

7

Film et enseignement des probabilités

J. BADRIKIAN
Assistante à l'Université de Clermont

Historiquement, le calcul des probabilités s'appuie sur des observations (le chevalier de Méré, par exemple, s'aperçoit qu'au lancer de trois dés, la somme des points marqués est plus souvent 11 que 12 - jeu de "passe-dix" - ce qui est en contradiction avec le modèle logique qu'il établit et suscite un échange de réflexions avec Blaise-Pascal).

Ces observations sont "organisées" (il faut au moins créer des classes - regrouper - faire des rapports).

En effet, deux notions essentielles des probabilités sont :

- la répétition d'une expérience
- la répartition qui caractérise la variable aléatoire rendant compte de l'expérience

Si nous voulons observer, et faire observer, des phénomènes aléatoires, il nous faut :

- la confrontation à des situations aléatoires
- la possibilité de noter des répétitions

ce qui se révèle pratiquement impossible avec nos élèves par le temps qu'il faudrait y consacrer.

Mais on peut utiliser l'extraordinaire rapidité d'exécution d'un ordinateur qui "en simulant" un processus stochastique quelconque poursuivra des répétitions autant que désirées (par exemple : 3 000 tirages d'un point dans un triangle en quelques secondes) : le temps n'est plus un handicap.

(*) exposé fait à Bordeaux le 6 avril 1976 dans le cadre du D.E.A. de Didactique

Quant à l'organisation des résultats, elle sera dans la représentation adoptée et réalisée sur une console connectée à l'ordinateur.

Comme il n'existe pas d'ordinateur, ni de console graphique installés dans chaque classe, c'est la prise de vue des représentations qui va permettre de suivre sur écran l'évolution de situations probabilistes : le film d'animation entre dans la classe.

Cependant, il s'agit "d'enseigner" des notions et théorèmes du calcul des probabilités. Nous allons voir comment le film peut spécifiquement le faire.

I - Enseignement par le film d'animation

Enseigner, c'est, en premier lieu, "faire connaître par un signe"; quels sont donc les signes employés dans la technique de l'animation filmée .

Paraissent évidents :

- l'image,
- le mouvement,
- le son.

Si l'on note que :

- l'image utilise deux paramètres de position pour son tracé et peut bénéficier du paramètre couleur et que :

- le son comporte aussi bien la sonorisation musicale que la parole (commentaire enregistré ou donné par le professeur simultanément à la projection),

nous disposons alors d'un système riche de 6 degrés de liberté (3 pour l'image, 2 pour le son, 1 pour le mouvement).

On pourra jouer des uns et des autres :

- en cherchant dans chaque cas le (ou les) plus aptes à traduire le plus clairement possible le message
- en se servant des effets de leur interaction

Voici quelques exemples de réalisations tirés de films élaborés à l'Université de Clermont, portant essentiellement sur

- la forme
- la couleur
- le mouvement

Nos films n'étant pas encore sonorisés et, d'autre part, étant muets par souci de laisser à chaque enseignant la faculté d'adapter le commentaire à son auditoire.

L'image : multiples informations simultanées

Remarquons que le graphisme produit par cette technique, étant excessivement soigné et précis, autorise des superpositions ou voisinages sans risque de fouillis ni de manque de netteté.

On le remarque notamment dans le film "convergence de la loi binomiale vers la courbe de Laplace-Gauss" dans la séquence représentant 96 courbes binomiales $B(15, p)$ pour des valeurs de p variant de 0.01 à 0.99.

L'image : symbole de représentation

Supposons que nous nous proposons d'étudier le processus de "l'urne de Polya" : une urne contient des boules de couleurs différentes. On tire une boule puis on la replace dans l'urne en lui ajoutant une autre boule de la même couleur que la boule tirée (ce modèle rend compte de phénomènes de contagion et d'apprentissage).

La représentation choisie dans le film "Urne de Polya" est la suivante :

Après chaque tirage et remise, la composition d'une urne comprenant 3 sortes de billes est indiquée par :

trois poids situés aux sommets d'un triangle équilatéral et bijectivement par la position du barycentre correspondant.

Le mouvement visualisant l'évolution progressive d'un processus

Il suffira de voir se tracer la trajectoire des différentes positions du barycentre, en correspondance avec l'augmentation des poids au sommet, pour suivre l'évolution de la composition de l'urne.

Le mouvement donnant la notion de temps relatif, c'est-à-dire du nombre de répétitions à atteindre pour avoir des renseignements sur l'expérience. Un chemin de 10 tirages consécutifs s'inscrivant sous nos yeux ne nous autorise aucune déduction ; par contre, pour 150 tirages consécutifs, la trajectoire du barycentre s'enroule autour d'un point : il y a là convergence en ce point.

Le mouvement donnant la notion de vitesse de convergence

La convergence de la loi binomiale centrée normée vers 0 est en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. En traçant les unes après les autres les binomiales centrées $B(n, \frac{1}{2})$ pour n variant de 1 à 10^6 , on note la lenteur dans le rapprochement de la courbe et de l'axe des abscisses : il faut atteindre le tracé de 10^6 courbes pour avoir, à l'oeil, fusion des deux.

Autre exemple

Sur la même figure se trace la courbe de Gauss et les diverses binomiales centrées, normées pour $p = \frac{1}{2}$: nous voyons apparaître une bonne approximation dès que n atteint la valeur $n = 10$. La courbe de Gauss est maintenant comparée aux diverses binomiales asymétriques ($p = 0,05$) pour les valeurs entières croissantes de n : nous notons que même pour $n = 500$ nous distinguons encore les deux courbes (très légèrement au sommet).

D'autre part :

La densité restant telle que $\sum_{k=0}^n B(n, \frac{1}{2}, k) = 1$, les diverses binomiales précédentes s'aplatissant sur l'axe des abscisses, se relèvent sur les bords pour garder la même valeur de l'aire (convergence non monotone).

Le mouvement attirant l'attention sur un point du dessin

Si l'on veut, sur une image suffisamment riche, privilégier, provisoirement, une réponse, on utilise un "clignotement" (urne de Polya, explication de la représentation).

La couleur servant de repère

Une couleur spécifique est attachée à chaque distribution limite étudiée. Cette couleur sera reprise chaque fois que l'on fera de nouveau mention de la distribution limite à laquelle elle est attachée ("Urne de Polya" - variation de la composition initiale - variation du rajout).

La couleur servant de renforcement du message

Le paramètre rajout , passant de la valeur 1 à la valeur 2, est indiqué par prise de vue de quelques manipulations et changement de couleur par rapport à la description de la première expérience (urne de Polya - variation du rajout).

La couleur permettant une représentation dans $\mathbb{R}^3$

Si l'on a superposition de deux dessins, il est intéressant de tracer chacun d'eux en teintes différentes (d'où l'intérêt d'une console couleur) que malheureusement nous n'avons pas encore à Clermont-Ferrand. Cependant une réalisation de la planchette met en évidence cette qualité de la couleur (voir colloque Inter I.R.E.M. Probabilités, Clermont-Ferrand, Octobre 75).

II - Un théorème "visualisé"

Prenons un exemple précis : "la loi faible des grands nombres".

Supposons que nous la formulions de la manière suivante :

"Soit une suite de répétitions indépendantes d'une expérience n'ayant que deux issues possibles : succès ou échec et appelée E_1 .

Soit p la probabilité du succès dans E_1 .

Soit S_n la variable aléatoire qui indique le nombre de succès dans une suite de n coups. Alors :

$$\forall \epsilon > 0 : P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \epsilon \right\} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Si nous devons enseigner cela, il faut "convaincre" notre auditoire que ce qui est affirmé dans ce théorème est vrai.

Une méthode couramment employée est celle de la démonstration.

Dans le cas présent, la démonstration fait appel à l'inégalité de Tchebicheff, aux notions d'espérance et de variance.

Ayant ainsi établi la validité de l'affirmation contenue dans le théorème, c'est-à-dire l'exactitude de la formule :

$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \epsilon \rightarrow 0 \right\} \text{ quand } n \rightarrow \infty ,$$

pouvons-nous affirmer que, chacun, dans notre auditoire a "compris le théorème" ?

Il y a certainement plusieurs degrés dans la compréhension d'un théorème.

Le déroulement logique de la démonstration ayant été suivi, certains sont tentés de retenir: la fréquence du nombre de succès tend vers p quand $n \rightarrow \infty$ (loi forte), et il est presque inévitablement nécessaire que le professeur fasse une remarque ;

"attention, on ne dit pas $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$ mais :

$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 , n \rightarrow \infty$$

c'est-à-dire que si l'on stocke toutes les suites de n répétitions de E_1 qui sont telles que la fréquence de succès s'écarte de p de plus de ϵ , leur nombre diminue lorsque n augmente.

Et voilà déjà atteint un niveau de compréhension. On n'est pas seulement d'accord avec les implications logiques qui amènent à la proposition du théorème, on commence, comme on dit couramment "à voir ce qui se passe" et ce n'est qu'à partir de ce moment-là que l'on peut parler de compréhension.

Le film nous propose précisément de "voir ce qui se passe" ("schéma de Bernoulli - loi forte des grands nombres"), un pas horizontal s'effectuant avec la probabilité 0.6, un pas vertical avec $P = 0.4$.

On remarque en voyant le déroulement de 50 chemins de n pas, pour des valeurs de n croissantes, que si la largeur du faisceau diminue, il apparaît

parfois un chemin qui, avec un certain esprit d'indépendance, s'écarte des autres, et que ce genre de phénomènes est d'autant plus rare que n est grand.

Il est très net également "qu'à nombre égal de coups, le faisceau est plus large lorsque la probabilité p de succès vaut $\frac{1}{2}$ ".

Ceci est encore une "vision concrète" du fait que si l'on est arrivé à majorer :

$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} \quad \text{par} \quad \frac{pq}{n \varepsilon^2}, \text{ ce}$$

qui nous permet d'affirmer que le second membre (et donc le premier) $\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, on peut remarquer que la plus grande majoration est obtenue pour la plus grande valeur du numérateur du même membre donc quand $p = \frac{1}{2} = q$.

Cet effet de la variation de p a été suivi sur l'écran.

En conclusion

Nous dirons que le film est une visualisation du théorème ou de la notion. En faisant varier, les uns après les autres, les divers paramètres d'une situation, le film montre les divers aspects des conséquences.

Ainsi le film d'animation enseigne en visualisant les conséquences des hypothèses.

FILMS DISPONIBLES

- Sont en vente, à l'OFRATEME, 29 rue d'Ulm à Paris, (Films 8 ou Super 8 noir et blanc + diapositives)
 - n° 1614 Schéma de Bernoulli
 - n° 1612 Convergence vers la courbe en cloche, cas symétrique
 - n° 1613 Convergence vers la courbe en cloche, cas dissymétrique
- Peuvent être prêtés par l'Université de Clermont (Mathématiques Appliquées, B.P. 45, 63170 AUBIERE) et seront ultérieurement mis en vente par l'OFRATEME : (Films super 8, couleur)
 - l'Urne de Polya : I Les tirages et leur représentation
 - II Evolution à partir de 3 boules distinctes
 - III Influence de la composition initiale
 - IV Deux d'un coup
 - Loi des grands nombres dans le plan
 - I Tirages dans une urne (1, 1, 1)
 - II Influence de la composition de l'urne
 - III Estimation du contenu d'après une suite de tirages
- Peuvent être prêtés par l'Université de Clermont (Films Super 8, couleur) :
 - Schéma de Bernoulli. Comparaison des résultats pour des séries de 35, 70, 140 tirages.
 - Vers la loi des grands nombres : étude de la fréquence des succès.