LA MULTIPLICATION DES NATURELS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Elem Math II

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

LA MULTIPLICATION DES NATURELS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Elem Math II

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

UNE PUBLICATION DE L'A.P.M.E.P. POUR L'ECOLE ELEMENTAIRE

ELEM-MATH 1

En 1972, l'A.P.M.E.P. publiait La Mathématique à l'Ecole Elémentaire ; cet ouvrage collectif est maintenant épuisé. Ce succès, ainsi que les nombreuses demandes de publications analogues, ont amené l'A.P.M.E.P. à regrouper, dans une plaquette d'une cinquantaine de pages, quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Elémentaire parus dans son Bulletin.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Voici le sommaire :

Prix : 3 F (port compris : 4,15 F)

Pour se procurer les brochures publiées par l'APMEP :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés.

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P. :

M. BLONDEL

154, avenue Marcel Cachin, 92320-Châtillon-sous-Bagneux

ou encore s'adresser à la Régionale APM ou à la Départementale APM (voir adresses page 519).

AVANT - PROPOS

Jusqu'en 1969, voici comment les programmes de l'école primaire évoquaient la multiplication :

- au cours préparatoire : *"multiplication par 2 et 5"*
- au cours élémentaire : *"table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication ... dans des problèmes simples empruntés à la vie courante"*.

Les instructions limitaient ensuite le contenu de l'étude. Tout d'abord: *"l'apprentissage de la table de multiplication est un des objets du cours élémentaire"* ; ensuite, elles indiquaient une progression pour l'acquisition de la technique opératoire.

Ce point de vue excessivement pragmatique était justifié par une savoureuse définition : *"en fait, dans les cas les plus fréquents, la multiplication est une convention commerciale"*.

Les programmes et commentaires du 2-I-70 n'imposent plus cette orientation (liaison directe avec la pratique commerciale et réduction de la multiplication à une simple technique opératoire). Au contraire ils permettent de présenter aux enfants des activités variées contribuant à une meilleure connaissance de cette opération mathématique fondamentale.

C'est dans cette perspective que ce livret rassemble des idées et des suggestions centrées sur la multiplication des naturels. Y voir une éventuelle progression pour telle ou telle classe ou des modèles de leçons serait un contresens. L'idée directrice est plutôt celle d'une mathématique vivante élaborée à partir d'expériences diverses. En osant une comparaison géographique, disons que c'est un essai de description du paysage multiplicatif du CE à la classe de 6e.

Les idées présentées dans ce livret ne sont pas originales. Elles sont le fruit de la réflexion qui s'est développée dans les Ecoles Normales depuis quelques années et des échanges réalisés à l'occasion des nombreuses rencontres organisées tant par l'A.P.M. que par les I.R.E.M. Elles ont été, à coup sûr, influencées par les travaux de recherche mis en œuvre dans les I.R.E.M. en particulier ceux de Guy Brousseau et de son équipe de l'I.R.E.M. de Bordeaux. Si ce fascicule a quelque intérêt le mérite leur en revient.

J'aimerais enfin adresser ici mes remerciements à mes collègues du groupe Ecoles Normales de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie ainsi qu'à Guy BROUSSEAU (I.R.E.M. de Bordeaux), Francis DUCROCQ, André FABRE (Instituteurs) et André MYX (Professeur d'Ecole Normale) qui, grâce à leurs nombreuses critiques et suggestions, m'ont aidé dans la mise au point de ce livret.

Jacques LECOQ
Caen, février 1976

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à Jacques LECOQ
16, rue du Plateau-Fleuri
14000 CAEN

SOMMAIRE

ANNEXES

MOTS III
paraîtra en septembre 1976

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire : nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Chaque brochure a une centaine de pages.

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 X 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants :
chacune des trois brochures : 6 F (port compris : 8 F)

Pour se procurer les brochures publiées par l'APMEP :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés.

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P. :

M. BLONDEL

154, avenue Marcel Cachin, 92320-Châtillon-sous-Bagneux.

ou encore s'adresser à la Régionale APM ou à la Départementale APM (voir adresses page 519).

REFERENCES : Programmes et commentaires du 2 - I - 70 pour l'Ecole Elémentaire.

Voici les extraits des programmes en vigueur en ce qui concerne la multiplication des naturels.

Cours élémentaire 1e et 2e années

...

Produit de deux nombres : pratique de la multiplication.

...

Cours moyen 1e et 2e années

...

Multiplication ... par 10, 100, 1000 ...

Opérations et leurs propriétés ; suite d'opérations ; pratique des opérations ...

...

Et voici les extraits des commentaires qui accompagnent ces programmes.

4. Opérations : propriétés , pratique.

4.2. Multiplication - division exacte.

4.2.1. Multiplication.

Exemple : Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante :

0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0

On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets. Le nombre des objets est $\underbrace{(8 + 8 + 8 + 8 + 8)}_{5 \text{ termes}}$ *qu'on écrit selon une convention généralement adoptée* (8 x 5)

On peut aussi répartir ces objets en 8 ensembles de 5 objets. Le nombre des objets est $\underbrace{(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5)}_{8 \text{ termes}}$ *que l'on écrit avec la même convention* (5 x 8).

Ceci justifie l'égalité

$$(8 \times 5) = (5 \times 8)$$

On peut donc écrire indifféremment (8 x 5) ou (5 x 8) puisque ces écritures désignent le même nombre. On l'appelle produit des deux nombres donnés.

La multiplication est l'opération qui associe à deux nombres leur produit. Aux couples (8 ; 5) et (5 ; 8) la multiplication fait correspondre le nombre 40

$$(8 \times 5) = (5 \times 8) = 40$$

La multiplication est commutative. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.

Cas particulier : l'un des nombres est 1 ou 0

$4 \times 1 = 1 \times 4 = 4$; $3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$; etc ...

$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0$; $3 \times 0 = 0 \times 3 = 0$; etc ...

...

4.3. Tables

Aux tables traditionnelles, on préfèrera des tables de Pythagore construites par les élèves avec des nombres divers (sans oublier les lignes et colonnes qui comprennent 0 et 1).

Exemples :

x	0	7	2	5	3
6	0	42	12	30	18
1	0	7	2	5	3
4	0	28	8	20	12
3	0	21	6	15	9

...

La construction de telles tables facilite l'apprentissage et la mémorisation de sommes et de produits indispensables aux calculs. On construira notamment les tables ... de multiplication dans lesquelles les nombres placés en ligne et colonne sont ordonnés de 0 à 9.

...

4.5.2. Multiplications successives :

Exemple : On calcule (5×6) puis $((5 \times 6) \times 4)$ c'est-à-dire (30×4) ou bien (6×4) puis $(5 \times (6 \times 4))$ c'est-à-dire (5×24).

On constate que les deux expressions $((5 \times 6) \times 4)$ et $(5 \times (6 \times 4))$ désignent le même nombre ; on convient de supprimer les parenthèses et d'écrire ce nombre $5 \times 6 \times 4$. On l'appelle produit des trois nombres.

Cet exemple illustre le fait que la multiplication est associative.

...

4.5.3. Addition et multiplication

Exemple : calculer $(2 + 5)$ puis $((2 + 5) \times 3)$ c'est-à-dire (7×3).

Peut-on obtenir le même résultat d'une autre façon ?

On constate que ce nombre est le même que la somme

$((2 \times 3) + (5 \times 3)$ c'est-à-dire $(6 + 15)$

Cet exemple illustre une nouvelle propriété de ces opérations : la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Le fait de pouvoir désigner et calculer un nombre de plusieurs façons différentes, est une conséquence des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication que nous venons de signaler au passage : commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Il n'est nullement question de vouloir nommer de telles propriétés au niveau élémentaire. Mais il est important de faire en sorte que les enfants les utilisent de façon naturelle et familière, parce qu'elles sont à l'origine de tous les modes de calcul : calcul mental et techniques usuelles.

4.6. Techniques opératoires.

Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté.

Les techniques usuelles concernant les opérations doivent être parfaitement connues. Elles seront d'autant mieux acquises que les enfants, au lieu de les apprendre de façon purement mécanique, les auront découvertes par eux-mêmes comme synthèse d'expériences effectivement réalisées nombreuses et variées.

I - POURQUOI CE DOCUMENT ?

La présentation traditionnelle de la multiplication est fondée sur l'addition réitérée : disposant de n ensembles 2 à 2 disjoints ayant chacun p objets, on veut connaître le nombre d'objets de la réunion de ces ensembles. On a, dans ces conditions, $\underbrace{(p + p + \ldots + p)}_{n \text{ termes}}$ objets et l'on désigne ce nombre par le symbole <u>p x n</u>

Cette définition - ou plutôt cette introduction, au demeurant légitime - est-elle bien adaptée aux enfants du CE ?

I-1 Dans la définition évoquée ci-dessus, n et p ne se réfèrent pas à des "objets" de même nature. En effet, au niveau de la manipulation, n désigne le nombre des ensembles ayant chacun p objets. De même, au niveau numérique, p désigne le nombre qui est répété dans l'écriture "p + p + ... + p", tandis que n désigne le nombre des répétitions du symbole "p".

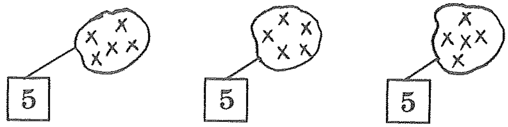
I-2 La remarque précédente a conduit à des abus. On a parfois imposé de substituer "n x p" à "p + p + ... + p" (et non pas "p x n") de façon à lire "n fois p", sans doute par référence à la phrase "il y a n fois p objets dans la situation concrète étudiée". Une telle convention est fâcheuse puisqu'une des propriétés de la multiplication est d'être commutative, en d'autres termes : quels que soient les naturels n et p, n x p = p x n.

I-3 Cette présentation de la mutiplication à partir de situations concrètes introduit des difficultés d'ordre perceptif chez le jeune enfant. Il doit en effet percevoir simultanément :

- des <u>collections</u> 2 à 2 disjointes (il y en a n)
- des <u>objets</u> (il y en p dans chaque collection et n x p en tout)
- des <u>correspondances 1 à 1</u> (pour s'assurer que les collections ont bien le même nombre p d'objets)

Pour que l'enfant conçoive la signification du symbole n x p, il est nécessaire qu'il perçoive simultanément trois types d'"objets" relativement complexes compte tenu de son âge : les objets concrets utilisés, les collections, les correspondances un à un. Il serait souhaitable d'éviter de telles difficultés perceptives.

I-4 Fonder la multiplication sur la réunion de collections disjointes conduit parfois à représenter les situations concrètes par des dessins du type :



Si l'on s'en tient à la représentation photographique de la situation concrète, cela est légitime. Mais si l'on souhaite dépasser le stade du dénombrement des objets de la réunion (5 + 5 + 5) et donner aux enfants un véritable outil d'exploration, alors ce type de représentation est peu efficace. On le verrait bien en essayant de visualiser une égalité telle que :

$$9 \times (8 + 5) = (9 \times 8) + (9 \times 5)$$

par des dessins analogues aux précédents. Par contre, si, conformément aux commentaires des programmes, on utilise des tableaux rectangulaires, alors l'égalité précédente peut se visualiser ainsi :

I-5 N'ayant pas de représentation bien adaptée au problème à étudier, il est inévitable, et on constate effectivement, dans les classes que l'étude de la multiplication se situe presque exclusivement au niveau des écritures. En fait, on essaie uniquement et le plus tôt possible de mettre en place une technique de calcul.

Dans ces conditions, on apprend à l'enfant le fonctionnement d'un langage dans son seul aspect syntaxique. Or l'enfant de cet âge est au stade des opérations concrètes. Dissocier l'élaboration du langage mathématique de l'activité manuelle, c'est aboutir à des blocages ou pour le moins à des incompréhensions profondes.

Ces réflexions issues de la pratique des classes conduisent à rechercher un autre point de départ d'ailleurs conforme aux commentaires des programmes. Le plan d'étude qui suit essaie de répondre à quatre conditions :

- lever les critiques formulées en I-1-2-3;
- engager l'activité manuelle et donner un outil - c'est-à-dire une représentation - bien adapté au problème étudié;

- permettre aux enfants, très tôt (dès le CE1), de "faire des multiplications"*
afin qu'en CE2 on puisse mener en parallèle un approfondissement de l'étude entreprise et de nombreuses activités de calcul;
- favoriser l'élaboration par les enfants eux-mêmes de techniques de calcul, techniques qu'ils pourront améliorer - pour réaliser une économie de temps et d'écriture - au fur et à mesure de leurs recherches.

II PREPARATION A L'ETUDE DE LA MULTIPLICATION

II-1 Etude de situations représentables par un tableau à double-entrée.

De telles situations, au demeurant bien connues, sont fréquemment utilisées dès le CP. Par exemple : cinq fillettes A, B, C, D, E et trois garçons L, M, N participent à un défilé et on examine les couples garçon - fille qu'ils peuvent constituer. Après avoir mimé la situation, on peut faire dessiner par les enfants les "photographies" des couples réalisables.

A partir de là, des questions vont apparaître :
- a-t-on dessiné tous les couples possibles ?
- quels sont les cavaliers possibles de A, de B, de C, ... ?
- quelles sont les cavalières possibles de L, de M, de N ?

Répondre à ces questions, c'est amorcer le classement des photos soit à partir des garçons (quelles sont les cavalières de L, puis de M, puis de N ?) soit à partir des filles (quels sont les cavaliers de A, puis de B, puis de C ... ?)

Or il se trouve que, dans cette situation, les deux classements peuvent apparaître grâce à une disposition convenable des photos.

A L	B L	C L	D L	E L
A M	B M	C M	D M	E M
A N	B N	C N	D N	E N

Au niveau du CP, c'est par tâtonnements successifs que les enfants parviennent à une telle disposition.

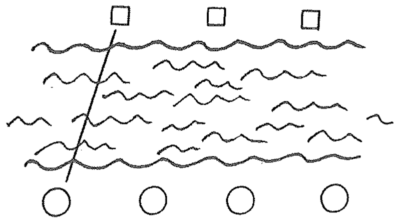
* *Pour le sens de cette expression, voir le début de* V.

Notons qu'il ne s'agit pas ici de mettre en place les concepts de couple et de produit cartésien. Ces notions sont inutiles et prématurées au niveau de la représentation en rectangle que l'on désire mettre en place.

Il est facile de trouver bien d'autres situations qui conduisent au même type de représentation : pochettes de crayons, mélanges de couleurs, habits de poupées, menus à deux plats, etc ... (il existe même des jeux de lecture qui utilisent des tableaux à double-entrée).

En voici une autre empruntée aux problèmes Nuffield série verte n°35 (OCDL)

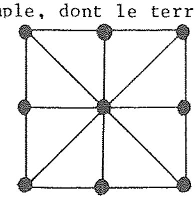
"Un ingénieur des téléphones doit poser des câbles à travers une rivière, reliant chacun des trois villages de la rive nord à chacun des quatre villages de la rive sud. Combien de câbles doit-il poser ?"



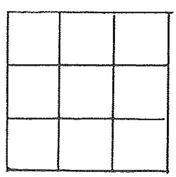
II -2 Introduction dans le milieu-classe de jeux sur damiers

De très nombreux jeux se jouent sur une grille carrée ou rectangulaire; citons pour mémoire : les mots croisés, la bataille navale, les dames, la marelle, les nombres croisés, les échecs, le go, les petits carrés, le taquin, etc ...

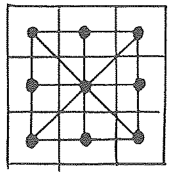
Certains de ces jeux se jouent sur les nœuds d'un réseau ; c'est le cas de la marelle, par exemple, dont le territoire est :



Mais on pourrait tout aussi bien jouer à la marelle sur une grille 3 x 3 :



Le dessin suivant montre comment on passe d'un territoire de jeu à l'autre.



Le but de ces jeux n'est pas la distraction seule. Ils développent la réflexion : "Si je fais telle chose, que va-t-il se passer ?". Par ailleurs, ils peuvent poser des problèmes intéressants : dénombrement, recherche de stratégies gagnantes, recherche de positions gagnantes contre toute défense, etc ...

En vue d'une introduction à la multiplication, ils ont un but plus modeste : faire percevoir par l'enfant qu'une grille rectangulaire est entièrement déterminée par la donnée du nombre de ses lignes et du nombre de ses colonnes.

III LE POINT DE DEPART DE LA MULTIPLICATION

Combien de cases une grille rectangulaire* à n lignes et p colonnes possède-t-elle ?

Il se peut que, par le biais des travaux évoqués en II, certains enfants se posent cette question et y apportent même des réponses (tout au moins partielles). C'est alors la part du maître que de susciter l'intérêt général à l'égard de ce problème.

Voici comment on peut envisager de répondre à cette question.

III-1 Exploration libre

Comme pour tout autre problème, l'étude va commencer par une phase de tâtonnement expérimental destinée à se familiariser avec la situation et à recueillir des informations qui seront organisées ultérieurement.

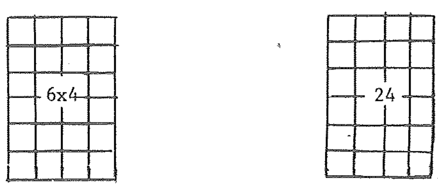
Les enfants auront donc à examiner des grilles de leur choix : nombres de lignes, de colonnes et de cases. Pour que cette exploration engage effectivement l'action, on n'omettra pas de fournir des outils aux enfants :

- papier quadrillé (carrés d'environ 1cm de côté);
- ciseaux pour découper les grilles examinées.

Puis on incitera les enfants à noter au recto les "dimensions" de la grille, au verso le nombre de cases; par exemple :

RECTO VERSO

ou encore



**Les grilles carrées ne sont évidemment pas exclues.*

Le nombre des cases de chaque grille (15 ou 24 dans les exemples précédents) est obtenu à ce stade

- soit en comptant les cases une à une;
- soit en additionnant les nombres de cases par ligne:

  $5 + 5 + 5 = 15$ ou $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$
- soit en additionnant les nombres de cases par colonne:

  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ ou $6 + 6 + 6 + 6 = 24$

Remarque sur le symbole nxp, où n et p désignent deux naturels

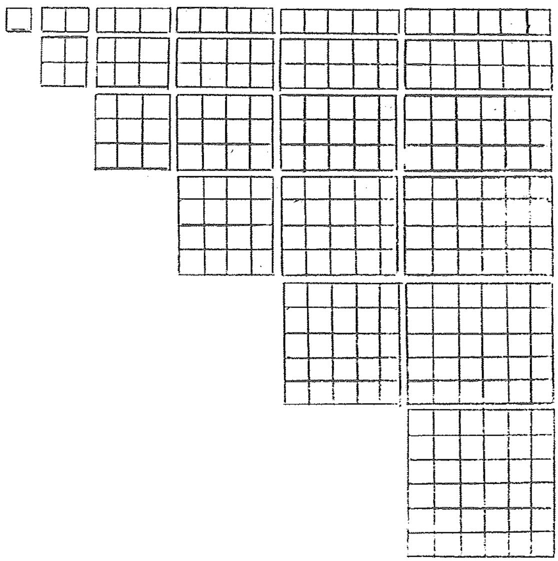
Dans cette phase exploratoire, on constate que le nombre des cases d'un damier ne dépend que du nombre n des lignes et du nombre p des colonnes.
Cela justifie que le symbole nxp désigne le nombre des cases du damier.

Ce sens attribué au symbole nxp est d'ailleurs bien celui qu'on utilise dans la vie courante lorsqu'on parle de photos 13x18, de pellicule 24x36, de papier 21x29,7, de carreaux de céramique 10x10, de vitre 50x100, de portes 120x210, etc ...

III-2 Phase de synthèse

La phase exploratoire individuelle évoquée ci-dessus débouche sur une mise en commun des résultats obtenus et des remarques suscitées par la manipulation. C'est à ce niveau qu'interviennent, en général, les classiques activités de classement et de rangement. Elles devraient, ici, conduire à organiser la collection de grilles le plus régulièrement possible.

Parmi les nombreuses organisations que l'on peut envisager, en voici une :



On peut prévoir, à priori, qu'il y aura des "trous" dans l'organisation choisie quelle qu'elle soit (grilles non découpées, oublis). C'est le fait d'organiser (et donc la disposition choisie) qui les fera apparaître, renvoyant ainsi les enfants à la manipulation. C'est peut-être au cours de cette phase que les enfants seront naturellement conduits à deviner, à prévoir, le nombre des cases d'une grille nouvelle.

Notons enfin que l'organisation dessinée ci-dessus est le premier état de la table de multiplication (ne pas oublier que les damiers portent au recto 3x5, 4x6, etc ... et au verso 15, 24, etc ...)

III-3 Quelques constatations

Les phases III-1 et III-2 doivent conduire les enfants à énoncer un certain nombre de remarques parmi lesquelles on pourrait trouver :

- pour chaque choix des naturels n et p, on constate que

  $$n \times p = p \times n$$

- à propos des grilles de la première ligne on peut dégager l'égalité

  $1 \times n = n \times 1 = n$ où n désigne un naturel ;

- le nombre des cases des grilles de la première ligne augmente régulièrement de 1.

  Pour la deuxième ligne, ce nombre augmente régulièrement de 2.

  Pour la troisième ligne, il augmente de 3, etc ...

- en ce qui concerne les grilles carrées, le nombre de leurs cases augmente de 3, puis de 5, de 7, de 9, ...

- ...

Toutes ces remarques examinées avec soin seront l'occasion de poursuivre une exploration peut-être mieux organisée qu'au début. En particulier, pour s'assurer que ces remarques ont un caractère général, les enfants seront tentés d'examiner des grilles de plus en plus grandes. C'est alors qu'ils seront contraints d'inventer des procédés de dénombrement plus économiques et en même temps plus efficaces que ceux dont ils disposaient jusqu'à présent (cf III-1).

IV UN PREMIER BILAN

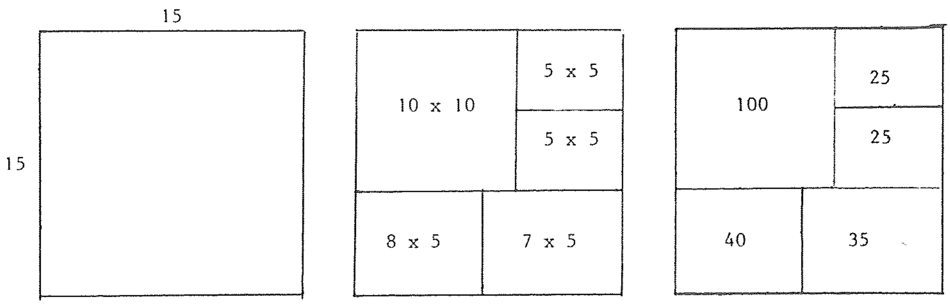
Ce qui précède (qui pourrait constituer un premier temps dans l'étude de la multiplication) doit donner aux enfants :

- la possibilité d'utiliser, soit les objets de la manipulation, soit le langage de la multiplication ; de façon plus précise, toute étude de grilles peut se traduire en symboles nxp et réciproquement l'utilisation des symboles renvoie aux grilles;

- une organisation des grilles qui est une approche de la table de multiplication et qui conduit à des remarques intéressantes (cf III-3);
- une liste d'égalités (3x5 = 15, 4x6 = 24, etc ...) concrétisées par les grilles : voir III-1.

Un prolongement naturel à ces activités pourrait être le suivant : supposons que le tableau de III-2 s'arrête à 12x12; paver avec les grilles étudiées une grille dont l'une au moins des dimensions est supérieure à 12.

Par exemple :



15 x 15 = 100 + 24 + 25 + 35 + 40

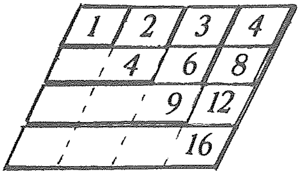
15 x 15 = 225

A propos de ce type d'activité, consulter l'annexe I ci-dessous.

Un affichage indispensable :

Ayant disposé les grilles côte à côte comme en III-2 (jusqu'au damier 12x12 pour fixer les idées), dispersera-t-on les damiers en fin de séance ou conservera-t-on avec soin l'organisation réalisée ? Détruire cette organisation serait regrettable puisqu'on perdrait ainsi les résultats d'un travail qui peut avoir donné du mal. Pour la conserver, une possibilité s'offre : l'affichage. C'est peut-être encore une fois la part du maître que de coller sur un grand papier les grilles disposées comme en III-2.

Un petit exercice pour le lecteur : quelle sera la taille de l'affiche ? Si on la tient pour trop grande on peut utiliser l'idée suivante : au lieu de disposer les grilles côte à côte, les superposer (on pourrait alors écrire en bas à droite le nombre des cases de façon qu'il reste visible après superposition).



Grilles empilées
et collées

1	2	3	4
	4	6	8
		9	12
			16

Les grilles empi-
lées et collées
vues de dessus.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

... après recopiage
sur une feuille de papier

Chaque enfant pourrait d'ailleurs empiler et coller ses propres grilles, c'est-à-dire construire (au sens propre) sa table de multiplication.

V L'IDEE FONDAMENTALE : ASSEMBLER DES GRILLES

Il s'agit, maintenant, de dépasser la phase exploratoire et de permettre aux enfants de "faire des multiplications", c'est-à-dire de résoudre le problème suivant : un naturel étant désigné par le symbole nxp, donner son écriture chiffrée dans le système de numération décimale.

Par exemple : 12x17 désigne un naturel, quelle est l'écriture chiffrée de ce naturel en numération décimale ?.

A ce propos il est essentiel que les enfants sachent que l'écriture chiffrée d'un naturel dans un système de numération est une abréviation.

Exemples :

327 en système décimal est l'abréviation de (3x100) + (2x10) + 7

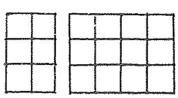
4231 en système à base CINQ est l'abréviation de (4x1000)+(2x100)+(3x10)+1.

C'est un fait que les enfants ignorent et c'est probablement l'une des causes de leurs difficultés en calcul.

V-1 Des assemblages

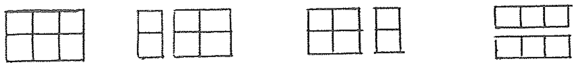
Certaines grilles peuvent être assemblées bord à bord de façon à donner une grille ; d'autres non.

Exemple : une grille 2x3 et une grille 3x4 convenablement assemblées donnent une grille 3x6 :



Contre-exemple : une grille 3x3 et une grille 2x4 ne peuvent être assemblées bord à bord pour former une grille rectangulaire.

Réciproquement, à l'exclusion de la grille 1x1, toute grille est décomposable (de plusieurs façons en général) en deux grilles bord à bord.

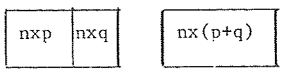


L'origine de cette idée pourrait être trouvée :

- dans l'examen des différences par ligne dans la table (cf III-3) ; par exemple à la ligne 3 : $3\underbrace{\quad}_{3}6\underbrace{\quad}_{3}9\underbrace{\quad}_{3}12\underbrace{\quad}_{3}15\underbrace{\quad}_{3}18\ \dots$
- au cours de travaux de découpage et d'assemblage menés à d'autres occasions (sur le thème des puzzles, par exemple);
- ou tout simplement être introduite par le maître si les enfants n'y pensent pas.

V-2 Deux traductions de cette constatation

V-2-1 A l'aide de grilles.



RECTO VERSO

On pourrait réaliser une collection de telles grilles, n, p, q ayant, bien sûr, des valeurs numériques liées aux grilles étudiées.

V-2-2 Au niveau des symboles.

Réalisation d'un répertoire d'égalités du type :

$$n \times (p + q) = (n \times p) + (n \times q)$$

Exemples :

$$5 \times 8 = (5 \times 3) + (5 \times 5)$$

$$15 \times 13 = (7 \times 13)+(8 \times 13)$$

La mise en place de cette propriété est le temps fort du canevas d'étude proposé dans ce document.

Note sur l'usage des parenthèses :

Au niveau du CE1, un symbole tel que 2 + 3 x 4 est susceptible de recevoir deux significations. Il pourrait désigner :

- soit le naturel vingt (2 + 3 x 4, 5 x 4, 20)
- soit le naturel quatorze (2 + 3 x 4, 2 + 12, 14)

On ne peut tolérer une telle ambiguïté dans le langage mathématique, sous peine d'incohérence et d'erreurs graves.

Pour indiquer laquelle des deux opérations est prioritaire sur l'autre, on utilise des parenthèses.

Ainsi en numération décimale :

(2 + 3) x 4 désigne le même naturel que <u>20</u>; (2 + 3) x 4 = 20

2 + (3 x 4) désigne le même naturel que <u>14</u>; 2 + (3 x 4) = 14

Pour alléger les écritures, on convient qu'en l'absence de parenthèses la multiplication est prioritaire sur l'addition, ce qui conduit aux égalités suivantes :

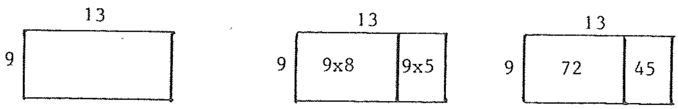
$$2 + 3 \times 4 = 14$$
$$(2 + 3) \times 4 = 20$$

Ces règles sont universellement adoptées.

V-3 Exploitation

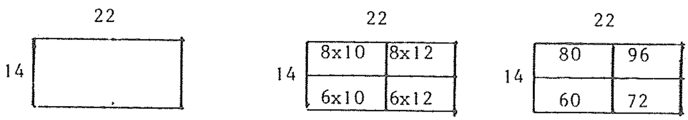
L'assemblage des grilles permet d'obtenir de nouvelles égalités sans recourir aux procédés de dénombrement qu'on utilisait jusqu'à présent.

Pour fixer les idées, supposons qu'on n'ait pas encore étudié de grille dont l'une des dimensions dépasse 12 et qu'on s'intéresse à une grille 9x13. Un découpage convenable de la grille permet d'utiliser des égalités enregistrées antérieurement :



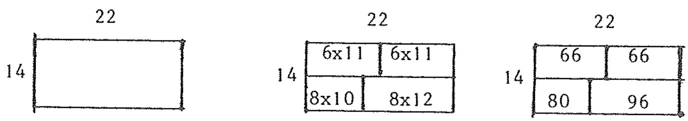
72 + 45 = 117
9 x 13 = 117

Voici un autre exemple :



176+132 = 308
140+168 = 308
14 x 22 = 308

Des enfants pourraient évidemment proposer d'autres types de découpage (voir IV):



132+176 = 308
146+162 = 308
14 x 22 = 308

Le choix d'un découpage se fait par référence aux résultats déjà enregistrés dans la table et ne rend pas nécessairement compte de ce que les mathématiciens appellent distributivité de la multiplication sur l'addition.

Puisque le découpage d'un rectangle en sous-rectangles n'est pas unique, il est tout indiqué de laisser l'enfant libre de choisir son découpage. On aura ainsi l'occasion de comparer plusieurs découpages d'un même rectangle et de recenser les égalités numériques qui leur sont associées.

Le travail mené ici, dans le cadre de la multiplication, prépare l'étude des aires.

De proche en proche, la propriété présentée en V-2-2 permet d'étendre assez loin la table de multiplication et par contre-coup d'introduire la question : jusqu'où aller ? ou plutôt : où s'arrêter ? (voir ci dessous VII)

La table ainsi obtenue peut conduire à des remarques constituant le point de départ d'autres travaux (étude des multiples d'un naturel, opérateurs, etc...)

VI UN TEMPS DE MATURATION

On sait que l'apprentissage n'est ni linéaire (ce qui modifie la notion de progression où les idées se suivent les unes les autres) ni cumulatif (ce qui détruit l'idée qu'il suffirait de faire plusieurs fois la même opération pour maîtriser cette opération).

La phase décrite en V peut donc déboucher sur un temps d'arrêt. D'ailleurs il faut également penser que les enfants ont des vitesses d'acquisition différentes qui doivent se manifester au cours d'une démarche voisine de celle proposée dans ce document, car le maître y intervient plus pour poser des problèmes (début de III et V-1), fournir des outils, guider et aider chaque enfant, organiser des moments de synthèse que pour exposer lui-même les résultats.

Les propositions qui suivent ont un triple but :

- ménager un temps de maturation;
- permettre aux enfants en retard de rattraper les autres sans faire piétiner ceux-ci;
- créer les conditions de la mémorisation des résultats de base sans recourir systématiquement à la récitation.

Le moyen d'y parvenir : fournir de nombreuses occasions de calculer sans retomber dans la monotonie des trois ou quatre multiplications quotidiennes.

Voici quelques suggestions :

1) Jeu de Pythagore : voir annexe II
2) Loto multiplicatif : voir annexe III
3) Réglettes de Neper : voir annexe IV
4) Des "multiplication à trous" simples ; par exemple :

$$\begin{array}{r} 2\ .\\ \underline{\ \ 3}\\ .\ 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} .\ .\\ \underline{\ \ 5}\\ 5\ 5 \end{array} \quad \text{etc ...}$$

5) Des problèmes simples de dénombrement
6) Observer

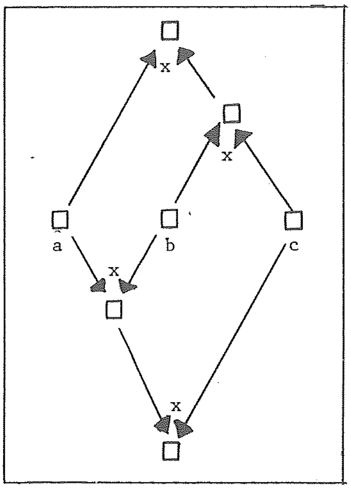
7) Un dessin à observer :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dans ce dessin, a et b désignent évidemment des naturels.

8) Une propriété importante: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Ni les damiers ni la présentation traditionnelle de la multiplication ne permettent une approche concrète de cette propriété. On peut utiliser l'idée suivante :



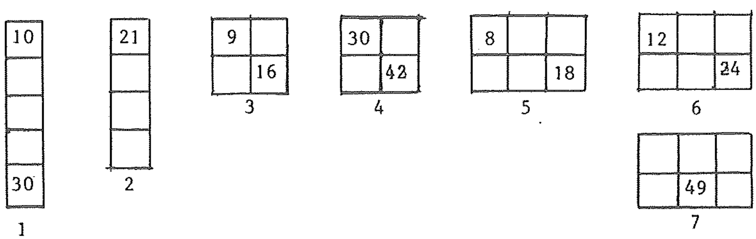
Il est facile de reproduire le dessin ci-contre sur un carton fort puis de recouvrir celui-ci d'une feuille de plastique transparent (adhésif ou scotché au dos du carton).

On écrit, dans les cases a, b, c, trois naturels de son choix et l'on remplit les cases vides de proche en proche en suivant les consignes. Si l'on n'a pas commis d'erreur, on doit trouver le même naturel dans les cases du haut et du bas.

On peut alors effacer (grâce à la feuille de plastique) et recommencer. Cinq à six tablettes de ce genre permettraient à des enfants de travailler seuls puisque l'exercice proposé est auto-correctif.

Pour d'autres idées de travail : piller les manuels existants et plus généralement tous les livres (manuels de 6e, de 5e, etc ...)

9) Connaissez-vous vos tables ? (inspiré d'un article paru dans Mathematics teaching n°62). Voici des extraits de la table de multiplication :



Il s'agit pour vous de remplir les cases blanches.

Si vous trouvez ces tests trop faciles, essayez les suivants : au test 4 vous devriez avoir trouvé deux réponses; alors

- placez deux nombres dans cette grille : de façon qu'il y ait deux réponses.

- inventez une question pour cette grille: qui admette : a) trois réponses
  b) quatre réponses

Après cela, que signifie pour vous : "savoir ses tables" ?

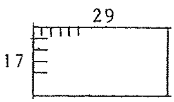
VII INTERVENTION DE LA BASE DU SYSTEME DE NUMERATION

En V-3 est décrite une manière de "faire des multiplications" extrêmement souple, puisque chacun a le choix de son découpage, mais qui devient pénible à mesure que les nombres (de lignes et de colonnes) augmentent.

La remarque faite au début de V va permettre d'optimiser le procédé, c'est-à-dire d'aller plus vite parce que plus mécaniquement.

L'idée consiste à utiliser le fait que 17, 29, 253, etc sont des abréviations de 10 + 7 2 x 10 + 9 2 x 100 + 5 x 10 + 3 etc

Exemple : 17 x 29



	10	10	9
10	100	100	90
7	70	70	63

290 + 140 + 63 = 493
170 + 170 + 153 = 493
17 x 29 = 493

Ici, à l'exclusion de 7 x 9, les cases se remplissent mécaniquement puisque multiplier 7 par 10 revient à écrire un zéro à droite de 7.

Comment mettre en place cette propriété ?

C'est un retour sur les règles de la numération qui fournit la réponse.

10 x 10	10 dizaines	1 0	100
10 x 100	10 centaines ou 100 dizaines	1 0 1 0 0	1 000
100 x 100	100 centaines	1 0 0	10 000
10 x 20	20 dizaines	2 0	200
30 x 100	30 centaines	3 0	3 000

On passera ensuite à l'examen de produits tels que 20 x 300 :

	100	100	100
20	2000	2000	2000

D'où 20 x 300 = 3 x 2000

et compte tenu de ce qui précède

20 x 300 = 6000

De proche en proche on dégage ainsi la règle bien connue :

$$(a \times 10^n) \times (b \times 10^p) = a \times b \times 10^{n+p}$$

ou sur un exemple :

300 x 7000 = 2 100 000

Cette propriété a au moins deux conséquences :

1) On va, désormais, tenir compte des chiffres utilisés dans l'écriture des naturels dont on cherche le produit.

Exemple : 253 x 17

	200	50	3
10	2000	500	30
7	1400	350	21

2530 + 1771 = 4301

3400 + 850 + 51 = 4301

253 x 17 = 4301

2) On peut se contenter, en système décimal, d'une table de multiplication limitée à $9^2 = 81$, ce qui ne fait jamais que 38 résultats à mémoriser. (pourquoi 38 ?)

VIII REFLEXION SUR LES TECHNIQUES OPERATOIRES

Il apparaît qu'actuellement l'école élémentaire privilégie et introduit prématurément une technique opératoire au détriment de l'étude de la multiplication proprement dite.

Certes, il faut que les enfants sachent calculer, mais faut-il qu'ils apprennent une technique sans rien y comprendre (nous n'hésitons pas à dire que c'est le cas actuellement)? Ne peut-on pas, par des activités judicieusement choisies, leur donner l'occasion d'élaborer par eux-mêmes telle ou telle technique ?

Mais, tout d'abord, qu'est-ce qu'une technique opératoire? S'il s'agit d'écrire le produit de deux naturels, disons 354 et 426, on dispose du symbole 354 x 426. Mais il se trouve que dans certains problèmes ce symbole n'est pas facile à utiliser et qu'on ait besoin de l'écriture chiffrée de ce produit en système décimal, c'est-à-dire de 150 804. C'est alors qu'intervient une technique opératoire qui apparaît donc comme un procédé permettant de substituer telle représentation d'un naturel à telle autre.

Existe-t-il une seule technique opératoire associée à la multiplication ? La réponse est évidemment non ; ainsi on ne procèdera pas de la même façon pour calculer 26 x 19 et 26 x 15 (surtout si l'on calcule "de tête" comme on dit)

On trouvera ci-dessous en VIII -6 la technique couramment enseignée à l'Ecole Elémentaire mais replacée dans la chaîne des techniques disponibles. On constatera ainsi que son mérite est de réaliser une économie de pensée, de temps et d'écriture mais qu'en contrepartie elle soumet la mémoire à rude épreuve (si l'adulte n'en est plus conscient, les enfants le savent bien).

Par ailleurs, des études historiques montrent que de tout temps les hommes ont calculé mais qu'ils l'ont presque toujours fait en utilisant des machines (voir plus loin l'annexe V).

Reconstituons donc la chaîne des techniques :

<u>VIII -1 Calcul de a x b par additions successives</u> : a + a + a + ... + a

ou b + b + b + ... + b

(voir III-1)

<u>VIII -2 Différences tabulaires (cf III-3 et VI -6)</u>

C'est ce qu'on appelait - et qu'on appelle encore parfois - la table de 6, par exemple :

1	2	3	4	5	6	...
6	12	18	24	30	36	...

différences : 6 6 6 6 6

<u>VIII -3 Découpages de rectangles</u> (cf V-2 et V-3)

<u>VIII -4 Découpage décimal</u> (cf VII)

354 x 426

	400	20	6	
300	120 000	6000	1800	127 800
50	20 000	1000	300	21 300
4	1 600	80	24	1 704
	141 600	7080	2124	150 804 = 354 x 426

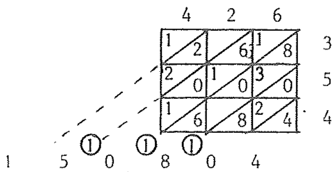
Cette technique est efficace et d'une grande simplicité ; néanmoins, l'écriture des zéros est fastidieuse, ce qui conduit aux améliorations VIII -5 et VIII -6.

VIII -5 Technique "per gelosia" encore appelée "multiplication musulmane" ou "multiplication à la grecque". Cette technique, probablement hindoue, était connue au Moyen-âge (XI -XII siècle) mais d'un très petit nombre de gens.

Ce n'est rien d'autre que VIII -4, mais avec une disposition graphique ingénieuse évitant l'écriture des zéros.

Voici le tableau de calcul permettant d'établir l'égalité :

426 x 354 = 150 804



Cette technique est remarquable pour au moins quatre raisons :

- aucun ordre n'est imposé au calcul des produits partiels;
- la mémoire intervient peu ; on peut s'arrêter en cours de route et continuer ultérieurement sans avoir tout à refaire;
- une erreur est très facile à détecter;
- contrairement à la disposition classique, il n'y a pas de retenue à mémoriser ; on diminue donc les risques d'erreur.

Remarque: à propos de cette technique, consulter l'annexe I.

VIII -6 Technique "à l'italienne" due à Léonard de Pise dit Fibonacci (1180-1225) et actuellement enseignée à l'école élémentaire. C'est en fait une amélioration de VIII-5 ainsi que le montrent les représentations ci-dessous qui dispensent de tout commentaire.

	400	20	6	
300	120 000	6 000	1800	127 800
50	20 000	1 000	300	21 300
4	1 600	80	24	1 704
				150 804

426
354
127 800
21 300
1 704
150 804

426
354
1704
2130
1278
150804

Remarque : Soulignons que, pour maîtriser la technique "à l'italienne" proprement dite, il faut disposer d'une mémoire très fidèle et d'une bonne résistance à la fatigue. En effet, tandis qu'en VIII -5 on utilise d'abord la table de multiplication puis ensuite la table d'addition, en VIII -6, on utilise alternativement l'une et l'autre des deux tables sans oublier les fameuses retenues. De plus, en VIII -6, il faut retenir les positions des chiffres utilisés dans le calcul des produits partiels et décaler ceux-ci convenablement. A partir de quel âge un enfant est-il capable d'une telle virtuosité ? (consulter l'annexe I, en particulier le dernier paragraphe de "Algorithme de la multiplication")

VIII -7 "La multiplication de l'an 2000"

Il est facile de "perfectionner" la technique à l'italienne en faisant encore plus appel à la mémoire : il suffit de s'entraîner à ne pas écrire les produits partiels. On donne ainsi directement le produit - de même que pour l'addition on donne directement la somme.

Ainsi on écrira :

426
354
150 804

Voici les étapes du calcul :

426	426	426	426	426
354	354	354	354	354
24	24	404	4804	3804
	8	16	20	12
	30	18	6	15
	40	10	30	
		48		

Au dessous de la barre principale les seuls nombres que l'on écrit sont ceux qui sont entourés ; tous les autres sont additionnés de tête. Avec de l'entraînement on y parvient si les nombres à multiplier n'ont pas trop de chiffres, mais c'est fatigant.

VIII -8 L'emploi de machines constitue l'amélioration définitive.

On constate que dans tous les métiers où l'on calcule beaucoup, on les utilise, de même qu'on l'a toujours fait au cours de l'histoire (abaques, bouliers, machine de Pascal, etc ...)

Voir à ce propos les annexes IV et V.

VIII -9 La multiplication "à la russe"

Soit à calculer les produits : 12 x 26 et 9 x 21. Dans une colonne on double, dans l'autre on divise par deux ; puis on raye les lignes correspondant à un nombre pair dans la colonne où l'on a divisé. Reste à additionner les nombres non rayés de la colonne où l'on a multiplié:

~~12~~	~~26~~
24	13
~~48~~	~~6~~
96	3
192	1
312	

ou

~~26~~	~~12~~
~~52~~	~~6~~
104	3
208	1
312	

9	21
~~18~~	~~10~~
36	5
~~72~~	~~2~~
144	1
189	

ou

21	9
~~42~~	~~4~~
~~84~~	~~2~~
168	1
189	

Cette technique a l'énorme avantage de ne nécessiter que la table de 2.

VIII-10 La "multiplication à la russe" est à rapprocher de la technique dite de DUPLICATION déjà connue des Egyptiens.

Soit à calculer 26 x 12.

· 1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
⋮	

(1)

On établit la table de "multiplication par 12" en ne considérant dans la première colonne que les puissances de 2.

Il suffit alors de décomposer 26 en somme de puissances de 2 (ce qui revient à l'écrire en base DEUX). Ainsi :

$26 - 16 = 10$

$10 - 8 = 2$ $\qquad 26 = 16 + 8 + 2$

et $26 \times 12 = 192 + 96 + 24$

soit $26 \times 12 = 312$

Notons que la réalisation de tableaux tels que (1) ne suppose connue aucune technique de multiplication par 2 ; on double à chaque fois le résultat de la seconde colonne de la façon suivante :

$12 + 12 = 24$

$24 + 24 = 48$

etc ...

IX QUELQUES PROBLEMES MULTIPLICATIFS

Depuis le début de l'étude de la multiplication les enfants sont en mesure d'écrire le produit de deux nombres sous au moins deux formes :

- soit n x p (6 bonbons à 5 centimes pièce coûtent 6 x 5 centimes);
- soit sous forme chiffrée (6 bonbons à 5 centimes pièce coûtent 30 centimes).

Insistons une fois de plus sur le fait que des écritures telles que 6 x 5, 12 x 56, n x p en général, désignent par définition un naturel ; elles n'imposent pas de"faire la multiplication". De même qu'on apprend aux enfants le sens et l'orthographe des mots de leur langue maternelle, il y a lieu de ne pas dénaturer la définition et le sens des symboles utilisés en mathématiques. Faire croire aux enfants que 12 x 56 est l'indication d'un calcul à faire c'est :

1) leur apprendre quelque chose de faux;

2) hypothéquer leurs démarches ultérieures dans le domaine du calcul. En effet dans bien des problèmes il est maladroit d'effectuer mécaniquement les calculs indiqués (exemple : la multiplication des fractions) et tout au contraire il faut souvent remplacer une écriture chiffrée par une écriture sous forme de produit (d'où les

exercices de factorisation du 1er cycle).

3) ne pas s'en tenir à l'usage de la vie où, lorsqu'on s'intéresse à un objet pour sa surface (vitres, papiers, carrelages, terrains, etc ...) on exprime le plus souvent la forme et les dimensions (papier 21 x 27, pellicules photographiques 24x36 ou 6x6, etc ...)

Ces remarques ne veulent pas dire qu'on ne fera plus de multiplications, bien au contraire. Il s'agit d'en faire beaucoup mais à bon escient. Pour cela il faut ouvrir l'éventail des problèmes que l'on offre aux enfants.

Voici quelques pistes à explorer :

IX-1 Observer des tables de multiplication.

Sur différentes tables limitées à 5x5, à 9x9, à 12x12, à 15x15, etc ...

- Observer les naturels qui figurent sur une ligne, sur une colonne, sur les diagonales, sur d'autres alignements. Faire des remarques ; par exemple : examiner les différences entre les naturels, les chiffres des unités, etc ... Essayer de justifier ces remarques.

- Colorier les cases où figurent des nombres pairs, ou bien des multiples de 3, ou de 7, ... comparer les coloriages.

- Choisir dans la table quatre cases qui soient les sommets d'un rectangle. Calculer les produits en croix (suivant les diagonales). Constatation ? Est-ce général ? Comment justifier ce fait ?

- Calculer la somme des naturels qui sont écrits dans chaque ligne, dans chaque colonne, dans chaque diagonale, dans chaque ligne parallèle aux diagonales, dans d'autres alignements. Quelle liste de nombres obtient-on ? Examiner les différences. Expliquer.

- Calculer la somme des naturels écrits dans une table. Trouver différentes façons de calculer cette somme. Comparer les sommes obtenues pour différentes tables.

- Choisir un nombre, 24 par exemple : colorier les cases où il apparaît dans une table 24 x 24. Recommencer avec d'autres nombres. Remarques. Justification. Prolongements.

- Dans une table donnée, 9 x 9 par exemple, trouve-t-on tous les naturels de 1 à 81? Pourquoi n'y sont-ils pas tous ? Que dire de ceux qui y figurent une fois, deux fois, etc ... Quels sont ceux qui y apparaissent le plus grand nombre de fois ?

- Trouver d'autres sujets d'observation. Les exploiter.

IX-2 Table des multiples d'un nombre

Extraire des tables les tableaux de nombres que l'on appelait autrefois tables de 2, de 3, de 4, etc ...

Par exemple :

1	2	3	4	5	6	...
9	18	27	36	45	54	...

Faut-il s'arrêter à 9x9 ? Pourquoi ?

Ecrire les cinquante premiers multiples de 9.

Observer les différences entre les multiples de 9.

Observer les chiffres des unités.

Rayer le chiffre des unités des multiples de 9 pour ne conserver que le nombre des dizaines - remarques.

A chaque multiple de 9, associer la somme de ses chiffres ; le produit de ses chiffres ; remarques.

La somme de deux multiples de 9 est un multiple de 9. Qu'en est-il vis-à-vis du produit?

Même démarche à propos d'autres ensembles de multiples.

IX-3 Tables des carrés, des cubes , ...

Observer la diagonale descendante gauche-droite d'une table de multiplication ; extraire ainsi la table des carrés.

1	2	3	4	5	6	7	...
1	4	9	16	25	36	49	...
3	5	7	9	11	13		
2	2	2	2	2			

- Où faut-il l'arrêter ? Pourquoi ?
- Observer les différences entre les carrés; constatation; essayer de justifier ; pensez à utiliser des grilles (cf VI-7).
- Trouver des représentations graphiques de la table des carrés, les observer ; remarques.
- Observer les chiffres des unités, les chiffres des dizaines, etc ...
- Le produit de deux carrés est-il un carré ?
- Prolonger la table des carrés jusqu'à 50^2 ; jusqu'à 100^2.

Construire la table des cubes, mener des observations analogues à celles suggérées ci-dessus.

Ecrire l'une au-dessous de l'autre la liste des naturels de 1 à 9, la liste des chiffres des unités de leurs carrés, puis de leurs cubes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	6	5	6	.	.	.
1	8	7	4	.	.	.	.	.

Continuez - que constatez-vous ?

IX-3 Ayant choisi deux naturels, comment faire pour prévoir le nombre des chiffres de leur produit sans faire le calcul?

IX-4 Une curieuse propriété : choisir un naturel, par exemple 324 ; calculer la somme des carrés de ses chiffres: $3^2 + 2^2 + 4^2$ soit 29.
Puis avec 29 recommencer ; on obtient 85 et ainsi de suite.
324 —— 29 —— 85 —— 89 —— 145
A moins que ce procédé ne conduise au naturel 1 (qui, évidemment, se reproduira indéfiniment) il conduit inévitablement au naturel 145 - Pourquoi ?

IX-5 Un pari à coup sûr : Faire choisir quatre naturels consécutifs : par exemple : 23, 24, 25, 26. Faire calculer le produit des extrêmes 23x26 et le produit des moyens 24x25. Parier alors que la différence entre ces deux produits est 2. Pourquoi peut-on parier à coup sûr ?
Trouver des variantes.

IX-6 Labyrinthe multiplicatif : il s'agit de compléter un extrait d'une table de multiplication. Par exemple :

					9
3	18				
			45		81
		8		17	
			35		
				34	

On peut ainsi construire des tableaux
- qu'on ne peut compléter que d'une façon;
- qu'on peut compléter de plusieurs façons;
- qu'on ne peut plus compléter au-delà d'une certaine étape, soit qu'on manque d'information, soit que certaines informations soient contradictoires.

IX-7 Tous les exercices à trous

```
     x x x
     x 2 x
     -----
     x x x
   x x x x
   x 8 x
 -----------
 x x 9 x 2 x
```

```
       A B C
       B A C
       -----
     x x x x
     x x A
 x x x B
 -----------
 x x x x x x
```

```
         M A T H
         M A T H
         -------
       x x x x x
     x x x x x
   x x x x x
 x x x x x
 ---------------
 x x x x M A T H
```

```
     x x x
     x x x
     -----
     x x x
   x x x
 x x x
 ---------
 x x x x x
```

chaque chiffre de 0 à 9 est utilisé 2 fois et 2 fois seulement.

IX-8 De la commutativité

Chacun sait que 2 x 3 = 3 x 2 ou que 15 x 237 = 237 x 15

Mais voici plus joli : 64 x 69 = 96 x 46 ou 24 x 63 = 36 x 42

Y-a-t-il d'autres naturels qui conduisent à des égalités du même genre ?

Pouvez-vous les trouver tous ?

IX-9 Pour numéroter les 157 pages d'un livre, un imprimeur a besoin de combien de caractères ? Pour numéroter les pages d'un livre, un imprimeur a utilisé 963 caractères ;le livre a combien de pages ?

IX-10 Trouver d'autres thèmes de problèmes (consulter les manuels scolaires de tous niveaux, les livres de divertissements mathématiques, les rubriques de jeux de revues, etc ...).

X AU-DELA DE LA MULTIPLICATION PROPREMENT DITE

Tout ce qui précède est spécifiquement centré sur l'étude de la multiplication et essaie de décrire l'enchaînement des idées essentielles sans qu'il y ait de saut brutal de l'une à l'autre. Ce n'est pas une description du contenu à enseigner dans une ou plusieurs classes données mais plutôt le schéma de l'itinéraire que pourraien suivre les enfants entre le CE1 et la classe de 5e.

D'autres thèmes liés directement à la multiplication peuvent être introduits à certaines étapes de l'étude proposée ci-dessus. Ce sont :

X-1 L'étude des équations associées à la multiplication :

- Trouver le naturel b tel que axb = p où a et p sont deux naturels donnés. Ce problème est souvent concrétisé par des situations de partage.
- Trouver deux naturels a et b tels que axb = p où p est un naturel donné. Ce problème se concrétise de la façon suivante : rechercher toutes les grill ayant un nombre p donné de cases (et plus tard : rechercher les rectangles d'aire donnée).

X-2 Etude des multiples d'un nombre et ses prolongements : proportionnalité, pourcentages, etc ...

X-3 Etude des diviseurs d'un nombre

X-4 Divisibilité - P.G.C.D. - P.P.C.M. - Nombres premiers.

X-5 Division

Ces différents thèmes riches de prolongements entretiendront les "acquisitions multiplicatives, les affineront et renverront en fait à la multiplication pour approfondissement.

atelier de pédagogie

activités mathématiques

maîtres du cycle élémentaire
mercredi 14 novembre 1973 ; 10 h - 10 h 30
vendredi 16 novembre 1973 ; 17 h 50 - 18 h 20 (deuxième diffusion)

TÉLÉVISION

RÉPERTOIRE MULTIPLICATIF

Cette émission présente un moment de l'apprentissage de la multiplication au C. E. 1*. Une seconde émission traitera de la suite de cet apprentissage.

Il s'agit pour les enfants d'établir par divers moyens — qui ne leur sont pas fournis — des égalités du type : « $a \times b = c$ », certaines de ces égalités leur sont connues et constituent un répertoire disponible.

« $a \times b$ » est manipulé par les enfants comme la désignation d'un cardinal ($a \times b = card\ (A \times B)$), « c » est la désignation de ce cardinal dans l'écriture décimale, que nous appellerons écriture canonique. Ici la situation fournit « $a \times b$ » et les enfants cherchent « c » par les moyens qui leur sont les plus économiques.

L'ÉMISSION

Première partie : découverte des découpages (recours à une partition de $A \times B$).

Les élèves, par équipes, disposent d'un tableau quadrillé, dont ils doivent donner le nombre de cases sous la forme $a \times b$ et sous la forme canonique, et ceci, si possible, sans compter les cases une à une.

Un répertoire est écrit au tableau :

$7 \times 6 = 42$;	$5 \times 6 = 30$
$4 \times 3 = 12$;	$4 \times 8 = 32$
$5 \times 10 = 50$;	$5 \times 2 = 10$

Le répertoire proposé

* Au mois de décembre 1972, à l'école Lakanal de Périgueux.

Chaque équipe doit expliquer comment elle obtient son résultat.

Le tableau proposé est de 6×27 cases. Les explications s'appuient sur une description telle que la suivante :

6×5	6×5	6×5	6×5	6×5	6×2
30	30	30	30	30	12

$$30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 12$$
$$60 \quad 60 \quad 42$$
$$120$$
$$162$$

Certaines équipes découpent suivant les deux dimensions, ce qui incite à penser que le tableau proposé n'est pas nécessairement plus « simple » qu'un tableau du type 18×24 par exemple.

Deuxième partie : enregistrée le lendemain.

Rôle du répertoire et amélioration des découpages (partition de $A \times B$ à partir d'une partition de A et d'une partition de B).

L'exercice concerne un tableau de 15×18 cases. Le répertoire est effacé. Certains résultats peuvent être obtenus en acquittant un jeton. Il s'agit donc de trouver le nombre de cases du tableau en perdant le moins possible de jetons.

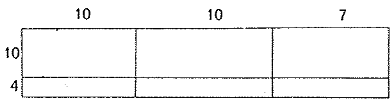
Les élèves achètent peu de résultats et trouvent alors leurs produits par calcul mental.

Le découpage du dernier type observé dans l'émission sera exploité par toutes les équipes dans les réductions qui suivront.

APRÈS CES ACTIVITÉS

Abandon des découpages effectifs (recours à un schéma de partition de $A \times B$). Accomodation du répertoire, calcul sur les puissances.

• Les élèves conduisent des exercices semblables, mais ne reçoivent plus de tableaux quadrillés, les quadrillages qu'ils dessinent alors péniblement sont satisfaisants pour certaines équipes, les autres l'abandonnent et le remplacent par un dessin du type ci-dessous où les colonnes sont simplement suggérées. Par la suite, seul le découpage par dix apparait.



27×14

• La seconde étape est le raccourcissement de procédure que permet la règle de multiplication de nombres dont les écritures se terminent par des zéros (exemple : $400 \times 70 = 28\,000$).

Nous aurons alors par exemple pour 384×67 :

300	80	4	
300×60 18 000	80×60 4 800	4×60 240	60
300×7 2 100	80×7 560	4×7 28	7

$18\,000 + 4\,800 + 240 + 2\,100 + 560 + 28 = 25\,728.$

• L'étude ultérieure permet, à l'aide du calcul sur les puissances de dix, d'atteindre une dernière simplification : soit disposition « arabe »*, soit disposition traditionnelle.

* Cette disposition est présentée plus en détail dans le document d'accompagnement de l'émission « Algorithme de la multiplication » (dossier n° 9).

AVANT CES ACTIVITÉS

L'étude porte essentiellement sur :

1° L'écriture $a \times b$, introduite pour permettre à l'enfant de désigner des cardinaux élevés, avant qu'il connaisse leur écriture canonique. Ainsi 7×8 est le cardinal d'un ensemble produit cartésien d'un ensemble de 7 éléments et d'un ensemble de 8 éléments ;

2° La numération dans différentes bases ;

3° La réduction de somme du type :

$341 + 745 + 617 + 819,$

dans des conditions où les élèves peuvent expliciter les règles utilisées. Elles sont mises en œuvre dans des exercices en rapport avec l'idée de mesure.

COMMENTAIRE

Dès l'introduction du signe x, des écritures telles que 18×23 ont un sens et sont utilisées pour désigner certains nombres. Le « calcul », c'est-à-dire la recherche de l'écriture canonique de ces nombres peut se faire par diverses techniques (exemple : compter un à un). Avec ses découpages, l'élève dispose tout de suite d'un moyen de calculer (sans recours à un apprentissage préalable) des produits comme 68×87, la pratique de ce moyen va lui permettre de simplifier le processus de calcul, de le rendre plus économique, et de l'appliquer à de grands nombres. En même temps, le répertoire va évoluer, s'adapter à chaque méthode, tendre vers la « *table de Pythagore* ».

Les règles de « calcul » sont découvertes au cours d'un processus de mathématisation où les élèves avancent grâce à leurs propres connaissances, ces règles sont découvertes et simplifiées par une recherche naturelle de l'économie. Par exemple : dans la deuxième partie, les élèves sont conduits à découper par dix, car il est facile de calculer $a \times 10$ et comme ils l'affirment dans leurs critiques « *quand les nombres se terminent par zéro, les additions sont plus faciles* ».

Le problème présenté consiste à modéliser une situation, le calcul numérique apparait alors comme une conséquence de la mathématisation et non comme le but d'une méthode d'apprentissage.

Fiche établie par Gérard Deramecourt.

atelier
de pédagogie

activités mathématiques

maitres du cycle élémentaire

mercredi 21 novembre 1973 ; 10 h - 10 h 30

vendredi 23 novembre 1973 ; 17 h 50 - 18 h 20 (deuxième diffusion)

TÉLÉVISION

ALGORITHME DE LA MULTIPLICATION

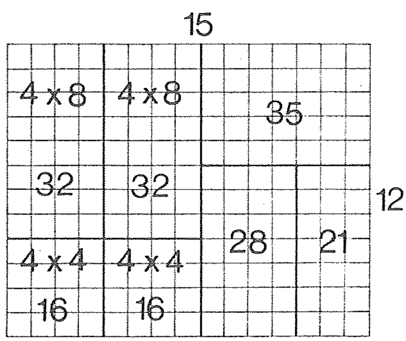
INTRODUCTION

Cette émission présente un moment de l'apprentissage de la multiplication dans un C. E. 2 (janvier 1973, Ecole Michelet à Talence, en Gironde). Elle fait suite à l'émission « *Répertoire multiplicatif* » qui avait été tournée dans un C. E. 1 de Périgueux.

Il s'agit pour les enfants d'obtenir des égalités du type $a \times b = c$ dans lesquelles a, b et c sont des naturels écrits en base 10. Les enfants n'ont pas appris d'algorithme de la multiplication (c'est-à-dire de technique leur permettant « d'effectuer » n'importe quelle multiplication). $a \times b$ désigne pour eux le nombre des cases d'un tableau quadrillé de « a » lignes et « b » colonnes (ou « a » colonnes et « b » lignes) et c'est en cherchant des procédés de plus en plus économiques pour compter le nombre de cases qu'ils vont trouver « c » par des méthodes de de plus en plus satisfaisantes pour eux et établir peu à peu l'algorithme « à la grecque » de la multiplication.

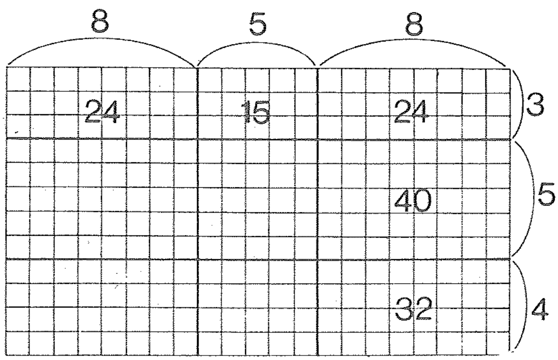
PHASES DE L'APPRENTISSAGE PRÉCÉDANT L'ÉMISSION

En faisant des partitions sur l'ensemble des cases de tableaux qui leur étaient proposés, les enfants ont établi un premier répertoire d'égalités. Par exemple, ils ont calculé $4 \times 7 = 28$; $4 \times 8 = 32$; $4 \times 4 = 16$ en comptant les cases une par une, puis ils ont utilisé ces égalités pour calculer 12×15 ainsi :



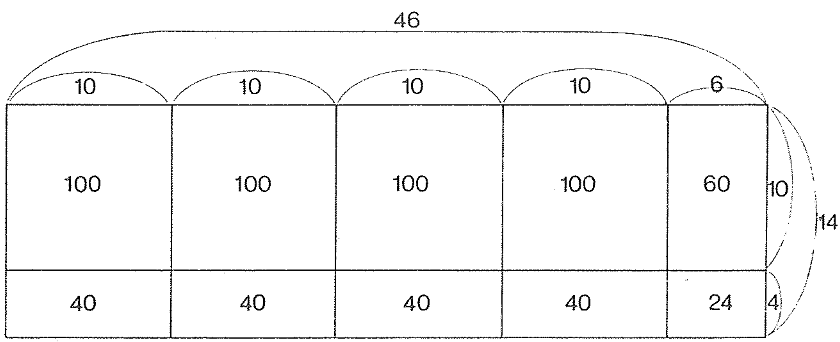
$12 \times 15 = 32 + 32 + 16 + 16 + 35 + 28 + 21.$

Ils ont ensuite découvert que des partitions du type ci-dessous étaient telles qu'il suffisait d'indiquer le nombre de cases sur les bords du grand tableau pour connaître les facteurs des produits dans les petits rectangles.



Ils ont aussi découvert que l'égalité $10 \times 10 = 100$ était facile à retenir et ils l'utilisaient aussi souvent que possible dans leurs partitions.

Enfin, ils avaient abandonné le quadrillage effectif au profit de la représentation symbolique suivante :



158

L'ÉMISSION

1. PREMIÈRE PARTIE

Travail individuel, puis par couples d'enfant

Calcul de 18×14 et 13×16. Décodage par reconstruction sur un tableau quadrillé, d'une représentation symbolique.

- **Première phase.**

La moitié des élèves (groupe A) doit calculer individuellement le produit 18×14 ; l'autre moitié (groupe B) le produit 13×16.

La maîtresse a écrit au tableau le répertoire suivant :

$$\begin{aligned} 8 \times 4 &= 32 \\ 6 \times 10 &= 60 \\ 3 \times 10 &= 30 \\ 6 \times 3 &= 18 \\ 8 \times 10 &= 80 \\ 4 \times 10 &= 40 \end{aligned}$$

Chaque enfant doit, sur une feuille, représenter symboliquement le produit qu'il doit effectuer et donner l'écriture en base 10 du produit.

- **Deuxième phase.**

Chaque enfant doit recopier sur une autre feuille son « plan de découpage », c'est-à-dire la représentation symbolique qu'il a utilisée mais sans garnir l'intérieur des petits rectangles.

Chaque enfant du groupe A doit alors échanger son plan de découpage avec celui d'un enfant déterminé du groupe B (les couples d'enfants qui sont associés ont été écrits au tableau).

Puis les enfants dessinent sur du papier quadrillé le tableau et le découpage correspondant au plan qu'ils viennent de recevoir. Ils doivent enfin donner le nombre de cases du tableau qu'ils viennent de construire.

- **Comparaison des résultats obtenus** pour un même produit par la représentation symbolique et par le tableau quadrillé. Recherche des causes d'erreur quand le résultat est différent.

2. DEUXIÈME PARTIE

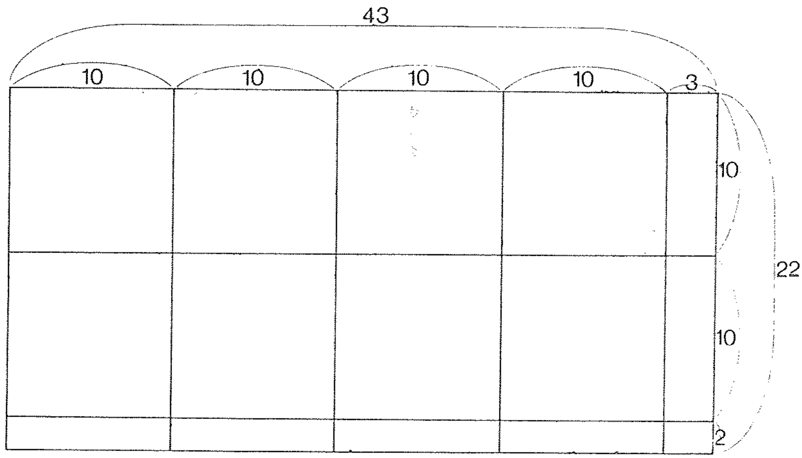
(le lendemain) **Amélioration du choix du découpage.**

Les enfants sont répartis en 6 groupes de 4 élèves et ont pour tâche de calculer le produit 43×22.

- **Première phase** : le répertoire affiché est le suivant :

$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 100 \\ 2 \times 10 &= 20 \\ 3 \times 10 &= 30 \\ 2 \times 3 &= 6 \end{aligned}$$

Tous les groupes utilisent le découpage suivant :



Ils conservent le résultat obtenu.

• **Deuxième phase :** l'addition est longue à effectuer. On souhaite diminuer le nombre de termes, le répertoire suivant est indiqué au tableau et chaque groupe en possède un exemplaire sur sa table :

$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 100 \\ 2 \times 10 &= 20 \\ 3 \times 10 &= 30 \\ 2 \times 3 &= 6 \\ 40 \times 20 &= 800 \\ 40 \times 2 &= 80 \\ 3 \times 20 &= 60 \\ 20 \times 20 &= 400 \\ 20 \times 2 &= 40 \\ 30 \times 2 &= 60 \end{aligned}$$

On demande alors aux enfants de faire des plans de découpages de façon qu'ils obtiennent le moins de « morceaux » possibles et que toutes les égalités dont ils ont besoin soient dans le répertoire. Pour les obliger à utiliser effectivement le répertoire ci-dessus et rien d'autre, ils doivent coller à l'intérieur des « petits rectangles » de leur plan de découpage des étiquettes sur lesquelles ont été écrites, par la maitresse, les égalités utilisables. Puis, ils doivent calculer le résultat et comparer à celui obtenu dans la première phase.

• **Troisième phase :** exposition des découpages. Discussions sur ceux qui semblent le plus satisfaisants.

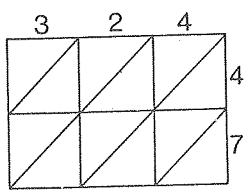
3. TROISIÈME PARTIE

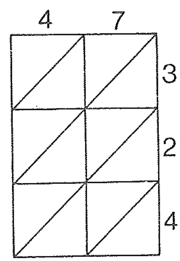
Algorithme à la grecque. Un enfant de C. M. 1 effectue une multiplication.

C'est l'algorithme, ou la technique de calcul, sur lequel débouche naturellement, en fin de progression, l'apprentissage qui précède.

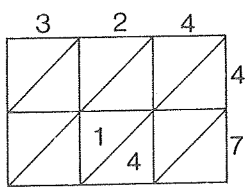
On compte le nombre de chiffres p et q de chaque facteur et on construit un rectangle quadrillé de p colonnes et q lignes, que l'on borde par les 2 facteurs du produit. Voici un exemple :

324×47



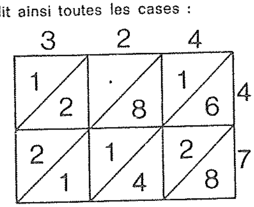


On construit les diagonales comme indiquées sur la figure puis on remplit les cases comme suit :

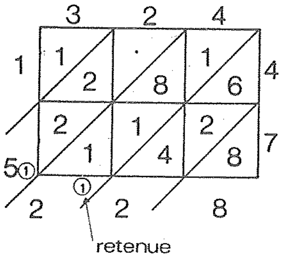


le nombre 14 a été inscrit dans une case correspondant à 2 en haut de la colonne et 7 à droite sur la ligne ($2 \times 7 = 14$).

On remplit ainsi toutes les cases :



On somme alors suivant les diagonales en commençant en bas à droite et en reportant éventuellement la retenue de l'addition effectuée sur une diagonale dans la somme à effectuer pour la diagonale suivante :



Enfin, on lit le résultat :
$324 \times 47 = 15\,228$.

PHASES INTERMÉDIAIRES ENTRE LA DEUXIÈME ET LA TROISIÈME PARTIE DE L'ÉMISSION

- Calcul sur les puissances de 10 ($10^5 \times 10^3 = 10^8$), $3 \times 10^2 \times 4 \times 10 = 12 \times 10^3$.
- Découpages et écritures sous la forme :

3×10^2	2×10	4	
12×10^3	8×10^2	16×10	4×10
21×10^2	14×10	28	7

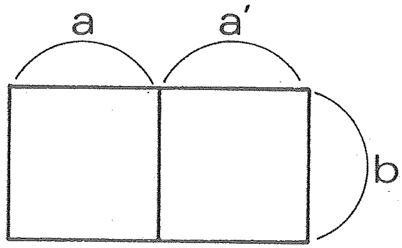
Remarques sur la place occupée par les puissances de 10 qui sont les mêmes à l'intérieur des rectangles.

COMMENTAIRES

1. Propriétés mathématiques mises en évidence par l'utilisation des quadrillages :

- La commutativité du produit apparait très vite.
- La distributivité du produit par rapport à l'addition apparait :

$$(a + a') \times b = a \times b + a' \times b$$



- Cette représentation est intéressante pour les produits de 2 facteurs. Elle se généralise mal pour plus de 2 facteurs. En particulier, l'associativité de la multiplication n'est pas mise en évidence par cette représentation (la représentation avec des « arbres » permet-elle de « voir » cette propriété ?).

2. Démarche pédagogique.

Les enfants ne commencent pas par apprendre un algorithme pour chercher ensuite les occasions de s'en servir mais établissent cet algorithme par des procédés d'économie qu'ils découvrent au fur et à mesure de leur recherche.

Les phases individuelles ont pour but de familiariser l'enfant avec la situation qu'on lui propose et de lui permettre d'élaborer des stratégies plus ou moins coûteuses pour exécuter la tâche qui lui est donnée.

Les phases de travail en groupe ont pour but de faire expliciter à chaque enfant du groupe et au sein de son groupe, la méthode qu'il a découverte afin que le groupe critique et choisisse la proposition qui lui semble la plus intéressante. La confrontation des idées et parfois la résistance d'un groupe face à la méthode expliquée par l'un de ses membres oblige celui-ci à chercher des arguments s'il veut faire adopter sa technique. C'est le début d'une mathématisation.

3. Choix de l'algorithme.

— L'algorithme utilisé le plus fréquemment en France

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times \ 47 \\ \hline 2268 \\ 1296 \\ \hline 15228 \end{array}$$

necessite pour être mis en place que la technique de l'addition soit parfaitement maitrisée, même pour effectuer les produits partiels (s'il y a des retenues).

— Il demande en outre, à chaque instant, de savoir :

— l'endroit exact où l'on en est,

— s'il y a ou pas une retenue dans le produit élémentaire qui vient de précéder ;

— Enfin, il provoque souvent des erreurs de décalage s'il y a des zéros au multiplicateur ;

— Il permet mal de localiser les causes des erreurs (table de multiplication ? retenues ?) ;

— Il est long à enseigner ;

— Il n'est, en général, pas plus rapide pour un enfant qui, le plus souvent, « recompte » avant de donner le résultat ;

— **L'algorithme « à la grecque »** sépare l'utilisation des tables de multiplication de l'utilisation de l'addition. Il permet de localiser les erreurs. Il permet de connaitre immédiatement l'ordre dè grandeur du résultat ($p + q$ chiffres ou $p + q - 1$ chiffres si les facteurs ont p et q chiffres).

Fiche établie par Danielle Delor, IREM de Bordeaux

ANNEXE 2 (Article paru dans l'EDUCATION, n°121 du 9-12-1971)

l'action éducative

Le jeu de Pythagore

UNE pédagogie active fait largement appel au jeu : c'est que le jeu, avec l'imitation, est la forme normale de l'activité de l'enfant. Même si l'on ne peut ramener toute l'activité scolaire à la forme du jeu, on conviendra que, plus cette activité en sera voisine, plus spontané et plus intense sera l'effort fourni par l'écolier. Nous admettons que, pour jouer à un jeu quelconque, il faut déjà en apprendre la règle : par exemple, dans le jeu arithmétique dont il va être ici question, il faut savoir les produits des douze premiers nombres entiers, ou du moins consentir à les apprendre, à s'intéresser à eux, comme pour jouer au Domino ou au Nain jaune il faut bien compter jusqu'à six ou jusqu'à dix. On voit la portée du jeu pédagogique : il n'est pas un amusement, il réclame l'effort, mais il est un vrai jeu, parce que cet effort sera obtenu par un intérêt de caractère ludique en dehors de tout sentiment d'utilité ultérieure. La grande différence, entre le jeu et le travail, c'est en effet le sentiment d'une réalisation plus ou moins immédiate ; et si le jeu est le travail de l'enfant, c'est que l'enfant n'est guère ému par des échéances lointaines, tandis que l'adulte, capable d'un effort en vue d'une lointaine réalisation, trouve dans le travail même une satisfaction à peu près équivalente.

C'est dans cet esprit qu'a été conçu le « Jeu de Pythagore », destiné à inculquer dans l'esprit les produits des douze premiers nombres entiers. La possession de la table de multiplication (cette table de sinistre mémoire qui « décorait » la quatrième page de nos protège-cahiers) est une nécessité. La meilleure manière de la faire entrer dans les cerveaux rebelles a longtemps semblé de la faire réciter par un chœur d'écoliers comme une litanie mi-chantée, mi-parlée : « 2 fois 2, 4 ; 2 fois 3, 6 ; 2 fois 4... » Ce n'était pas si mal, puisqu'on finissait par la savoir. Ce n'était pas parfait, puisqu'on apprenait les éléments d'une opération dont on ignorait à peu près le sens. La pédagogie d'autrefois ne proposait pas à l'enfant de dominer les questions, de soupçonner la raison d'être d'une opération avant de la pratiquer. On savait ce que « faisaient » 3 fois 4 avant d'avoir éprouvé le besoin de multiplier et pris ainsi conscience du genre de problèmes réels que la nouvelle opération permettait de résoudre. L'enfant, comme une machine à calculer, pouvait multiplier des nombres sans rien se représenter.

Nous voulons mieux aujourd'hui. Ainsi, la récitation d'une table, toujours dans le même ordre, présente un sérieux inconvénient : pour donner un produit, ou pour trouver les facteurs d'un produit donné, l'enfant est souvent amené à se réciter mentalement toute une litanie. Demandez-lui combien font 3 fois 7, il se répète tout bas : « 3 fois 2, 6 », etc., jusqu'à 3 fois 6 et 3 fois 7. Comment lui donner tort ? Il a appris à dévider des séries, et ce qui lui garantit que 3 fois 7 font 21, ce ne sont pas des considérations arithmétiques ni une représentation concrète d'objets, c'est l'insertion rendue aisée grâce à des mécanismes vocaux articulatoires de la bonne formule dans la série de ces articulations. C'est pour la même raison qu'on retrouve parfois l'orthographe d'un mot en tentant de l'écrire même les yeux fermés. Or la table de multiplication n'est vraiment sue que si elle est brisée en petits éléments dont chacun peut être évoqué instantanément et indépendamment des autres.

Voilà donc le triple but à atteindre. Il s'agit tout à la fois de faire rabâcher la table de multiplication qui ne sera sue qu'à ce prix, de faire saisir les réalités concrètes qu'elle exprime, de permettre très vite la fragmentation de la table, de sorte que chaque produit évoque instantanément ses facteurs possibles et que deux facteurs désignés soient associés à leur produit sans qu'on ait besoin de les situer dans une famille de produits appelée table des trois ou des cinq.

Pour cela, présentons à l'enfant la fameuse table de Pythagore, mais sans aucun autre nombre que les facteurs, par exemple les douze premiers nombres entiers. On a ainsi d'une part 144 cases, dont 23 portent un nombre, dont 121 sont vides, d'autre part des cartons sur lesquels se trouveront inscrits les produits. L'éducateur présente à l'enfant ce tableau, ou une partie de ce tableau, qu'il est aisé de fragmenter, et les produits de la table des 2 et des 3 par exemple : « Tu vois, chacun de ces carrés porte un nombre ; nous allons, toi et moi, les placer sur ce tableau. 2 fois 3 font 6, je pose ici ce carré (2×3) ; je pourrais aussi le mettre là (3×2). A toi, voici 8, où le mets-tu ? »

L'enfant aura sa table de multiplication sous les yeux et la répètera, il la saura ainsi bientôt par cœur et beaucoup mieux : car il s'habituera à énoncer chaque produit sur le vu des deux facteurs et non comme un des éléments d'une série à réciter dans un ordre constant, il s'exercera presque sans y songer à inverser multiplicateur et multiplicande en renversant l'opération et à passer de la multiplication à la division. Et qu'il est aisé, en promenant les doigts sur le tableau, de montrer combien une vérification est facile : 3 fois 7 font 21, et justement le nombre des cases du grand rectangle délimité par les bords du tableau à gauche et en haut, par la bande 3 et la bande 7 choisies l'une à partir de la gauche et l'autre à partir du haut, s'élève à 21 : chose sans doute bien longue

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											

Le tableau

4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Les 121 produits

Petits carrés à découper : pratiquement, on donne au côté des carrés 1 mm de moins qu'à celui des cases du tableau.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											
3		9		15		21		27		33	
4											
5		15		25		35		45		55	
6											
7		21		35		49		63		77	
8											
9		27		45		63		81		99	
10											
11		33		55		77		99		121	
12											

Disposition
des produits impairs

à dire et si vite montrée ! Et nous voilà à calculer la surface du rectangle. On donne à l'enfant tous les jours, comme jeu, vingt, puis trente cartons à placer, et davantage, en finissant par les nombres les plus élevés. Au fur et à mesure qu'il devient plus habile, les directives se modifient : on lui propose de placer tous les produits qui se terminent par un zéro, par un 2, par un 4, par un 8, par un 5, par un nombre impair ; il remarquera soudain certains arrangements dont la symétrie esthétique saute aux yeux et permet à l'éducateur de contrôler le travail d'un coup d'œil : précieuse occasion de faire découvrir certaines lois arithmétiques qui simplifient le calcul mental. Par exemple, le produit n'est impair que si les deux facteurs sont impairs. Enfin, quand la table sera bien sue, l'enfant reproduira, en posant des carrés aux places convenables, un dessin géométrique, par exemple une croix, un carré, une étoile.

Si notre petit calculateur est devenu expert à disposer les produits sur le tableau, tout n'est pas fini. Tout d'abord, diverses remarques surgiront. Qu'on observe sur le tableau la répartition en hyperbole des produits 24. et 36 (soit 2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2, et 3×12, 4×9, 6×6, 9×4, 12×3). L'équation de cette courbe est fournie par la formule :

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ou } xy = a$$

a représentant chaque produit de la table, x et y les deux facteurs. En cherchant la place d'un produit, le regard décrit naturellement cette hyperbole. Ne disons pas cela à des enfants ; mais qu'ils remarquent cette répartition régulière, n'est-ce pas tout naturel, et cela ne prépare-t-il pas leurs intelligences à saisir plus tard ce qu'est une courbe du second degré ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2				10					20		
3									30		
4				20					40		
5	10		20		30		40		50		60
6				30					60		
7									70		
8				40					80		
9									90		
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11									110		
12				60					120		

Disposition des produits
finissant par zéro

Considérez les carrés parfaits, par exemple 9, 16, 25, etc. et voyez les deux produits égaux dont les cartons se rattachent à celui de chaque carré parfait par deux sommets opposés, soit 8, 15, 24, etc., c'est-à-dire **toujours ce carré parfait moins un.** Vous reconnaissez l'identité remarquable :

$$(a + b) \quad (a - b) = a^2 - b^2$$

ici sous la forme :

$$a^2 - 1 = (a + 1) \quad (a - 1)$$

Et ceci prouve que, de tous les rectangles de périmètre constant, le carré est celui dont la surface est maxima.

Mais, dira-t-on, ce n'est là qu'un matériel, non un jeu : un véritable jeu a des règles. C'est exact, et voici celles du « Jeu de Pythagore », conçu comme un jeu de société, ou simplement comme une sorte de réussite. On sait qu'il est malaisé d'expliquer sans démonstration la marche d'un jeu ; les expressions concrètes ont donc été multipliées, et l'on a observé si des enfants, munis de ce matériel et de cette règle, étaient à même de se débrouiller : les constatations ont paru satisfaisantes.

Règle du jeu

Dans votre « Jeu de Pythagore », vous avez :

- un tableau de 144 cases : 23 de ces cases (dont une grise) portent un nombre, et 121 (dont 11 grises) sont vides ;
- 121 cartons, à placer sur les cases vides du tableau.

Comment place-t-on les cartons ? Chaque carton peut être posé sur une case libre du tableau à cette condition : lisez le nombre qui se trouve au-dessus de la case que vous voulez occuper, et celui qui se trouve à gauche sur la même ligne ; multipliez ces nombres l'un par l'autre : le carton qui porte le nombre que vous avez ainsi obtenu peut occuper cette case.

Par exemple, un carton marqué 24 pourra se mettre sur la 8e case à partir de la gauche de la 3e rangée à partir du haut, ou sur la 6e case de la 4e rangée, ou en quatre autres endroits que vous trouverez de même.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											24
3							24				
4											
5											
6			24								
7											
8		24						72			
9								81			
10											
11								99	110		
12	24										

On ne doit pas mettre deux cartons l'un sur l'autre dans une même case, et on ne met rien sur les cases qui portent un nombre.

Vous voulez jouer seul ? Prenez soixante cartons ; retournez-en un autre et placez-le. Puis, à partir de celui que vous avez placé ainsi, placez les autres en posant un à un des cartons dans des cases adjacentes à une case déjà occupée (deux cases sont adjacentes, cela veut dire qu'elles se touchent par un bord, comme les cases où l'on a placé les nombres 72 et 81, ou 99 et 110). Si vous remplissez une case grise, ou deux, ou trois, etc., vous aurez le droit de remettre à la fin de la partie un carton, ou deux, ou trois, etc., avec les soixante que vous avez laissés en commençant. Vous avez gagné si vous vous êtes ainsi défait de tous vos cartons.

Vous êtes plusieurs pour jouer ensemble ? Répandez les cartons retournés, mêlez-les.

l'éducation du 9-12-71

Qu'un joueur mette en place sur le tableau trois cartons pris au hasard. Puis chacun de vous prend des cartons :

si vous êtes	2	joueurs,	chacun prendra	20	cartons
—	3	—	—	15	—
—	4	—	—	12	—
—	5	—	—	10	—

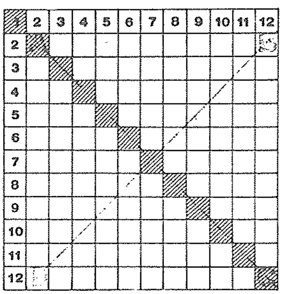
Regardez et classez vos cartons. Puis, chacun à son tour, vous en placez sur une case adjacente à une case déjà occupée (deux cases sont adjacentes, cela veut dire qu'elles se touchent par un bord). Celui qui occupe une case grise (le nombre qu'il place alors s'appelle un « carré parfait ») remet aussitôt un carton de son jeu avec ceux que personne n'a pris. Celui qui ne trouve rien dans son jeu à poser sur le tableau, puise un carton parmi ceux que personne n'a pris, et l'on passe son tour. Le gagnant est celui qui, le premier, s'est défait de tous ses cartons.

On a donc là tout à la fois un exercice et un véritable jeu de société. Nous avons vu des enfants, des adultes aussi, s'absorber spontanément plusieurs heures sur les combinaisons qu'ils y découvraient ; et la forme « réussite » pour un joueur seul incite à étudier des combinaisons au moins aussi variées que la plupart des réussites du jeu de cartes.

En effet, les produits à placer sont au nombre de 53, et parmi eux :

9	ne se présente	qu'une fois,	ce qui donne	9	cartons,
33	se présente	deux fois,	—	66	—
1	se présente	trois fois,	—	3	—
8	se présente	quatre fois,	—	32	—
1	se présente	cinq fois,	—	5	—
1	se présente	six fois,	—	6	—
53	produits, répartis sur			121	cartons

Ainsi, le joueur qui détient l'un des 9 premiers cartons (4, 9, 25, 49, 64, 81, 100, 121, 144) n'a pas à se presser de les poser : aucun concurrent ne peut occuper la place, et, comme ces cases sont celles de carrés parfaits, il a même intérêt à attendre, s'il peut, pour rejeter à cette occasion un carton que la tournure du jeu révèle difficile à placer. Au contraire, pour tous les autres produits, la place que vous espérez occuper, à moins que vous ne déteniez tous les cartons relatifs au produit considéré, peut être prise par l'un des joueurs dont le tour précède le vôtre, et cela a d'autant plus de chances de se produire que le nombre de cases possibles pour ce produit est plus élevé et que vous possédez moins de cartons de ce produit : on s'empressera donc de placer le carré parfait 36, et, si ce carré parfait n'est pas encore posé, on songera que c'est probablement avantager l'adversaire que de remplir une case adjacente à celle du carré parfait 36.



Serrons davantage cette étude. Le tableau comporte un carré ABCD ; traçons les diagonales AC et BD. La diagonale AC divise le carré en deux triangles rigoureusement symétriques : de part et d'autre de cette diagonale, on retrouve aux mêmes places les mêmes produits, et c'est pour cela que la règle du jeu prescrit de ne pas utiliser au départ plus de la moitié du total des cartons. Au contraire, la diagonale BD ne divise pas le carré des produits en triangles de valeur ici équivalente · si l'on étudie les chances pour chaque case du tableau d'être remplie par les trois cartons pris au hasard au début de la partie (avec plusieurs joueurs), on s'aperçoit que ce sont les cases du triangle ABD qui ont le plus de chances d'être occupées ; entre les deux triangles, les cases traversées par la diagonale BD mises à part, le rapport des chances est comme 171 est à 131 (un peu plus que 9 par rapport à 7). Ainsi, chaque case du tableau entier a, si l'on prend un seul carton au hasard, une chance d'être remplie qu'on peut exprimer par 2,8 sur 121 ; mais, pour chacune des cases situées au-dessus et à gauche de BD, la valeur de cette chance s'élève à 3,1 sur 121, et, pour chacune de celles situées au-dessous et à droite, elle s'abaisse à moins de 2,4 sur 121.

Chaque bande n'a pas les mêmes chances d'être remplie : les plus favorisées sont celles des produits dont un des facteurs est 6 (c'est-à-dire 2×3) ; les plus défavorisées sont celles dont un des facteurs est 7 ou 11 (nombres premiers). Si l'on étudie les bandes diagonales, ou parallèles aux diagonales, même contraste : la bande des cases traversées par la diagonale BD réunit deux fois plus de chances que celle des cases traversées par la diagonale AC ; on a presque une chance sur 8 pour qu'un carton pris au hasard au début puisse prendre place sur la diagonale BD.

On voit donc qu'un joueur averti saura toujours tirer du hasard le meilleur parti ; et ce jeu, en apparence si simple, amène à réfléchir sur des combinaisons variées. Lorsqu'on joue seul, le premier carton placé (le 61e pris sur les 121) a une grande importance : si c'est le 4 ou le 144, les chances de pouvoir déboucher sont réduites au minimum ; elles sont très fortes, au contraire, si l'on a tiré le 25 ou le 81. Et, si le carton tiré peut se placer en plusieurs points, le choix de ce point de départ n'est pas indifférent : les six places du 24 ont ainsi trois valeurs inégales, les plus rapprochées du centre étant en principe (mais cela dépend des cartons qu'on a à placer) les plus favorables.

Tenons-nous-en là : notre but est atteint si nous avons montré que ce jeu est un instrument pédagogique de valeur et fournit un joli divertissement extra-scolaire pour tous les âges ; il est rare qu'un matériel réalise à la fois l'un et l'autre.

Charles Rosset

ANNEXE 3 :"Loto multiplicatif"

On trouvera ci-dessous une adaptation d'un article paru dans Mathematics in School N° 1 du XI - 71 sous le titre "Multiplication Bingo" by P. Holmes.

A chaque partie de ce loto participent : des joueurs, un contrôleur et un tireur.

1) Les cartes du tireur sont faites ainsi :

recto		verso
3 x 5 5 x 3	-	15
4 x 4	-	16

Deux des cartes du tireur.

Quand le tireur tire l'une des cartes (deux d'entre elles sont illustrées ci-dessus) il peut énoncer soit 3 x 5 soit 5 x 3 ; il ne doit pas énoncer 15. Des nombres tels que 24 figurent sur deux des cartes du tireur, l'une avec 3 x 8 et 8 x 3, l'autre avec 4 x 6 et 6 x 4. Ceci afin de familiariser les joueurs avec les deux produits de facteurs et, accessoirement, afin de fournir une deuxième chance de couvrir 24.

2) Le contrôleur pose les nombres tirés sur son carré de contrôle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10										100	10
9									81	90	9
8								64	72	80	8
7							49	56	63	70	7
6						36	42	48	54	60	6
5					25	30	35	40	45	50	5
4				16	20	24	28	32	36	40	4
3			9	12	15	18	21	24	27	30	3
2		4	6	8	10	12	14	16	18	20	2
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

C'est essentiellement une demi table de multiplication. Les deux facteurs du produit donnent les coordonnées de la case du carré de contrôle où l'on doit placer la carte tirée : 5 x 3 doit se placer sur la case (5,3). Pour s'assurer qu'il utilise la position correcte, le résultat de la multiplication figure au verso de la carte du tireur et le contrôleur pose la carte sur le carré de contrôle de façon qu'on puisse lire ce résultat. Durant le jeu, le contrôleur s'exerce à trouver les cases par l'intermédiaire de leurs coordonnées.

3) Les cartes des joueurs comportent quinze nombres répartis en trois rangées de cinq et douze cases hachurées. Il est bon de disposer de 8 à 12 cartes.

1			32	40		63		81
	14	20		42		64	70	
7	16	28			54			90

Une carte de joueur.

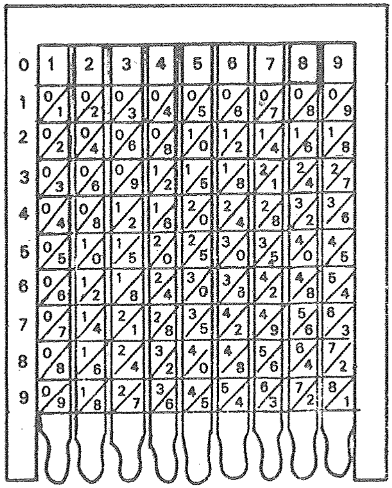
Chaque produit de 1 x 1 à 10 x 10 apparaît au moins une fois; et les plus difficiles, tels que 63, figurent sur plusieurs cartes.

Une partie est achevée lorsque tous les nombres de l'une des cartes ont été appelés et que le joueur les a correctement recouverts. La vérification est aisée en se référant au carré de contrôle. La partie peut être raccourcie en convenant qu'elle est achevée lorsqu'une ligne d'une carte est recouverte.

L'auteur de l'article fait remarquer que l'adoption du système métrique justifie qu'on n'aille pas au-delà de 10 x 10. En France, nous pouvons penser que notre habitude du système métrique est une raison de ne pas s'arrêter à 10 x 10 dans ce jeu mais de l'étendre jusqu'à 12 x 12 par exemple.

ANNEXE 4 : Les réglettes de NEPER

John Napier of Merchiston dit Neper (1550-1617) a décrit en 1617, dans sa "Rhabdologia Sire numerationis per virgulas libri", un ingénieux appareil pour effectuer les multiplications.



Voici une table de multiplication découpée en neuf réglettes mobiles et un bâti qui porte dans la marge de gauche les neuf premiers naturels.

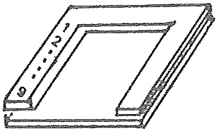
On notera la façon dont sont écrits les produits sur les réglettes (voir VIII -5)

Réalisation :

Le matériau : contreplaqué léger ou carton fort.

Dimensions en cm :

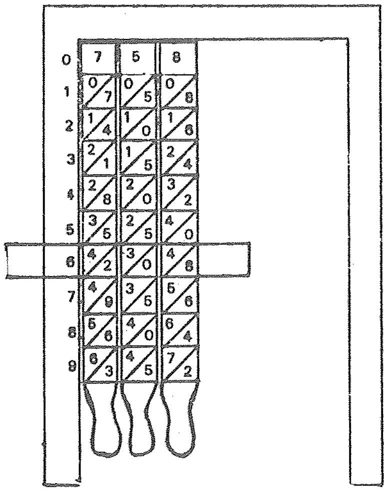
- hors tout : 16,5 x 16,5
- marges : 1,5 de large
- réglettes : 1,5 x 17



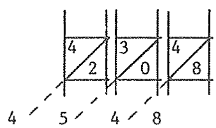
Sur le panneau de fond 16,5x16,5 coller les marges de façon qu'elles évitent aux réglettes de glisser hors du cadre au cours des manipulations.

Comme pour tout matériel, la qualité du matériau et le soin dans la fabrication le rendront plus ou moins attrayant, suscitant par là plus ou moins d'intérêt.

Utilisation : Le principe d'utilisation est celui décrit en VIII -5 dans la technique "per gelosia".



Soit à multiplier 758 par 6. Choisir les réglettes 5, 7, 8, et "écrire" 758 à la ligne du haut. Puis lire à la ligne 6 (6 indiqué dans la marge de gauche) et additionner en suivant les diagonales comme dans la technique "per gelosia".

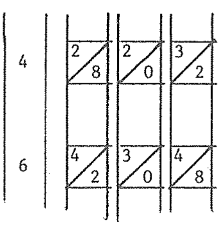


Le produit cherché est 4548

Pour le calcul de 46 x 758 :

on procède comme ci-dessus en ce qui concerne 758

par lecture on obtient 4 x 758 et 6 x 758



$$4 \times 758 = 3032$$

d'où $40 \times 7\,580 = 30\,320$

$$6 \times 758 = 4548$$

et enfin $46 \times 758 = 34\,868$

Ce matériel, facile à réaliser et d'utilisation très simple, est l'ancêtre des machines à calculer utilisées de nos jours.

Pourquoi ne trouverait-on pas dans les classes à partir du CE_1 quelques exemplaires de ce matériel ?

Cette machine rudimentaire ne dispense aucunement son utilisateur de savoir ce qu'il fait (voir Annexe V) . Elle aide seulement sa mémoire et évite des difficultés dans la lecture de la table de multiplication. Par ailleurs, c'est un matériel individuel qui permettra, par la fréquence même de son utilisation, la mémorisation de nombreux résultats.

Qu'au premier contact l'enfant n'ait pas pénétré tous les secrets de la construction de cet appareil n'est pas troublant (Nous utilisons tous en permanence des outils dont nous ignorons le plus souvent le principe et les détails de construction : du briquet à l'automobile en passant par le téléphone et le réfrigérateur). D'ailleurs rien n'interdit d'amener progressivement les enfants à réfléchir sur le principe de fonctionnement de cette machine à calculer.

ANNEXE 5 : Calcul à la main, calcul mental, machines à calculer

Deux questions sont très fréquemment posées par les enseignants à propos du calcul :

- faut-il que les enfants sachent leurs tables ?
- si oui, comment faire pour qu'ils les sachent ?

La réponse à la première question s'impose ; c'est oui sans réserve. C'est même : oui et parfaitement : c'est-à-dire que cette connaissance doit dépasser le simple automatisme "sept fois huit, cinquante six". Cela veut dire qu'il est au moins aussi important de savoir retrouver très rapidement un résultat oublié, par utilisation de propriétés adéquates, que de répondre comme un automate.

Quant à la deuxième question, c'est tout le problème de l'apprentissage d'une technique. Une comparaison peut aider à y voir plus clair. Lorsqu'une personne doit se rendre dans une ville qu'elle ne connaît pas et sait qu'elle devra y retourner fréquemment, elle se munit d'un plan de cette ville. Mais il est d'expérience que jamais personne n'a attendu de savoir par cœur le plan d'une ville pour s'y déplacer. Au contraire, c'est en parcourant la ville à l'aide du plan qu'on acquiert, par expérience, des repères suffisants pour abandonner le plan. C'est alors, bien souvent, qu'on découvre le vrai visage de la ville et qu'on s'intéresse à des détails (architecture, histoire, vie des quartiers, etc ...).

C'est la part du maître que de replacer les enfants qui abordent la multiplication (où tout autre thème) dans des conditions analogues à celles du voyageur qui découvre une ville. Les connaissances ponctuelles, par exemple savoir les tables, viendront d'elles-mêmes à condition que l'on offre un large éventail d'activités et des outils d'exploration bien adaptés.

Il s'agit de motiver une exploration permanente et à ce point de vue la récitation plus ou moins monotone des tables ainsi que les trois multiplications quotidiennes que l'on pratiquait naguère étaient à la fois pauvres et lassantes. Que d'énergie n'a-t-on pas gaspillé pour un piètre résultat! Combien de citoyens français ont gardé un bon souvenir du calcul et continuent à s'y intéresser ?

Une autre préoccupation des maîtres est l'introduction du calcul mental et la place qu'il doit prendre. Disons, dès l'abord, que tout calcul est mental, même quand on écrit. C'est en effet le cerveau qui guide la main et non pas la main qui trace automatiquement des symboles sur le papier. L'utilisation prématurée et exclusive du mécanisme écrit traditionnel supprime toute initiative, alors que le calcul mental exige initiative, souplesse, mémoire. De sorte que, dès le premier apprentissage, il faudrait s'efforcer de réduire la part de ce qu'on écrit.

On peut avancer deux raisons pour soutenir cette idée. La première est qu'entre le calcul écrit et le calcul de tête, comme on dit parfois, c'est la mémoire qui intervient (se reporter à ce propos à VIII -5/6/7) mais aussi une familiarité suffisante avec les propriétés de l'opération envisagée. La deuxième raison est que le calcul mental, incompatible avec des automatismes contraignants, amène à faire des choix, oblige à analyser le problème pour y adapter une suite d'opérations élémentaires. C'est ainsi qu'on ne procèderait pas de la même façon pour obtenir le produit de 34 par 15 ou par 19. Savoir qu'il existe plusieurs manières de parvenir à un but et choisir en connaissance de cause contribue à développer la liberté, ce qui est peut-être une des finalités de l'école.

Enfin le calcul à la main traditionnel (voir VIII -6) utilise une technique le plus souvent non justifiée, introduite prématurément et parfois mal adaptée au problème à traiter. Cette technique n'est rien d'autre qu'une machine au sens propre du terme. Toutes les machines créées par l'homme peuvent être utilisées dans deux contextes bien différents : soit connaître la machine, l'entretenir, l'étudier, la perfectionner s'il y a lieu, soit en être l'esclave. C'est un choix à faire.

Reste le problème posé par l'introduction de machines. L'utilisation des réglettes de Neper montre que la machine ne fait pas l'opération ; c'est bien le manipulateur qui utilise les réglettes en fonction de ce qu'il veut obtenir.

Mais avant d'aller plus loin, deux mots d'histoire : de tout temps l'homme a eu besoin d'effectuer des calculs pour des raisons diverses : divination, constructions, commerce, etc ... Jusqu'à la Renaissance, on utilise des abaques et des bouliers encore en usage en Chine et en U.R.S.S. Aux X-XII^{e} siècles, on invente des techniques de calcul à la main (voir VIII-5 et VIII -6); jusqu'au XVII^{e} siècle, ces techniques ne se diffusent pas hors d'une faible élite de savants et ceci pour deux raisons essentielles : d'une part, les systèmes de numération ne sont pas encore assez perfectionnés, d'autre part, l'essor scientifique ne se développe dans l'Occident chrétien qu'à partir de la Renaissance.

Des causes, liées à l'histoire de l'Occident à partir du XVI^{e} siècle : découverte de l'Amérique, apport de métal précieux, dévaluation des monnaies, développement des échanges commerciaux, extension des observations astronomiques, conduisent à calculer plus souvent et sur des nombres assez grands. C'est alors qu'on invente des machines le plus souvent dérivées de la technique "per gelosia" et destinées à dispenser du calcul à la main. Voici une liste d'inventeurs avec

la date de la mise au point de leur machine :
Neper (1617), Schickard (1623), Pascal (1642), Schott (1668), Leibniz (1672), Morland (1673), Petit (1678), Perrault (1700), Poléni (1709), Lepine (1725), Poetius (1728), de Mean (1781), Gersten (1755), Roussain (1738), Pereire (1750), Hahn (1770), Mahon (1776), Muller (1784), Praht (1789), Gruson (1792), Jordans (1798), Stern (1814), Babbaye (1820), Thomas (1820), Leupold (1827), Lagrous (1828) Briet (1829), Bardach (1839), Henri (1841), Roth (1841), Maurel (1849).

Cette liste, déjà longue et sans doute incomplète, nous amène vers 1850, c'est-à-dire en plein essor industriel dont on sait à quel point il va développer ces machines, mécaniques, puis électriques, enfin électroniques.

A la lumière de ces brèves informations historiques, il devient proprement stupéfiant de constater que l'école a radicalement ignoré l'existence de machines et l'ignore toujours. Serait-elle, quoiqu'on dise, coupée du monde extérieur ? Ceci nous amène à la question posée : faut-il mettre des machines entre les mains des enfants ? ou mieux quelles machines ont un intérêt pédagogique ?

Les machines à calculer peuvent être classées en deux catégories :
- les machines purement automatiques, réservées aux professionnels et sans intérêt pédagogique puisqu'automatiques;
- les machines manuelles (ou programmables) qui, elles, constituent un excellent outil pédagogique. Ces machines ne peuvent en effet qu'additionner deux nombres et elles le font sans erreur, ni fatigue. Par contre, seul leur constructeur, c'est-à-dire l'homme et aussi le petit de l'homme, sait les utiliser pour une tâche déterminée.

Enfin, dans un monde de machines, ne s'impose-t-il pas de montrer dès l'enfance ce qu'est et ce que peut faire une machine et, au-delà, de battre en brèche, par ce moyen, quelques mythes soigneusement entretenus par certains à propos du machinisme.

ANNEXE 6 : Le point de vue pédagogique

Quelques inconvénients ont été soulevés à propos de la présentation traditionnelle de la multiplication :

* quant à la manière de l'introduire (voir I);
* quant à la mécanisation de la technique opératoire (voir VIII);
* quant à la pauvreté des situations donnant l'occasion d'entretenir et d'approfondir les acquisitions.

Les propositions faites de II à IX ne visent pas à détruire cette présentation mais à dégager les idées essentielles, à montrer des points de passage obligé, à esquisser ce qu'on pourrait appeler le paysage de la multiplication. En tant qu'outil de travail, il permet de réutiliser tous les exercices dont on dispose en les insérant seulement aux endroits convenables de ce plan d'étude.

On peut suggérer un rythme de travail qui pourrait être le suivant mais qui n'a évidemment rien d'impératif.

Préparation	voir II	CP , CE_1 , CE_2
1ère phase	voir III et IV	CE_1 , CE_2
2ème phase	voir V et VI	CE_1 , CE_2 , CM_1
3ème phase	voir VII et VIII	CE_1 , CE_2 , CM_1 , 6e
Approfondissement	voir IX	CE_2 , CM_1 , CM_2, 6e, 5e
Prolongement	voir X	CE_2, CM_1 , CM_2, 6e; 5e

Quelques classes de CE_1 ont eu l'occasion d'aborder la multiplication dans l'esprit de ce document. Les maîtres ont constaté que leur temps d'intervention auprès des enfants en était fortement diminué par rapport à la présentation traditionnelle. De façon plus précise, leurs interventions ont eu pour objet :

- d'introduire des damiers (voir II);
- de fournir des outils aux enfants (ciseaux, papier quadrillé, ...);
- de dire que nxp désigne le nombre des cases d'un damier n sur p;
- de diriger les phases de synthèse (III-2, III-3, IV);
- de suggérer l'assemblage des damiers (V-1, V-2);
- d'alimenter les enfants en sujets d'exploration, exercices, etc... c'est-à-dire d'organiser la vie en classe.

ANNEXE 7 : bibliographie

Histoire

- R. TATON : Histoire du calcul (P.U.F. Collection Que Sais-je ?)
- Histoire générale des sciences (P.U.F. 4 volumes)
- DEDRON et ITARD : Mathématiques et Mathématiciens (Magnard)
- CHAUNU : La civilisation de l'Europe classique (Arthaud)

Mathématiques

- E. LUCAS : Machines arithmétiques in Récréations mathématiques (volume III) (Blanchard)
- N. PICARD : Activités mathématiques I (OCDL)
- DONEDDU : Arithmétique générale (Dunod)

Pour les classes

- BANWELL, SAUNDERS, TAHTA : Points de départ (CEDIC)
- Problèmes NUFFIELD (OCDL) : série verte, série pourpre, série rouge.
- WHEELER : Mathématique dans l'enseignement élémentaire (OCDL)

Cahiers de l'I.R.E.M. de Bordeaux

- n°16 (XI-75) - Apprentissage de l'algorithme de la multiplication au CE. SALIN, PERES, GRESLARD, MASSI, QUILLAC, BROUSSEAU.
  - Description de quelques travaux effectués à la suite de deux exercices sur la multiplication donnés dans deux classes de CE2. BEUCHEY.
- n°13 (IX-73) - Notes sur l'apprentissage des opérations dans les naturels. BROUSSEAU.
  - Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels? BROUSSEAU.
  - Construction de formules dans ($\mathbb{N}$,x) au CE1 - Séries I à VIII. DELOR, VINRICH.
- n°12 (IV-73) - Opérations au CM. N. et G. BROUSSEAU, VILLEDIEU, FAUCON, BANNE, MAYSONNAVE.
- n°10 (VI-72) - La multiplication au CE. BROUSSEAU, BOURGEOIS, PERES.
- n° 7 (XII-70) - La multiplication dans $\mathbb{N}$. BEUCHEY.
- n° 2 (XI-69) - Associativité de la multiplication des entiers naturels. BROUSSEAU.

ASSOCIATION DES
PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

29, rue d'Ulm - 75005 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Réunissant à ses débuts des professeurs de l'enseignement secondaire public, elle a progressivement étendu son recrutement à tous les degrés de l'Enseignement public : premier degré, second degré classique et technique, supérieur. A la fin de 1975, elle réunit **quinze mille membres.**

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, "**de la Maternelle à l'Université**", mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc...).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services, avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'Association est organisée en Régionales académiques (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les I.R.E.M. sur des objectifs communs.

Un Comité national élu par correspondance, renouvelé par quart chaque année, désigne un Bureau qui assure le fonctionnement administratif de l'Association, exécute les décisions de l'Assemblée générale et représente l'Association auprès des autorités de l'Education Nationale.

Chaque année, l'A.P.M.E.P. organise des journées d'étude sur des thèmes pédagogiques et scientifiques (moyens audiovisuels, mise en application de la Réforme à divers niveaux, mathématisation du réel, etc...).

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : B.E.P.C., E.N., Baccalauréat, D.E.U.G.

Depuis 1960, l'A.P.M.E.P. édite des ouvrages de documentation pour les maîtres et les vend au prix coûtant. Devançant toute organisation administrative du "recyclage", elle a fourni aux maîtres soucieux de rénover leur enseignement une documentation abondante spécialement conçue pour eux, par des collègues particulièrement compétents et dévoués (consulter la liste des ouvrages dans le Bulletin). La diversité du contenu de ces brochures permet à chaque adhérent de choisir, quel que soit son niveau d'enseignement.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

CONDITIONS D'ADHESION ET D'ABONNEMENT

(taux pour l'année 1976)

Abonnement (valable pour l'année civile)		**80 F**
Pour les membres de l'A.P.M.E.P.		
— Cotisation d'adhésion : trois catégories		
A)	Instituteurs Retraités	**10 F**
B)	Membres dont l'indice de traitement est inférieur ou égal à 350	**20 F**
C)	Membres dont l'indice de traitement est supérieur à 350	**30 F**
— Abonnement au Bulletin		**35 F**

Les adhérents sous les drapeaux bénéficient d'un abonnement gratuit d'un an.
La cotisation seule ne donne pas droit au service du Bulletin.
Les cotisations et/ou abonnements sont perçus par année civile ; cependant, en début d'année scolaire , les nouveaux adhérents peuvent opter pour une des deux solutions suivantes :

— adhérer et s'abonner, avec effet rétroactif : ils recevront les numéros parus pendant l'année civile en cours ; ils devront ensuite, comme les anciens adhérents, faire un versement pour l'année civile suivante, après réception d'une lettre d'appel de cotisation et d'abonnement ;
— adhérer et s'abonner pour l'année civile suivante : dans ce cas, il leur est adressé le dernier numéro à paraître dans l'année civile en cours.

L'abonnement au service du Bulletin donne droit à un service au choix parmi les rubriques suivantes :

— deux catégories de math-annales à choisir parmi quatre

ou

— une brochure : pour 1976, l'APMEP propose un choix parmi les cinq brochures suivantes :

Mots I ; Mots II ; Mots III ; Elem-Math I ; Elem-Math II .

Ce choix est fixé par une fiche jointe à l'appel de cotisation.

MODES DE PAIEMENT

1° Détacher et remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement au verso.

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, 75005 Paris. C.C.P. Paris 5 708-21.

3° Sous enveloppe affranchie adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.

4° Envoyer à votre régionale le coupon de mise à jour du fichier régional.

ATTENTION ! La présente fiche dite "fiche rose" est à utiliser EXCLUSIVEMENT POUR SOUSCRIRE UNE ADHESION (OU UN ABONNEMENT) A L'A.P.M.E.P.

Le RENOUVELLEMENT vous est automatiquement demandé par un "appel à coupon détachable" que vous recevrez courant Janvier.

POUR UN CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ETAT CIVIL) : porter sur une feuille, **et non au dos d'un chèque**, l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), *rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P.*, puis donner les renseignements nouveaux ; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin).

SI VOUS ENSEIGNEZ MATHEMATIQUES ET BIOLOGIE, vous pouvez, pour une cotisation de 30 F et un abonnement jumelé réduit de 40 F, participer aux activités des deux associations APBG et APMEP.
Demandez pour cela au siège, 29, rue d'Ulm, 75005 Paris, une fiche d'adhésion "Maîtres polyvalents" (dite "fiche jaune").

FICHE D'ADHESION OU D'ABONNEMENT

à remplir complètement et à adresser à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, 75005 Paris
accompagné des 3 volets d'un virement postal à A.P.M.E.P. Paris 5.708-21

M. - Mme - Mlle (Rayer les mentions inutiles)

Nom et prénom :

(en capitales d'imprimerie)

Adresse à laquelle vous désirez recevoir le Bulletin :

N° et rue :

(suite)

Code postal

Ville ou pays

Année de naissance :

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Nom et adresse de l'établissement dans lequel vous enseignez : (2)

Nom :

Adresse :

Département (en code) :

Ville :

Titres universitaires (1)

Bachelier ou équiv. . .	1	☐
C.A.P. - C.E.G.	2	☐
Licencié	3	☐
Certifié	4	☐
Agrégé	5	☐
Docteur	6	☐
Autres (maîtrise, etc.)	7	☐

La plus grande partie de votre service est effectuée dans (1) :

Ens. pré-élémentaire . .	1	☐	Cl. préparatoires	7	☐
Ens. élémentaire	2	☐	Ecole normale	8	☐
C.E.G. - C.E.T.	3	☐	I.U.T.	9	☐
C.E.S.	4	☐	Ens. sup. 1er cycle . .	10	☐
Lycée 1er cycle	5	☐	Ens. sup. 2e, 3e cycle	11	☐
2e cycle	6	☐	Administration	12	☐
			Inspection	13	☐

Nouvel adhérent ☐
Ancien adhérent ☐

Année de la première adhésion

Versement pour l'année civile 197

Indice de traitement

1° Membres de l'A.P.M.E.P. avec le service du Bulletin

Catégorie A : 10+35 = 45 F ☐, Catégorie B : 20+35 = 55 F ☐, Catégorie C : 30+35 = 65 F ☐

2° Membres de l'A.P.M.E.P. sans le service du Bulletin

Catégorie A : 10 F ☐, Catégorie B : 20 F ☐, Catégorie C : 30 F ☐

3° Abonnés, non membres de l'A.P.M.E.P., au service du Bulletin : 80 F ☐

Attention : le service du Bulletin au tarif réduit de 35 F, ne peut être envisagé que si le membre de l'A.P.M.E.P. verse **également, chaque année civile,** le montant de la cotisation : (10, 20 ou 30 F suivant la catégorie).

Je joins le titre de paiement complet correspondant à la catégorie choisie : 80 - 65 - 55 - 45 - 30 - 20 - 10 F et j'adresse le tout sous enveloppe timbrée à l'A.P.M.E.P., 29 rue d'Ulm, 75005 Paris.

A. . . . . le . . . .

Signature

1) Mettre une croix dans la case qui convient
2) Ne rien inscrire dans ces cases

Liste des sections régionales et départementales

arrêtée au 1.11.75. Pour chaque section, nous donnons l'adresse d'un animateur à qui les Collègues s'adresseront pour avoir des informations supplémentaires sur l'activité de sa section. Entre crochets [ ], nous donnons les numéros des départements qui sont du ressort de la régionale. Entre doubles parenthèses (( )) le numéro de chèque postal quand il y a lieu (sauf avis contraire, l'intitulé du compte est "Régionale A.P.M.E.P. de...").

AIX-MARSEILLE [04, 05, 13, 84]
Pierre NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille ((Marseille 28-94-82)).

AMIENS [02, 60, 80]
Jean CAPRON, 12 rue A. Chénier, Les Primevères, 80000-Amiens. Tél. (22) 92.16.79 ((Lille 862-04)).
Janine PROTIN, résidence de l'Abbaye, A36, rue du Dr Calmette, 60200-Compiègne.

BESANCON [25, 39, 70, 90]
Martial THIRIOT, I.U.T., 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon ((Dijon 2505-45 V)).
Section du Jura : ROBBE, Les Près Cantaux, 39-Salins.
Section de Belfort : J. DAUTREVAUX, 41 rue du Château-Essert, 90000-Belfort.

BORDEAUX [24, 33, 40, 47, 64]
Pierre LOUQUET, 47 cours de la Somme, 33000-Bordeaux ((Bordeaux 3902-91)).
Section de la Dordogne : Mlle MARCHIVIE, 12 rue des Vaures, 24100-Bergerac.
Section de la Gironde : TEXTIER, Boutus, Beychac et Caillau, 33-Saint-Germain-du-Puch.
Section des Landes : LAVIGNE, 40-Aire-sur-Adour.
Section du Lot-et-Garonne : DE LATAULADE, 1 rue Claude Rivemale, 47-Villeneuve-sur-Lot.
Section des Pyrénées-Atlantiques : CELHAY, allée de la Forêt, 64600-Anglet.

BREST [29]
LE ROUX, 24 rue de Vendée, 29-Brest ((Rennes 25-5927)).

CAEN [14, 50, 61]
Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu ((Rouen 1084-56 M)).

CLERMONT-FERRAND [03, 15, 43, 63] ((Clermont 1569-75))
André HENNETON, Sauvagnat Ste Marthe, 63500-Issoire.

DIJON [21, 58, 71, 89]
O. RENAUT, 38 bd. de l'Université, 21-Dijon ((Dijon 1751-05 V)).
Section de l'Yonne : D. REISZ, 11 rue du Saule, 89610-Vincelles.
Section de la Saône-et-Loire : MICHELOT, 32 avenue Boucicaut, 71100-Chalon-sur-Saône.
Section de la Nièvre : PUISSEGUR, 2 place de la Résistance, 58000-Nevers.
Section de Mâcon : Mlle DOMINIQUE, rue du Lavoir Charnay, 71000-Mâcon.

GRENOBLE [07, 26, 38, 73, 74]
C. BENZAKEN, 17 avenue du Vercors, 38240-Meylan ((Grenoble 349-49 U)).
Section de Chambéry : COMPAIN, Lycée Technique, 1 avenue du Colombier, 73000-Chambéry.
Section de Vienne : CHARNAY, Establin, 38780-Pont-Evêque.
Section d'Annecy : VIDIANI, B.P. 316, 74000-Annecy.

LILLE [59, 62]
MAS, Lycée Faidherbe, rue A. Carrel, 59-Lille ((Lille 4242-55)).
Section du Pas-de-Calais : LAURENT, 15 rue Albert-1er, 62-Arras.

LIMOGES [19, 23,87]
UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87100-Limoges ((Limoges 117-66 P)).
Section d'Egletons : HAKENHOLZ, CES Albert Thomas, 19300-Egletons.

LYON [01, 42, 69]
Gilbert CROS, 86 avenue Jean-Jaurès, 69007-Lyon ((Lyon 7081-18)).
Section de Saint-Etienne : M. BOUTEILLE, Résidence de l'Hippodrome, Bât. D4, 42390-Villars.
Section de Bourg : R. CHARNAY, E.N., 01-Bourg-en-Bresse.

MONTPELLIER [11, 30, 34, 48, 66]
Mme FUCHS, 10 rue des Glaïeuls, 34-Montpellier ((Montpellier 385-25 W)).
Section du Gard : J. CHABRIER, 10 rue de Loye, 30000-Nîmes.
Section des Pyrénées Orientales : GALTIE, 16 rempart Villeneuve, 66-Perpignan.
Section de l'Aude : Mlle CABANEL, Lycée Lacroix, 11-Narbonne.

NANCY [54, 55, 57, 88]
MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54-Nancy ((Nancy 1394-64 S)).
Section de la Moselle : E. SAUVADET, 17 rue du Fort, Longeville-les-Metz, 57000-Metz.

NANTES [44, 49, 53, 72, 85]
Mme PEYROT, 41 Les Hauts de l'Erdre, 44240-La Chapelle/Erdre.
Section de la Sarthe : KLAEYLE, 2 impasse Fizeau, 72100-Le Mans.

NICE [06, 20, 83] ((Marseille 5758-43))
J. MARIA, 5 ter rue Edith Cavell, 06000-Nice.
Section du Var : M.J. PAPAZIAN, La Colle d'Artaux, 83500-La Seyne.

ORLEANS-TOURS [18, 28, 36, 37, 41, 45]
P. MONSEILLER, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45045-Orléans Cedex ((La Source 1440-09)).
Section de Tours : Monique GODICHEAU, Appt. 235, 14 rue Léonard de Vinci, 37170-Chambray-lès-Tours.
Section de Montargis : KISTER, 52 rue des Vignes, 45120-Chalette.

PARIS [75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, 95]
J. ADDA, 10 rue Vandrezanne, 75013-Paris.
Section de la Seine-Saint-Denis : M. LOI, 68 rue des Ecoles, Bât. A 318, 93300-Aubervilliers.
((Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Paris 25 108 63)).
Bulletin de la Régionale : Gilbert GRIBONVAL, 129 avenue du Général Leclerc, 91120-Palaiseau.

POITIERS [16, 17, 79, 86]
J. BOROWCZYK, 1 rue de Provence, 86000-Poitiers ((Bordeaux 38-52-59)).
Section des Deux Sèvres : FROMENTIN, 29 avenue de Nantes, 79000-Niort.
Section de la Charente : MARRON, CES La Grande Garenne, rue Pierre Aumaître, 16000-Angoulême.
Section de la Charente Maritime : Y. DARDANT, 25 rue Philippe Vincent, 17000-La Rochelle.

REIMS [08, 10, 51, 52]
THIERUS, 57 rue David, 51100-Reims ((Châlons-sur-Marne 1262-80 L)).
Section des Ardennes : ZILLI, 8 Le Grenet Riglemont, 08100-Charleville Mézières.
Section de l'Aube : HAUBRY, 16 A rue Jules Didier, 10120-Saint-André-les-Vergers.
Section de la Haute-Marne : Mlle GODON, 8 rue de Lorraine, 52000-Chaumont.
Section de la Marne : SCHACHERER, 26 rue du Moulin à Vent, 51200-Epernay.

RENNES [22, 35, 56]
LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon ((Rennes 1707-29)).

ROUEN [27, 76]
Michèle CHOUCHAN, 16 rue du Bailliage, 76000-Rouen ((Rouen 1350-13 D)).
Section du Havre : PESTEL, 2 rue J. Langlois, 76-Le Havre.

STRASBOURG [67, 68]
SYLVESTRE, 17 rue Grimling, 67200-Strasbourg.
Section du Haut-Rhin : LEVASSORT, 27 rue Georges Sand, 68-Mulhouse-Dornach.
Section de l'Allemagne Fédérale : G. TOUYET, S.P. 69.037 F.F.A.

TOULOUSE [09, 12, 31, 32, 46, 65, 81, 82]
Line MAILHOS, Université Paul Sabatier, 31077-Toulouse Cedex ((Toulouse 2035-51)).
Section de l'Ariège : Mme GALY, 96 avenue V. Pilhes, 09400-Tarascon-sur-Ariège.
Section de l'Aveyron : SCHIOPETTO, CES La Penderie, 12000-Rodez.
Section du Gers : Mlle BORIES, 29 rue de Metz, 32000-Auch.
Section des Hautes-Pyrénées : TARBOULIER, 36 rue M. Lamarque, 65000-Tarbes.
Section du Tarn-et-Garonne : FOURNIE, CES Bourdelle, boulevard Herriot, 82000-Montauban.
Section du Lot : Mme PICARD, E.N., av. Henri Martin, 46000-Cahors.
Section du Tarn : Christine MANDIRAC, Lycée de Carmaux, 81400-Carmaux.

Pour les **nouveaux adhérents** et les adhérents ayant changé de résidence :

COUPON DE MISE A JOUR DU FICHIER REGIONAL

A détacher et à envoyer d'urgence au Président de votre Régionale (adresse ci-dessus)

Nom : . . . .

Prénom : . . . .

Adresse personnelle : . . . .

Etablissement : . . . .

Fonction : . . . .

☐ Nouvel adhérent

☐ Ancien adhérent muté dans la circonscription de la Régionale

nº . . . .

Mettre une X dans la case convenable.