Un tout petit exercice de calcul de probabilités

J. BADRIKIAN et P.L. HENNEQUIN
Université de Clermont

Résoudre un problème, ce n'est pas toujours proposer la solution qu'attend celui qui l'a posé. Cela peut être l'occasion de réfléchir aux diverses formulations d'une situation qui permettent de la mathématiser par le choix d'un modèle, pas toujours unique.

Prenons le texte suivant que nous avons proposé à nos élèves de Première Année du Département Informatique de l'I.U.T., mais qui rentre dans le programme, non-allégé, des diverses Terminales. Il peut en tout cas faire l'objet d'une discussion dans ces classes.

"Une centrale nucléaire n'a qu'une probabilité très faible d'avoir un accident en un an : on l'évalue à 10^{-5}.
Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un accident, en un an, dans un pays équipé de 200 centrales ? en 10 ans ?"

Nous noterons P_1 et P_2 les probabilités cherchées.

Plusieurs interprétations du texte sont possibles, qui conduisent chacune à un modèle différent (donc à une solution différente).

<u>1er modèle</u> : Puisque la probabilité (10^{-5}) d'un accident est très faible, on peut supposer qu'il s'agit d'un accident grave, par exemple l'explosion de la centrale, détruisant toute vie à des kilomètres de distance. Un tel accident causerait une telle émotion qu'il est presque sûr qu'il aboutirait à la fermeture immédiate de toutes les centrales nucléaires pour une dizaine d'années :

Soit $A_{i.j}$ l'évènement : la $i^{\text{ème}}$ centrale a un accident la $j^{\text{ième}}$ année, $1 \leqslant i \leqslant 200$, $1 \leqslant j \leqslant 10$.

On a : $P_1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{200} A_{i,1}\right)$ et $P_2 = P\left(\bigcup_{i=1}^{200} \bigcup_{j=1}^{10} A_{i.j}\right)$

Nous supposons les $A_{i,j}$ incompatibles et de même probabilité 10^{-5}.

De sorte que :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{200} P(A_{i,1}) = 200 \,.\, 10^{-5} = 0{,}002$$

et
$$P_2 = \sum_{i=1}^{200} \sum_{j=1}^{10} P(A_{i,j}) = 2000 \,.\, 10^{-5} = 0{,}02$$

2ème modèle : Nous supposons qu'une même centrale peut avoir plusieurs accidents et que 10^{-5} est la probabilité p qu'une centrale donnée ait au moins un accident en un an.

Nous supposons cette fois que l'"accident" est assez limité pour être ignoré du public et ne pas remettre en cause le fonctionnement ultérieur de la centrale ou celui des autres centrales. Nous supposons en outre que les centrales sont indépendantes (sinon on nous aurait donné les probabilités conditionnelles d'un accident dans une centrale quand il y en a eu d'autres).

Alors
$$\begin{aligned} P_1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{200} A_{i,1}\right) &= 1 - P\left(\complement \bigcup_{i=1}^{200} A_{i,1}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{200} \complement A_{i,1}\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{200} P\left(\complement A_{i,1}\right) \\ &= 1 - (1 - 10^{-5})^{200} \end{aligned}$$

et de même

$$P_2 = 1 - (1 - 10^{-5})^{2000}$$

Calculons une valeur numérique approchée de P_1 et P_2.

1ère méthode : appliquons la formule du binôme :

$$(1 - 10^{-5})^{200} \simeq 1 - 200 \cdot 10^{-5} + \frac{200.199}{2} 10^{-10} + \ldots$$

$$(1 - 10^{-5})^{2000} \simeq 1 - 2000 \cdot 10^{-5} + \frac{2000.1999}{2} 10^{-10} + \ldots$$

d'où $P_1 \simeq 200 \cdot 10^{-5} - \frac{200.199}{2} 10^{-10} + \ldots$

$$P_2 \simeq 2000 \cdot 10^{-5} - \frac{2000.1999}{2} 10^{-10} + \ldots$$

c'est aussi ce que donnerait l'expression de $P(\cup A_{i,1})$ en fonction des $P(A_{i,1}$

$P(A_{i,1} \wedge A_{j,1}) \ldots$

D'où : $P_1 \simeq 0{,}001998 \simeq 0{,}002$

$P_2 \simeq 0{,}019801 \simeq 0{,}02$

2ème méthode : prenons les logarithmes (c'est la méthode préférée des élèves)

$$\log (1 - 10^{-5})^{200} = 200 \log (1 - 10^{-5})$$

et $\log (1 - 10^{-5})^{2000} = 2000 \log (1 - 10^{-5})$

Pour calculer $\log (1 - 10^{-5}) = \log 0{,}99999$, on peut utiliser une table.

On y lit : $\log 0{,}999 = \bar{1},999565$ et l'on sait que $\log 1 = 0$.

Utiliser brutalement une de ces deux valeurs comme valeurs approchées de $\log 0{,}99999$ conduirait

pour $\begin{cases} \log (1 - 10^{-5})^{200} & \text{aux approximations} \\ \log (1 - 10^{-5})^{2000} & \text{aux approximations} \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{1},913 \text{ et } 0 \\ \bar{1},13 \text{ et } 0 \end{cases}$

donc pour $\begin{cases} (1 - 10^{-5})^{200} & \text{aux approximations} \\ (1 - 10^{-5})^{2000} & \text{aux approximations} \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}8185 \text{ et } 1 \\ 0{,}1349 \text{ et } 1 \end{cases}$

et enfin pour P_1 aux "approximations" $P'_1 \simeq 0{,}1815$ et $P''_1 \simeq 0$

pour P_2 aux "approximations" $P'_2 \simeq 0{,}8651$ et $P''_2 \simeq 0$

La classique interpolation linéaire entre P'_1 et P''_1 d'une part, P'_2 et P''_2 d'autre part nous donne

$$P_1 \simeq \frac{1}{100} P'_1 + (1 - \frac{1}{100}) P''_1 = 0,001815$$

et $$P_2 \simeq \frac{1}{100} P'_2 + (1 - \frac{1}{100}) P''_2 \simeq 0,00865$$

on est justement dans un cas où l'interpolation linéaire est trop grossière.

3ème méthode : on a, en utilisant le développement limité $\log (1-u) = - u + o (\frac{1}{u})$,

$$\log (1 - 10^{-5}) = M \operatorname{Log} (1 - 10^{-5}) \simeq - M . 10^{-5} = - 0,000004343 = \overline{1},999995657$$

d'où, avec cinq décimales exactes

$$\log (1 - 10^{-5})^{200} \simeq \overline{1},999131$$

$$\log (1 - 10^{-5})^{2000} \simeq \overline{1},99131$$

et on lit dans la table :

$$1 - P_1 = 0,9980 ; 1 - P_2 = 0,9802$$

d'où

$$P_1 \simeq 0,0020 \text{ et } P_2 \simeq 0,0198 \quad .$$

On voit combien la conduite du calcul influe sur sa précision ; mais en calcul des probabilités, ce qui importe c'est l'ordre de grandeur des probabilités. Nous nous arrêterons donc aux valeurs approchées $P_1 \simeq 0,002$ et $P_2 \simeq 0,02$.

Remarquons qu'on obtient comme valeur approchée de P_1 et P_2 les valeurs trouvées dans la solution exacte du premier modèle ; l'indépendance des $A_{i,j}$ conduit en effet à $P (A_{i,j} \cap A_{i',j'}) = p^2$ et on peut négliger la probabilité de plusieurs accidents devant la probabilité d'un seul, de sorte que :

$$P (\bigcup_{i=1}^{200} A_{i,1}) \simeq 200 \text{ p} \quad \text{et} \quad P (\bigcup_{j=1}^{20} \bigcup_{i=1}^{200} A_{i,j}) \simeq 2000 \text{ p}$$

3ème modèle : Prenons le texte à la lettre et considérons 10^{-5} comme la probabilité qu'une centrale ait un accident et un seul en un an.

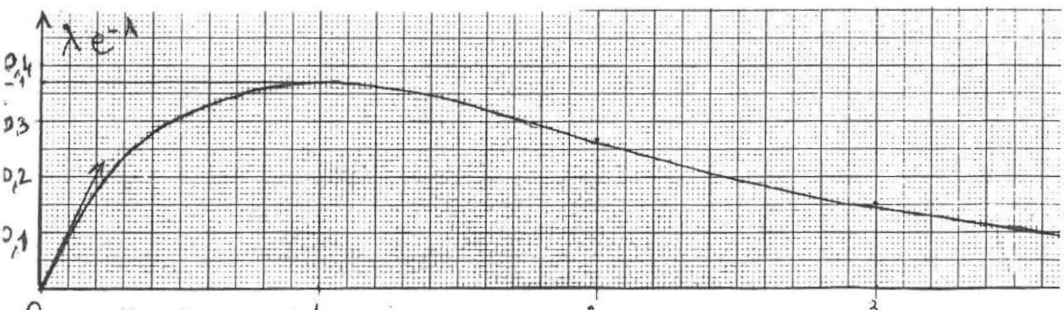
Pour calculer P_1 et P_2 , il faut calculer la probabilité p d'avoir au moins un accident en un an. Supposons que nous partagions l'année en N parties égales et que N soit assez grand pour qu'on puisse négliger la probabilité qu'il y ait plus d'un accident dans l'une de ces parties ($\frac{1}{N}$ est par exemple la durée d'immobilisation de la centrale par la réparation d'un accident). Alors, le nombre X d'accidents en un an est la somme des N variables que nous supposons indépendantes égales à 1 avec probabilité p_N et à 0 avec probabilité $1 - p_N$. X a donc une répartition binomiale $B(N, p_N)$ qu'on peut, si N est grand, approcher par une distribution de Poisson de paramètre Np_N.

$$B(N, p_N) \simeq e^{-Np_N} \frac{(Np_N)^k}{k!}$$

Posons $N p_N = \lambda$; λ doit satisfaire l'équation :

$$\lambda e^{-\lambda} = 10^{-5}$$

et $$p = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\lambda}$$



Un examen du graphe de $\lambda e^{-\lambda}$ montre que l'équation $\lambda e^{-\lambda} = a$ a deux racines pour $0 < a < e^{-1}$; pour $a = 10^{-5}$, ces deux racines sont :

$\lambda_1 = 10^{-5} + 10^{-10}$ d'où $p_1 \simeq 10^{-5}$

$\lambda_2 = 14,2$ d'où $p_2 \simeq 1$!

Dans le premier cas, on retrouve les valeurs approchées de P_1 et P_2 des modèles 1 et 2. Par contre, la seconde valeur correspond au cas où la probabilité d'un seul accident est petite parce qu'il y a beaucoup d'accidents (en moyenne 14,2 par centrale et par an), alors P_1 et P_2 sont pratiquement égaux à 1. Cette solution est plausible si le mot "accident" est interprété comme "panne minime".

EN CONCLUSION :

Résoudre cette épreuve nécessite plusieurs démarches :

1) Analyse du texte et de la situation.
2) Recherche d'un modèle, c'est-à-dire formulation explicite d'hypothèses plus ou moins implicites d'après le contexte ou l'usage.
3) Résolution du modèle.

D'un certain point de vue, seule 3) est mathématique, mais les trois sont formatrices et mettent en jeu des qualités différentes.

Il est certain que de tels textes - ambigus - permettent de déceler ces qualités. Donner à nos étudiants le goût d'aborder, de discuter puis de mathématiser des sujets, peut -être mal définis - mais réels - tels qu'ils sont relatés dans les journaux et revues semble aussi important que la résolution purement mathématique d'un problème très modélisé.

Cependant, confronter des réflexions demande une disponibilité de temps et d'esprit et une entrevue orale est certes plus appropriée à ce genre d'exercice qu'une interrogation écrite.