

5

Etude d'un problème de décision

par P.L. HENNEQUIN

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'exposer ici sur un exemple très simple quelques-unes des méthodes de résolution d'un problème de décision en univers aléatoire. On verra qu'à différents points de vue correspondent des solutions différentes. Cela peut décevoir le mathématicien mais doit faire réfléchir sur la relativité des conclusions en statistique : formuler des conclusions ne peut se faire qu'après avoir choisi un modèle et un critère d'optimisation. L'optimum trouvé se construit rigoureusement mais n'est peut-être pas celui que cherchait l'utilisateur qui n'a pas su formuler les contraintes propres à son problème.

1. EXPOSE DU PROBLEME

Une urne contient un nombre connu n de boules dont un nombre inconnu I de blanches et les autres rouges. On s'interdit de faire autre chose que des tirages avec remise dans cette urne, en nombre N . En pratique, il pourra s'agir d'un contrôle de fabrication (une machine est susceptible de $n+1$ états dont 1 satisfaisant et les n autres correspondent à divers dérèglements qu'il s'agit de détecter au vu de N pièces fabriquées) ou d'une épidémie frappant N malades dont il s'agit de diagnostiquer la maladie parmi $n+1$ au vu d'un symptôme dont la probabilité varie avec la maladie. Nous donnons ces deux exemples pour bien faire comprendre que dans le premier cas N reste à la disposition de l'expérimentateur qui peut décider d'augmenter le nombre de pièces observées avant de prendre une décision, alors que dans le second cas N est fixé indépendamment de lui. Dans un problème aussi simple on peut expliciter tous les calculs pourvu qu'on dispose d'une table de distributions binomiales et de la répartition de Laplace, par exemple celles de Laborde.

(Les $n+1$ états correspondent aux $n+1$ compositions possibles de l'urne).

2. EXHAUSTIVITE DU NOMBRE DE SUCCES

Décidons de noter le résultat des tirages successifs par des lettres B (blanches = succès) ou rouge R ; nous avons obtenu, par exemple :
B R B B R B R R B

Pour N tirages, nous avons 2^N résultats possibles; au $k^{\text{ième}}$ tirage, on obtient

$$\begin{aligned} & \text{B avec probabilité } \frac{I}{n} \\ & \text{R avec probabilité } 1 - \frac{I}{n} \end{aligned}$$

La probabilité de B R B B R B R R B est donc, puisque les tirages sont indépendants

$$\left(\frac{I}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{I}{n}\right)^4$$

Elle ne dépend donc que du nombre S_N de tirages B : la probabilité qu'une suite de N tirages contienne k blancs dans une position fixée d'avance est

$$\left(\frac{I}{n}\right)^k \left(1 - \frac{I}{n}\right)^{N-k}$$

quelle que soit la position des k tirages blancs. La connaissance de cette position n'apporte donc pas plus d'information sur I que la nombre k de tirages blancs : on dit que ce nombre S_N de succès est une statistique exhaustive pour le paramètre I.

On a pour $k \in \langle 0, N \rangle$, ensemble des entiers de l'intervalle $[0, N]$,

$$P(S_N = k) = \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} = P_1(k) \quad \text{où l'on a posé}$$

$$p_1 = \frac{I}{N}, q_1 = 1 - p_1 = \frac{n-I}{n}$$

3. ALGORITHMES A N FIXE

3.1 Algorithme de vraisemblance maximum

On appelle vraisemblance de l'évènement $\{S_N = k\}$ l'application $i \mapsto P_1(k)$. Cette vraisemblance est maximum pour une valeur i_0 de i telle que

$$p_{i_0}^k q_{i_0}^{N-k} \geq p_i^k q_i^{N-k} \quad \text{pour tout } i$$

Si p_1 prenait toutes les valeurs de l'intervalle $[0, 1]$, le maximum serait atteint pour $\frac{k}{p} - \frac{N-k}{q} = 0$ ou $p = \frac{k}{N}$. Mais ici, p prend seulement les valeurs $\frac{1}{N}$ et le maximum peut être atteint, soit pour $i = \left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor$ (partie entière de $\frac{k}{N}$), soit pour $i = \left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor + 1$, soit pour les deux.

Pour associer à chaque k une valeur de i, décidons de choisir la plus petite de ces deux valeurs s'il y en a deux et notons-la d(k). Nous définissons ainsi une application d de $\langle 0, N \rangle$ dans $\langle 0, n \rangle$:

Nous décidons que si le nombre de succès observé est k , il y avait $d(k)$ boules dans l'urne. Notons A_1 l'ensemble des valeurs de k qui conduisent à la décision 1, c'est-à-dire

$$A_1 = d^{-1}\{1\} = \{k / d(k) = 1\}$$

Evaluons l'erreur due à cette décision. Supposons qu'en fait l'urne contient j blanches, la probabilité que nous ayons pris une décision fautive est

$$\sum_{k \notin A_j} \binom{N}{k} p_j^k q_j^{N-k} = \alpha_j = 1 - \sum_{k \in A_j} \binom{N}{k} p_j^k q_j^{N-k}$$

qu'on peut calculer pour $j \in \{0, n\}$

A titre d'exemple, fixons $n = 5$

Pour $N = 5$, on obtient

$A_0 = \{0\}$	$A_5 = \{5\}$	$\alpha_0 = \alpha_5 = 0$
$A_1 = \{1\}$	$A_4 = \{4\}$	$\alpha_1 = \alpha_4 = 0,59$
$A_2 = \{2\}$	$A_3 = \{3\}$	$\alpha_2 = \alpha_3 = 0,65$

Pour $N = 10$,

$A_0 = \{0\}$	$A_5 = \{10\}$	$\alpha_0 = \alpha_5 = 0$
$A_1 = \{1, 2\}$	$A_4 = \{8, 9\}$	$\alpha_1 = \alpha_4 = 0,59$
$A_2 = \{3, 4, 5\}$		$\alpha_2 = 0,33$
$A_3 = \{6, 7\}$		$\alpha_3 = 0,53$

Pour $N = 30$,

$A_0 = \{0\}$	$A_5 = \{30\}$	$\alpha_0 = \alpha_5 = 0$
$A_1 = \{1, 8\}$	$A_4 = \{22, 29\}$	$\alpha_1 = \alpha_4 = 0,13$
$A_2 = \{9, 15\}$		$\alpha_2 = 0,19$
$A_3 = \{16, 21\}$		$\alpha_3 = 0,27$

Pour $N \geq 30$, on utilise l'approximation de Laplace :

$$a \leq \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}} < b \quad \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

alors $\frac{p_1^k q_1^{N-k}}{p_2^k q_2^{N-k}} < 1$ pour $k \log \frac{p_1}{p_2} + (N-k) \log \frac{q_1}{q_2} \leq 0$

$$\text{ou } \frac{k}{N} \geq \frac{\log \frac{q_1}{q_2}}{\log \frac{q_1 p_2}{p_2 q_1}}$$

pour $p_1 = 0,2$ et $p_2 = 0,4$ on trouve $\frac{k}{N} \geq 0,2933$.

Pour $N = 100$, on prendra donc $A_0 = \{0\}$, $A_5 = \{100\}$; alors $\alpha_0 = \alpha_5 = 0$

$A_1 = \langle 1, 29 \rangle$, $A_4 = \langle 71, 99 \rangle$; alors $\alpha_1 = \alpha_4 = 0,01$

$A_2 = \langle 30, 50 \rangle$, $A_3 = \langle 51, 70 \rangle$; alors $\alpha_2 = \alpha_3 = 0,04$

3.2: Méthode de Bayes

Dans toute méthode de Bayes on suppose que le paramètre inconnu I est aléatoire de loi connue : ici cela revient à supposer qu'on a tiré au sort la composition de l'urne. Par exemple on a réalisé les 6 urnes correspondant aux 6 valeurs de $I \in \langle 0, 5 \rangle$ et on a tiré au sort (avec un dé) l'urne étudiée; ou bien on a tiré les 5 boules qui composent l'urne dans un très grand lot de boules contenant autant de blanches que de rouges.

D'une façon générale, nous poserons $a_i = P(I = i)$. Dans le premier exemple $a_i = \frac{1}{6}$, dans le second $a_i = \frac{\binom{5}{i}}{32}$. On peut en imaginer beaucoup d'autres, les seules restrictions étant $a_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^5 a_i = 1$.

On peut, connaissant les a_i qu'on appelle probabilités à priori de la composition de l'urne, calculer les probabilités à postériori de cette même composition conditionnée par l'évènement que sur N tirages on a obtenu k succès :

$$P(I = i / S = k) = \frac{a_i p_1^k q_1^{N-k}}{\sum_{j=0}^5 a_j p_j^k q_j^{N-k}}$$

Elles dépendent évidemment des a_i .

Il est naturel d'associer à chaque valeur de k l'une des valeurs de i qui maximise $P(I = i / S = k)$; si $a_i = \frac{1}{6}$ pour tout i , on retrouve la même décision que dans l'algorithme précédent.

On peut alors calculer la probabilité de prendre une décision fautive :

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k \in A_i} \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} = \sum_{i=0}^n a_i$$

ainsi, reprenant les exemples précédents, on trouve pour $a_i = \frac{1}{6}$

si $N = 5$, $\bar{\alpha} = 0,41$; si $N = 10$, $\bar{\alpha} = 0,28$; si $N = 30$, $\bar{\alpha} = 0,12$;
 si $N = 100$, $\bar{\alpha} = 0,017$.

Si au contraire on choisit $a_1 = \binom{5}{1} \frac{1}{32}$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_0 &= a_5 = 0,03 \\ a_1 &= a_4 = 0,16 \\ a_2 &= a_3 = 0,31 \end{aligned}$$

on trouve pour $N = 5$ les ensembles de décision

$$A_0 = A_5 = \emptyset \text{ et } \alpha_0 = \alpha_5 = 1$$

$$A_1 = \{0\} , A_4 = \{5\} \quad \alpha_1 = \alpha_4 = 0,57$$

$$A_2 = \{1, 2\} \quad A_3 = \{3, 4\} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,39 \quad \text{et } \bar{\alpha} = 0,51$$

Pour $N = 10$, $N = 30$ et $N = 100$, les ensembles de décision sont les mêmes que précédemment et $\bar{\alpha} = 0,405$; $0,18$; $0,028$.

3.3 Stratégies aléatoires

Revenons à la première stratégie ; pour N pair et $k = \frac{N}{2}$ on a la même vraisemblance pour $I = 2$ et $I = 3$; au lieu d'imposer une de ces deux valeurs de I par une décision déterministe, on peut s'en remettre au hasard pour décider et tirer cette valeur à pile ou face. Nous dirons que nous prenons une décision aléatoire.

D'une façon générale, une stratégie aléatoire ϕ consiste, pour chaque observation k , à choisir I par un tirage au sort qui donne la valeur i avec probabilité $\phi(k, i)$.

Les ϕ sont soumis aux seules conditions $\phi(k, i) \geq 0 \quad \forall k, i$ et

$$\sum_{i=0}^N \phi(k, i) = 1 \quad \forall k \in < 0, N > .$$

Si en fait l'urne contient j blanches, la probabilité d'une décision fautive associée à la stratégie ϕ est

$$\beta_j = \sum_{k=0}^N (1 - \phi(k, j)) \binom{N}{k} p_j^k q_j^{N-k} = 1 - \sum_{k=0}^N \phi(k, j) \binom{N}{k} p_j^k q_j^{N-k}$$

On peut, bien entendu, considérer la stratégie déterministe définie par les A_i comme un cas particulier de stratégie aléatoire en posant

$$\phi(k, i) = 1_{A_i}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donnons deux exemples, toujours pour $n = 5$

$N = 5$

$\phi(0, 0) = 0,5$	$\phi(0, 1) = 0,5$	$\beta_0 = 0,5$
$\phi(1, 1) = 0,8$	$\phi(1, 2) = 0,2$	$\beta_1 = 0,5$
$\phi(2, 2) = 1$	$\phi(3, 3) = 1$	$\beta_2 = \beta_3 = 0,6$
$\phi(4, 3) = 0,2$	$\phi(4, 4) = 0,8$	$\beta_4 = 0,5$
$\phi(5, 4) = 0,5$	$\phi(5, 5) = 0,5$	$\beta_5 = 0,5$

$N = 10$

$\phi(0, 0) = 0,7 = \phi(10, 5)$	$\phi(0, 1) = 0,3 = \phi(10, 4)$	$\beta_0 = \beta_5 = 0,3$
$\phi(1, 1) = 1 = \phi(9, 4)$		$\beta_4 = \beta_1 = 0,41$
$\phi(2, 1) = 0,9 = \phi(8, 4)$	$\phi(2, 2) = 0,1 = \phi(8, 3)$	$\beta_2 = \beta_3 = 0,42$
$\phi(3, 2) = \phi(4, 2) = 1 = \phi(6, 3) = \phi(7, 3)$		
$\phi(5, 2) = \phi(5, 3) = 0,5$		

On voit que les plus grandes probabilités d'erreurs sont plus petites que dans le cas déterministe.

3.4 Stratégies Bayésiennes optimales

Supposons donnée une distribution de probabilités à priori a :

$P(I = i) = a_i$, $i \in \langle 0, n \rangle$ et cherchons une stratégie aléatoire ϕ qui minimise la probabilité d'erreur :

$$1 - \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^N \phi(k, i) \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} = 1 - \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{i=0}^n a_i \phi(k, i) p_1^k q_1^{N-k}$$

avec $\phi(k, i) \geq 0$ et $\sum_{i=0}^n \phi(k, i) = 1$

Pour chaque k on doit maximiser $\sum_{i=0}^n a_i \phi(k, i) p_1^k q_1^{N-k}$; pour cela il suffit de choisir $\phi(k, i) = 1$ pour un des i qui maximise $a_i p_1^k q_1^{N-k}$; on retrouve donc la méthode de Bayes déterministe du § 3.2.

Plus généralement supposons que chaque fois que nous avons choisi $I = j$, alors que la vraie valeur était i , on nous applique une pénalité w_{ij} , une stratégie ϕ nous conduira à la pénalité moyenne

$$\bar{w}(\phi) = \sum_i a_i \sum_{j,k} w_{ij} \phi(k, j) \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k}$$

dans le cas où on choisit $w_{ij} = 1$ pour $i \neq j$ et 0 si $i = j$ on retrouve la probabilité d'erreur, mais d'autres choix sont possibles, par exemple

$$w_{ij} = |i-j| \text{ ou } w_{ij} = (i-j)^2.$$

Pour minimiser $\bar{w}$ il faut pour chaque k minimiser

$$\sum_{i,j} a_i w_{ij} \phi(k, j) p_1^k q_1^{N-k}$$

et pour cela il suffit de choisir $\phi(k, j) = 1$ pour un des j qui minimise

$$\sum_i a_i w_{ij} p_1^k q_1^{N-k}; \text{ on retrouve donc une décision déterministe.}$$

3.5 Interprétation géométrique

Donnons-nous un ensemble de pénalités w_{ij} $i, j \in \langle 0, n \rangle$;

nous supposons que $w_{ii} = 0$ et $w_{ij} > 0$ pour $i \neq j$. Si la vraie valeur de I est i , une stratégie ϕ nous conduit à la pénalité

$$w_i = \sum_{j,k} w_{ij} \phi(k, j) \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} \quad i \in \langle 0, n \rangle$$

associons aux w_i le vecteur $W(\phi)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes w_i .

Quand ϕ varie de sorte que $\phi(k, j) \geq 0 \quad \forall k, j$ et $\sum_{j=1}^n \phi(k, j) = 1 \quad \forall k \in \langle 0, N \rangle$ $W(\phi)$ décrit un convexe compact C .

$$\text{En effet } W(\lambda\phi + (1-\lambda)\phi^*) = \lambda W(\phi) + (1-\lambda)W(\phi^*)$$

pour $0 \leq \lambda \leq 1$ donc C est convexe.

Si une suite $W(\phi_m)$ converge vers V , on peut extraire de la suite ϕ_m une sous-suite ϕ_{m_r} telle que $\phi_{m_r}(k, j)$ converge vers une limite $\phi(k, j)$ pour tout k, j (compacité de l'intervalle $[0, 1]$); alors $W(\phi_{m_r}) \rightarrow W(\phi)$ donc

$V = W(\phi)$ et C est fermé. Comme $0 \leq w_i \leq \sum_j w_{ij}$, C est borné donc compact.

Cherchons les éléments extrémaux de C , c'est-à-dire les éléments V de C tels que

$$V = \lambda V_1 + (1-\lambda) V_2, \quad V_1, V_2 \in C, \quad 0 < \lambda < 1 \implies V_1 = V_2 = V.$$

Nous allons montrer que si $W(\phi)$ est extrémal ϕ ne prend que les valeurs 0 ou 1 (donc correspond à une stratégie déterministe).

Soit en effet un couple (k, j_0) tel que $0 < \phi(k, j_0) < 1$; puisque

$\sum_{j=1}^n \phi(k, j) = 1$ il existe une autre valeur j_1 telle que $0 < \phi(k, j_1) < 1$

$$\text{Posons} \quad \phi'(k, j_0) = \phi(k, j_0) - \varepsilon \quad \phi'(k, j_1) = \phi(k, j_1) + \varepsilon$$

$$\phi''(k, j_0) = \phi(k, j_0) + \varepsilon \quad \phi''(k, j_1) = \phi(k, j_1) - \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $\phi'(k, j_0) \geq 0$ et $\phi''(k, j_1) \geq 0$

$$\text{alors} \quad w'_1 = w_1 - \varepsilon w_{j_0} \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} + \varepsilon w_{j_1} \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k}$$

$$w''_1 = w_1 + \varepsilon w_{j_0} \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k} - \varepsilon w_{j_1} \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k}$$

En particulier

$$w'_{j_0} = w_{j_0} + \varepsilon w_{j_0 j_1} \binom{N}{k} p_{j_0}^k q_{j_0}^{N-k}$$

$$w''_{j_1} = w_{j_1} + \varepsilon w_{j_1 j_0} \binom{N}{k} p_{j_1}^k q_{j_1}^{N-k}$$

donc, sauf si $j_0 = 0, j_1 = n, k \in \langle 1, N-1 \rangle$, $w'_{j_0} \neq w_{j_0}$ ou $w''_{j_1} \neq w_{j_1}$

donc $W(\phi') \neq W(\phi)$ ou $W(\phi'') \neq W(\phi)$ mais

$$W(\phi) = \frac{W(\phi') + W(\phi'')}{2} \quad \text{et } W(\phi) \text{ n'est pas extrémal.}$$

Ceci montre que si $W(\phi)$ est extrémal on a $\phi(k, j) = 0$ ou 1 sauf peut-être

pour $k \neq 0, N$ et $j = 0$ ou n puisqu'alors $p_j^k q_j^{N-k} = 0$; mais dans ce cas si par

exemple $0 < \phi(k, 0) < 1$ on a $\phi(k, j) = 0$ pour $j \in \langle 1, n-1 \rangle$ et

$$\phi(k, n) = 1 - \phi(k, 0)$$

$$\text{alors } w_0 = w_n = 0 \quad \text{et} \quad w_1 = \sum_k \left[w_{1,0} \phi(k, 0) + w_{1,n} (1 - \phi(k, 0)) \right] \binom{N}{k} p_1^k q_1^{N-k}$$

si $w_{1,0} = w_{1,n}$ pour tout $1 \in \langle 1, n-1 \rangle$, $W(\phi)$ ne dépend pas de ϕ et on peut

choisir $\phi(k, 0) = 1$ sans changer $W(\phi)$.

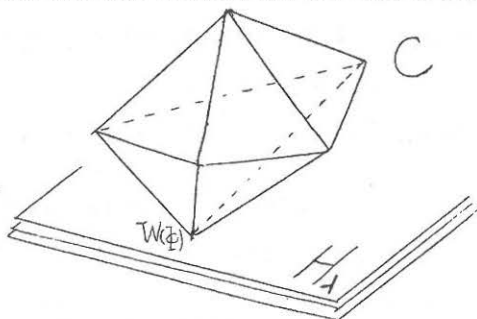
s'il existe $j \in \langle 1, n-1 \rangle$ tel que $w_{j0} \neq w_{j1}$ on a $w'_1 \neq w_1$ et $w''_1 \neq w_1$ donc $w(\phi)$ n'est pas extrême.



Or l'ensemble des ϕ à valeurs 0 ou 1 sur l'ensemble fini $\langle 0, N \rangle \times \langle 0, n \rangle$ est de cardinal fini ; C est un polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Donnons-nous alors des probabilités à priori $\{a_i, i \in \langle 0, n \rangle\}$; minimiser $\sum_{i=1}^n a_i w_i$ revient à minimiser une forme linéaire continue sur C ; elle atteint donc son minimum sur C :

l'équation $\sum_{i=0}^n a_i w_i = \lambda$ définit une famille d'hyperplans parallèles H_λ ; le minimum est réalisé pour un hyperplan H_λ unique (hyperplan d'appui) qui rencontre C soit en un sommet



$w(\phi)$ unique, soit selon une arête ou une face. La stratégie correspondante n'est donc pas toujours unique mais nous avons vu au § 3.4 qu'il existait toujours une stratégie déterministe qui réalise le minimum.

3.6 Stratégie minimax

A un ensemble de pénalités $\{w_{ij}\}$ et à une stratégie ϕ nous pouvons associer un vecteur de pénalités moyennes $w(\phi)$. On peut caractériser la "taille" de ce vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ par une norme dans $\mathbb{R}^{n+1}$, par exemple

$$\sum_{i=0}^n |w_i| \text{ ou } \sum_{i=0}^n w_i^2 \text{ ou } \max_{0 \leq i \leq n} |w_i|, \text{ et chercher à déterminer une stratégie } \phi \text{ minimisant la norme de } w(\phi).$$

La solution dépend évidemment de la norme choisie. Nous nous limiterons à la troisième : $\|w\| = \max_{0 \leq i \leq n} |w_i|$.

Nous cherchons donc ϕ qui réalise $\min_{\phi} \max_i w_i(\phi) = \min_{w \in C} \|w\|$ puisque $w_i(\phi) \geq 0$.

Le minimum est atteint car $\|w\|$ est une fonction continue sur le compact C.

Nous allons montrer que les composantes de $W(\Phi)$ sont égales, ce qui nous permettra de le déterminer à partir de C .

Supposons que toutes les composantes de $W(\Phi)$ ne soient pas égales et soit W_{i_0} la plus grande, $W_{i_0} > 0$. Posons $\Phi'(k, j) = (1-\lambda)\Phi(k, j) + \lambda\psi_0(k, j)$

avec $0 < \lambda < 1$

$$\text{avec } \psi_0(k, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{si } j \neq i_0 \end{cases} \quad \text{pour tout } k$$

on a $W_1(\psi) = W_{i_0}$ donc $W_{i_0}(\psi_0) = 0$

Alors $W_1(\Phi') = (1-\lambda)W_1(\Phi) + W_{i_0}(\psi_0)$

et $W_{i_0}(\Phi') < W_{i_0}(\Phi)$

On peut choisir $\lambda > 0$ assez petit pour que $\max_i W_1(\Phi') < \max_i W_{i_0}(\Phi) = W_{i_0}(\Phi)$

de sorte que $W(\Phi)$ ne réalise pas le minimum de $\|W\|$.

On obtient donc le point $W(\hat{\Phi})$ de C où le minimum $\hat{w}$ est atteint en cherchant le point le plus proche de l'origine du segment intersection de C et de la droite $w_i = \lambda \quad i \in \{0, n\}$. Soit $\hat{M}$ ce point.

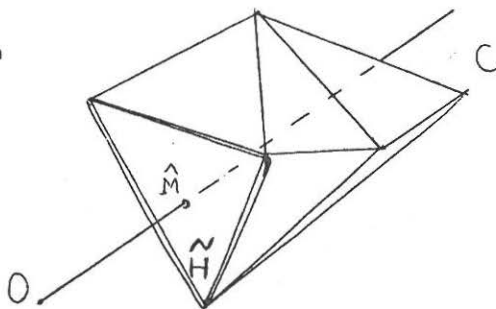
Par un tel point $\hat{M}$ passent un ou plusieurs hyperplans d'appui d'équation

$$\sum_{i=0}^n a_i (w_i - \hat{w}) = 0$$

et l'on a

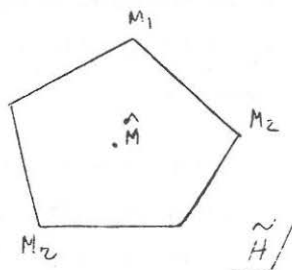
$$\sum_{i=0}^n a_i (w_i - \hat{w}) \geq 0 \quad \text{pour tous les } w \in C$$

Il existe au moins un tel hyperplan d'appui tels que les a_i soient ≥ 0 et non tous nuls. En effet les deux convexes C et $C' = \{w_i < \hat{w} \quad \forall i\}$ sont disjoints, donc, par le théorème de Hahn-Banach, séparés par un hyperplan passant par $\hat{M}$; comme cet hyperplan $\tilde{H}$ ne rencontre pas C' , on a $a_i \geq 0 \quad \forall i$ et les a_i sont non tous nuls. On peut donc supposer $\sum_{i=0}^n a_i = 1$ de sorte que $\tilde{H}$ contient au moins une solution de Bayes relative à la distribution à priori $\{a_i\}$.



En général la situation est la suivante :

$\tilde{H}$ porte une face de C et $\hat{M}$ est un point intérieur à cette face donc correspond à une stratégie $\hat{\phi}$ aléatoire. Les sommets de cette face $M_1, M_2, \dots, M_r$ correspondent aux stratégies déterministes des solutions de Bayes ϕ qui donnent la même perte moyenne $\sum_{i=0}^n a_i w_i = \hat{w}$ que $\hat{M}$.



De plus, pour toute autre distribution a priori $\{a_i'\}$, on a une stratégie de Bayes ϕ' telle que

$$\sum_{i=0}^n a_i' w_i (\phi') \leq \sum_{i=0}^n a_i' w_i (\hat{\phi}) = \hat{w}$$

donc la distribution à priori $\{a_i\}$ est celle qui donne la pénalité maximum ;
la stratégie minimax donne la même pénalité que la pénalité maximum pour
l'ensemble des solutions de Bayes. Ce résultat peut encore s'écrire

$$\max_{a'} \min_{\phi'} \sum_{i=0}^n a_i' w_i (\phi') = \min_{\phi'} \max_{a'} \sum_{i=0}^n a_i' w_i (\phi')$$

En effet $\max_{a'} \sum_{i=0}^n a_i' w_i (\phi') = \max_{i \in \langle 0, n \rangle} w_i (\phi')$

$a_i' \geq 0$

$\sum_{i=0}^n a_i' = 1$

Exemples

Pour $N = 5$ et $n = 5$ on trouve la stratégie minimax

$$\phi(0, 0) = \phi(5, 5) = 0,44 \quad \phi(0, 1) = \phi(5, 4) = 0,56$$

$$\phi(1, 1) = \phi(4, 4) = 0,63 \quad \phi(1, 2) = \phi(4, 3) = 0,37$$

$$\phi(2, 2) = \phi(3, 3) = 1$$

$$\text{et } \hat{w} = 0,56$$

Il lui correspond la distribution à priori

$$a_0 = a_5 = 0,065$$

$$a_1 = a_4 = 0,17$$

$$a_2 = a_3 = 0,26$$

et les stratégies de Bayes $A_1 = \{1\}$, $1 \in \langle 0, n \rangle$ et $A_0 = A_5 = \emptyset$,
 $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{3, 4\}$, $A_4 = \{5\}$ donnent la même pénalité
moyenne.

Pour $N = 10$ et $n = 5$ on trouve comme stratégie minimax

$$\Phi(0, 0) = \Phi(10, 10) = 0,58 \quad \Phi(0, 1) = \Phi(10, 4) = 0,42$$

$$\Phi(1, 1) = \Phi(9, 4) = 1$$

$$\Phi(2, 1) = \Phi(8, 4) = 0,88 \quad \Phi(2, 2) = \Phi(8, 3) = 0,12$$

$$\Phi(3, 2) = \Phi(4, 2) = \Phi(6, 3) = \Phi(7, 3) = 1$$

$$\Phi(5, 2) = \Phi(5, 3) = \frac{1}{2}$$

et $w = 0,42$

à laquelle correspond la distribution à priori

$$a_0 = a_5 = 0,015 \quad a_1 = a_4 = 0,14 \quad a_2 = a_3 = 0,395$$

3.7 Etude de la pénalité en fonction du nombre de tirages

Nous nous limiterons à titre d'exemple au cas où $w_{ij} = 1$ pour $i \neq j$
et $w_{ii} = 0$, et à la stratégie déterministe.

$$A_0 = \{0\} \quad A_1 = \{k / 0 < \frac{k}{N} \leq 0,2933\} \quad A_2 = \{k / 0,2934 \leq \frac{k}{N} \leq 0,5\}$$

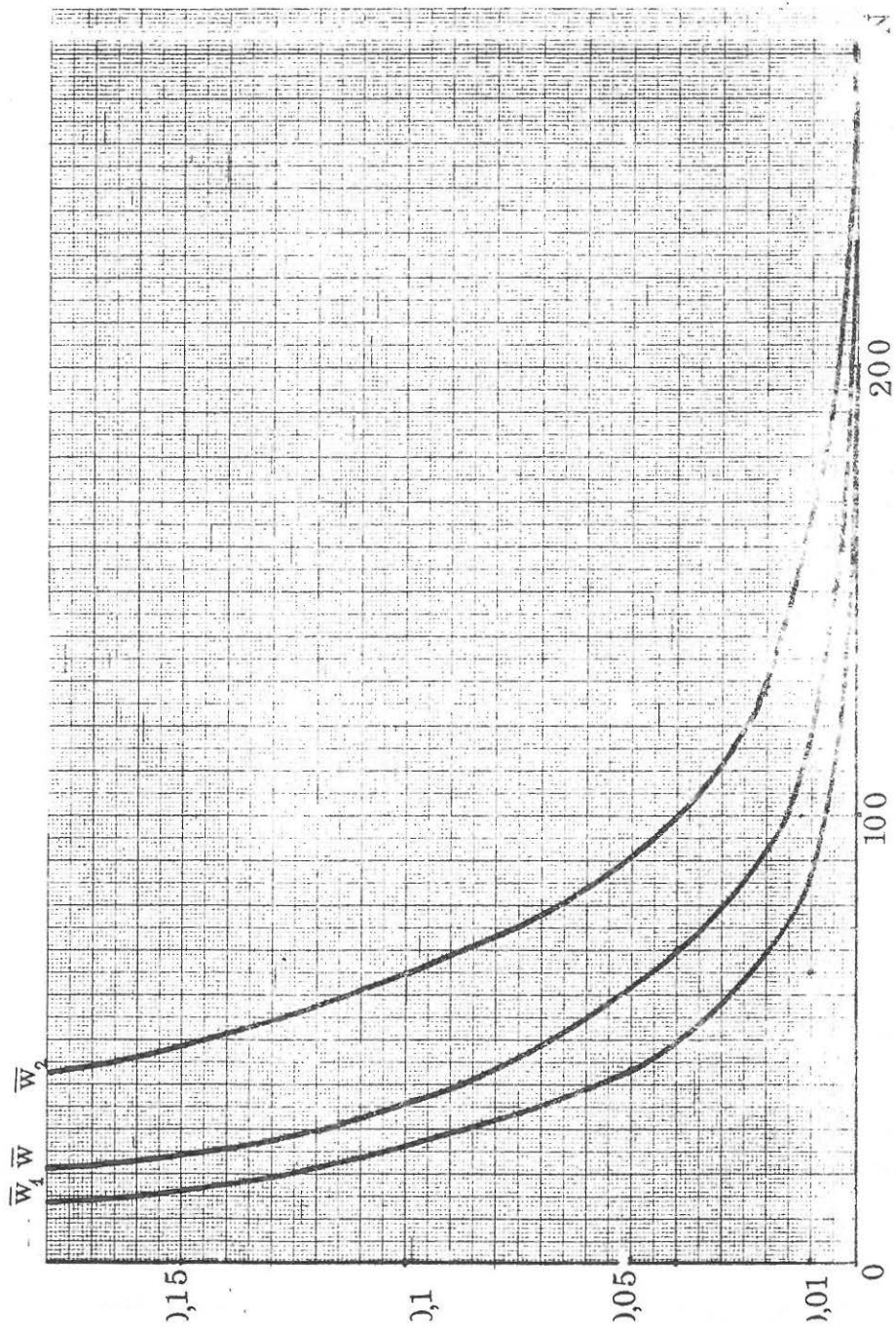
$$A_3 = \{k / 0,5 < \frac{k}{N} \leq 0,7066\} \quad A_4 = \{k / 0,7067 \leq \frac{k}{N} < 1\} \quad A_5 = \{N\}$$

L'approximation de Laplace conduit, en posant $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$\omega_0 = \omega_5 = 0 \quad \omega_1 = \omega_4 = 1 - \Phi\left(\frac{0,0933}{0,4} \sqrt{N}\right)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 1 - \Phi\left(\frac{0,1067}{0,49} \sqrt{N}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{0,1}{0,49} \sqrt{N}\right)$$

Si on choisit une distribution à priori uniforme $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$, on a les
graphiques suivants qui donnent $\omega_1, \omega_2, \bar{\omega}$ en fonction de N et qui montrent
qu'on gagne très rapidement sur la pénalité en augmentant N .



4. STRATEGIES SEQUENTIELLES

Nous allons maintenant étudier des stratégies selon lesquelles, au bout de N tirages on peut soit se décider en faveur d'une valeur de I , soit décider et effectuer au moins un tirage supplémentaire et ceci en fonction des résultats des N premiers tirages.

Supposons que chaque tirage nous coûte $t > 0$ et que le choix d'une valeur j pour I nous coûte w_{ij} si la vraie valeur de I est i .

Comme la probabilité d'une trajectoire de longueur N ne dépend que du nombre de succès k_N : $p_1^{k_N} q_1^{N-k_N}$, construire une stratégie séquentielle déterministe D consiste à définir, pour chaque valeur de N , $n+1$ parties disjointes B_j^N de $< 0, N >$ telles que, en notant S_N le nombre de succès au bout de N tirages, si $S_N \in B_j^N$ on choisit $I = j$.

Si $S_N \notin \bigcup_{j=0}^n B_j^N$ on effectue un nouveau tirage.

Soit $Z(D)$ le nombre (aléatoire) de tirages nécessaires pour choisir une valeur de I avec la stratégie D , $\alpha_{ij}(D)$ la probabilité que cette valeur choisie soit j alors que la vraie valeur est i , $E_i Z(D)$ l'espérance mathématique de $Z(D)$.

Comme le coût moyen d'une stratégie telle que $E_i Z(D)$ soit infini serait infini, on peut se limiter aux stratégies telles que $E_i Z(D)$ soit fini pour $i \in < 0, n >$, ce qui implique que $Z(D)$ est presque sûrement fini et que $\sum_{j=0}^n \alpha_{ij}(D) = 1 \quad \forall i \in < 0, n >$. Soit Δ l'ensemble de ces stratégies (on sait qu'il en existe, par exemple les stratégies non séquentielles, pour lesquelles le nombre de tirages est fixé à l'avance).

Le coût moyen de la stratégie D sera alors, si i est la vraie valeur de I

$$\sum_{j=0}^n w_{ij} \alpha_{ij}(D) + t E_i Z(D), \text{ et, si on se donne une distribution}$$

à priori $a = \{a_i\}$, le coût moyen pour cette distribution sera

$$W(a, D) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n w_{ij} d_{ij}(D) + t \sum_{i=0}^n a_i E_i(Z(D)).$$

Nous noterons F l'ensemble des distributions à priori, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$a_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i = 1.$$

Dans Δ nous distinguerons les $n+1$ stratégies D_j consistant à choisir $I = j$ avant tout tirage, de coût

$$W(a, D_j) = \sum_{i \neq j} w_{ij} a_i$$

et noterons Δ' l'ensemble de toutes les autres stratégies qui mettent en oeuvre au moins un tirage.

$$\text{Nous poserons } \mu(a) = \inf_{j \in \langle 0, n \rangle} W(a, D_j) \text{ et}$$

$$\rho(a) = \inf_{D \in \Delta'} W(a, D)$$

Deux cas sont possibles :

- ou bien $\rho(a) \geq \mu(a) \quad \forall a \in F$ (c'est le cas si t est grand devant $\max w_{ij}$);
alors la meilleure stratégie est D_j sur le sous-ensemble F_j de F défini par
 $\mu(a) = w(a, D_j)$

- ou bien il existe $a \in F$ tel que $\rho(a) < \mu(a)$.

Soit F' (resp. F'') la sous-ensemble de F défini par $\rho(a) < \mu(a)$,
(resp. $\rho(a) \geq \mu(a)$)

Alors pour minimiser $W(a, D)$ sur Δ on a intérêt à choisir D_j si $a \in F'' \cap F_j$
et à choisir une stratégie optimale dans Δ' (c'est-à-dire effectuer un tirage)
si $a \in F'$.

Si $a \in F'$ nous effectuons donc un premier tirage. Après ce premier tirage nous nous retrouvons dans une situation analogue à ceci près qu'il convient de

remplacer la distribution à priori a par la distribution à posteriori a^1 déduite du résultat du premier tirage.

Après N tirages comportant k_N succès, cette distribution à posteriori a^N sera donnée par

$$a_1^N(k_N) = \frac{a_1 p_1^{k_N} q_1^{N-k_N}}{\sum_{j \in <0, n>} a_j p_j^{k_N} q_j^{N-k_N}}$$

et nous déciderons

de choisir $I = j$ si $a^N \in F'' \cap F_j$
d'effectuer un nouveau tirage si $a^N \in F'$.

La stratégie Bayésienne optimale est donc définie par

$$B_j^N = \{k / a^N(k) \in F'' \cap F_j\}.$$

Malheureusement elle repose sur la connaissance de F'' (si $F \neq \emptyset$) donc de ρ dont la détermination précise nécessite l'utilisation d'algorithmes itératifs complexes de la théorie de l'optimisation.

Nous allons nous contenter de construire une stratégie voisine de la stratégie optimale, et pour les calculs nous nous limiterons au cas où

$w_{ij} = 1$ si et seulement si $i \neq j$

$$n = 5, \quad a_i = \frac{1}{6} \quad \forall i \in <0, 5> \quad p_i = \frac{1}{5}$$

et nous choisirons $t = \frac{1}{400}$

Remarquons d'abord que ρ , étant la borne inférieure de fonctions affines positives, est concave donc continue sur l'intérieur de F .

$$F'' \cap F_j = F_j \cap \{a / \rho(a) \geq W(a, D_j)\} \quad \text{est donc convexe.}$$

Par ailleurs pour $D \in \Delta'$ $E_1 Z(D) \geq 1$ donc

$$\rho(a) \geq t, \quad \forall a \in F$$

On a donc $F'' \cap F_j \supset F_j \cap \{a / W(a, D_j) \leq t\}$

pour les w_{ij} choisis, nous avons $W(a, D_j) = 1 - a_j$

et si $t \leq \frac{1}{2}$

$$F_j \cap \{a / W(a, D_j) \leq t\} = \{a_j \geq 1 - t\}.$$

Ceci nous incite à remplacer $F \cap F_j$ par un ensemble de la forme $a_j \geq \lambda$ (avec $\lambda \geq \frac{1}{2}$); nous noterons D_λ la stratégie correspondante.

Alors B_j^N sera déterminé par la condition

$$a_j p_j^k q_j^{N-k} \geq \lambda \sum_{i=0}^n a_i p_i^k q_i^{N-k}$$

$$\text{ou } p_j^k q_j^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{i \neq j} p_i^k q_i^{N-k}$$

Pour $j = 0$ on obtient $k \neq 0 \implies k \notin B_0^N$ et $0 \in B_0^N$ si et seulement si

$$1 \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{i \neq j} q_i^N$$

$$\text{Comme } \sum_{i \neq j} q_i^N = \left(\frac{4}{5}\right)^N,$$

$$0 \in B_0^N \iff N \log \frac{4}{5} \leq \log \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

$$\text{Posons } \frac{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}}{\log \frac{4}{5}} = N_0$$

$$\text{de même pour } j = n \quad N \in B_n^N \iff N \geq N_0$$

Pour $j = 1$, on obtient

$$p_1^k q_1^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{i \neq 1} p_i^k q_i^{N-k}$$

$k = 0$ ne satisfait pas cette inégalité.

Pour les valeurs de k qui satisfont cette inégalité, on a

$$\sum_{i \neq 1} p_i^k q_i^{N-k} = \frac{\lambda}{1-\lambda} p_2^k q_2^{N-k}$$

$$\text{d'où } k \in B_1^N \iff p_1^k q_1^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} p_2^k q_2^{N-k}$$

$$\text{ou } k \log \frac{p_1}{p_2} + (N-k) \log \frac{q_1}{q_2} \geq \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{de même } k \in B_4^N \iff k \log \frac{p_4}{p_3} + (N-k) \log \frac{q_4}{q_3} \geq \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Pour $j = 2$, on obtient

$$k \in B_2^N \iff p_2^k q_2^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j \neq 2} p_j^k q_j^{N-k}$$

qu'on peut remplacer par l'inégalité

$$p_2^k q_2^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} (p_1^k q_1^{N-k} + p_3^k q_3^{N-k})$$

$$\text{Si on pose } p_1^k q_1^{N-k} = \alpha p_3^k q_3^{N-k}$$

$$\text{alors } p_2^k q_2^{N-k} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} (1+\alpha) p_3^k q_3^{N-k}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} k \log \frac{p_1}{p_3} + (N-k) \log \frac{q_1}{q_3} = \log \alpha \\ k \log \frac{p_2}{p_3} + (N-k) \log \frac{q_2}{q_3} \geq \log \frac{\lambda}{1-\lambda} (1+\alpha) \end{cases}$$

De même on obtient B_3^N .

Evaluons alors $\alpha_{ii}(D)$. On a

$$\alpha_{ii}(D) = \sum_N \sum_T p_1^{k(T)} q_1^{N-k(T)}$$

et

$$\alpha_{ji}(D) = \sum_N \sum_T p_j^{k(T)} q_j^{N-k(T)}$$

où $\sum_T$ est étendue

à toutes les trajectoires T qui se terminent en un point de B_1^N par une décision

$I = i$ et où $k(T)$ désigne le nombre de succès d'une telle trajectoire. Or une

trajectoire se termine en un point de la frontière de B_1^N pour lequel on a, par construction, pratiquement l'égalité

$$p_1^k q_1^{N-k} \approx \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j \neq 1} p_j^k q_j^{N-k}$$

$$\text{d'où } \alpha_{ii}(D) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j \neq i} \alpha_{ji}(D)$$

$$\text{d'où } \sum_1 \alpha_{11}(0) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j \neq 1} \alpha_{j1}(0) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_1 (1 - \alpha_{11}(0))$$

$$\text{et } \sum_1 \alpha_{11}(0) = \lambda (n+1)$$

$$\text{ou } \sum_1 (1 - \alpha_{11}(0)) = (n+1) [1-\lambda] = 6 (1-\lambda)$$

Evaluons maintenant $E_1 Z(0)$. On a

$$E_1 Z(0) = \sum_{N=1}^{\infty} N P_1(Z(0) \geq N) = \sum_{N=1}^{\infty} P_1(Z(0) \geq N)$$

$$\begin{aligned} \text{or } P_1(Z(0) \geq N) &= 1 - P(Z(0) \leq N-1) \\ &\leq 1 - P_1(B_1^{N-1}) \end{aligned}$$

$$\text{On a } E_0 Z(0) = E_n Z(0) = N_0 = \frac{\log \frac{\lambda}{1-\lambda}}{\log \frac{5}{4}} \approx 11 \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{On a } B_1^N \neq \emptyset \iff N \geq \frac{\log \frac{\lambda}{1-\lambda}}{\log \frac{4}{3}} \approx 8 \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{et } \left(\frac{N}{5}, \frac{4N}{5}\right) \in B_1^N \implies N \geq \frac{\log \frac{\lambda}{1-\lambda}}{\frac{1}{5} \log \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \log \frac{4}{3}} \approx 25 \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{de même } \left(\frac{2N}{5}, \frac{3N}{5}\right) \in B_2^N &\implies N \geq \frac{\log \frac{2\lambda}{1-\lambda}}{\frac{2}{5} \log \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \log \frac{3}{2}} \\ &\approx 30 \log \frac{\lambda}{1-\lambda} \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à choisir

$$W(a, D_\lambda) \approx 6(1-\lambda) + 24 \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

qui pour $\lambda \geq \frac{1}{2}$ est minimum pour $\lambda = 1 - 4t$ la valeur du minimum étant

$$\approx 24t(1 - \log 4t)$$

Pour $t = \frac{1}{400}$ on trouve $\lambda = 0,99$ et un coût minimum de 0,18.

On a représenté sur la figure 2 les 6 ensembles correspondant à chaque valeur de I en portant en ordonnées le nombre de succès S_N et en abscisses le nombre d'échecs $N - S_N$.

$$\text{On a } E_0 Z = E_5 Z = 22$$

$$E_1 Z = E_4 Z = 50$$

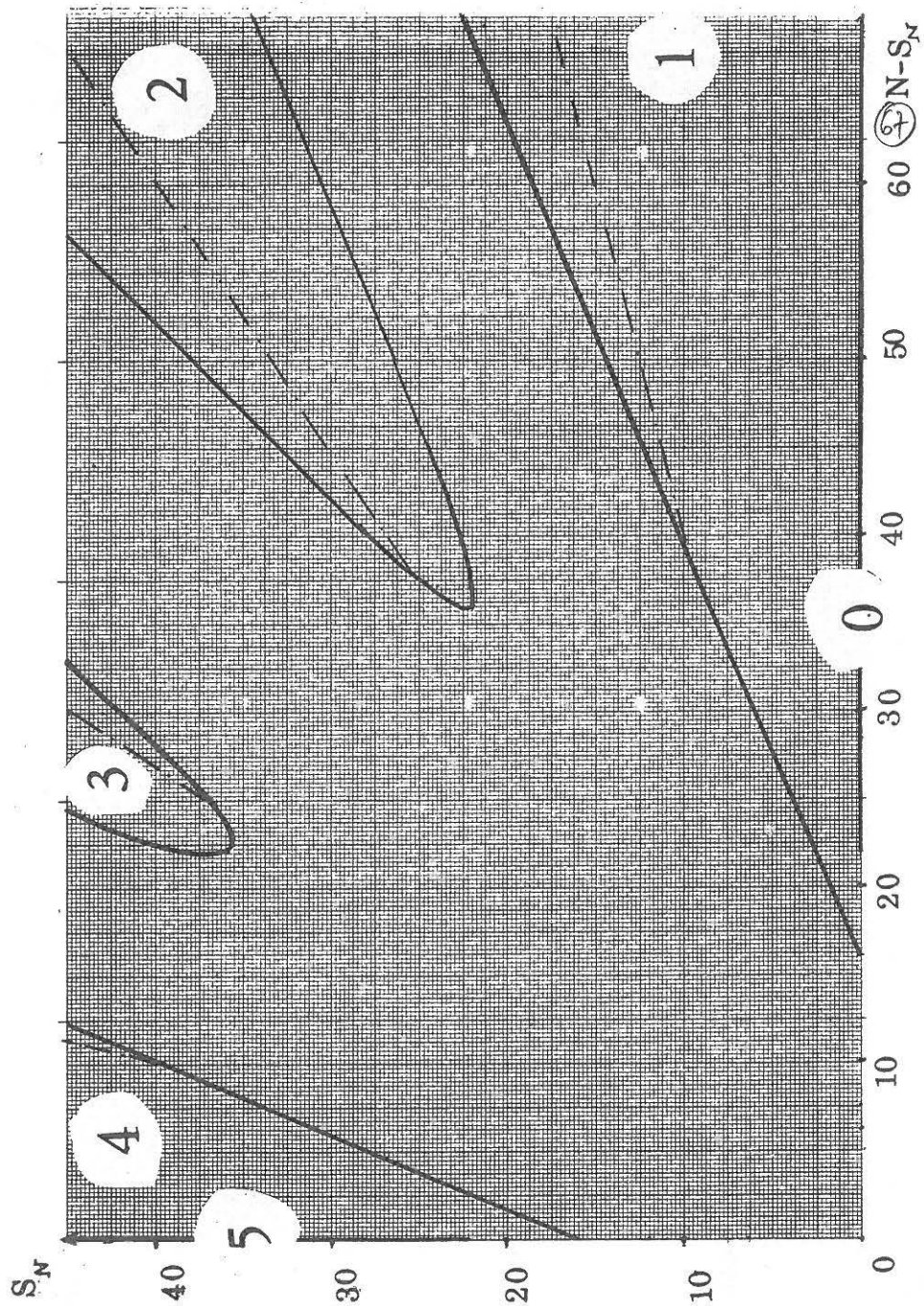
$$E_2 Z = E_3 Z = 72$$

Les axes en tireté ont pour équation $\frac{S_N}{N - S_N} = \frac{p_1}{q_1}$

On peut comparer le coût de cette stratégie séquentielle au coût minimum d'une stratégie à N fixé du § 3.

Pour cela nous avons porté sur la figure 3 le graphe de $\bar{w}(N) + tN = \bar{w} + \frac{N}{400}$ déduit du graphe de $\bar{w}$ obtenu figure 1.

$\bar{w}(N) + tN$ est minimum et égal à 0,187 pour $N = 40$. On voit que la stratégie séquentielle est légèrement meilleure bien que sensiblement plus longue à mettre en oeuvre si $I = 2$ ou 3.



$w+tN$

