4
Propos autour d'un jeu d'urnes

P.L. HENNEQUIN
(Clermont-Ferrand)

Le texte ci-dessous diffère notablement d'une première rédaction soumise aux participants durant le colloque. Il résulte de discussions fructueuses avec J. BADRIKIAN, G. BROUSSEAU, L. DUVERT, G. GUILBAUD, P. JULLIEN.

Introduction

Nous poursuivons depuis deux ans des expériences d'initiation aux probabilités dans l'enseignement élémentaire avec Mesdames BOUCULAT et CAPITAN, Professeurs à l'Ecole Normale de Jeunes Filles de Clermont. En particulier, dans une classe de CM 1 , l'institutrice, Madame ASTAIX nous a proposé, reprenant une expérience effectuée à l'Ecole Normale de Périgueux, de faire jouer les élèves avec des urnes (pots de carton opaques) contenant des billes, de même diamètre mais de deux couleurs différentes. On connaît seulement le nombre total de billes de l'urne et on peut, en renversant le pot, faire apparaître une bille à un trou de diamètre légèrement inférieur. On sait donc effectuer des tirages avec remise, en nombre arbitraire, dans l'urne.

Il nous a semblé préférable que l'urne soit composée par les élèves elles-mêmes qui jouent alors par groupes, plutôt que par la seule maîtresse. En effet, dans ce cas, la connaissance du contenu de l'urne peut être mise par les élèves sur le même plan que le savoir qu'elle se charge de leur enseigner et il peut en résulter de fâcheuses confusions sur la notion de hasard.

Comme il est difficile d'enregistrer tous les messages émis dans la classes, Roland BERTHUET a eu l'idée du jeu suivant dont chaque étape est sanctionnée par un message écrit. Le dépouillement de la suite de ces messages constituera donc le matériel expérimental à analyser.

Il nous est apparu que l'étude du jeu ainsi définie pose des problèmes à la fois de calcul des probabilités et de théorie des jeux plus ou moins élémentaires que nous développons ici.

1. Règle du jeu

Il se joue entre deux joueurs ou équipes A et B. On dispose d'un moyen physique de réaliser des répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ à l'issue de laquelle $N + 1$ événements A_k (incompatibles ou non) peuvent être réalisés.

Nous poserons $P(A_k) = p_k \qquad 0 \leqslant k \leqslant N$.

Il pourra se faire que les A_k constituent une partition de l'événement certain Ω , $\sum_{k=0}^{N} A_k = \Omega$ de sorte que $\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$. Ce sera par exemple le cas si $A_k = \{Y = k\}$ où Y désigne une variable aléatoire entière à valeurs dans $[0, N]$ de distribution p_k .

Par exemple Y sera le nombre de succès dans un schéma de Bernouilli de N coups, la probabilité d'un succès étant p :

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

(cas de l'urne contenant une proportion p de boules rouges et lancée N fois).

On a alors un bon exercice sur la distribution binomiale qui sera l'occasion de manipuler des tables de cette distribution.

Ou encore, on place dans une boîte des jetons numérotés entre 0 et N; Y est le numéro du jeton tiré, p_k la proportion des jetons portant le numéro k.

Si l'on veut une situation où les A_k ne soient plus disjoints, il suffit de reprendre la même boîte et de noter cette fois J_k une partie de l'ensemble des numéros et A_k l'événement: {le numéro tiré appartient à J_k} .
L'étude de cet exemple constitue un bon exercice sur la notion d'événement.

Au début du jeu, B connaît les p_k, A ne les connaît pas mais le jeu va lui permettre d'acquérir de l'information sur les p_k .

Chaque partie du jeu comporte quatre phases. On peut éventuellement alterner les parties successives en permutant les rôles de A et de B.

1ère phase :

A "parie" r nombres entiers distincts ou non de $[0, N]$, il porte ces "paris" x_1 , x_2 , ... , x_r sur une feuille comportant r cases. Nous noterons P l'ensemble des nombres pariés et $n(k)$ le nombre de fois où k a été parié: nous avons donc, pour $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$n(k) = \text{card } \{i \ / \ x_i = k\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} n(k) = r \qquad , \qquad n(k) \geqslant 0$$

$$n(k) > 0 \iff k \in P \quad .$$

2ème phase :

A transmet à B sa feuille de paris. B raye alors certains paris, c'est-à-dire qu'il choisit un sous-ensemble R de P (et non une sous suite de la suite des paris $\{x_i\}$).

3ème phase :

B rend à A la feuille de paris et la liste des paris rayés, et on effectue en présence de A et de B un nombre, fixé à l'avance, s de tirages ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ de ξ .

Soit $M(k) = \text{card } \{i / A_k \text{ est réalisé dans } \xi_i\}$ le nombre de "sorties" de A_k dans les s tirages, S l'ensemble des k tels que A_k soit sorti au moins une fois. Nous avons, comme plus haut, $M(k) \geqslant 0$,

$$M(k) > 0 \iff k \in S$$

et, dans le cas où $\sum_{k=0}^{N} A_k = \Omega$, événement certain , $\sum_{k=0}^{N} M(k) = s$.

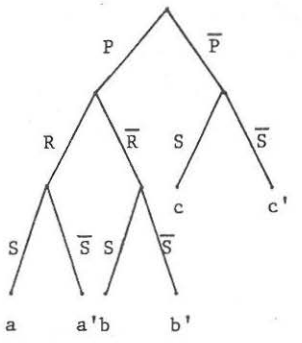
4ème phase : décompte des points

On peut imaginer de nombreuses variantes dans cette phase et nous allons l'analyser en détail.

Nous noterons G la différence entre le gain de A et le gain de B, ce qui revient à supposer que, dans une partie, le gain G de A est égal à la perte de B et peut se matérialiser en donnant au début du jeu une pile de jetons à chaque joueur: si $G > 0$, B donne à A G jetons, si $G < 0$, A donne à B $|G|$ jetons.

Traçons l'arbre des éventualités possibles pour chaque élément k de [0, N] après chaque tirage, en notant sur ses branches P pour parié, R pour rayé, S pour sorti, une barre $\overline{\ }$ indiquant la négation.

Les nombres (a, a', b, b', c, c') affectés aux noeuds terminaux correspondent au gain élémentaire de A (pour un pari et une sortie par exemple).



Décrivons ici cinq possibilités parmi d'autres :

(1) On compte 1 point par décision juste ; -1 par décision fausse:
$a = 2$, $a' = -2$, $b = 0 = b'$, $c = 1$, $c' = -1$

(2) 1 point par P ou R juste, -1 par P ou R faux, 0 pour $\overline{P}$ ou $\overline{R}$
$a = 2$, $a' = -2$, $b = 1$, $b' = -1$, $c = 0 = c'$

(3) 1 point par décision juste mais 0 par décision fausse
$a = 1$, $a' = -1$, $b = 0 = b'$, $c = 1$, $c' = 0$

(4) 1 point par P juste, 1 point par R juste, 0 sinon
$a = 1$, $a' = -1$, $b = 1$, $b' = c = c' = 0$

(5) 1 point par P ou R juste, -1 par P ou R faux , 0 par $\overline{P}$ ou $\overline{R}$ juste, -1 par $\overline{P}$ ou $\overline{R}$ faux
$a = 2$, $a' = -2$, $b = 1$, $b' = c = 0$, $c' = -1$

Il faut ensuite décider, dans le cas où r ou s sont supérieurs à 1 comment on fait intervenir le nombre de paris n(k) et le nombre de sorties M(k) de k, pour exprimer G à l'aide des gains élémentaires.

Donnons là encore quatre possibilités :

α) Chaque gain unitaire est multiplié par $n(k)$ si $k \in P$,
par $(r - n(k))$ si $k \in \overline{P}$,
puis par $M(k)$ si $k \in S$,
et par $(s - M(k))$ si $k \in \overline{S}$.

Alors

$$G = a \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + a' \sum_{k \in R} n(k)\, (s - M(k)) + b \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, M(k)$$

$$+ b' \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, (s - M(k)) + c' \sum_{k} (r - n(k))\, M(k) + c \sum_{k} (r - n(k))\, (s - M(k))$$

$$= (a - a' - b + b') \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + (a' - b')\, s \sum_{k \in R} n(k)$$

$$+ (b - b' - c' + c) \sum_{k} n(k)\, M(k) + (c' - c)\, r \sum_{k} M(k) + rs \left[(N + 1)c + b' \right]$$

β) On compte les non sortis comme s'il y en avait qu'un. Alors

$$G = a \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + a' \sum_{k \in R \cap \overline{S}} n(k) + b \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, M(k)$$

$$+ b' \sum_{k \in \overline{R} \cap \overline{S}} n(k) + c' \sum_{k} (r - n(k))\, M(k) + c \sum_{k \in \overline{S}} (r - n(k))$$

$$= (a - b) \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + (a' - b') \sum_{k \in R \cap \overline{S}} n(k) + (b - c') \sum_{k} n(k)\, M(k)$$

$$+ (b' - c) \sum_{k \in \overline{S}} n(k) + c'\, r \sum_{k} M(k) + c\, r\, \operatorname{card} \overline{S}$$

γ) On compte les non pariés seulement pour 1 et les non sortis comme en α) .

Alors

$$G = a \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + a' \sum_{k \in R} n(k)\, (s - M(k)) + b \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, M(k)$$

$$+ b' \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, (s - M(k)) + c' \sum_{k \in \overline{P}} M(k) + c \sum_{k \in \overline{P}} (s - M(k))$$

$$= (a - a' - b + b') \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + (a' - b')\, s \sum_{k \in R} n(k)$$

$$+ (b - b') \sum_{k} n(k)\, M(k) + (c' - c) \sum_{k} M(k) + (c - c') \sum_{k \in \overline{P}} M(k)$$

$$- s\, c\, \operatorname{card} P + s \left[(N + 1)\, c + rb' \right]$$

δ) On compte les non pariés seulement pour 1 comme en γ) et les non sortis seulement pour 1 comme en β) .

Alors

$$G = a \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + a' \sum_{k \in R \cap \overline{S}} n(k) + b \sum_{k \in \overline{R}} n(k)\, M(k)$$
$$+ b' \sum_{k \in \overline{R} \cap \overline{S}} n(k) + c' \sum_{k \in \overline{P}} M(k) + c \operatorname{card} \overline{P} \cap \overline{S}$$

$$= (a - b) \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + (a' - b') \sum_{k \in R \cap \overline{S}} n(k) + b \sum_{k} n(k)\, M(k)$$

$$+ b' \sum_{k \in \overline{S}} n(k) + c' \sum_{k} M(k) - c' \sum_{k \in P} M(k) + c \operatorname{card} \overline{S} - c \operatorname{card} (P \cap \overline{S})$$

Dans tous les cas G se met sous la forme

$$G = a_1 \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + a_2 \sum_{k} n(k)\, M(k) - a_3 \sum_{k \in R} n(k) - a_4 \sum_{k \in R \cap \overline{S}} n(k)$$
$$- a_5 \sum_{k} M(k) - a_6 \sum_{k \in \overline{S}} n(k) + a_7 \sum_{k \in P} M(k) - a_8 \operatorname{card} P + a_9 \operatorname{card} \overline{S}$$

$$- a_{10} \operatorname{card} (P \cap \overline{S}) + C$$

où, dans tous les exemples que nous avons considérés, $a_i \geqslant 0$.

On vérifie immédiatement que les décomptes 2α et 2γ , 4α et 4γ , 2β et 2δ , 4β et 4δ sont identiques et qu'il reste 16 jeux distincts dont nous donnons ci-dessous le tableau des coefficients a_j et C.

La dernière colonne indique le nombre de coefficients non nuls et donc la complexité du décompte des points et du jeu.

Jeu	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	C	nombre de coefficients non nuls
1α	4	2	2s	0	2r	0	0	0	0	0	rs(N+1)	5
1β	2	1	0	2	r	1	0	0	r	0	0	6
1γ	4	0	2s	0	2	0	2	s	0	0	s(N+1)	6
1δ	2	0	0	2	1	0	1	0	1	1	0	6
2α−γ	2	2	s	0	0	0	0	0	0	0	-rs	4
2β−δ	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	4
3α	2	1	s	0	r	0	0	0	0	0	rs(N+1)	5
3β	1	0	0	1	0	1	0	0	r	0	0	4
3γ	2	0	s	0	1	0	1	s	0	0	s(N+1)	6
3δ	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3
4α−γ	1	1	s	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4β−δ	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
5α	3	2	2s	0	r	0	0	0	0	0	0	4
5β	1	2	0	2	r	0	0	0	0	0	0	4
5γ	3	1	2s	0	1	0	1	0	0	0	0	5
5δ	1	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	5

2. Une situation de la vie courante relevant de ce modèle

Un paysan possède r champs de même superficie et de même qualité. Il désire planter dans chacun d'eux des arbres fruitiers pour une période de s années. Il a le choix entre N+1 variétés (indexées par k, $0 \leqslant k \leqslant N$). On admet que les arbres produisent dès la première année et que leur productivité est constante durant la période considérée. Chaque année, on n'envisage que deux éventualités: ou bien les fruits arrivent à maturité et peuvent être cueillis (éventualité A_k de probabilité p_k), ou bien aucune récolte n'est possible.

Le paysan peut solliciter la souscription d'une assurance : l'assureur (qui connaît les p_k d'après ses statistiques) peut l'accepter ou le refuser, pour chaque variété k. La prime annuelle est de π par champ assuré, l'indemnité si la récolte est détruite est i.

Soit γ le capital initial investi, ρ la valeur de la récolte d'un champ, supposée indépendante de k.

On peut supposer en outre que, si au cours de la période de s années aucune récolte n'a été possible, le paysan décide d'arracher les arbres et d'en replanter d'autres, ce qui lui coûte α par champ.

Supposons enfin que chaque année une exposition de fruits est organisée au cours de laquelle une prime ω est attribuée à chaque exposant pour chaque variété exposée, et que la mise en culture de chaque variété coûte ν (quel que soit le nombre de champs où on la cultive).

Alors, si R désigne l'ensemble des variétés non assurées et $\overline{R}$ celles qui sont assurées, G a l'expression ci-dessus avec

$$a_1 = i \quad , \quad a_2 = \rho - i \quad , \quad a_3 = s\,(i - \pi) \quad , \quad a_6 = \alpha$$

$$a_7 = \omega \quad , \quad a_8 = \nu \quad , \quad a_4 = a_5 = a_9 = a_{10} = 0$$

$$C = (\pi - i)\, s\, r - \gamma$$

3. Stratégies optimales quand A et B connaissent les p_k

A chaque partie, A dispose du choix des n(k), B du choix de R. Nous appellerons stratégies σ_A , σ_B ces choix. Ces choix étant effectués, G est une variable aléatoire $G(\omega, \sigma_A, \sigma_B)$ fonction de ω et de σ_A et σ_B . Comme B joue après A, il connaît σ_A au moment où il joue et son but est de choisir σ_B de façon à rendre $G(\omega, \sigma_A, \sigma_B)$ le plus petit possible. Mais alors σ_B dépendrait de ω encore inconnu au moment où B joue. Or la loi des grands nombres nous apprend que pour un nombre n assez grand de parties ω_i indépendantes durant lesquelles on applique les mêmes stratégies σ_A et σ_B , la moyenne arithmétique de G, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G(\omega_i, \sigma_A, \sigma_B)$ sera arbitrairement voisine de l'espérance mathématique $EG(\sigma_A, \sigma_B)$. B va donc minimiser cette espérance mathématique, c'est-à-dire choisir σ_B telle que

$$E\left(G(\sigma_A, \sigma_B)\right) \leqslant E\left(G(\sigma_A, \sigma)\right) \qquad \text{pour tout } \sigma \ .$$

Nous noterons $\sigma_B(\sigma_A)$ cette stratégie de B.

A, qui joue avant B, est en droit de penser que B va appliquer cette stratégie optimale, et comme il cherche à rendre G le plus grand possible, il va choisir σ_A telle que :

$$E\left(G(\sigma_A, \sigma_B(\sigma_A))\right) \geqslant E\left(G(\sigma, \sigma_B(\sigma))\right) \qquad \text{pour tout } \sigma \ .$$

Pour expliciter σ_A et σ_B , nous calculons EG .

M(k) est une variable binomiale de répartition B(s, p_k), donc $EM(k) = sp_k$.

Pour calculer $E\left(\sum_{k \in \overline{S}} n(k)\right)$ nous écrivons

$$\sum_{k \in \overline{S}} n(k) = \sum_k n(k)\, 1_{\overline{S}}(k) \qquad \text{avec} \qquad 1_{\overline{S}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \overline{S} \\ 0 & \text{si } k \in S \end{cases}$$

puis $\quad E\left(1_{\overline{S}}(k)\right) = P(k \in \overline{S}) = (1 - p_k)^s = P\left(M(k) = 0\right)$

donc $\quad E(\text{card } \overline{S}) = E\left(\sum_k 1_{\overline{S}}(k)\right) = \sum_k (1 - p_k)^s$.

D'où

$$E\,G = \sum_{k \in R} n(k) \left[a_1 sp_k - a_3 - a_4 (1 - p_k)^s\right]$$

$$+ \sum_k \left(n(k) \left[a_2 sp_k - a_6 (1 - p_k)^s\right] - s\, a_5 p_k + a_9 (1 - p_k)^s\right)$$

$$- a_8 \text{ card } P + \sum_{k \in P} \left(s\, a_7\, p_k - a_{10} (1 - p_k)^s\right) + C$$

4. Stratégie optimale de B

Examinons d'abord la stratégie de B qui joue après A et connaît P et les p_k . Il doit minimiser E G en choisissant R convenablement, c'est-à-dire minimiser

$$\sum_{k \in R} n(k) \left[a_1 \, s \, p_k - a_3 - a_4 \, (1 - p_k)^s \right]$$

le crochet est une fonction continue de p_k qui croît de $-a_3 - a_4$ à $a_1 \, s - a_3$ et, si $a_1 \, s - a_3 > 0$, ce qui est le cas de nos exemples, il y a une valeur π_s de p_k unique telle que

$$a_1 \, s \, p_k - a_3 - a_4 \, (1 - p_k)^s > 0 \iff p_k > \pi_s$$

B a donc intérêt à choisir $R \subset P$, de sorte que $k \in R$ si $p_k < \pi_s$ et $k \in \overline{R}$ si $p_k > \pi_s$ (le choix pour les valeurs de k telles que $p_k = \pi_s$ étant indifférent), π_s est racine de l'équation

$$a_1 \, s \, \pi_s - a_3 - a_4 \, (1 - \pi_s)^s = 0$$

Dans l'exemple de l'assureur, il doit accepter d'assurer si $i \, p_k \geqslant i - \pi$ ou $1 - p_k \leqslant \frac{\pi}{i}$ (probabilité de sinistre inférieure au quotient prime par indemnité).

5. Stratégie optimale de A quand il connait les p_k

A peut choisir les n(k) et, en particulier P, donc modifier les termes suivants de E G :

$$\sum_{k \in R} n(k) \left[a_1 \, s \, p_k - a_3 - a_4 \, (1 - p_k)^s \right]$$

$$+ \sum_{k} n(k) \left[a_2 \, s \, p_k - a_6 \, (1 - p_k)^s \right] - a_8 \, \text{card } P$$

$$+ \sum_{k \in P} \left[s \, a_7 \, p_k - a_{10} \, (1 - p_k)^s \right]$$

Si A connaît les p_k , il doit d'abord parier sur la valeur de k, k_1 qui maximise p_k , car les trois croichets sont des fonctions croissantes de k:

$$p_{k_1} = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} p_k$$

Si B applique la stratégie optimale,

si $p_{k_1} > \pi_s$, $k_1 \in \overline{R}$ et ce pari rapporte en moyenne

$$(a_2 + a_7)\, s\, p_{k_1} - (a_6 + a_{10})\,(1 - p_{k_1})^s - a_8$$

si $p_{k_1} < \pi_s$, $k_1 \in R$ et ce pari rapporte en moyenne

$$(a_1 + a_2 + a_7)\, s\, p_{k_1} - (a_4 + a_6 + a_{10})\,(1 - p_{k_1})^s - a_8 - a_3$$

si $p_{k_1} = \pi_s$, les deux expressions coïncident.

Soit alors k_2 la valeur de k qui maximise p_k pour $k \neq k_1$:

$$p_{k_2} = \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ k \neq k_1}} p_k \quad .$$

Parier à nouveau k_1 rapporte à A

si $p_{k_1} > \pi_s$ $\quad a_2\, s\, p_{k_1} - a_6\,(1 - p_{k_1})^s$

si $p_{k_1} < \pi_s$ $\quad (a_1+a_2)\, s\, p_{k_1} - (a_4+a_6)(1 - p_{k_1})^s - a_3$

alors que parier k_2 lui rapporte

si $p_{k_2} > \pi_s$ $\quad (a_2+a_7)s\, p_{k_2} - (a_6+a_{10})(1 - p_{k_2})^s - a_8$

si $p_{k_2} < \pi_s$ $\quad (a_1+a_2+a_7)sp_{k_2} - (a_4+a_6+a_{10})(1-p_{k_2})^s - a_8 - a_3$

Il peut se faire (si $a_7 \neq 0$) que ce second choix soit plus avantageux.

On comparera alors pour le troisième pari k_1 à k_3 tel que

$$p_{k_3} = \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ k \neq k_1,\, k_2}} p_k$$

et ainsi de suite. Dès qu'une valeur k_i est moins avantageuse à parier que k_1 on complète les paris à affectuer par k_1 .

Comme le montrera l'étude des exemples ci-dessous (au paragraphe 8), le jeu peut, suivant les valeurs des paramètres, être favorable à A ou à B.

6. Stratégies optimales quand B connaît les p_k mais pas A

En fait A gagne d'autant plus qu'il connaît mieux les p_k (ou du moins les plus grands d'entre eux). L'information qu'il va acquérir sur les p_k provient de deux sources: les parties déjà jouées, et le comportement de B (rayer ou pas rayer) en face de ses paris.

Examinons d'abord l'information qu'apportent à A les parties déjà jouées. Supposons d'abord qu'il n'y ait aucune relation entre les p_k. Pour la première partie, l'absence d'information sur p_k (que nous noterons p dans ce paragraphe) peut se modéliser ainsi:

p a été tiré à l'insu de A en choisissant une variable uniformément répartie sur $[0, 1]$:

$$P\,[a < p < b] = b - a \qquad \text{si} \qquad 0 \leq a \leq b \leq 1 \quad .$$

La probabilité que $M(k) = n$ conditionnée par p est

$$P\left\{M(k) = n/p\right\} = \binom{s}{n} p^n (1 - p)^{s-n}$$

Pour A, la probabilité a priori de $\left\{M(k) = n\right\}$ est donc

$$\int_0^1 P\left(M(k) = n/p\right) dp = \int_0^1 \left[\begin{matrix} s \\ n \end{matrix}\right] p^n (1 - p)^{s-n}\, dp = \frac{1}{s+1}$$

Les $s + 1$ valeurs de $M(k)$ ont donc la même probabilité a priori pour A. Remarquons qu'il n'en serait pas de même si p était uniforme, mais sur un sous-ensemble fini de $[0, 1]$: si, par exemple, p prend les valeurs $\frac{i}{10}$ $0 \leq i \leq 10$ avec probabilité $\frac{1}{11}$, la lecture d'une table de la distribution binomiale montre que la probabilité a priori de $M(k) = n$ dépend de n.

Pour calculer l'espérance a priori de G, nous écrivons

$$E\left(M(k)\right) = s\,E(p) = \frac{s}{2}$$

et

$$E\left(1_{\overline{S}}(k)\right) = E\left((1 - p)^s\right) = \int_0^1 (1 - p)^s\, dp = \frac{1}{s+1} = P\left(M(k) = 0\right) .$$

Si nous supposons que B applique dès le premier coup la stratégie optimale ($R = \{k/p_k < \pi_s\}$) alors

$$E \sum_{k \in R} n(k) \left[a_1 M(k) - a_3 - a_4 \, 1_{\overline{S}}(k) \right]$$

$$= \sum_k n(k) \left[a_1 \, s \int_0^{\pi_s} p \, dp - a_3 - a_4 \int_0^{\pi_s} (1-p)^s \, dp \right]$$

$$= \sum_k n(k) \left[a_1 \frac{s \pi_s^2}{2} - a_3 - a_4 \frac{1 - (1 - \pi_s)^{s+1}}{s+1} \right]$$

de sorte que

$$E(G) = \left[a_1 \frac{s \pi_s^2}{2} - a_3 - a_4 \frac{1 - (1 - \pi_s)^{s+1}}{s+1} + a_2 \frac{s}{2} - \frac{a_6}{s+1} \right] r$$

$$+ \left(s \frac{a_7}{2} - a_8 - \frac{a_{10}}{s+1} \right) \text{ card } P \ .$$

Si $\frac{s \, a_7}{2} - a_8 - \frac{a_{10}}{s+1} > 0$, A a donc intérêt à choisir card P le plus grand possible, donc à étaler ses paris,
sinon ce n'est pas son intérêt immédiat, mais peut être son intérêt à long terme, car cela lui rapportera une information plus grande sur R.

Supposons maintenant qu'on ait déjà joué m parties et que A_k se soit réalisé n fois durant ces m parties (il est facile de voir que seul compte le nombre total de réalisations). La probabilité de cet événement C_n est, conditionnellement par p

$$P(C_n / p) = \binom{ms}{n} p^n (1-p)^{ms-n}$$

On en déduit la densité conditionnelle de p, par la formule de Bayes :

$$f(p / C_n) = \frac{P(C_n/p)}{P(C_n)} = \frac{p^n (1-p)^{ms-n}}{\int_0^1 p^n (1-p)^{ms-n} \, dp}$$

$$= \binom{ms}{n} p^n (1-p)^{ms-n} (ms+1)$$

puis $P(M = 1/C_n) = \int_0^1 P(M = 1/p) \, f(p/C_n) \, dp$

En effet

$$P\ (M = 1/C_n) = \frac{P\ \left((M=1) \cap C_n\right)}{P(C_n)} = \frac{\int_0^1 P\ \left((M=1) \cap C_n/p\right)\ dp}{P(C_n)}$$

$$= \frac{\int_0^1 P\ (M=1/p)\ P(C_n/p)\ dp}{P(C_n)}$$

car M et C_n sont indépendants conditionnellement quand p est connu.

On peut alors calculer, pour chaque k, $E\left(M(k)\ /\ C_{n_k}\right)$ et $E\left(1_{\overline{S}}(k)\ /\ C_{n_k}\right)$ puis $E\ (G\ /\ \bigcap_{k=0}^{N} C_{n_k})$ sous l'hypothèse que B appliquera la stratégie optimale à la partie suivante. Ceci permet de déterminer les n(k) optimaux pour cette nouvelle partie.

Examinons maintenant l'information apportée à A par le jeu de B (R). Supposons d'abord que B applique systématiquement la stratégie optimale (ce qui suppose qu'il connaisse un peu de calcul des probabilités !) c'est-à-dire que $R = P \cap \{k/p_k < \pi_s\}$ alors, après m parties, A connaît pour tous les k pariés la position de p_k par rapport à π_s. Il supposera donc que p est uniformément réparti non plus sur [0, 1] mais suivant le cas sur $[0, \pi_s]$ ou $[\pi_s, 1]$. Cela modifie notablement les densités a postériori de p comme nous allons le montrer sur un exemple simple.

Supposons $\pi_s = \frac{1}{2}$, ms = 10 et n = 6

Si p est uniforme sur [0, 1] l'espérance de p conditionnée par n = 6 est

$$11 \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \int_0^1 p^7\ (1-p)^4\ dp = \frac{11 \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}}{12 \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}} = \frac{7}{12} = 0{,}5833 \quad .$$

Si p est uniforme sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $(p \leqslant \pi_s)$,

la densité de p conditionnée par n = 6 est maintenant :

$$\frac{p^6\ (1-p)^4}{\int_0^{\frac{1}{2}} p^6\ (1-p)^4\ dp}$$

et son espérance conditionnée par $n = 6$

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} p^7 (1-p)^4 \, dp}{\int_0^{\frac{1}{2}} p^6 (1-p)^4 \, dp} = \frac{7}{12} \times \frac{0,1938}{0,2744} = 0,412$$

Si, au contraire, p est uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, cette espérance devient

$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 p^7 (1-p)^4 \, dp}{\int_{\frac{1}{2}}^1 p^6 (1-p)^4 \, dp} = \frac{7}{12} \times \frac{0,8062}{0,7255} = 0,7255$$

A reçoit donc une information importante par B et celui-ci peut être tenté de ne pas appliquer la stratégie optimale pour induire A en erreur. Les enfants ont tout de suite conscience de cette possibilité, qu'ils soient à la place de B ou à la place de A.
Il est possible dans chaque cas particulier d'expliciter les calculs de ce que perd B à la partie en cours et de ce qu'il risque de gagner aux parties suivantes en agissant ainsi. Nous ne reproduisons pas ici ces calculs qui ne mettent en oeuvre aucune technique nouvelle par rapport à ceux déjà développés.

7. Exemples

Nous nous limitons ici au cas du décompte des points 5δ, effectivement expérimenté dans une classe. (Les autres cas se traitant de façon analogue et certains sont plus simples).

On a alors $a = 2$, $b = 1$,
$a' = -2$, $b' = c = 0$, $c' = -1$

et $$G = \sum_{k \in R} n(k)\, M(k) + \sum_{k} n(k)\, M(k) - 2 \sum_{k \in R \cap \bar{S}} n(k) - \sum_{k \in \bar{P}} M(k)$$

Nous supposerons de plus les A_k disjoints; donc

$$E\, G = \sum_{k \in R} n(k) \left[s\, p_k - 2\, q_k^2 \right] + \sum_{k \in P} \left(n(k) + 1 \right) s\, p_k - s$$

Nous traiterons trois cas de complexité croissante; nous supposerons que Y a une distribution binomiale B (N, p) :

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

où p est connu de B mais pas de A.

a) $s = 1$

On a alors $\pi_1 = \frac{2}{3} = 0{,}667$

Si l'on souhaite que le jeu soit favorable à A quand il applique une bonne stratégie, il faut que

$$p_{k_0} \geqslant \pi_1 \quad \text{ou que} \quad 2\,p_{k_0} - 2\,q_{k_0} > 0 \quad \text{soit} \quad p_{k_0} > \frac{1}{2} \ .$$

Cette condition n'est satisfaite pour tout p que si $N = 1$.
Nous étudierons donc ce premier exemple:

$$s = 1 \quad \text{et} \quad p_0 = 1 - p \ , \quad p_1 = p \ .$$

Stratégie de B

B doit rayer 1 , si $1 - p > \frac{2}{3}$ ou $p < \frac{1}{3}$;

0 , si $p > \frac{2}{3}$;

0 et 1, si $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$.

A connaît donc par R la position de p par rapport à $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Si $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant \frac{2}{3}$ A doit parier $\begin{cases} 0 \ , & \text{si} \quad p < \frac{1}{2} \ , \\ 1 \ , & \text{si} \quad p > \frac{1}{2} \ , \end{cases}$

et si $r \geqslant 2$, l'autre nombre si $\frac{4}{9} < p < \frac{5}{9}$.

Dans ce cas, pour $r = 2$, $EG = 0$ et le jeu est <u>équitable</u> ; il est favorable à A pour $r \geqslant 3$.

Si $p < \frac{4}{9}$ A doit parier toujours 0

Si $p > \frac{5}{9}$ A doit parier toujours 1

Alors, si $r = 1$ et $\frac{5}{9} < p < \frac{2}{3}$

$$E\,G = 5p - 3$$

Le jeu est défavorable à A pour $\frac{5}{9} < p < \frac{3}{5}$, favorable pour $\frac{3}{5} < p < \frac{2}{3}$

si $r = 2$

$$E\,G = 5p - 3 + 4p - 2 = 9p - 5 > 0$$

le jeu est favorable à A (a fortiori si $r \geqslant 3$)

si $r = 1$ et $p > \frac{2}{3}$

$$E\,G = 2p - 1 > 0$$

le jeu est favorable à A (a fortiori si $r \geqslant 2$).

(Etude analogue pour $\frac{2}{5} < p < \frac{4}{9}$, $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{5}$, $p < \frac{1}{3}$ en remplaçant p par $1 - p$).

Par contre, si A parie au hasard et si $r = 2$

$$E\,G = \frac{3}{4} - (2 - 3p)^+ - (3p - 1)^+$$

Si $0 \leqslant p < \frac{1}{3}$, $E\,G = \frac{3}{4} - 2 + 3p < -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant \frac{2}{3}$, $E\,G = \frac{3}{4} - 2 + 3p - 3p + 1 = -\frac{1}{4}$

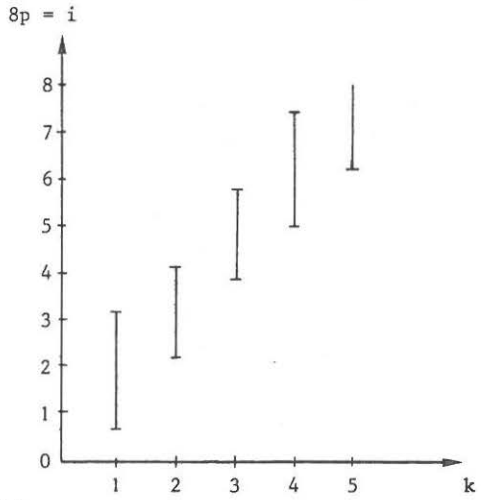
$\frac{2}{3} < p \leqslant 1$, $E\,G = \frac{3}{4} - 3p + 1 = \frac{7}{4} - 3p < -\frac{1}{4}$

b) $s = 3$, $N = 5$; on a $\pi_3 = 0{,}265$

La figure ci-contre représente, pour chaque caleur de k portée en abscisse, l'intervalle des valeurs de p pour lesquelles

$$p_k \geqslant \pi_3 \quad .$$

On voit que, si l'on sait par exemple que $p = \frac{i}{8}$ (cas d'une urne à 8 billes) la connaissance de l'ensemble des k pour lesquels $p_k \geqslant \pi_3$ permettra de connaître la valeur de i, donc de p.



Si nous notons 1 pour un pari rayé, 0 pour un pari non rayé, on aura la table de décodage ci-après qui se déduit immédiatement de la figure.

0	1	2	3	4	5	k / i
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	3
1	1	0	0	1	1	4
1	1	1	0	0	1	5
1	1	1	1	0	1	6
1	1	1	1	0	0	7
1	1	1	1	1	1	8

Dans le cas où $p = \frac{i}{4}$ (urne à 4 billes) on voit facilement que 4 paris suffisent à déterminer i mais que 3 ne suffisent pas.

Pour $N = 5$ on a $p_{k_0} = \underset{0 \leqslant k \leqslant N}{\text{Max}} \; p_k \geqslant 0{,}3 > \pi_3$ pour tout p .

On est donc dans le cas b du paragraphe 3 et le jeu est favorable à A pour $r > \frac{1}{p_{k_0}} - 1$ or $\frac{1}{p_{k_0}} - 1 \leqslant 2{,}3$ donc le jeu est favorable à A pour $r = 3$.

Supposons par exemple $r = 3$, $p = 0{,}25$; on a

$$p_0 = 0{,}2373$$
$$p_1 = 0{,}3955$$
$$p_2 = 0{,}2637$$
$$p_3 = 0{,}0879$$
$$p_4 = 0{,}0146$$
$$p_5 = 0{,}0010$$

$k_0 = 1$, A parie d'abord 1 , ce qui lui rapporte en moyenne

$$2 \; s \; p_{k_0} = 2{,}3730$$

p_1 est la seule valeur de $p_k \geq \pi_3$ mais

$$3 \; s \; p_2 - 2 \; q_2^s = 2{,}3733 - 0{,}7984 = 1{,}5749 > s \; p_{k_0}$$

A parie donc 2 , ce qui lui rapporte 1,5749

de même $3 \; s \; p_0 - 2 \; q_0^s = 2{,}1357 - 0{,}8870 = 1{,}2487 > s \; p_{k_0}$

A parie donc 3 .

On a alors

$$E \; G = 2{,}3730 + 1{,}5749 + 1{,}2487 - 3 = 2{,}1966$$

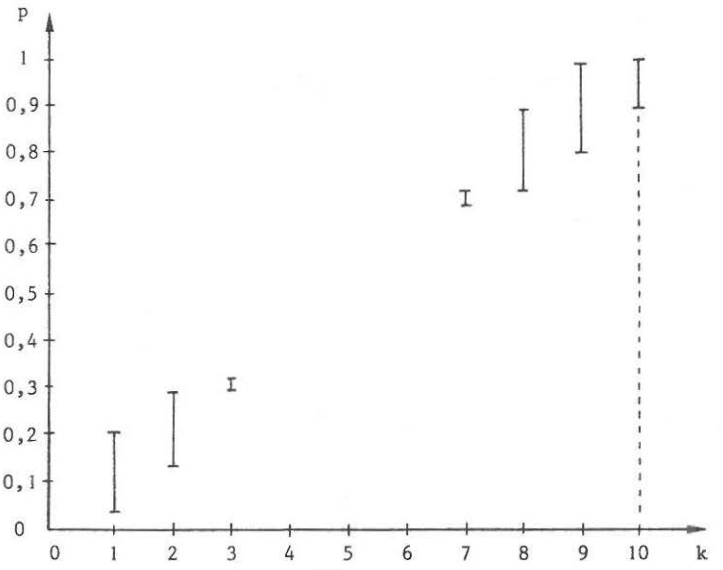
Par contre, si A parie au hasard

$$E \; G = 3 \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{6}^2 \right] - \frac{1}{3} \cdot \sum_{k \in \overline{T}} (2 \; q_k^s - 3 \; p_k)$$

$$= - \frac{13}{12} - \frac{1}{3} \times 5{,}4 = - 2{,}9$$

c) $s = 3$, $N = 10$; on $\pi_3 = 0{,}265$

Reprenant la figure tracée en b), nous obtenons cette fois la figure ci-dessous où il apparaît que les paris 4, 5, 6 ne nous permettent pas de distinguer deux valeurs de p; si par exemple $p = \frac{i}{10}$ (urne à 10 billes)



On a, en pariant 0, 1, 3, 7, 9, 10 la table de décodage partiel

0	1	3	7	9	10	k \ 10p
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	2
1	1	0	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	4, 5 ou 6
1	1	1	0	1	1	7
1	1	1	1	0	1	8
1	1	1	1	0	0	9
1	1	1	1	1	0	10

Si p prend l'une des trois valeurs 0,4 ; 0,5 ou 0,6 on a, pour tout k, $p_k \leqslant 0{,}2508 < \pi_3$; on est dans le cas a) du paragraphe 3, et le jeu est favorable à A pour

$$r \geqslant \frac{s\,(1 - p_{k_0})}{2\,(s\,p_{k_0} - q_{k_0}^s)}$$

or $\dfrac{s\,(1 - p_{k_0})}{2\,(s\,p_{k_0} - q_{k_0}^s)}$ est maximum pour $p = 0{,}5$ et égal alors à 3,6

Le jeu est donc favorable à A pour $r \geqslant 4$.

Si par exemple $p = 0{,}4$ on a

$k_0 = 4$ $\quad p_4 = 0{,}2508$ $\quad 2\,s\,p_{k_0} - 2\,q_{k_0}^s = 0{,}6638$

$\quad p_3 = 0{,}2150$ $\quad 3\,s\,p_3 - 2\,q_3^s = 0{,}9676$

$\quad p_5 = 0{,}2007$ $\quad 3\,s\,p_5 - 2\,q_5^s = 0{,}7849$

$\quad p_2 = 0{,}1209$ $\quad 3\,s\,p_2 - 2\,q_2^s = -\,0{,}2705$

A pariera donc 4 , 3 , 5 puis à nouveau 4 .

et $\qquad E\,G = 0{,}8325$

CONCLUSION

Nous espérons avoir montré par ces quelques exemples la diversité des problèmes et des stratégies, tous les calculs pouvant être menés à terme sans difficulté à l'aide d'une table de la répartition binomiale. Bien entendu, tout ce que l'on peut espérer en faisant jouer à ce jeu les enfants c'est observer quelle stratégie ils emploient effectivement et avec quelle rapidité A finit par l'emporter sur B; c'est aussi bien sûr les distraire: il n'est pas nécessaire de connaître la stratégie optimale des échecs ou du bridge pour y éprouver quelques satisfactions.