3
Où le premier n'est pas toujours premier...

Pièce probabiliste en trois actes pour des enfants de 10 ans

par Maurice GLAYMANN

1. Une idée pour commencer

Voici un jeu de 52 cartes; il contient entre autres 4 as. Je les bats soigneusement, puis je retourne les cartes les unes après les autres, jusqu'à ce que je rencontre *le premier as.*
Combien de cartes ai-je retournées ?
La réponse est simple: un naturel compris entre 1 et 49.
Si j'effectue cette opération un *grand* nombre de fois, *combien de tirages dois-je faire, en moyenne, pour rencontrer le premier as ?*
Cette fois la réponse est plus difficile à trouver.
Je conserve maintenant uniquement les 13 piques du jeu de cartes.
J'effectue à nouveau un grand nombre de fois l'opération précédente.
Combien de tirages dois-je faire, en moyenne, pour rencontrer l'as de pique ?
Ce nombre est-il égal à celui de la première expérience ? Si non, est-il plus grand ? Plus petit ?

Je recommence la même expérience, mais cette fois avec *deux* jeux de 52 cartes (il y a huit as en jeu).
Que pouvez-vous dire du nombre moyen de tirages pour rencontrer le premier as ?

Avant de lire la suite, essayez de répondre à ces différentes questions ou faites effectivement les expériences proposées, puis imaginez des situations analogues.

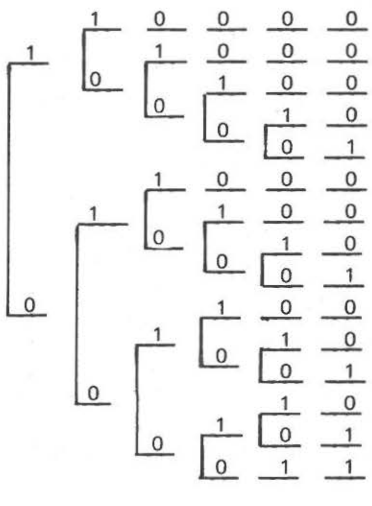
2. Une autre idée

Imaginons que l'on recense toutes les familles de 6 enfants et intéressons-nous à celles qui sont formées par 2 garçons et 4 filles. *Quel est le rang moyen de l'aîné des garçons ?*

Si nous disposons d'une statistique effective des familles de 6 enfants, la réponse à cette question résulte d'un calcul long, mais relativement simple. Une étude combinatoire conduit à une solution élégante* : prenons six boîtes placées côte à côte, numérotées de 1 à 6 et deux boules identiques. Disposons les boules dans les boîtes de sorte que chaque boîte contienne *au plus* une boule. Voici une disposition:

Elle correspond à une famille de 6 enfants dont le *deuxième* et le *quatrième* sont des garçons. Codons cette famille 010100 (0 correspond à fille et 1 à garçon).

L'arbre suivant permet de déterminer toutes les familles de 6 enfants dont deux sont des garçons:



Familles	Rang du 1er garçon
1 1 0 0 0 0	1
1 0 1 0 0 0	1
1 0 0 1 0 0	1
1 0 0 0 1 0	1
1 0 0 0 0 1	1
0 1 1 0 0 0	2
0 1 0 1 0 0	2
0 1 0 0 1 0	2
0 1 0 0 0 1	2
0 0 1 1 0 0	3
0 0 1 0 1 0	3
0 0 1 0 0 1	3
0 0 0 1 1 0	4
0 0 0 1 0 1	4
0 0 0 0 1 1	5
Total	35

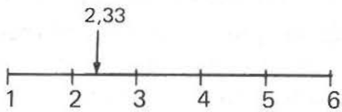
* Voir "*Les probabilités à l'école*", M. GLAYMANN et T. VARGA, pages 29 et suivantes.

Il y a 15 types de familles. Pour chaque type de famille, nous pouvons déterminer le rang de l'aîné des garçons (dernière colonne de la table).

Le rang moyen de l'aîné des garçons est donc

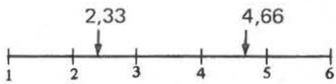
$$\frac{35}{15} = 2{,}33$$

Ainsi, *en moyenne*, l'aîné des garçons est le second ou le troisième enfant .



Quel est le rang moyen du second garçon ?

Par raison de symétrie, le dessin précédent suggère la valeur 4,66.

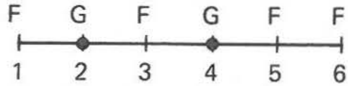


Nous pouvons justifier ce résultat en reprenant la table précédente et en indiquant cette fois le rang du second garçon:

Familles	Rang du 1er garçon	Rang du 2ème garçon
1 1 0 0 0 0	1	2
1 0 1 0 0 0	1	3
1 0 0 1 0 0	1	4
1 0 0 0 1 0	1	5
1 0 0 0 0 1	1	6
0 1 1 0 0 0	2	3
0 1 0 1 0 0	2	4
0 1 0 0 1 0	2	5
0 1 0 0 0 1	2	6
0 0 1 1 0 0	3	4
0 0 1 0 1 0	3	5
0 0 1 0 0 1	3	6
0 0 0 1 1 0	4	5
0 0 0 1 0 1	4	6
0 0 0 0 1 1	5	6
Total	35	70

Le rang moyen du second garçon est donc $70/15 = 4{,}66$

Reprenons cette étude d'un autre point de vue. Considérons un type de famille, par exemple celui codé 010100:



Les garçons partagent l'ensemble des filles en trois parties:

— les filles *plus âgées* que l'aîné des garçons,
— les filles *entre* les deux garçons,
— les filles *plus jeunes* que le second garçon.

Désignons respectivement par a_1, a_2 et a_3 le nombre de filles de chacune de ces trois parties.

Pour l'exemple précédent, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

La table suivante donne les valeurs des a_i pour les différents types de familles:

	a_1	a_2	a_3
1 1 0 0 0 0	0	0	4
1 0 1 0 0 0	0	1	3
1 0 0 1 0 0	0	2	2
1 0 0 0 1 0	0	3	1
1 0 0 0 0 1	0	4	0
0 1 1 0 0 0	1	0	3
0 1 0 1 0 0	1	1	2
0 1 0 0 1 0	1	2	1
0 1 0 0 0 1	1	3	0
0 0 1 1 0 0	2	0	2
0 0 1 0 1 0	2	1	1
0 0 1 0 0 1	2	2	0
0 0 0 1 1 0	3	0	1
0 0 0 1 0 1	3	1	0
0 0 0 0 1 1	4	0	0
Totaux	20	20	20

Ainsi, *en moyenne* les nombres a_1, a_2, a_3 sont *égaux entre eux et égaux à*

$$\frac{20}{15} = 1{,}33$$

Il en résulte que l'aîné des garçons a pour rang moyen

$$1{,}33 + 1 = 2{,}33$$

et que le rang moyen du second garçon vaut

$$2 \times 1{,}33 + 2 = 4{,}66$$

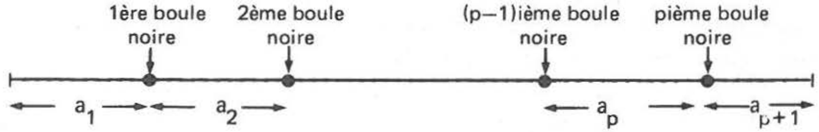
Notons qu'il est intéressant de *simuler* cette situation à l'aide d'une urne contenant 6 boules identiques dont 4 sont blanches et les 2 autres noires. Il suffit d'extraire les boules les unes après les autres (sans remise) pour obtenir un type de famille. Les élèves pourront ainsi, en effectuant de nombreux tirages, obtenir des statistiques qu'ils utiliseront pour préparer l'étude suivante.

3. Une idée générale

Prenons maintenant une urne contenant n boules identiques dont p sont noires et les $(n - p)$ autres sont blanches. Extrayons les boules les unes après les autres (sans remise).

Combien faut-il tirer en moyenne de boules pour rencontrer la première boule noire ?

Effectuons les tirages jusqu'à vider l'urne (en fait, il suffit de s'arrêter dès que la dernière boule noire est extraite). Les boules noires partagent l'ensemble des boules blanches en $(p + 1)$ parties (dont certaines peuvent être vides):



Désignons par a_1 le nombre de boules blanches tirées avant la première boule noire,

a_2 le nombre de boules blanches tirées entre la première et la seconde boule noire, etc...

a_p le nombre de boules blanches tirées entre la $(p - 1)$ième boule noire et la pième boule noire, et

a_{p+1} le nombre de boules blanches qui restent après avoir tiré la dernière boule noire.

Désignons par $\overline{a_i}$ la valeur moyenne des a_i pour un grand nombre de tirages. Par raison de symétrie,

$$\text{quel que soit} \quad i \in \{1, 2, ..., p + 1\}, \qquad \overline{a_i} = \frac{n - p}{p + 1}$$

il en résulte qu'il faut tirer en moyenne

$$\frac{n - p}{p + 1} + 1 = \frac{n + 1}{p + 1}$$

boules pour extraire la première boule noire.

Revenons alors à notre premier problème: 52 cartes et 4 as. Ici $n = 52$ et $p = 4$. Ainsi, le nombre moyen de tirages pour extraire le premier as est

$$\frac{53}{5} = 10{,}6$$

Pour les treize piques, $n = 13$ et $p = 1$, et le nombre moyen de tirages pour extraire l'as de pique est

$$\frac{14}{2} = 7$$

(résultat évident par raison de symétrie).

Pour les deux jeux de cartes, $n = 104$ et $p = 8$, ainsi le nombre moyen de tirages est

$$\frac{105}{9} = 11{,}66$$

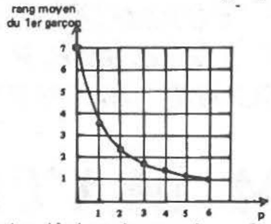
Le problème du rang moyen de l'aîné des garçons d'une famille de 6 enfants peut être complété en faisant varier le nombre de garçons: pour $n = 6$ p varie de 1 à 6.

Il en résulte la table suivante:

p	1	2	3	4	5	6
rang moyen du 1er garçon	3,5	2,33	1,75	1,4	1,17	1

Notons en particulier, que si $p = 0$ (famille de 6 enfants dont 6 filles), la formule donne pour rang moyen du premier garçon la valeur 7. Ainsi, le septième enfant d'une famille de 6 filles *peut être un garçon !*

Les valeurs précédentes conduisent au graphique suivant:



Un jour, je m'ennuyais; j'ai pris un jeu de trente deux cartes dont quatre as, et j'ai fait 25 fois l'expérience décrite dans la première partie. Voici les résultats obtenus:

tirage	1er as	2ème as	3ème as	4ème as	
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	6	17	3	1	1
2	6	8	9	3	2
3	5	9	4	3	7
4	9	6	5	2	6
5	2	16	1	4	5
6	4	7	3	8	6
7	3	10	9	3	3
8	7	13	2	5	1
9	12	9	3	4	0
10	7	6	3	10	2
11	9	2	4	11	2
12	2	12	2	12	0
13	18	4	4	2	0
14	2	5	13	1	7
15	4	3	18	2	1
16	0	3	13	2	10
17	14	4	1	0	0
18	5	7	0	2	14
19	14	3	5	6	0
20	1	10	5	0	12
21	6	4	10	2	6
22	13	5	4	6	0
23	13	1	4	7	3
24	0	5	9	7	7
25	13	3	3	4	5
Totaux	170	182	140	108	100
Moyennes	6,8	7,2	5,6	4,32	4

Que pensez-vous de cette expérience ?
Ai-je perdu mon temps ? ....

Lyon, le 7 octobre 1975