2
Les probabilités à l'école élémentaire

Travaux de l'Equipe de LYON

Maurice GLAYMANN
Directeur de l'I.R.E.M. de LYON

I Quelques généralités

La pensée *rationnelle* est essentiellement caractérisée par deux composantes: l'une *déterministe* et l'autre *stochastique*, et si la frontière entre les deux n'est pas toujours parfaitement délimitée, par contre les modes de raisonnements sont identiques; la seule différence réside dans l'élaboration des modèles.

Cependant, il est remarquable que l'humanité dans sa conquête du progrès, a su beaucoup plus facilement maîtriser la composante déterministe que la composante aléatoire. En effet, durant trop longtemps l'esprit humain a été dominé par de multiples et stupides superstitions: il est difficile d'imaginer qu'il y a à peine une centaine de générations, et bien que le ciel ne soit jamais tombé sur la tête d'un seul Gaulois, le peuple de Gaule demeurait persuadé qu'un tel événement était loin d'être impossible! Aujourd'hui encore, combien de personnes qui se veulent rationnelles dans leurs actes et leurs modes de pensée, se refusent pourtant à être treize à une table, car affirment-elles, cela porte malheur! ...

Pour éviter aux enfants de suivre, à l'instar de l'humanité, une lente évolution et d'aboutir parfois à des blocages, il est utile de commencer le plus tôt possible l'apprentissage des concepts aléatoires et d'élaborer avec eux des modèles simples faisant appel au hasard. Cependant, il faut noter que plus cet apprentissage est précoce, moins nous disposons d'outils mathématiques pour étudier les notions abordées; mais inversement, à mesure que nous élargissons le champ de l'enfant dans le domaine aléatoire, nous trouvons des motivations pour construire des outils afin de maîtriser le monde qui environne l'enfant; ce dernier se trouve ainsi en prise directe avec les réalités de la vie. En outre, un tel apprentissage conduit à de multiples applications dans des domaines autres que celui de la mathématique: *la géographie, l'économie, la politique avec les sondages, la propagande et la publicité.* Ces explorations rendent l'enfant beaucoup plus conscient face aux jeux de hasard: plus tard, il jouera peut-être, mais en connaissance de cause !

II L'intuition en probabilité

Les principaux objectifs de l'enseignement mathématique consistent d'une part à développer chez l'enfant, puis chez l'adulte, la *pensée déductive, l'esprit critique, l'imagination et l'intuition;* et d'autre part, bien entendu, à apprendre réellement des mathématiques ...

L'intuition joue un rôle fécond en mathématique; il en est de même dans le domaine du monde aléatoire. Cependant, il faut reconnaître que pour la plupart des individus, l'intuition probabiliste est fort peu développé: ainsi peu de gens sont prêts à admettre qu'*il est fort probable* que, dans une assemblée de trente à quarante personnes, il y a au moins deux d'entre elles qui ont le même jour anniversaire. En fait, pour un groupe de trente personnes, la probabilité est 0,7 et pour quarante personnes, elle est voisine de 0,9. Dans une classe de 23 élèves, elle vaut environ 0,5: il y a donc *une chance sur deux* pour que deux élèves aient le même jour anniversaire. Ce résultat étrange excite la curiosité des enfants et permet de développer leur intuition*. Dans un autre ordre d'idée, si on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie, en règle générale, la plupart des gens acceptent avec une grande facilité que l'on obtient *en moyenne* autant de fois le côté pile que le côté face: ils accordent à la pièce de monnaie beaucoup plus d'impartialité qu'elle ne le mérite en réalité, et même si elle est bien équilibrée! Peu de personnes ont l'intuition que les écarts

* Voir par exemple: *Les probabilités à l'Ecole* (M. GLAYMANN et T. VARGA) p. 104 et suivantes. CEDIC. 1973.

éventuels entre le nombre de côtés pile et le nombre de côtés face suivent une loi: pour x lancers, l'*écart moyen* vaut $\sqrt{0,64x}$. La table suivante donne quelques valeurs de cet écart:

x	$\sqrt{0,64\,x}$
10	2,52
20	3,58
30	4,38
40	5,06
50	5,66
60	6,20
70	6,69
80	7,16
90	7,59
100	8
1 000	25,30
10 000	80

Ainsi, pour 100 jets, il faut s'attendre à un écart moyen de 8 et pour 10 000 jets l'écart moyen est de 80.

Un tel résultat surprend les non initiés et souligne la nécessité de maîtriser l'intuition en matière de probabilités. Il est donc important que les maîtres connaissent ces pièges et par conséquent qu'ils dominent les sujets qu'ils enseignent ...

III Les recherche de l'Equipe de LYON sur l'enseignement des probabilités et de la statistique.

Dans le cadre de l'expérimentation sur l'enseignement de la mathématique à l'école élémentaire entreprise à Francheville-le-Haut depuis octobre 1966, une partie de la recherche a été consacrée à l'introduction des probabilités et de la statistique. Pour initier l'enfant à des idées spécifiques, il faut mettre en oeuvre des moyens adéquats. En particulier, il ne faut pas compter sur le seul hasard pour que l'enfant rencontre des situations aléatoires et qu'il découvre quelques lois probabilistes; il faut introduire des stratégies, faire appel à l'activité de l'enfant, le placer dans des situations où il est obligé de se confronter avec la réalité, et enfin l'aider à lutter contre les idées fausses qu'il peut avoir.

La *combinatoire* est un outil fort important pour initier l'enfant aux probabilités; des recherches récentes montrent que ce domaine peut être introduit dès l'enseignement élémentaire; il ne nécessite aucun préliminaire et conduit à des activités fort attrayantes pour l'enfant.

De même, la *statistique* est une branche voisine des probabilités, sans en être le préliminaire (en fait, à un niveau plus élevé, c'est l'inverse qui serait exact). Ce domaine présenté d'un point de vue élémentaire et descriptif, forme un tout fort utile pour une approche inductive des probabilités. Face à une situation aléatoire, plusieurs voies se présentent: on dispose d'un modèle combinatoire et dans ce cas tout le problème se réduit à des calculs; ou bien, on ne dispose pas d'un modèle combinatoire, car la situation est par exemple trop complexe, alors dans ce cas, on peut aborder l'étude par une analyse statistique, voire même imiter le hasard en faisant une *simulation* de la situation. A partir de là, si l'enfant est motivé, il aura envie d'élaborer un modèle pour expliquer ses résultats et construire éventuellement des outils mathématiques pour mener à bien cette recherche.

Ainsi, à l'école élémentaire, la méthode consiste à mener de front la combinatoire, les probabilités, la statistique et la simulation, en réservant à plus tard le soin de distinguer ces différents domaines.

Dans une dernière partie, nous allons présenter une situation qui illustre cette méthode de travail.

IV Etude d'une situation*

Pour illustrer notre démarche à l'Ecole Elémentaire, voici une situation qui a été élaborée avec des enfants de 9 à 10 ans à Francheville-le-Haut.

Lors de la fête de l'école, l'année précédente, les enfants ont utilisé une roulette partagée en 10 secteurs égaux et numérotés de

* Cette situation a été introduite dans la classe d'André Fabre, directeur de l'Ecole de Francheville-Le-Haut.

0 à 9. Ils avaient convenu que chacun des naturels de 0 à 9 avait autant de chances d'être le gagnant. Cette année, pour rendre le jeu plus attrayant, les enfants proposent d'utiliser deux roulettes identiques que l'on fera tourner simultanément. Le numéro gagnant est le chiffre des unités du produit des deux naturels ainsi obtenus. Par exemple, si les roulettes donnent 7 et 4, le produit est 28 et le chiffre gagnant est 8.

Dans cette situation, les enfants ne savent pas quelles sont les probabilités des différents naturels de 0 à 9. Si les naturels n'ont pas les mêmes chances de gagner, il faut attribuer les lots les plus chers aux naturels qui ont peu de chances de sortir et inversement attribuer les lots bon marché aux naturels qui ont des chances de gagner souvent.

Dans un premier temps, les enfants *expérimentent*: partagés en cinq équipes, ils font tourner des roulettes, notent les résultats et font des statistiques. Dès le début des tirages, les enfants constatent que certains naturels sortent plus souvent que d'autres, et que notamment le zéro gagne très souvent.

La table suivante donne les *fréquences* pour 2 000 essais. Les enfants calculent aussi les *fréquences relatives* et dessinent sur une feuille quadrillée un *histogramme*.

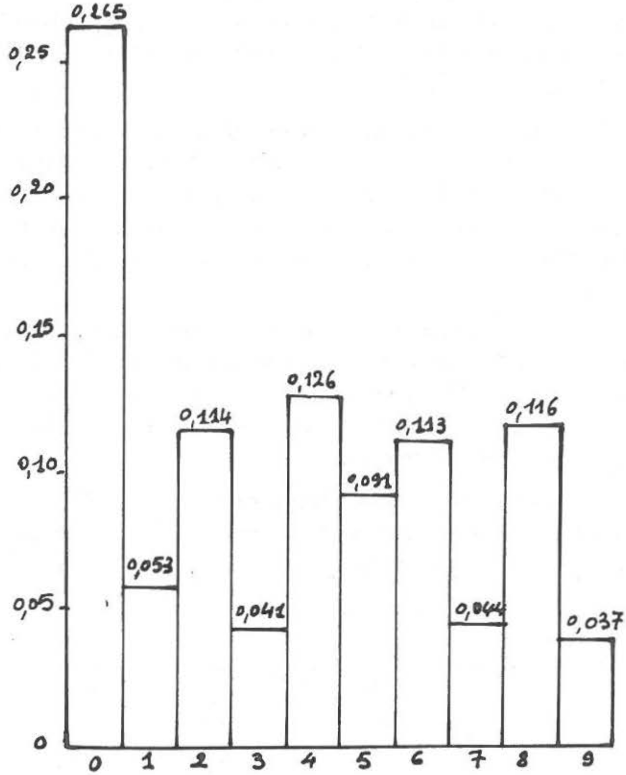
chiffre	fréquence	fréquence relative
0	530	0,265
1	106	0.053
2	228	0,114
3	82	0,041
4	252	0,126
5	182	0,091
6	226	0,113
7	88	0,044
8	232	0,116
9	74	0,037

Une discussion s'engage alors dans la classe.

Si l'on fait à nouveau 2 000 essais, allons-nous obtenir les mê-

mes résultats ? **Non.** *Pourquoi ?* **A cause du hasard.**

Les résultats que l'on trouvera seront-ils voisins des précédents ? **Oui, mais avec quelques différences.**



La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible de trouver un modèle "théorique" qui permette de prévoir les résultats obtenus expérimentalement. Après une assez longue discussion, les enfants qui ont déjà par ailleurs rencontré les *congruences* proposent de construire la table de multiplication modulo 10: *dans cette table*, dit un enfant, *on n'écrit pas le chiffre des dizaines.* Le maître propose alors aux enfants de construire cette table* :

* Notez que l'analyse de cette table est en soi fort instructive!

⊗	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

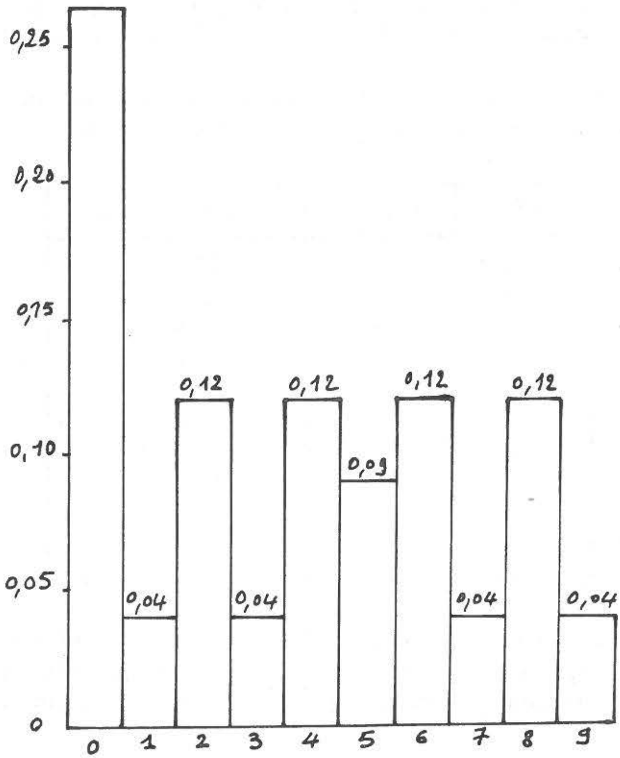
Les enfants dénombrent alors les apparitions de chacun des naturels de cette table et construisent la table suivante:

chiffre	fréquence	fréquence relative
0	27	0,27
1	4	0,04
2	12	0,12
3	4	0,04
4	12	0,12
5	9	0,09
6	12	0,12
7	4	0,04
8	12	0,12
9	4	0,04

Les enfants comparent ces résultats aux résultats précédents; ils constatent que les fréquences ne sont pas comparables, mais par contre, les fréquences relatives permettent d'utiles comparaisons:

chiffres	fréquences relatives expérimentales	théoriques
0	0,265	0,27
1	0,053	0,04
2	0,114	0,12
3	0,041	0,04
4	0,126	0,12
5	0,091	0,09
6	0,113	0,12
7	0,044	0,04
8	0,116	0,12
9	0,037	0,04

Les résultats sont très ressemblants et pour mieux s'en rendre compte, les enfants tracent sur l'histogramme précédent l'histogramme théorique suivant:



A ce niveau, les enfants sont en général satisfaits de leur recherche; cependant, il est bon de revenir sur l'étude expérimentale et de leur demander s'il est possible de trouver d'autres méthodes pour *simuler* l'étude théorique.

Une nouvelle discussion s'engage avec les enfants. L'idée la plus naturelle qui se dégage alors est de prendre *deux* urnes contenant chacune dix jetons numérotés de 0 à 9. On tire (avec remise) un jeton de chacune des deux urnes, on effectue le produit des naturels marqués et on obtient au bout d'un certain nombre de tirages une nouvelle statistique que l'on compare aux précédentes. Au bout d'un certain temps, les enfants proposent d'utiliser une seule urne en faisant *deux tirages consécutifs avec remise*, pour simuler un tirage. Les enfants suggèrent à ce stade d'utiliser une urne et de faire *deux tirages consécutifs sans remise* (ils remettent les deux jetons dans l'urne après avoir noté le résultat). Ils sont ainsi conduits à une nouvelle situation qu'ils étudient tant sur le plan expérimental que théorique.

Une autre idée consisterait à prendre une *table de chiffres aléatoires* (en base dix): deux chiffres consécutifs de cette table simulent un tirage. A l'aide de la table donnée en annexe, les enfants obtiennent la simulation de 300 tirages et la statistique suivante:

chiffre	fréquence	fréquence relative
0	82	0,273
1	9	0,003
2	33	0,110
3	17	0,057
4	36	0,120
5	34	0,113
6	37	0,123
7	7	0,023
8	31	0,103
9	14	0,047

Ainsi, grâce à une table de chiffres aléatoires, les enfants apprennent à *imiter* le hasard et à simuler des situations pour lesquelles ils ne disposent pas d'un nombre suffisant d'outils mathématiques pour construire un modèle théorique.

ANNEXE

Table de chiffres aléatoires en base dix

0655	8453	4467	3384	5320
5255	5161	4889	7429	4647
6314	8951	2335	0174	6993
3157	9764	4862	5848	6919
9052	9565	4635	0653	2254
4105	4105	3187	4312	1596
1437	2851	6727	5580	0368
4064	4171	7013	4631	8288
1037	5765	1562	9869	0756
5718	8791	0754	2222	2013
5127	2302	1392	4413	9651
9401	2423	6301	2611	0650
4064	5228	4153	2544	4125
5458	1402	9849	9886	5579
2461	3497	9785	5678	4471
4320	4558	2545	4436	9265
3466	8269	9926	7429	7516
9313	7489	2464	2575	9284
5179	8081	3361	0109	7730
3010	5081	3300	9979	1970
9599	9828	8740	6666	6692
4242	3961	6247	4911	7264
3585	9123	5014	6328	9659
5950	3384	0276	4503	3333
8462	3145	6582	8605	7300
0456	0944	3058	2545	3756
0672	1281	8697	5409	0653
5163	9690	0413	3043	1014
4995	9115	5273	1293	7894
6751	6447	4991	6458	9307

Varsovie, le 28 août 1975