Pourquoi des tribus ?

P.L. HENNEQUIN

L'article de A. TORTRAT (Bulletin A.P.M. n° 302, p. 115-121) cite divers résultats de théorie de la mesure, classiques mais rarement rassemblés et démontrés dans les cours actuels, par exemple [4] . Si la théorie élémentaire, limitée au cas fini, est maintenant connue des élèves quand ils arrivent dans le premier cycle universitaire, l'introduction de la théorie générale, et en particulier de la notion d'espace probabilisé doit être justifiée par des exemples reposant sur une bonne connaissance de la théorie des ensembles. Enfin l'énoncé de quelques leçons récentes d'agrégation nous laisse penser que les lignes qui suivent pourront rendre service aux candidats.

1. Le cas Ω dénombrable (cas discret)

a. Si Ω est un ensemble fini, l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ l'est aussi ; tout sous anneau booléen unitaire de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une sous tribu. Une telle sous tribu $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition Π de Ω, c'est-à-dire par une suite A_i de parties disjointes non vides de Ω de réunion Ω :

$$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A = \bigcup_{i \in I} A_i .$$

Les A_i sont les atomes de $\mathcal{A}$ c'est-à-dire les éléments A de $\mathcal{A}$ tels que

$$B \subset A \, , \; B \in \mathcal{A} \Longrightarrow B = A \text{ ou } B = \emptyset .$$

Une probabilité P sur $\mathcal{A}$ est définie par sa restriction aux éléments de Π puisque $A = \bigcup_{i \in I} A_i \Longrightarrow P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i)$. Les $p_i = P(A_i)$ sont soumis à la seule condition $p_i \geqslant 0$, $\sum p_i = 1$.

b. Si Ω est dénombrable, un anneau booléen unitaire $\mathcal{M}$ peut ne pas avoir d'atomes : par exemple, $\Omega = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{M}$ est l'anneau des réunions finies d'intervalles disjoints $[a, b[$.

Par contre, toute sous tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est, comme dans le cas fini, engendrée par la partition Π de Ω formée des atomes de $\mathcal{A}$ (dont l'ensemble T est dénombrable). $\mathcal{A}$ est donc isomorphe à $\mathcal{P}(T)$ et toute probabilité sur $\mathcal{A}$ est définie par sa restriction à T. En effet quel que soit $\omega \in \Omega$ l'intersection de la famille des $A \in \mathcal{A}$ tels que $\omega \in A$ peut s'exprimer comme une intersection dénombrable donc appartient à $\mathcal{A}$ et c'est un atome. Si $T \neq \Omega$ une telle probabilité admet une infinité de prolongements à $\mathcal{P}(\Omega)$.

Il en résulte que, tant qu'on ne considère qu'une tribu $\mathcal{A}$, on peut dans ce cas encore se limiter à $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ sans restreindre la généralité , et aussi qu'une application est $\mathcal{A}$ mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de $\mathcal{A}$.

c. Par contre, si Ω n'est pas dénombrable, il peut se faire qu'une sous tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$

- possède des atomes mais alors une probabilité sur $\mathcal{A}$ n'est plus définie par sa restriction aux atomes de $\mathcal{A}$: par exemple les tribus $\mathcal{B}$ de Borel et $\mathcal{L}$ de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ont toutes les deux comme atomes les parties réduites à un point mais cela ne les caractérise pas et il existe une infinité de probabilités nulles sur ces atomes.
- ne possède pas d'atomes : soit Ω l'ensemble des applications ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A_i de Ω ainsi définies :

  on se donne une partie $D_i = \{x_i^n\}$ dénombrable de $\mathbb{R}$ et une famille $\{B_i^n\}$ de boréliens de $\mathbb{R}$; $\quad A_i = \{\omega \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\ \omega(x_i^n) \in B_i^n\}$

  $\mathcal{A}$ est une tribu car $\complement A = \{\omega \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\ \omega(x^n) \in \complement B^n\}$

$$\text{et} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{\omega \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\ \omega(x^n) \in B^n\}$$

  où x^n parcourt la réunion des D_i et où B^n est l'intersection des B_i^n tels que $x_i^{n_i} = x^n$.

  $\mathcal{A}$ n'a pas d'atomes car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et on obtient des parties propres de A_i en rajoutant un point à D_i.

2. Probabilités uniformes

Si Ω est fini de cardinal n, la probabilité uniforme est définie par $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ $\forall \omega \in \Omega$. Si Ω est infini dénombrable, il n'existe pas de probabilité uniforme. Si $\Omega = T_1$, tore de dimension 1, il serait naturel d'appeler probabilité uniforme une probabilité L sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $L(x + A) = L(A)$ quel que soit $x \in T_1$ (invariance par translation) et $L(T_1) = 1$. Malheureusement Vitali a montré dans [8] qu'une telle probabilité n'existe pas.

Soit en effet ξ un irrationnel de T_1 et considérons sur T_1 la relation $a \sim b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k\xi$. C'est une relation d'équivalence car $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Soit (nous utilisons ici l'axiome du choix, cf [2]), A_0 un ensemble contenant un point et un seul de chaque classe d'équivalence et A_k l'ensemble des a de la forme $b + k\xi$ avec $b \in A_0$; A_k est donc déduit de A_0 par la translation $k\xi$. Les A_k sont distincts et disjoints car si

$$a = b + k\xi = b' + k'\xi \qquad \text{avec } b' \in A_0 ,$$

$$b - b' = (k - k')\,\xi$$

Comme A_0 ne contient qu'un élément de chaque classe $b = b'$ et comme ξ est irrationnel $k = k'$. Tout élément a de T_1 appartient à une classe d'équivalence donc $\exists\, b \in A_0$ et k telsque $a = b + k\xi$. Les A_k forment donc une partition de Ω .

Si L existait, on devrait avoir $1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} L(A_k)$ où $L(A_k)$ ne dépend pas de k, ce qui est impossible.

Banach a cependant montré dans [1] l'existence d'une fonction L sur $\mathcal{P}(T_1)$ invariante par translation et simplement additive avec $L(\Pi) = 1$.

Auparavant, Hausdorff [3] avait montré qu'une telle fonction n'existe pas sur la sphère S_2 de dimension 2 ("Paradoxe de la sphère").

Plaçons-nous en effet dans $\mathbb{R}^3$ et soient deux diamètres D, D' d'une sphère de centre O, d'angle $\frac{\theta}{2}$. Soit A la rotation d'axe D d'angle π (symétrie par rapport à D) et B la rotation d'axe D' d'angle $\frac{2\pi}{3}$; $B^2 = B^{-1}$ la rotation d'axe D' d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

On déduit de $A^2 = B^3 = I$ que le groupe G engendré par A et B est formé des rotations qui s'écrivent

$$R = \begin{cases} I & \text{ou} \\ A\,B_1\ \ A\,B_2\ \ A \ldots A\,B_n & \text{ou} \\ B_1\,A\ \ B_2 \ldots\ \ A\,B_n\,A & \text{ou} \qquad \text{avec } B_i = B \text{ ou } B^2 \\ A\,B_1 \ldots\ \ A\,B_n\,A & \text{ou} \\ B_1\,A\,B_2 \ldots A\,B_n & \end{cases}$$

Supposons que le même R admette deux telles représentations ; il existe alors $B'_1, B'_2, \ldots B'_n$ tels que

$$(1) \qquad A\,B'_n\,A\,B'_{n-1} \ldots A\,B'_1 = I$$

(car on peut ramener à une équation de cette forme en multipliant à droite et à gauche par A, ${B'_n}^{-1}$ ou ${B'_1}^{-1}$ les trois autres formes possibles et car $A \neq I$ et $B \neq I$)

Pour expliciter les calculs et montrer que (1) ne peut jamais être une identité en θ, choisissons un repère orthonormé Oxyz, choisissons Oz comme axe de B et l'axe de A dans le plan xoz et posons $\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\mu = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ de sorte que A, B et AB sont définies par les matrices

$$\begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\lambda\cos\theta & \mu\cos\theta & \sin\theta \\ -\mu & -\lambda & 0 \\ \lambda\sin\theta & -\mu\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(changer B en B^2 revient à changer μ en $-\mu$).

Soient x_n, y_n, z_n les coordonnées du transformé de (0, 0, 1) par $A\,B'_n\,A\,B'_{n-1} \ldots A\,B'_1$.

Par récurrence sur n, on montre que

$$x_n = \sin \theta \sum_{k=0}^{n-1} a_k^n (\cos \theta)^k$$

$$y_n = \sin \theta \sum_{k=0}^{n-2} b_k^n (\cos \theta)^k$$

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k^n (\cos \theta)^k$$

où $\quad a_n^{n+1} = c_n^n - \lambda\, a_{n-1}^n , \qquad c_{n+1}^{n+1} = c_n^n - \lambda\, a_{n-1}^n ,$

D'où $\quad a_{n-1}^n = c_n = (1-\lambda)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \neq 0$

En particulier on ne peut avoir $z_n = 1$ identiquement en θ. (1) se ramène donc à un système d'équations algébriques en $\cos \theta$ qui admet au plus un nombre fini de racines en θ (mod 2π)

L'ensemble des θ pour lesquels il existe un élément de G admettant plusieurs représentations est donc un ensemble au plus dénombrable Θ .

Nous pouvons donc supposer que $\theta \notin \Theta$.

G est dénombrable et ses éléments sont, outre l'identité, des rotations autour d'un axe Δ_R bien déterminé.

Nous désignerons par S l'ensemble des points de Σ qui ne sont sur aucun Δ_R.

Considérons sur S la relation suivante : $M \sim M'$ s'il existe $R \in G$ tel que $M' = R(M)$. Comme G est un groupe, c'est une relation d'équivalence.

Choisissons, comme Vitali, un représentant M_o dans chaque classe d'équivalence et soit Γ_o l'ensemble de ces représentants.

$\forall M \in S$, M appartient à une classe d'équivalence de représentant M_o et M s'écrit de façon unique $M = R(M_o)$ avec $R \in G$, en effet si $R_1(M_o) = R_2(M_o)$, on a $R_1^{-1} R_2 (M_o) = M_o$ et comme $M_o \in S$ il n'est pas sur $\Delta_{R_1^{-1}R_2}$ donc $R_1^{-1} R_2 = I$ et $R_1 = R_2$.

Classons maintenant les éléments de G suivant la forme de leur représentation puisque celle-ci est unique :

G_1 est formé des éléments $B \; A \; B_2 \ldots$

G_2 est formé des éléments $B^2 \; A \; B_2 \ldots$

G_o est formé des éléments $A \; B_1 \ldots$ et de I

Remarquons que $B\,G_1 = G_2$, $B\,G_2 = G_o$, $B\,G_o = G_1$ et, puisque $A^2 = I$ et que $I \in G_o$, $A\,G_o = \{I\} \cup \{A\} \cup G_1 \cup G_2$

Posons $H_i = \bigcup_{R \in G_i} R\,(\Gamma_o) \qquad i = 0, 1, 2.$

Les H_i sont disjoints, d'union S et

$B\,(H_o) = H_1$, $B\,(H_1) = H_2$, $B\,(H_2) = H_o$

$A\,(H_o) = \Gamma_o \cup A\,(\Gamma_o) \cup H_1 \cup H_2$

Ainsi H_o, H_1, H_2 sont disjoints et déduits l'un de l'autre par une rotation (B) de plus $H_1 \cup H_2 \subset A\,(H_o)$

S'il existait sur $\mathcal{P}\,(\Sigma)$ une fonction additive L, invariante par rotation et telle que $L\,(\Sigma) = 1$ on aurait $L\,(S) = 1$ (car $\Sigma \setminus S$ est dénombrable) et $L\,(H_o) = L\,(H_1) = L\,(H_2) = \frac{1}{3}$

mais $L\,(A\,(H_o)) = \frac{1}{3} \ngeq L\,(H_1) + L\,(H_2) = \frac{2}{3}$

d'où la contradiction.

3. Mesures sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Ulam ([7] repris dans [6]) a caractérisé les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$ où Ω est un ensemble de cardinal $\aleph_1$ c'est-à-dire que Ω peut être bien ordonné de façon que chaque élément soit précédé d'un ensemble dénombrable d'éléments. L'hypothèse du continu affirme que $\aleph_1 = c = \text{card } \mathbb{R}$ et permet d'appliquer ce théorème à $\mathbb{R}$.

Théorème d'Ulam

Si une probabilité P est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ avec card $\Omega = \aleph_1$ il existe un sous-ensemble dénombrable Ω_0 de Ω tel que $P(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ et que

$$\forall A \subset \Omega, \; P(A) = \sum_{\omega_i \in \Omega_0 \cap A} P(\{\omega_i\})$$

Autrement dit les seules probabilités définies sur tout $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les probabilités discrètes.

Démonstration

Soit $\Omega_0 = \{\omega \; / \; P(\{\omega\}) > 0\}$. Ω_0 est dénombrable. Plaçons-nous sur $\Omega \setminus \Omega_0 = \Omega_1$. Par hypothèse Ω_1 peut être bien ordonné de façon que $\forall \omega \in \Omega_1$ l'ensemble $\{\omega' \; / \; \omega' < \omega\}$ soit dénombrable.

Soit f_ω une bijection de cet ensemble dans un sous ensemble de $\mathbb{N}$.

$$\omega' < \omega'' < \omega \Longrightarrow f_\omega(\omega') \neq f_\omega(\omega'')$$

Pour tout $\omega' \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$F^n_{\omega'} = \{\omega : \omega' < \omega \;, \; f_\omega(\omega') = n\}$$

Disposons ces ensembles en un tableau ayant $\aleph_0$ lignes et $\aleph_1$ colonnes

$$\begin{array}{ccccc}
F^{o}_{\omega_1} & F^{o}_{\omega_2} & \dots & F^{o}_{\omega_n} & \dots \\
F^{1}_{\omega_1} & F^{1}_{\omega_2} & \dots & F^{1}_{\omega_n} & \dots \\
\dots\dots & & & & \\
F^{n}_{\omega_1} & F^{n}_{\omega_2} & \dots & F^{n}_{\omega_n} & \dots \\
\dots\dots & & & &
\end{array}$$

- Deux éléments d'une même ligne sont disjoints car si on avait

$$\omega \in F^{n}_{\omega'} \cap F^{n}_{\omega''}$$

avec $\omega' < \omega''$ et $\omega'' < \omega$ on aurait $f_{\omega}(\omega') = f_{\omega}(\omega'') = n$.

Dans chaque ligne, il y a donc un ensemble au plus dénombrable de ω tels que $P(F^{n}_{\omega}) > 0$; comme l'ensemble des lignes est dénombrable, on peut dénombrer les couples (ω, n) tels que $P(F^{n}_{\omega}) > 0$.

Comme l'ensemble des colonnes n'est pas dénombrable, il y a au moins une colonne, c'est-à-dire un $\omega \in \Omega_1$ tel que $P(F^{n}_{\omega}) = 0$.

$\forall\ \omega \in \Omega_1$ et $\omega' < \omega$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\omega}(\omega') = n$ donc que $\omega \in F^{n}_{\omega'}$; $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{n}_{\omega'}$ contient donc tous les ω tels que $\omega' < \omega$ et diffère de Ω_1 au plus de l'ensemble dénombrable des ω tels que $\omega \leqslant \omega'$.

On en déduit $P(\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{n}_{\omega'}) = 0$ puis $P(\Omega_1) = 0$

Devant cette situation, deux choix sont possibles : se limiter aux probabilité définies sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mais alors on n'a pas une théorie nouvelle par rapport aux probabilités discrètes, ou bien se restreindre à des sous tribus de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

4. Tribus de Borel et de Lebesgue

On appelle <u>tribu de Borel</u> la sous tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ engendrée par les intervalles (ou par les ouverts, ou par les intervalles d'extrêmités dans Q ou dans $\mathcal{D}$). Le théorème de prolongement permet de définir une probabilité P sur $\mathcal{B}$ à partir d'une fonction de répartition F.

Montrons que card $\mathcal{B}$ = c et plus généralement que, si l'on note $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω ,

$$\text{card } \mathcal{F} \leqslant c \Longrightarrow \text{card } \sigma(\mathcal{F}) \leqslant c.$$

Pour cela, posons $\mathcal{C}_0 = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\} \cup \Omega$

et pour tout α ordinal dénombrable, définissons par récurrence

$$\mathcal{C}_{\alpha+1} = \{ \bigcup_1^\infty (A_n \setminus B_n) \text{ , } A_n \text{ , } B_n \in \mathcal{C}_\alpha \}$$

On a $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}_{\alpha+1}$, $A \in \mathcal{C}_\alpha \Longrightarrow \complement A \in \mathcal{C}_{\alpha+1}$ et $\mathcal{C}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{C} = \bigcup\limits_\alpha \mathcal{C}_\alpha$; Si $A_i \in \mathcal{C}_{\alpha_i}$, $\bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ est donc une tribu contenant $\mathcal{F}$ et contenue dans $\sigma(\mathcal{F})$ donc $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{F})$.

Si card $\mathcal{F} \leqslant c$, card $\mathcal{C}_\alpha \leqslant c^{\aleph_0} = c$ et card $\bigcup\limits_\alpha \mathcal{C}_\alpha \leqslant c$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \in \mathcal{B}$, card $\mathcal{B} \geqslant c$ d'où card $\mathcal{B}$ = c.

En fait, le théorème de prolongement permet de prolonger de façon unique P à la tribu $\overline{\mathcal{B}}_P$ formée des $B \Delta N$ avec $B \in \mathcal{B}$ et $N \subset B'$, $B' \in B$, $P(B') = 0$. Or il existe toujours un ensemble B' tel que $P(B') = 0$ et que card B' = c ; on en déduit que card $\overline{\mathcal{B}}_p \geqslant$ card $\mathcal{P}(B') = 2^c$ donc que card $\overline{\mathcal{B}}_p = 2^c$ = card $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. (on appelle tribu de Lebesgue la tribu $\overline{\mathcal{B}}_L$).

Pour le montrer, il suffit de trouver un ensemble C de $[0, 1[$ tel que sa mesure de Lebesgue L (c) soit nulle et que C soit en bijection avec $[0, 1[$.

L'ensemble C de Cantor formé des nombres $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ avec $a_n = 0$ ou 2 (en excluant $a_n = 2$ pour $n \geqslant n_0$) a cette propriété.

L'étude du § 3 montre qu'en général $\overline{\mathcal{B}}_p$ est différent de $\mathcal{P}(R)$; on a $\overline{\mathcal{B}}_p = \mathcal{P}(R)$ si et seulement si P est discrète.

5. Exemple : le jeu de pile ou face

Une partie de pile ou face est une suite de coups indépendants et comportant chacun 2 éventualités : Pile de probabilité p et Face de probabilité $q = 1 - p$. $(0 < p < 1)$.

Comme la longueur d'une partie est arbitraire, il est naturel de représenter une partie en codant pile par 1 et face par 0 par une suite infinie dont les éléments sont à valeurs 0 ou 1. Soit Ω l'ensemble de ces suites ; card Ω = card $2^{\mathbb{N}^*} = c$. On doit donc renoncer à probabiliser $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier. Considérons les sous ensembles de Ω de la forme suivante : pour définir A on se donne un sous-ensemble fini $I \subset \mathbb{N}^*$: $I = \{i_1, i_2, \dots i_n\}$ et une suite finie $x_1, x_2, \dots x_n$ à valeurs dans $\{0, 1\}$; A est formé des suites infinies $\{\omega_i\}$ telles que $\omega_{i_k} = x_k \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$.

On vérifie que l'ensemble des A forme avec $\emptyset$ un anneau booléen unitaire En particulier les parties réduites à un coup appartiennent à $\mathcal{A}$. Pour assurer l'indépendance des coups, on doit définir P sur $\mathcal{A}$ par

$$P(A) = p^r q^{n-r}$$

où r est le nombre de valeurs de k pour lesquelles $x_k = 1$.

Pour pouvoir prolonger cette probabilité à la sous tribu $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{B}$ il faut vérifier que P est une probabilité sur $\mathcal{B}$ et en particulier que si $A_n \downarrow \emptyset$, $P(A_n) \downarrow 0$. Or une suite décroissante A_n est définie par une suite croissante I_n et elle ne peut tendre vers $\emptyset$ que si pour $n \geqslant n_o$, $A_n = \emptyset$. On a donc bien alors $P(A_n) \downarrow 0$.

Dans Ω considérons le sous ensemble Ω_o formédes suites pour lesquelles il existe n_o tel que $n \geqslant n_o \Longrightarrow \omega_n = 1$. $\Omega_o \in \mathcal{A}$.

Ω_o est dénombrable et chacun de ses points est de probabilité nulle donc $P(\Omega_o) = 0$. Sur $\Omega \setminus \Omega_o$ considérons l'application f définie par

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$$. f est une bijection de $\Omega \setminus \Omega_o$ sur $[0, 1[$.

L'image d'un élément A de $\mathcal{B}$ est une réunion finie d'intervalles $[a, b[$ à extrêmités binaires et l'image de la tribu $\mathcal{A}$ est donc la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens de $[0, 1[$.

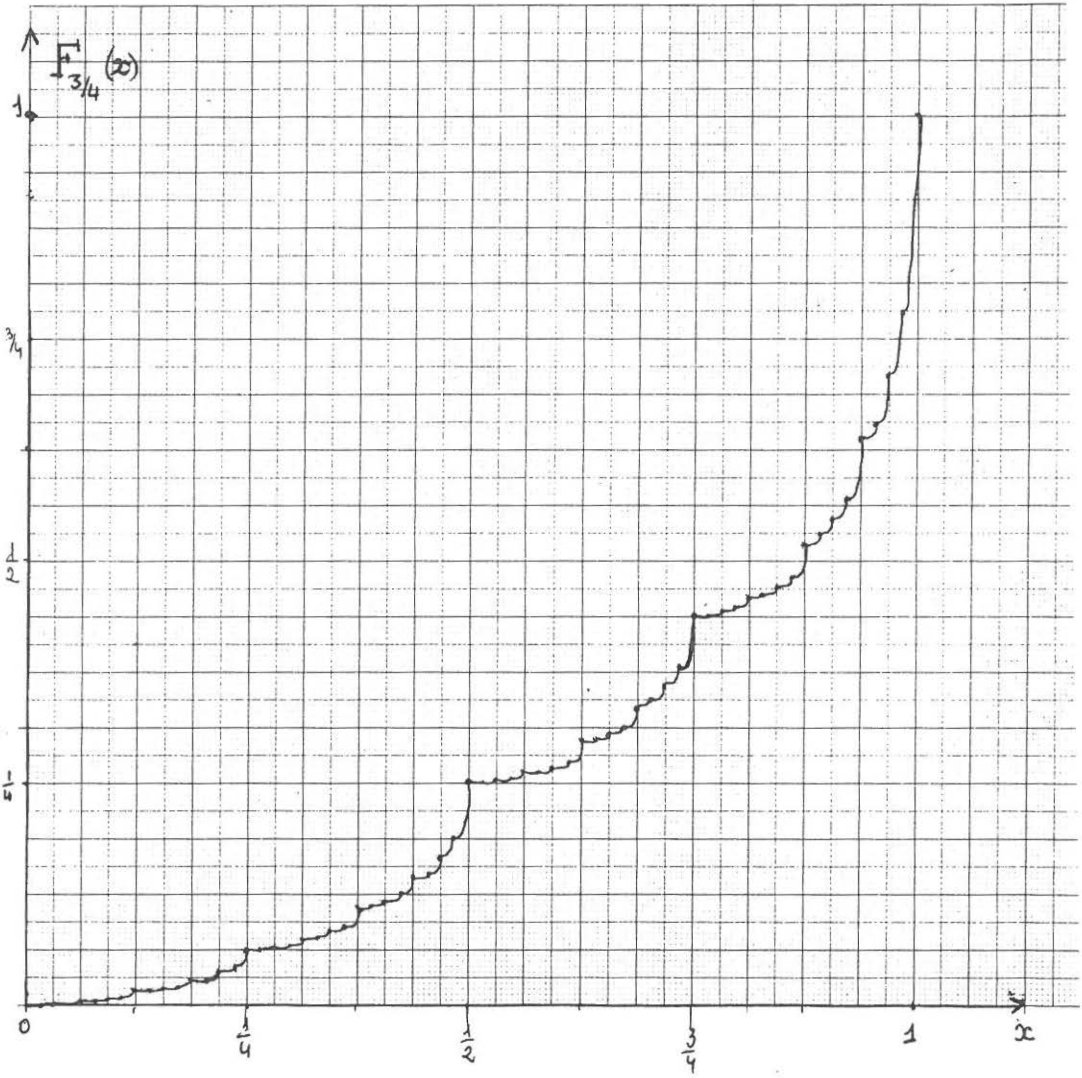
La loi forte des grands nombres nous dit que

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \omega_k \to p\right) = 1$$

Appelons B_p le sous-ensemble de Ω formé des images par f des ω tels que $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \omega_k \to p$ quand $n \to \infty$. Les ensembles B_p sont disjoints et il en résulte que les mesures P_p correspondant aux diverses valeurs de p sont <u>étrangères</u>. $\bigcup_{0<p<1} B_p$ diffère d'ailleurs de $[\Omega^1]$ puisque cet ensemble ne contient pas par exemple le nombre 0, 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 ... obtenu en prenant successivement 2^k chiffres 0 suivi de 2^k chiffres 1, pour lequel

$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \omega_k$ oscille entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

En particulier $P_{1/2}$ est la mesure uniforme sur $[0, 1[$ et si $p \neq \frac{1}{2}$ les P_p sont étrangères à la mesure de Lebesgue bien que continues. Leur fonction de répartition F_p est une fonction continue sans dérivée. La figure ci-dessous représente $F_{3/4}$.



Considérons alors l'application $F_p \circ f$. Puisque F_p est continue strictement croissante, c'est encore une bijection de $\Omega \setminus \Omega_o$ sur $[0, 1[$ et l'image de P_p par cette application est la mesure uniforme sur $[0, 1[$, en effet $P(F_p \circ f(\omega) \leqslant F_p(x)) = F_p(x) \quad \forall x \in [0, 1[$).

$F_p \circ f$ peut se définir de la façon suivante :

Si $\omega_1 = 0 \quad F_p \circ f(\omega) \in [0, q[$. Si $\omega_1 = 1 \quad F_p \circ f(\omega) \in [q, 1[$

A l'étape n+1, on subdivise chacun des intervalles obtenu à l'étape n en deux intervalles de longueur proportionnelle à q et p. $F_p \circ f(\omega)$ appartient au premier intervalle si $\omega_{n+1} = 0$, au second si $\omega_{n+1} = 1$. On définit ainsi $F_p \circ f(\omega)$ par une suite d'intervalles emboîtés.

REFERENCES

1 BANACH S. - Sur le problème de la mesure. Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 7-33

2 BOURBAKI N. - Théorie des ensembles, Chapitre 3, § 2 et 6.

3 HAUSDORFF F. - Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 469-472.

4 HENNEQUIN P.L. et TORTRAT A.
Théorie des probabilités et quelques applications, Masson 1965

5 LEVY P. - Le paradoxe de la sphère et les fissions en chaîne
Annales de l'Université de Budapest 3-4 1960-61, p. 135-144.

6 OXTOBY J. - Measure and category. Springer Verlag 1971.

7 ULAM S.M. - Zur Masztheorie in der allegemeinen Mengenlehre Fund. Math. 16, 141-150 (1930)

8 VITALI - Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta Bologna 1905.