : . . . .

Prénom : . . . .

Adresse personnelle : . . . .

Etablissement : . . . .

Fonction : . . . .

☐ **Nouvel adhérent**

☐ **Ancien adhérent muté dans la circonscription de la Régionale**

n° . . . .

Mettre une X dans la case convenable.

CONDITIONS D'ADHESION ET D'ABONNEMENT

(taux pour l'année 1976)

Abonnement (valable pour l'année civile)		**80 F**
Pour les membres de l'A.P.M.E.P.		
— **Cotisation d'adhésion : trois catégories**		
A)	Instituteurs Retraités	**10 F**
B)	Membres dont l'indice de traitement est inférieur ou égal à 350	**20 F**
C)	Membres dont l'indice de traitement est supérieur à 350	**30 F**
— **Abonnement au Bulletin**		**35 F**

Les adhérents sous les drapeaux bénéficient d'un abonnement gratuit d'un an.
La cotisation seule ne donne pas droit au service du Bulletin.
Les cotisations et/ou abonnements sont perçus par année civile ; cependant, en début d'année scolaire, les nouveaux adhérents peuvent opter pour une des deux solutions suivantes :

— adhérer et s'abonner, avec effet rétroactif : ils recevront les numéros parus pendant l'année civile en cours ; ils devront ensuite, comme les anciens adhérents, faire un versement pour l'année civile suivante, après réception d'une lettre d'appel de cotisation et d'abonnement ;
— adhérer et s'abonner pour l'année civile suivante : dans ce cas, il leur est adressé le dernier numéro à paraître dans l'année civile en cours.

L'abonnement au service du Bulletin donne droit à un service au choix parmi les rubriques suivantes :

— deux catégories de math-annales à choisir parmi quatre

ou

— une brochure : pour 1976, l'APMEP propose un choix parmi les cinq brochures suivantes :
Mots I ; Mots II ; Mots III ; Elem-Math I ; Elem-Math II.

Ce choix est fixé par une fiche jointe à l'appel de cotisation.

MODES DE PAIEMENT

1° Détacher et remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement au verso.

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, 75005 Paris. C.C.P. Paris 5 708-21.

3° Sous enveloppe affranchie adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

> *Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.*

4° Envoyer à votre régionale le coupon de mise à jour du fichier régional.

ATTENTION ! La présente fiche dite "fiche rose" est à utiliser EXCLUSIVEMENT POUR SOUSCRIRE UNE ADHESION (OU UN ABONNEMENT) A L'A.P.M.E.P.

Le RENOUVELLEMENT vous est automatiquement demandé par un "appel à coupon détachable" que vous recevrez courant Janvier.

POUR UN CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ETAT CIVIL) : porter sur une feuille, **et non au dos d'un chèque**, l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), *rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P.*, puis donner les renseignements nouveaux ; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

> *Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin).*

SI VOUS ENSEIGNEZ MATHEMATIQUES ET BIOLOGIE, vous pouvez, pour une cotisation de 30 F et un abonnement jumelé réduit de 40 F, participer aux activités des deux associations APBG et APMEP.
Demandez pour cela au siège, 29, rue d'Ulm, 75005 Paris, une fiche d'adhésion "Maîtres polyvalents" (dite "fiche jaune").

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

A. P. M. E. P.

FICHE D'ADHESION OU D'ABONNEMENT

à remplir complètement et à adresser à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, 75005 Paris
accompagné des 3 volets d'un virement postal à A.P.M.E.P. Paris 5.708-21

M. - Mme - Mlle (Rayer les mentions inutiles)

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Nom et prénom :

(en capitales d'imprimerie)

Adresse à laquelle vous désirez recevoir le Bulletin :

N° et rue :

(suite)

Code postal

Ville ou pays

Année de naissance :

Nom et adresse de l'établissement dans lequel vous enseignez : (2)

Nom :

Adresse :

Département (en code) :

Ville :

Titres universitaires (1)

Bachelier ou équiv. . . .	1	☐
C.A.P. - C.E.G.	2	☐
Licencié	3	☐
Certifié	4	☐
Agrégé	5	☐
Docteur	6	☐
Autres (maîtrise, etc.)	7	☐

La plus grande partie de votre service est effectuée dans (1) :

Ens. pré-élémentaire . .	1	☐	Cl. préparatoires	7	☐
Ens. élémentaire	2	☐	Ecole normale	8	☐
C.E.G. - C.E.T.	3	☐	I.U.T.	9	☐
C.E.S.	4	☐	Ens. sup. 1er cycle . .	10	☐
Lycée 1er cycle	5	☐	Ens. sup. 2e, 3e cycle	11	☐
2e cycle	6	☐	Administration	12	☐
			Inspection	13	☐

Nouvel adhérent ☐
Ancien adhérent ☐

Année de la première adhésion

Versement pour l'année civile 197☐

Indice de traitement

Cotisation d'adhésion à l'APMEP (consulter la page 3)

Adhérents Catégorie A	10 F	☐*
Catégorie B	20 F	☐
Catégorie C	30 F	☐

Bulletin - Abonnement annuel

Etablissements - Bibliothèques - Non adhérents	80 F	☐*
Adhérents APMEP	35 F	☐

Attention ! La cotisation seule ne donne pas droit au service du Bulletin.

Je joins le titre de paiement complet correspondant à la catégorie choisie : 80 - 65 - 55 - 45 - 30 - 20 - 10 F et j'adresse le tout sous enveloppe timbrée à l'APMEP, 29 rue d'Ulm, 75005 Paris.

A . . . ., le . . . .

Signature

(1)* Mettre une croix dans la case qui convient
(2) Ne rien inscrire dans ces cases