Un exemple de mesure non classique

Exposé de P. JULLIEN (I.R.E.M. de Grenoble)

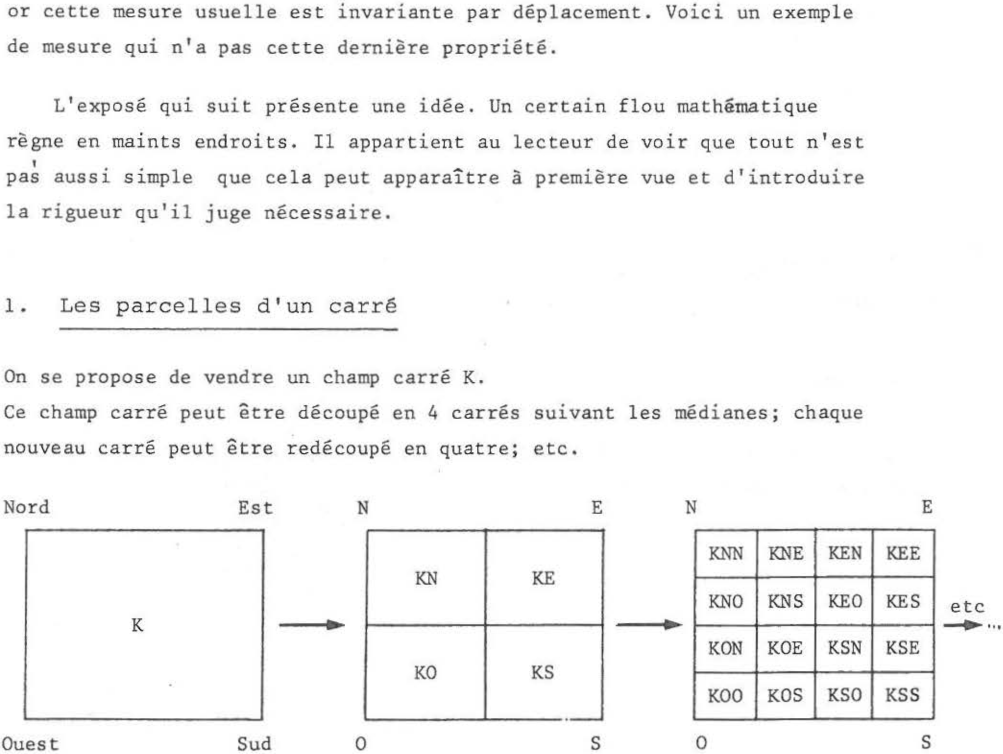
rédigé par J. P. GUICHARD
(I.R.E.M. de Lyon)

Quand on parle de mesure sur $\mathbb{R}^2$ on pense aussitôt à la mesure uniforme; or cette mesure usuelle est invariante par déplacement. Voici un exemple de mesure qui n'a pas cette dernière propriété.

L'exposé qui suit présente une idée. Un certain flou mathématique règne en maints endroits. Il appartient au lecteur de voir que tout n'est pas aussi simple que cela peut apparaître à première vue et d'introduire la rigueur qu'il juge nécessaire.

1. Les parcelles d'un carré

On se propose de vendre un champ carré K.
Ce champ carré peut être découpé en 4 carrés suivant les médianes; chaque nouveau carré peut être redécoupé en quatre; etc.



carré K

Appelons "parcelle de K" : le carré K lui-même, ou tout quart de parcelle, mais rien d'autre. C'est là une définition récursive.

Il y a donc une parcelle de rang 0 : K lui-même .

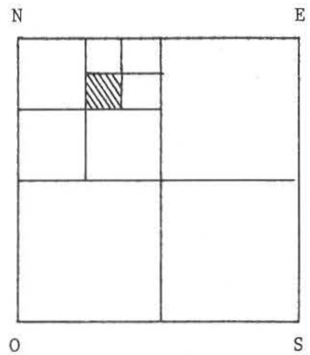
Il y a 4 parcelles de rang 1 ; nous pouvons les coder, par exemple,

KN ; KO ; KE ; KS .

Il y a 16 parcelles de rang 2; nous pouvons les coder, par exemple,

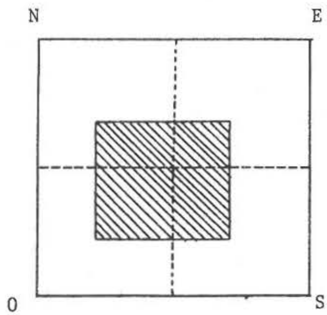
KNN ; KNO ; KNE ; KNS ; KON ; KOO ; ...

Par cette méthode, nous pouvons coder toutes les parcelles de K. Ainsi, par exemple, KNEO désigne la parcelle de rang 3 hachurée sur le schéma ci-contre:



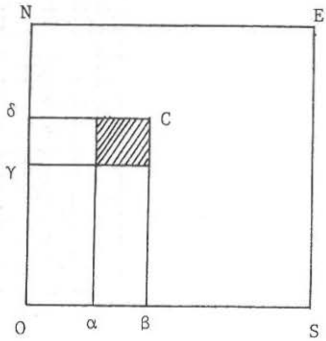
D'autres codages sont possibles, notamment en utilisant le système binaire.

Un carré de K n'est pas forcément une parcelle de K. Ainsi, par exemple, le carré hachuré sur le schéma ci-contre ne peut être obtenu, à aucun rang.



Problème

En supposant que K est l'ensemble des (x, y) tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, tout carré C, partie de K, peut être défini par 4 réels α , β , γ , δ .



Quelles conditions caractéristiques doivent vérifier α, β, γ , δ pour que C soit une parcelle de K ?

La condition

$$\beta - \alpha = \delta - \gamma$$

n'est,de toute évidence, pas suffisante.

Pour que C soit une parcelle d'ordre K, il est nécessaire que

$$\beta - \alpha = \delta - \gamma = \frac{1}{2^k}$$

Cette condition n'est pas non plus suffisante.

En effet, α et γ doivent être aussi des produits de $\frac{1}{2^k}$ par un naturel et être strictement inférieurs à 1.

Finalement,

C (α , β , γ , δ) est une parcelle de K si et seulement si

il existe un naturel k tel que

$$\beta - \alpha = \delta - \gamma = 2^{-k}$$

et

il existe deux naturels, λ et μ , tous deux strictement inférieurs à 2^k, tels que

$$\alpha = \lambda . 2^{-k} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \mu . 2^{-k}$$

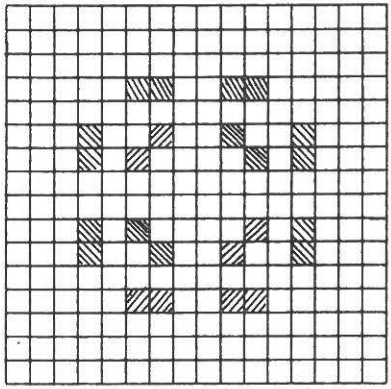
La parcelle peut être codée par le triplet (k, λ , μ) .

REMARQUE

Cette situation a de nombreux prolongements possibles: combinatoire, dessins, ... En voici un exemple.

On reprend le premier codage.

Hachurer toutes les parcelles d'ordre 4 codées à l'aide de mots où les lettres N, S, E, O ne figurent qu'une fois chacune.



2. Mesure pour les parcelles

Fixons à 1 le prix de K et convenons que toute parcelle H peut être vendue, compte tenu de la règle suivante:

Si on partage H en 4 parcelles HN , HE , HO , HS,

le prix de HN (parcelle nord) est

$\frac{1}{10}$ du prix de H

le prix de HE (parcelle est) est

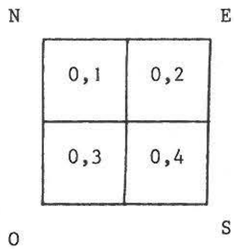
$\frac{2}{10}$ du prix de H

le prix de HO (parcelle ouest) est

$\frac{3}{10}$ du prix de H

le prix de HS (parcelle sud) est

$\frac{4}{10}$ du prix de H .



Moyennant cette convention, on peut de proche en proche calculer le prix de toutes les parcelles et le prix de toute réunion finie de parcelles.

Par exemple, la partie hachurée ci-dessus, réunion de 24 parcelles, vaut 0,0576. A vérifier.

PROBLEME

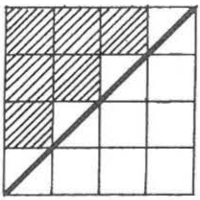
Coupons K par la diagonale Est-Ouest. Peut-on vendre la moitié Nord de K, c'est-à-dire peut-on fixer un prix P à cette partie de K ?

Nous pouvons encadrer P :

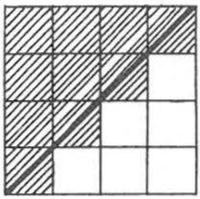
$$P_{int,\ k} < P < P_{ext,\ k}$$

où $P_{int,\ k}$ est le prix de la réunion des parcelles de rang k entièrement situées dans la partie Nord,

où $P_{ext,\ k}$ est le prix de la réunion des parcelles de rang k non entièrement situées dans la partie Sud.



$P_{int,2}$



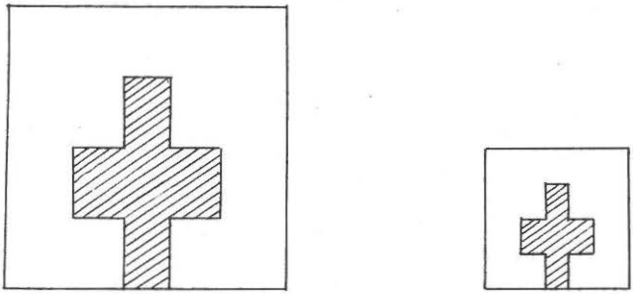
$P_{ext,2}$

En prenant des parcelles de rang supérieur, on resserre l'approximation. En effet, le prix de toute parcelle de rang k est inférieur à $(0,4)^k$ (prix de la parcelle de rang k "la plus chère").

$P_{ext,k} - P_{int,k}$ est le prix de la réunion des 2^k parcelles de la "diagonale"; il est majoré par $2^k.(0,4)^k$ c'est-à-dire $(0,8)^k$.

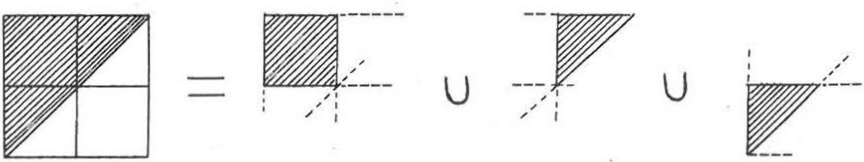
Or $\lim\limits_{\infty} (0,8)^k = 0$. On peut donc affecter comme prix à la partie choisie la valeur commune de $\lim\limits_{\infty} P_{int,k}$ et $\lim\limits_{\infty} P_{ext,k}$.

D'autre part, cette mesure "pseudo-invariante par homothétie": par exemple, pour deux parties homothétiques dans deux parcelles différentes, le quotient du prix d'une partie par le prix de la parcelle correspondante est le même. Il est aisé de le vérifier.



Cette remarque permet une autre approche du prix de la moitié Nord de K: désignons par x le quotient du prix de la moitié Nord d'une parcelle par le prix total de cette parcelle, valeur qui ne dépend pas de la parcelle choisie.

Ecrivons symboliquement :



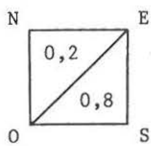
d'où

$$x = 0{,}1 + x \times 0{,}2 + x \times 0{,}3$$

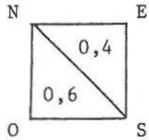
soit $\quad 10x = 1 + 2x + 3x$

$$\boxed{x = 0{,}2}$$

Ainsi :



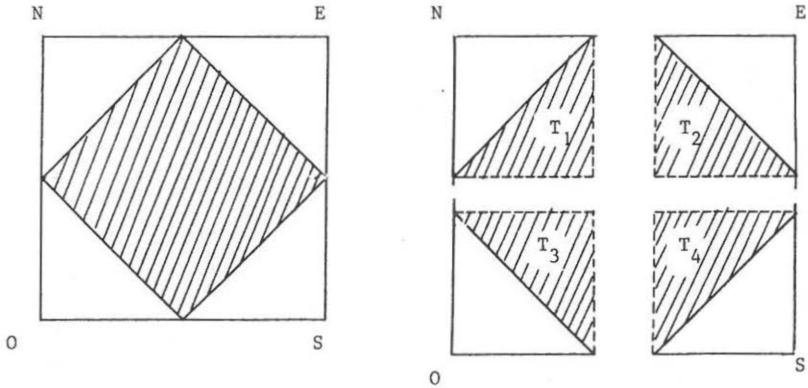
De la même manière, on trouve 0,6 et 0,4 pour les moitiés Est ou Ouest.



On remarque à nouveau que deux parties de même aire n'ont pas forcément le même prix.

QUESTION ANALOGUE

Quel prix doit-on payer pour acheter la partie de K hachurée sur la figure ci-dessous ? (figure de gauche).



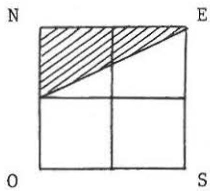
Les résultats qui précèdent nous permettent de calculer le prix de chacun des quatre triangles hachurés :

Prix de T_1 :	$0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08$
Prix de T_2 :	$0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$
Prix de T_3 :	$0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$
Prix de T_4 :	$0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$

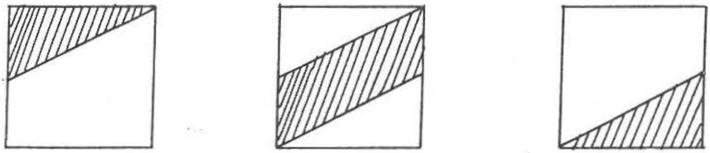
Le prix de la partie hachurée est donc : 0,40

UN PEU PLUS DIFFICILE

Quel prix doit-on payer pour acheter la partie de K hachurée sur la figure ci-contre ?



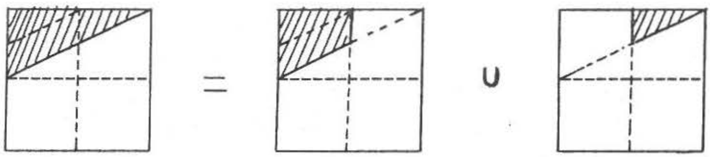
Désignons par x, y, z les prix des parties hachurées ci-dessous :



prix x　　　　　prix y　　　　　prix z

Trois relations indépendantes entre x, y et z permettent de calculer ces trois réels

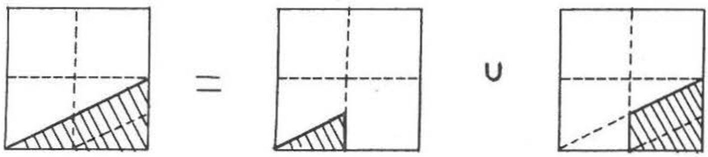
$$x + y + z = 1 \qquad \text{(relation 1)}$$



$$x = (x + y) \times 0{,}1 + x \times 0{,}2$$

soit $10\,x = x + y + 2x$

soit $7\,x = y$ (relation 2)



$$z = 0{,}3\,z + 0{,}4\,(y + z)$$

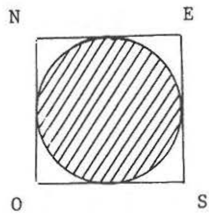
soit $10\,z = 3z + 4y + 4z$

soit $3\,z = 4y$ (relation 3)

Soit $\frac{x}{3} = \frac{y}{21} = \frac{z}{28} = \frac{1}{52}$

TRES DIFFICILE

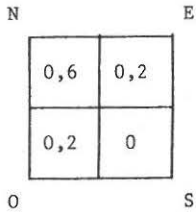
Quel est le prix du disque inscrit dans K ?



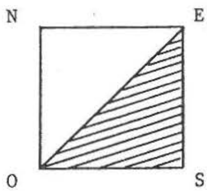
VARIANTES

On peut reprendre ce qui précède en prenant comme convention de prix :

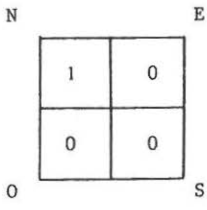
α)



Alors la partie hachurée ci-dessous a un prix égal à 0 :

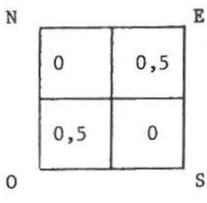


β)



"La mine d'or" :
le prix est "concentré" au point Nord.

γ)



"Le filon de diamants" :
le prix est "concentré" sur la diagonale Est-Ouest.