BIBLIOTHEQUE D'INFORMATION
sur L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Publication de l'A.P.M.E.P. n° 11
(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés pour l'Ecole Elémentaire suivies d'un récapitulatif

TOME II
Brochure 1975

Représentations graphiques
Application, fonction, bijection
Partitions équivalence
Partages

Divisibilité
Division euclidienne
Division
Courrier des lecteurs

ERRATA DE MOTS II

Page 8 de DIVISION ;

ligne 2, *lire* b = 35 *et non* b = 3,5

ligne 3, *lire* 3500 *et non* 350

Page 18 de REPRESENTATIONS GRAPHIQUES,

ligne — 9, *lire* d'une certaine mode.

SOMMAIRE

Préface
Sept rubriques: REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
PARTITION, EQUIVALENCE
PARTAGES
DIVISIBILITE
DIVISION EUCLIDIENNE
DIVISION
Courrier des lecteurs
Index terminologique des brochures I et II
Lexique récapitulatif pour les brochures I et II

Chaque rubrique forme un tout mais comporte des renvois à d'autres rubriques. Nous avons limité ces renvois en rappelant quelquefois, au moment où nous utilisons un mot, sa définition donnée dans une autre rubrique. Pour plus de commodité, certaines définitions sont regroupées dans un lexique à la fin de la brochure (mais pour plus de détail le lecteur pourra se reporter à la rubrique indiquée).

On peut lire les rubriques dans un ordre arbitraire. Cependant les quatre dernières rubriques sont liées et la dernière reprend sous un éclairage différent les notions présentées dans les précédentes.

La brochure 1974 contenait EGALITE; EXEMPLE et CONTRE–EXEMPLE; COUPLE; RELATION BINAIRE; NOMBRE NATUREL; ENTIERS et RATIONNELS; NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE; FRACTION; ENSEMBLES DE NOMBRES.

La brochure 1976 contiendra *probablement*: RELATION D'ORDRE; CONGRUENCES; NUMERATION; OPERATION; OPERATEUR; ...

PREFACE

L'A.P.M.E.P. a pensé aider les instituteurs et d'autres enseignants dans leur enseignement de la mathématique en rédigeant la présente brochure.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent**.

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire: l'A.P.M.E.P. ne le peut pas et ne le veut pas. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique. Les formateurs (I.D.E.N., professeurs d'E.N., animateurs des I.R.E.M., ...) trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les instituteurs isolés.

•

• •

---

* Pour se le procurer, s'adresser à

M. BLONDEL
154, avenue Marcel Cachin
92 CHATILLON—SOUS—BAGNEUX

Les brochures déjà publiées contiennent un nombre limité de rubriques, qui ont été proposées à quelques instituteurs groupés ou isolés; leurs critiques, leurs suggestions ont été soigneusement prises en considération dans la mise au point. Une troisième brochure est en chantier et pourrait être publiée dans un an. Nous demandons un peu de patience à ceux qui s'étonneraient des renvois à des rubriques ... qui ne sont pas encore rédigées.

Le choix des rubriques déjà rédigées n'est pas totalement arbitraire et reflète un certain souci de priorité; mais il a été contrebalancé par des contraintes diverses, en particulier par le volume de ces deux brochures. Il n'y a donc pas lieu de tirer une conclusion définitive, quant à une certaine "philosophie de l'enseignement", de la présence ou de l'absence de tel ou tel mot.

Un index terminologique donne la liste des mots mathématiques qui figurent dans *les deux* brochures.

A l'occasion des notions abordées, nous avons essayé d'indiquer les principaux termes rencontrés le plus souvent dans les ouvrages de mathématique et les manuels.

Certains termes relevant de la technique mathématique ne se trouvent pas dans les dictionnaires de la langue française; ils n'en sont pas moins commodes (*contre-exemple*, entre autres).

•

• •

Nous insistons beaucoup sur le fait que cet ouvrage s'adresse *aux maîtres*, et nullement aux élèves.

Quant à l'utilisation de ces mots en classe, nous pensons que la question "Faut-il utiliser tel mot ? " pose mal le problème, et n'a pas de réponse générale. L'essentiel est de mettre les enfants en situation de construire les notions; la nécessité de les nommer ne viendra que du besoin de communiquer et surtout dans les cas où ces notions se révéleront d'usage fréquent. Les mots ou les signes choisis pour les désigner ont en fait une importance secondaire, et les choix peuvent évoluer dans le temps.

Une preuve de cette importance relative du vocabulaire et de l'impossibilité d'une normalisation en ce domaine est fournie par les variations qui peuvent exister d'une rubrique à l'autre de la présente brochure (exemple: nombre octal, octaire, huital, huitaire, ...).

Nous sommes persuadés qu'on peut faire, dans les classes élémentaires, un excellent travail mathématique avec un nombre très limité (pratiquement nul au début de la scolarité) de termes purement mathématiques. Et nous regretterions amèrement notre entreprise si ces quelques mots-clés ouvraient la porte encore davantage au déferlement, néfaste à notre avis, du vocabulaire technique infligé aux jeunes enfants.

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillis avec reconnaissance.

Ecrire à Louis DUVERT

21, boulevard des Castors — 69005 LYON

Juin 1975

La Commission "MOTS"

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

I. Représentation graphique et communication
II. Quelques exemples
III. Fonctions de la représentation graphique
IV. Intérêt et limites d'emploi des représentations graphiques

I. Représentation graphique et communication

Pour communiquer des informations, on dispose de plusieurs outils appelés "langages". Le plus rudimentaire est la mimique; les plus précis sont peut-être les langages mathématique et informatique; le plus commun est la langue maternelle.

Un langage est constitué, en première approximation, d'une collection de signes sensibles (sons, graphismes, ...) fixés par convention et soumis à des règles d'assemblage; faute de connaître ces conventions et ces règles, on ne peut pas utiliser le langage, parlé ou écrit.

Cette rubrique essaie de dégager quelques caractéristiques des représentations graphiques en tant qu'éléments de langage. On y rappellera l'usage qu'on en fait en mathématique*, où elles revêtent des aspects variés: arbre, figure (en géométrie), diagramme, épure, réseau, tableau, histogramme, organigramme, etc... et l'on fera souvent allusion au rôle essentiel qu'elles jouent dans de nombreuses activités humaines: géographie (cartes), constructions (plans), code de la route (panneaux de signalisation), partitions de musique, aide aux raisonnements de toutes sortes, ...

* On en trouve des exemples dans la plupart des rubriques de MOTS.

II. Quelques exemples

II.1. (Extrait de Condevaux et Chatelet: "J'apprends à raisonner" (CM 1, CM 2) Bourrelier, 1949; n° 15 page 51).

Une photographie a 4cm de largeur et 65mm de hauteur. On veut coller des photographies sur une page d'album en deux rangées de 5 photos l'une au-dessous de l'autre, avec autour une marge de 35mm. Quelles devront être, en centimètres, la longueur et la largeur de la page d'album ? (Faire une figure).

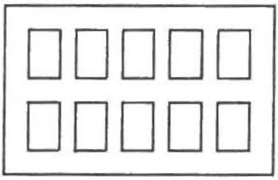
Est-ce pour visualiser les calculs à réaliser, ou pour bien faire apparaître les diverses éventualités possibles, que l'auteur incite à dessiner une figure ? Ne va-t-il pas de soi qu'il est bien difficile de résoudre le problème sans une (ou même plusieurs) figure (s) ?

Que signifie "avec autour une marge de 35mm" ? La marge sépare-t-elle les photos, ou celles-ci sont-elles accolées l'une à l'autre ?

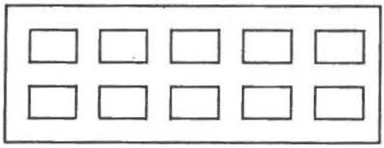
L'esthétique qui préside à la réalisation d'un album peut inciter le lecteur à *choisir* de ne pas accoler les photos; mais ce choix en fait apparaître d'autres.

Essaiera-t-on de disposer les photos régulièrement ?

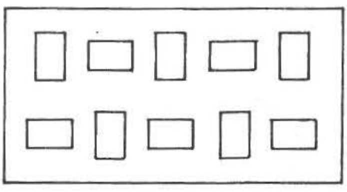
Ainsi:



ou ainsi:



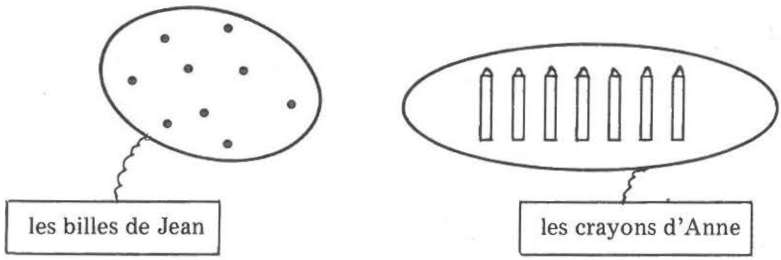
ou encore ainsi:



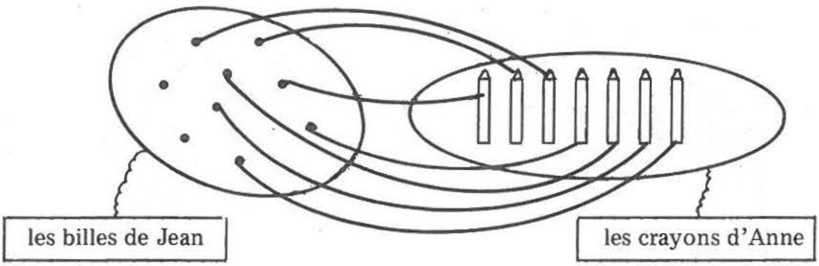
ou bien irrégulièrement ?

Nous laissons au lecteur le soin d'envisager d'autres dispositions possibles et de calculer pour chacune d'entre elles les dimensions de la page; mais il faudrait s'entendre sur le sens du mot "marge". Après quoi, ... le lecteur pourra se demander si c'est bien ainsi que l'on réalise des albums de photos !

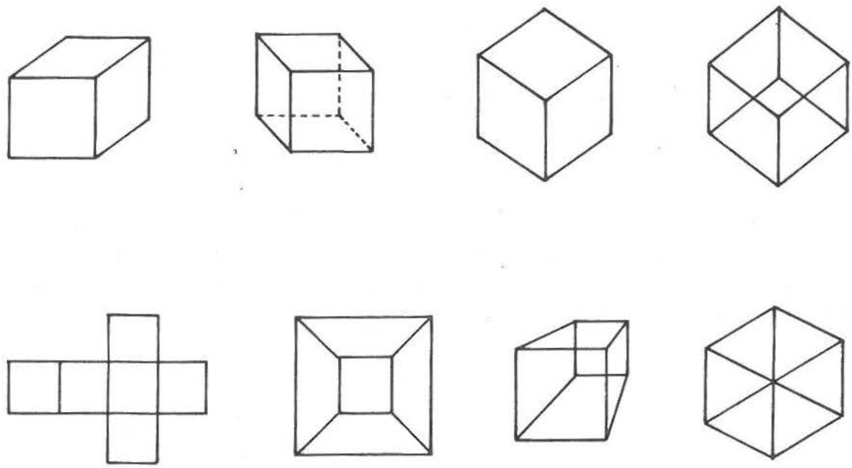
II.2. Dans les cours préparatoires, on aide les enfants à conquérir le concept de naturel: ils manipulent des collections d'objets. Pour garder une trace de ces manipulations, on représente la situation par des dessins du type suivant:



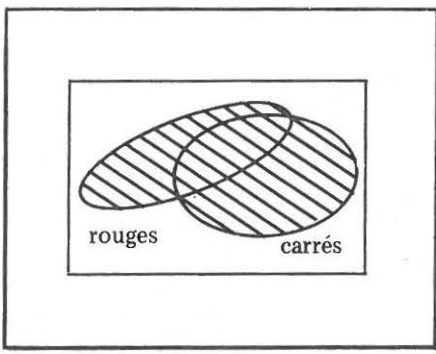
Puis, lorsqu'on se demande si les collections ont autant d'objets l'une que l'autre, on obtient des dessins tels que:



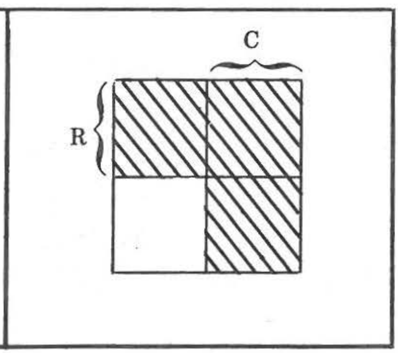
II.3. L'exploration de l'espace conduit à de nombreuses représentations. Au cours élémentaire, on observe des cubes; voici des dessins que l'on peut rencontrer à cette occasion:



II.4. Voici trois représentations graphiques relatives à une activité de classification de blocs logiques où on s'intéresse à l'attribut *rouge ou carré.*

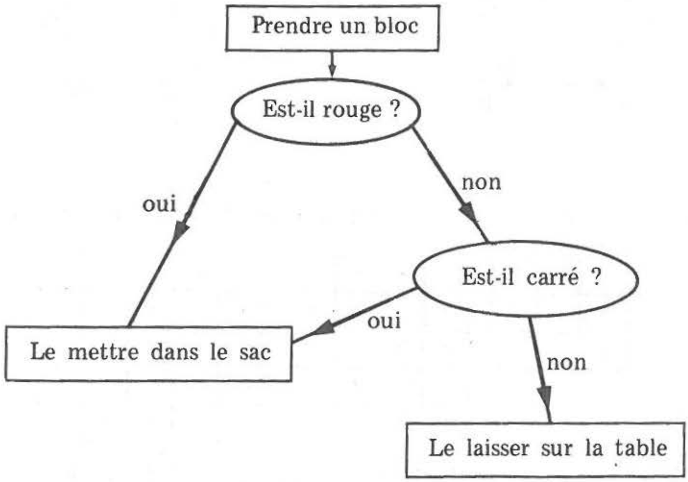


Première représentation



Deuxième représentation

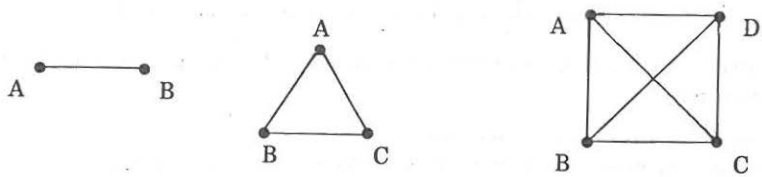
Consignes pour mettre dans un sac les blocs *rouge ou carré:*

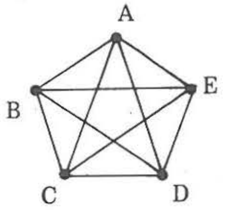


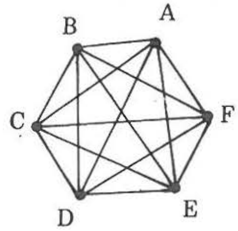
Troisième représentation

II.5. Quelques personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien de poignées de mains échangent-elles ? (Dans ce qui suit, on conviendra que, quand *deux* personnes se serrent la main, on compte *une* poignée de mains).

Voici des dessins où le trait joignant par exemple A et B représente *la* poignée de mains échangée par A et B:







En voici d'autres où chaque croix représente *une* main tendue:

	A	B
A		X
B	X	

	A	B	C
A		X	X
B	X		X
C	X	X	

	A	B	C	D
A		X	X	X
B	X		X	X
C	X	X		X
D	X	X	X	

	A	B	C	D	E
A		X	X	X	X
B	X		X	X	X
C	X	X		X	X
D	X	X	X		X
E	X	X	X	X	

	A	B	C	D	E	F
A		X	X	X	X	X
B	X		X	X	X	X
C	X	X		X	X	X
D	X	X	X		X	X
E	X	X	X	X		X
F	X	X	X	X	X	

Ces deux suites de dessins constituent un moyen commode et efficace d'obtenir les quelques résultats numériques consignés dans le tableau suivant:

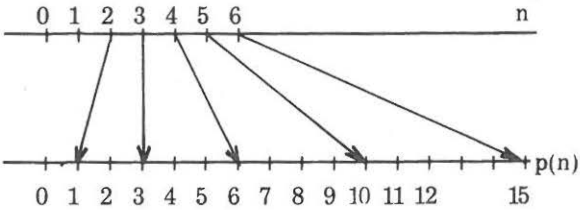
n	2	3	4	5	6
p(n)	1	3	6	10	15

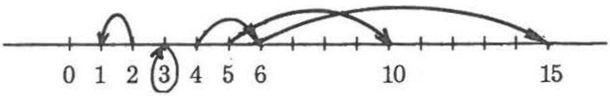
où p(n)* désigne le nombre de poignées de mains échangées par n personnes.

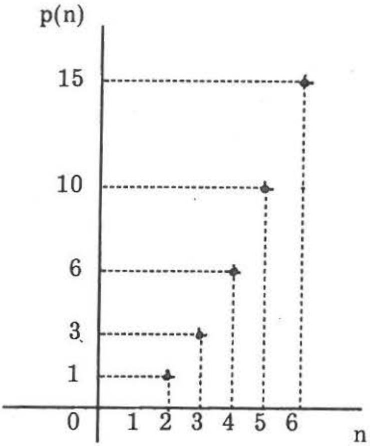
* p(n) se lit "p de n"; voir APPLICATION — FONCTION — BIJECTION.

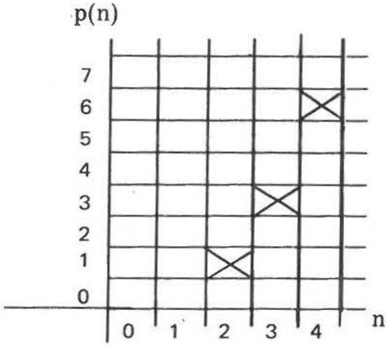
Le texte ne précise pas le nombre n; il nous incite, de ce fait, à poursuivre au-delà des résultats obtenus pour dégager une "loi", comme on dit parfois; dans cette intention, on peut essayer diverses représentations graphiques:

n	p(n)
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15





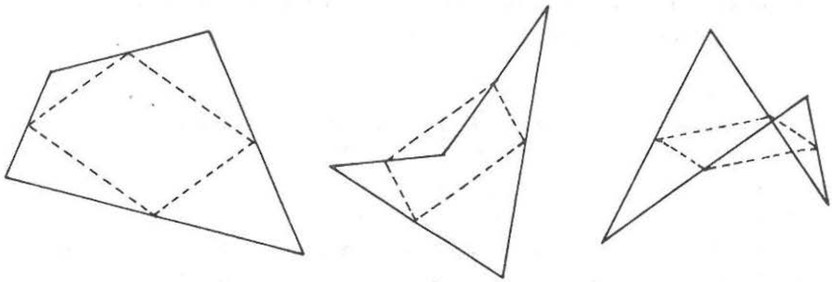




II.6. N'oublions pas les figures de géométrie.

Ainsi le théorème:

"Dans tout quadrilatère, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme" peut être illustré par les figures suivantes:



II.7. De même, le théorème:

"Les symétriques de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport à ses côtés sont des points du cercle circonscrit"

peut être illustré par les figures suivantes:

(L'orthocentre d'un triangle est le point commun à ses trois hauteurs)

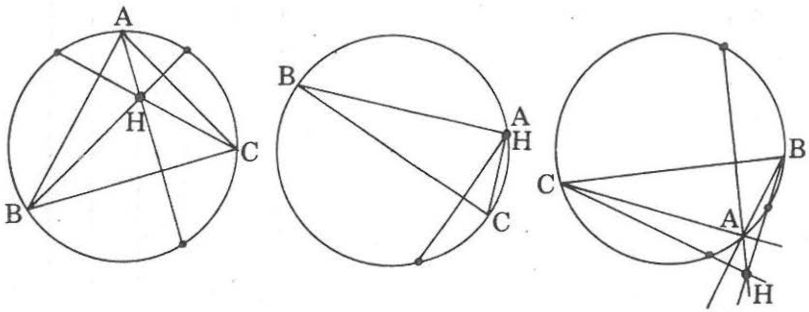


figure II.7.a. figure II.7.b. figure II.7.c.

II.8. Ces exemples posent quelques questions:

- Est-il nécessaire ou simplement utile de faire un dessin ?
- Si oui, lequel ? (II.3.). Certains schémas sont-ils plus efficaces que d'autres ? (II.4.)

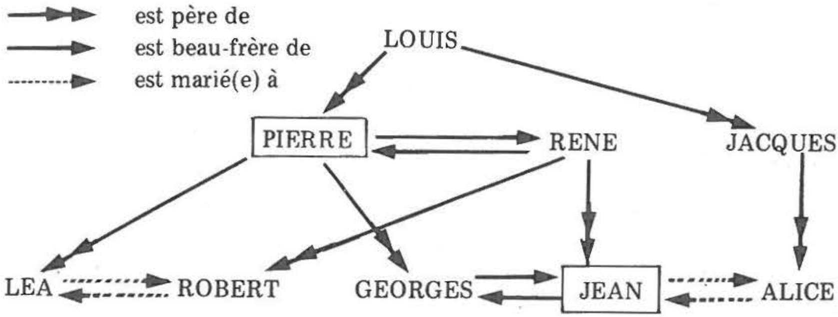
- Pour une situation donnée, faut-il chercher des représentations variées, ou bien y a-t-il un schéma-type qui serait imposé par des habitudes, voire par la mode ? (II.2.)
- Quelles fonctions peut-on assigner à une représentation graphique ?

III. Fonctions de la représentation graphique

Pour tenter de les mettre en évidence, il est intéressant de déborder le cadre des seules mathématiques qui, certes, utilisent des représentations graphiques, mais ni plus, ni moins, et en tout cas au même titre que d'autres activités humaines: géographie (cartes, arbres, courbes isobares, courbes isothermes), économie (courbes, histogrammes, diagrammes), histoire (cartes, arbres généalogiques), constructions (plans, épures), météorologie (cartes, courbes), etc...

Exemple:
Pierre dit à Jean: je suis le père de ton beau-frère, et le frère de ton beau-père; je suis le beau-père de ton frère et le beau-frère de ton père. (Extrait de: "Le Petit Archimède"*, numéro 2).

Devant ce texte, une réaction, saine, pensons-nous, consiste à abandonner le langage usuel au profit d'une représentation graphique. On se donne alors des conventions d'écriture: utiliser des prénoms pour désigner les personnes successivement introduites par le texte, encadrer les deux prénoms, Pierre et Jean, donnés par celui-ci, figurer les parentés par des signes distincts et indiquer leurs significations dans une légende.



* Illustré scientifique réalisé par et pour les élèves de l'enseignement du second degré. (CEDIC, 93, avenue d'Italie, 75013 PARIS).

Dresser ce schéma (bien plus, d'ailleurs, que le lire) permet au lecteur de pénétrer le sens de ce texte difficile, lui ôte même son aspect énigmatique, et montre en outre ses ambiguïtés en faisant toucher du doigt certaines imperfections de la langue écrite:

— L'article défini *le* de "Je suis le frère de ton beau-père" laisse-t-il entendre que ce beau-père n'a qu'un seul frère ? Peut-on le remplacer par *un* ? ou même le supprimer ?
— L'adjectif possessif *ton*, employé quatre fois, est à l'origine d'une même ambiguïté. Quand, parlant de M. DURAND, Mme DUPONT déclare: "Je suis sa fille", cela signifie-t-il que M. DURAND n'a qu'une fille ?
— Quel est le sens du mot "beau-frère" ? Frère de l'épouse, mari d'une soeur, mari d'une soeur de l'épouse (ou encore, mais ce ne peut être le cas ici, mari d'une soeur du mari) ?

De plus, on peut exploiter le schéma: on découvrira par exemple qu'Alice et Léa ont le même grand-père paternel (donc ont le même patronyme), et sont mariées à deux frères.

Ce schéma, comme chacun des schémas représentés dans II., est en fait un moyen commode d'organiser et d'enregistrer l'information, de la communiquer et de l'exploiter.

III.1. Organiser et enregistrer l'information

Une activité classique à l'école élémentaire consiste à étudier les trajets suivis par les enfants pour venir à l'école. Ce travail comporte le tracé d'un plan, ce qui suppose un effort d'analyse de la réalité vécue mettant en évidence: l'école, les maisons, des points de repère, etc... (c'est-à-dire les éléments pertinents de la situation), l'ordre dans lequel apparaissent les repères, leurs distances mutuelles, etc... (c'est-à-dire les relations entre les éléments pertinents).

A l'inverse, si les enfants d'une classe désirent des informations sur la région où ils vivent, ils consulteront un atlas qui leur offrira un choix de cartes (relief, fleuves et rivières, densité de population, productions, etc...). A propos d'un fleuve par exemple, on trouvera une carte de ses affluents, un diagramme de son débit au cours de l'année, son profil, un tableau comparant sa longueur à celles d'autres fleuves, etc...

A travers ces deux exemples, le dessin apparaît comme un inventaire commode — parce que visuel, exhaustif et condensé — d'un certain type d'information, et comme une mémoire artificielle (atlas de géographie, plan de métro, arbre généalogique, plan d'un bateau, etc...).

Il en va de même dans les exemples cités en II. (en particulier II.3. et II.5.), dans les tables d'opérations (addition, multiplication, etc...) ou de fonctions (trigonométrie, logarithmes, ...), dans le tracé d'une "courbe représentative" d'une fonction.

Le dessin dépend du type d'information à représenter (cf. géographie); pour cette raison, l'analyse d'une situation utilise souvent plusieurs schémas. Privilégier l'un de ces schémas, c'est, en fait, ne plus "voir" qu'une partie de la situation. En géométrie, par exemple, les triangles sont, à tort, presque toujours dessinés avec trois angles aigus, un côté "horizontal", une hauteur "verticale"; à propos de l'exemple II.7., certains élèves raisonnent correctement à l'aide de la figure II.7.a. mais sont très embarrassés par II.7.c.; quant à II.7.b., ils croient souvent, à tort, qu'un triangle rectangle n'a qu'une hauteur.

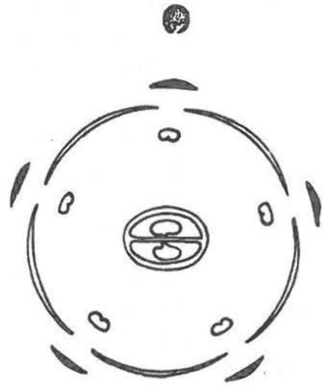
Le dessin est donc un outil privilégié pour enregistrer les informations recueillies dans une situation donnée; mais s'enfermer dans un type unique de représentation, c'est perdre l'efficacité de cet outil.

III.2. Communiquer l'information

Dans de très nombreuses situations, il est fort malcommode, parfois même impossible, d'expliquer quelque chose à l'aide du langage usuel sans recours au dessin. Par exemple: décrire sa maison, aider un étranger à trouver son chemin, décrire les variations de la natalité entre 1700 et 1900 ou donner la descendance de tel personnage. Plus typiquement: toute activité de construction architecturale, mécanique, électronique, navale, requiert plans, schémas, épures ...

Mais pour que la communication s'établisse, il est indispensable de joindre au dessin les indications nécessaires à l'identification des objets représentés. C'est ainsi qu'une carte géographique est assortie d'une légende et que les plans de récepteurs de radio utilisent des symboles normalisés pour représenter les composants des circuits.

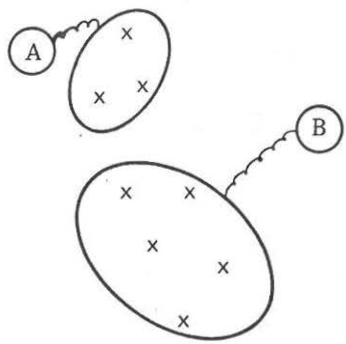
Sans doute, des lecteurs auront-ils identifié l'objet représenté par le dessin ci-contre; pour d'autres, savoir qu'il s'agit du diagramme d'une fleur est indispensable ... mais non suffisant: que représente chaque signe ? Comment l'architecture de la fleur est-elle traduite ? Toutes les fleurs possèdent-elles un schéma du même type ?



En mathématique, le statut des représentations graphiques n'est pas différent. Dans certains contextes, les signes graphiques ont un sens généralement admis par tous; c'est le cas en géométrie où le point peut être figuré par ×, ou par +, ou par · ; le segment par ×——× ou par •——• , la droite par —— , etc... D'autres représentations sont ambiguës en l'absence de légende.

Par exemple:
Combien y a-t-il d'objets dans la réunion des deux ensembles A et B figurés ci-contre ?

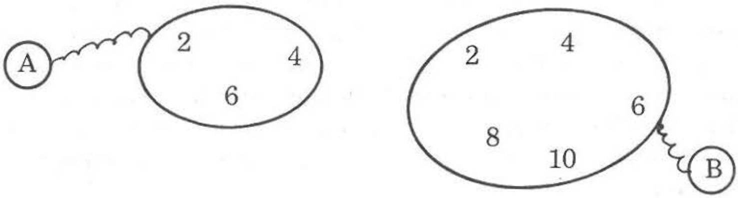
On ne peut répondre à la question posée tant que le croquis ci-contre, pourtant bien dessiné, n'est pas lisible, c'est-à-dire assorti d'une signification. Voici deux interprétations, aussi légitimes l'une que l'autre, et qui ne sont pas les seules possibles:



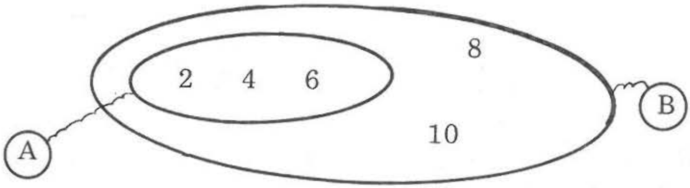
a) A est un ensemble de trois filles, B est un ensemble de cinq garçons (la réponse est: 8).

b) A est l'ensemble des naturels pairs compris entre 1 et 7; B, l'ensemble des naturels pairs compris entre 1 et 11 (la réponse est: 5).

A propos de cette interprétation b), il serait fâcheux de penser que, sous prétexte que "les patates ne se coupent pas", les ensembles A et B n'ont aucun élément commun. Cette interprétation peut être illustrée aussi bien par



que par



Préférer le deuxième dessin, c'est chercher à traduire que A est un sous-ensemble de B; mais, pour qui ne dispose que de ce dessin, l'interprétation "A est un sous-ensemble de B" n'est pas la seule possible; en effet, dans ce dessin, si A ne peut désigner que $\{2 ; 4 ; 6\}$, B au contraire peut désigner aussi bien $\{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$ que $\{\{2 ; 4 ; 6\} ; 8 ; 10\}$. Dans le premier cas, A est un sous-ensemble de B (B a cinq éléments); dans le second cas, l'ensemble A est un élément de B (B a trois éléments).

Bien sûr, une telle ambiguïté est généralement levée par le complément d'informations donné oralement; mais, en l'absence de telles informations, un élève qui adopterait une interprétation différente de celle du maître ne serait pas à blâmer; au contraire !

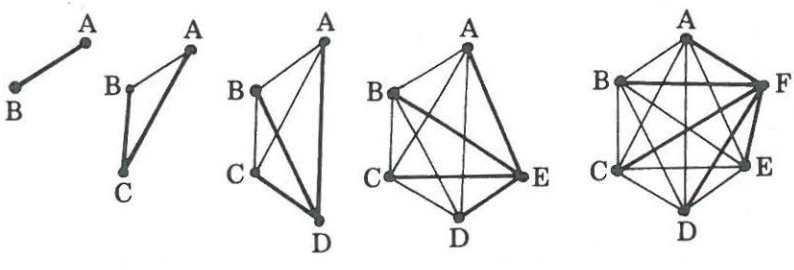
III.3. Exploiter l'information

Représenter graphiquement l'information recueillie dans une situation donnée n'est ni un but en soi, ni une attitude passive, mais constitue un outil pour une exploration plus détaillée.

a) Si des enfants décident d'étudier la rivière qui passe à proximité de l'école, peut-être partiront-ils regarder la rivière; auquel cas il

est peu probable qu'ils découvrent autre chose que le plaisir de jouer dans l'eau (c'est déjà beaucoup !).
Si, de retour en classe, ils parlent de ce qu'ils ont observé, et s'ils s'organisent en vue d'une deuxième sortie à la rivière, le schéma ci-dessous (représentant les "objets" à observer et leurs "interactions"), si sommaire soit-il, donnera un cadre pour l'observation qui leur permettra vraisemblablement de dépasser des considérations banales ou superficielles; en retour, suivant les résultats de leurs nouvelles observations, ils pourront éventuellement modifier le schéma.

b) Revenons à l'exemple cité en II.5. où la situation étudiée donne lieu à deux types de représentations. Les premières, directement issues de la situation — chaque personne est représentée par un point, chaque poignée de mains par un trait —, peuvent sembler naturelles. Mais dès que le nombre des personnes augmente, le dessin se complique et présente de grosses difficultés de lecture, à moins que l'on ne s'aperçoive que les croquis peuvent se construire de proche en proche par l'adjonction d'un point, laquelle entraîne l'adjonction d'autant de traits qu'il y avait de points dans le croquis précédent:



ce qui permet d'améliorer certains tableaux de II.5. :

2 points	3 points	4 points	.........n points	(n + 1) points
	2 traits nouveaux et $\boxed{1}$ trait ancien	3 traits nouveaux et $\boxed{3}$ traits anciens	n traits nouveaux et $\boxed{p(n)}$ traits anciens	
$\boxed{1}$ trait	$\boxed{3}$ traits	$\boxed{6}$ traits	$\boxed{p(n)}$ traits	p(n + 1) traits

ou encore

n	p(n)		
2	1		
		+2	
3	3		3 = 1 + 2
		+3	
4	6		6 = 3 + 3
		+4	
5	10		10 = 6 + 4
		+5	
6	15		15 = 10 + 5
⋮	⋮		
n	p(n)		
		+n	
n+1	p(n+1)		p(n+1) = p(n) + n

Ces deux tableaux conduisent à penser que l'égalité
$$p(n+1) = p(n) + n$$
décrit la situation.

Mais il semble que nous ayons ainsi changé de problème sans entrevoir encore un moyen de calculèr p(n).

Les représentations en damier peuvent paraître moins naturelles parce que le nom de chaque personne est écrit deux fois et que chaque poignée de mains est représentée par deux croix. Par contre, il est visible qu'indépendamment du nombre des personnes, d'une part on a un damier carré, d'autre part les seules cases ne contenant pas de croix sont distribuées sur une diagonale. Compte tenu de ces constatations, le dénombrement des croix devient quasi immédiat, soit que l'on voie n lignes de (n—1) croix (d'où n(n—1) croix), soit que l'on voie un damier de n^2 cases dont n ne contiennent pas de croix (d'où $n^2 - n$ croix). On obtient ainsi deux expressions du nombre p(n) :

$$p(n) = \frac{1}{2} n (n-1) \qquad \text{et} \qquad p(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

et comme "sous-produit", l'égalité, vraie quel que soit le naturel n:

$$n (n-1) = n^2 - n$$

c) Un autre exemple est celui de la géométrie, où on a le plus souvent intérêt à se familiariser avec le problème proposé en traçant des figures qui guident l'intuition, ou qui parfois fournissent des contre-exemples.

d) En fait, le dessin permet d'exploiter l'information à deux niveaux:

1° Celui de la situation étudiée: s'il faut prouver les théorèmes cités en II.6. et II.7., c'est grâce à la figure qu'on pourra étudier des corrélations entre les hypothèses, avoir une compréhension en quelque sorte plus globale de la situation étudiée, et bâtir ensuite une preuve de portée générale.

Voici un autre exemple, tiré de l'algèbre, où traditionnellement on fait peu de figures: établir l'identité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

Une preuve consiste à dire:
Par définition

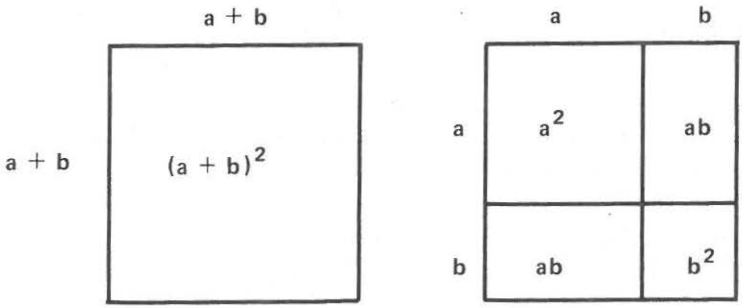
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

or $\qquad (a + b)(a + b) = (a + b)\,a + (a + b)\,b$

d'où $\qquad (a + b)(a + b) = a^2 + 2\,ab + b^2$

soit $\qquad (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

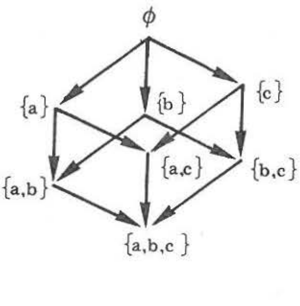
Cette preuve est certes convaincante (pour le maître tout au moins), mais que d'erreurs ont été commises par oubli du "2ab" !
Ne verrait-on pas mieux les ressorts de cette preuve en rappelant que, dans le cas où a et b sont positifs, a^2 désigne l'aire du carré de côté a, et en représentant $(a + b)^2$ de deux façons:



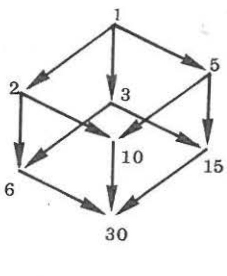
d'où $$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

2° L'intérêt des représentations graphiques apparaît à un second niveau: celui d'un travail sur l'ensemble des dessins pour dégager des classes de situations et abstraire des concepts plus généraux (Cf. exemple II.2.). A ce titre, voici trois situations apparemment distinctes:

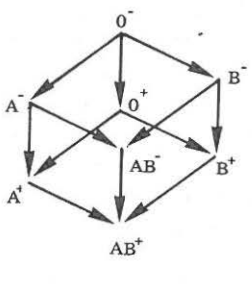
- organiser les parties de $\{a, b, c\}$ par l'inclusion
- organiser les diviseurs de 30 par la divisibilité
- présenter les possibilités de transfusion sanguine d'un groupe sanguin à un autre.



chaque flèche se lit: "est inclus dans"



chaque flèche se lit: "est un diviseur de"



chaque flèche se lit: "peut donner du sang à"

On n'a pas dessiné *toutes* les flèches signifiant "est inclus dans", "est diviseur de", "peut donner du sang à".

Ainsi, on sait que:

tout individu du groupe O^- peut donner du sang à quiconque;
tout individu du groupe O^+ peut donner du sang à tout individu des groupes O^+, A^+, B^+ ou AB^+;
....

Le troisième dessin n'est donc pas le schéma sagittal de la relation "peut donner du sang à" dans l'ensemble des groupes sanguins.

Même remarque pour chacun des deux autres dessins.

On aboutit, par l'intermédiaire des dessins ci-dessus, à la constatation que ces trois situations (ainsi que le cube !) ont "quelque chose" en commun qu'il serait intéressant de mettre au jour. La représentation graphique est alors plus qu'un simple moyen d'enregistrer des résultats; elle constitue un outil d'exploration.

IV. Intérêt et limites d'emploi des représentations graphiques

Ces quelques remarques à propos des fonctions de la représentation graphique permettent de répondre aux questions posées à la fin du II. On utilise le dessin chaque fois que cela paraît utile. On ne se contente pas d'un dessin, mais on cherche à varier les types de représentations, des schémas différents faisant apparaître des propriétés différentes de la situation étudiée.

Par conséquent, il y a lieu d'éviter l'emploi *systématique, voire exclusif*, de certains types de dessins, qui sont parfois devenus, sous l'influence d'une certains mode, un but en soi (patates, flèches, arbres, ...). Par exemple, le type de dessin rencontré en II.2. n'est utile, même pour les enfants du CP, que pour des ensembles ayant de 7 à 20 éléments environ; s'il y en a moins, les enfants peuvent comparer à l'oeil; au-delà de 20 environ, ce dessin serait inextricable.

Le seul critère de choix, s'il faut choisir, c'est l'utilité, l'efficacité, pourrait-on dire, du dessin retenu en fonction de la situation étudiée.

Les représentations graphiques constituent:

a) un mode d'expression; on dispose ainsi d'une image facile à mémoriser; mais on veillera à ne pas confondre l'objet et sa représentation, de même que dans l'usage de la langue on ne confond pas la chose et le mot qui la désigne;

b) un outil d'analyse; on notera que la visualisation des informations par un dessin doit permettre d'induire une ou plusieurs propriétés de portée générale. Dans l'exemple II.5., commenté en II.3.b), c'est peut-être parce que les représentations polygonales ne permettent pas d'imaginer une "formule" donnant p(n) qu'on se trouve bloqué dans la recherche. C'est pour sortir de cette impasse éventuelle que l'on peut être amené à utiliser les représentations en damier ou d'autres représentations.

En mathématique, comme en bien d'autres disciplines, les représentations graphiques sont un véhicule de la pensée. Or, celle-ci résulte toujours du concours de plusieurs concepts. L'art du langage usuel, écrit ou oral (la langue maternelle assortie éventuellement d'un vocabulaire technique), consiste à présenter les concepts les uns après les autres, puisque le langage usuel s'inscrit dans le déroulement du temps. Cela présente souvent l'inconvénient d'affaiblir certaines corrélations par éloignement des termes, de faire "perdre le fil" (exemple: voir texte du début de III.). Le langage graphique souffre moins de cet inconvénient.

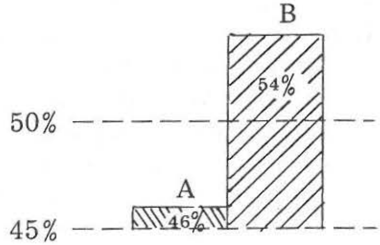
Si l'on tient compte des qualités propres à ce mode d'expression et à cet outil d'exploration: souplesse d'utilisation, aspect synthétique (l'oeil englobe la situation), efficacité (maximum d'information pour un temps de lecture minimum), on peut penser qu'il faut lui donner une place importante, même si cela amène à combattre parfois l'aspect souvent dictatorial pris par le langage usuel, en mathématique tout au moins.

Néanmoins, il ne faudrait pas croire qu'on peut toujours trouver une représentation graphique commode et facile à lire; par exemple, l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se visualise bien par une figure plane; c'est déjà plus délicat pour $(a + b)^3$, et quasi-inextricable à partir de $(a + b)^4$.

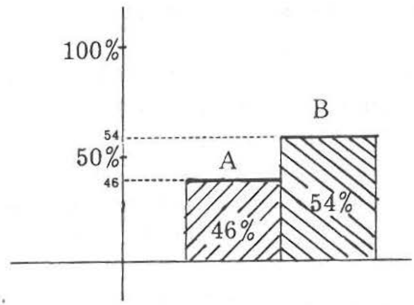
Il n'est pas rare, même, qu'une représentation graphique, d'allure commode, puisse être utilisée de façon tendancieuse, voire donner des idées fausses (comme tout autre mode d'expression).

Exemple:

Voici une représentation du résultat d'une élection où B, élu, semble l'être à une majorité écrasante !



Voici une autre représentation qui, elle, traduit mieux la réalité :



APPLICATION – FONCTION – BIJECTION

I. Etre fonction de
II. Utilisation de relations binaires
III. Fonction
IV. Application
V. Lien entre "fonction" et "application"
VI. Notation fonctionnelle
VII. Bijection

I. Etre fonction de

I.1. Un train parcourt une distance de quatre-vingts kilomètres. Sa vitesse moyenne *est fonction du* temps qu'il met pour la parcourir.

Plus précisément, la mesure en kilomètres-par-heure de cette vitesse moyenne est le quotient de 80 par la mesure en heures du temps.

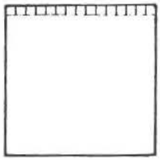
Par exemple, si le temps mis par le train est 1,6 h (c'est-à-dire une heure trente-six minutes), la mesure en kilomètres-par-heure de sa vitesse moyenne est 50; si le temps est 0,4 h, elle est égale à 200.

I.2. Un lotissement comporte des lots rectangulaires de quatre-vingts mètres carrés de terrain, de longueurs diverses; la largeur de chaque lot *est fonction de* sa longueur.

Plus précisément, on obtient la largeur (en mètres) en divisant 80 par la longueur (en mètres).

Par exemple, si la mesure en mètres de la longueur d'un lot est 16, la mesure en mètres de sa largeur est 5.

I.3. Une pièce carrée est pavée de carreaux de forme carrée; on sait qu'il faut n carreaux (n désigne un naturel) pour border un côté de la pièce (sur la figure ci-contre, n = 15).



Le nombre total de carreaux dépend de n, *est fonction de* n.

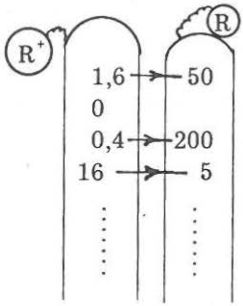
Plus précisément, il est égal à la puissance deuxième de n (produit de n par n).

II. Utilisation de relations binaires (voir RELATION BINAIRE)

II.1. Dans les cas I.1. et I.2., au nombre positif a on associe le nombre $\frac{80}{a}$. Autrement dit, on peut considérer la relation binaire f ainsi définie:

- sa source est $\mathbf{R}^+$ (voir ENSEMBLES de NOMBRES)
- son but est **R**
- tout réel positif non nul a une image et une seule, qui est le quotient de 80 par le réel en question; le réel 0 n'a pas d'image.

On a figuré ci-contre un extrait du schéma sagittal de f.



La mesure en kilomètres-par-heure de la vitesse moyenne du train est l'image (unique) par f de la durée en heures du voyage.

La mesure en mètres de la largeur du lot est l'image (unique) par f de la mesure en mètres de sa longueur.

On voit que la même relation, f, rend compte de deux situations concrètes bien différentes (et de beaucoup d'autres).

II.2. Introduisons la relation binaire, g, de source **N**, de but **N**, qui à tout naturel associe son carré.

Tout naturel a une image et une seule par g.

Cette relation g permet de décrire la situation I.3. (et beaucoup d'autres).

III. Fonction

III.1. Définition

Fonction
signifie
Relation binaire telle que chaque élément de la source a au plus une image

III.2. Exemples

f et g désignant les deux relations ci-dessus:

a) f est une fonction;

b) g est une fonction;

c) la relation réciproque, g', de la relation g
 a pour source **N**,
 pour but **N**,
 pour lien verbal "... est le carré de ...";

g' est une fonction. En effet: il y a des naturels qui ont une image unique par g': 25 (qui est le carré d'un naturel et d'un seul: 5); 100 ; 64 ; 144 ; ... Il y en a d'autres qui ne sont pas des carrés de naturels: 3 ; 35 ; 18 ; ... Ils n'ont donc pas d'image par g'. Mais aucun naturel n'est le carré de plus d'un naturel.

d) Dans une école, chaque élève est inscrit dans une classe bien déterminée. Supposons, pour fixer les idées, que l'école ait 5 classes; soit C l'ensemble de ces cinq classes:

$$C = \{CP , CE\ 1 , CE\ 2 , CM\ 1 , CM\ 2 \}$$

Appelons E l'ensemble des élèves de l'école.

Désignons par h la relation de source E, de but C, qui à chaque élève associe sa classe. La relation h est une fonction.

e) Lors d'un spectacle, chaque siège de la salle est soit inoccupé, soit occupé par un spectateur (et un seul !).

Appelons k la relation de source F, ensemble des sièges de la salle, de but S, ensemble des spectateurs assis, qui à chaque siège associe le spectateur qui l'occupe. La relation k est une fonction.

f) Chaque citoyen français a un numéro national d'identité. En termes mathématiques, on peut dire qu'on est en présence d'une fonction dont la source est l'ensemble des citoyens français et dont le but est l'ensemble des suites de 6 naturels (ou des 6-uplets de naturels (voir COUPLE)).

g) On appelle *partie entière* d'un rationnel positif le plus grand naturel inférieur ou égal à ce rationnel.
Exemples:

La partie entière de $4{,}73$ est 4 .
La partie entière de 26 est 26 .
La partie entière de $\frac{355}{113}$ est 3 .
La partie entière de $\frac{1}{3}$ est 0 .
La partie entière de $3\,704\,136{,}310\,056$ est $3\,704\,136$.

On définit ainsi une fonction de source $\mathbf{Q}^+$ et de but $\mathbf{N}$.

h) A tout naturel non nul, on associe l'ensemble de ses diviseurs.
Exemples:

naturel n	1	2	3	4	5	6	...
ensemble des diviseurs de n	{1}	{1 ; 2}	{1 ; 3}	{1 ; 2 ; 4}	{1 ; 5}	{1 ; 2 ; 3 ; 6}	...
nombre des diviseurs de n	1	2	2	3	2	4	...

On a ainsi défini deux fonctions:

- l'une de $\mathbf{N}_*$ vers l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ (1ère et 2ème lignes du tableau);
- l'autre de $\mathbf{N}_*$ vers $\mathbf{N}$ (1ère et 3ème lignes).

i) Voici deux extraits de tables de logarithmes décimaux:

1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1

1	0
2	0,301 030 0
3	0,477 121 3
4	0,602 060 0
5	0,698 970 0
6	0,778 151 3
7	0,845 098 0
8	0,903 090 0
9	0,954 242 5
10	1

On définit en mathématique une fonction de **R** vers **R** appelée "fonction logarithme décimal". Historiquement, la nécessité de calculer et l'impossibilité de construire des machines à calculer solides et fiables ont conduit à introduire cette fonction. Elle a joué dans le passé un rôle considérable dans les calculs numériques, surtout en astronomie. On trouve dans le commerce des tables qui donnent des approximations décimales de certaines des valeurs prises par cette fonction; par exemple, les deux extraits ci-dessus donnent des approximations décimales d'ordre respectivement 4 et 7 des logarithmes décimaux des naturels de 1 à 10.

j) Voici une curiosité arithmétique à explorer:

On choisit un naturel; s'il est pair, on calcule sa moitié; s'il est impair, on ajoute 1 à son triple. Avec le résultat obtenu, on recommence .....

Exemple:

$7 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 34 \longrightarrow 17 \longrightarrow 52 \longrightarrow \ldots$ etc...

(Le lecteur est invité à prolonger cette suite de nombres, puis à recommencer à partir d'autres naturels)

On utilise ici une fonction de **N** vers **N** dont voici une représentation partielle:

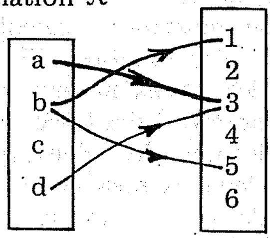
n	1	2	3	4	5	6	7	...
image de n	4	1	10	2	16	3	22	...

III.3. Contre-exemples

- La relation de source **Z**, de but **Z**, de lien verbal "... est le carré de ..." n'est pas une fonction, puisque 25 a plus d'une image (il en a deux, qui sont 5 et —5).
- La relation réciproque de la relation h n'est pas une fonction, puisque le CP compte plus d'un élève ...
- La relation dans **N** notée > n'est pas une fonction, puisque 5 a cinq images.

III.4. On a représenté ci-dessous, de façons variées, quatre relations:

Relation $\mathcal{A}$



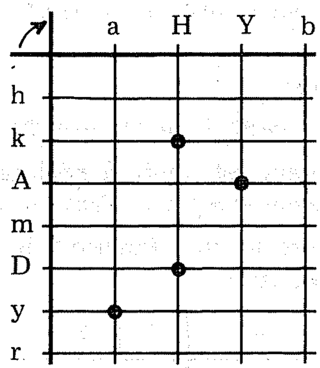
Relation $\mathcal{B}$

source: {1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8}
but: {a, e, i, p, u}
graphe:
{(2, a), (5, u), (1, p), (4, i), (8, e)}

Relation $\mathcal{C}$

	b	3	a
1			
c			
b	X		X
4			
u		X	
f			

Relation $\mathcal{D}$



Pour chacune d'elles, voici une étude des images:

Relation $\mathcal{A}$

élément de la source	a	b	c	d
image(s)	3	1 et 5		3
nombre d'images	1	2	0	1

Relation $\mathcal{B}$

1	2	4	5	8
p	a	i	u	e
1	1	1	1	1

Relation $\mathcal{C}$

élément de la source	b	3	a
image(s)	b	u	b
nombre d'images	1	1	1

Relation $\mathcal{D}$

h	k	A	m	D	y	r
	H	Y		H	a	
0	1	1	0	1	1	0

On constate que:

- pour $\mathcal{A}$, dans la troisième ligne figure le nombre 2. $\mathcal{A}$ n'est pas une fonction puisque b a plusieurs images;
- pour $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, la troisième ligne ne comporte que des 1 ou des 0: ce sont trois fonctions;
- pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la troisième ligne ne comporte que des 1: tout élément de la source a une image et une seule. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des *applications.*

IV. Application

IV.1. Définition

Application
signifie
Relation binaire telle que chaque élément de la source a une image et une seule

IV.2. g (II.2.) et h (III.2.d) sont des applications; f (II.1.) n'en est pas une (car 0 n'a pas d'image par f), g' non plus.

k (III.2.e) n'est une application que si tous les sièges sont occupés.

IV.3. Toute application est une fonction. Mais les fonctions ne sont pas toutes des applications.

V. Lien entre "fonction" et "application"

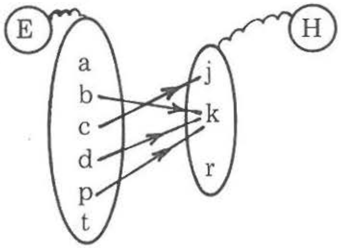
Soit m une fonction de source E et de but H; les éléments de E qui ont une image (et donc une seule) constituent un sous-ensemble E' de E. Si on connaît le graphe de m, E' est l'ensemble des premiers composants des couples qui constituent ce graphe.

Exemples: pour $\mathcal{B}$ (voir III.4.), c'est l'ensemble $\{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8\}$
pour $\mathcal{D}$, c'est $\{k, A, D, y\}$
pour $\mathcal{C}$, c'est $\{b, 3, a\}$

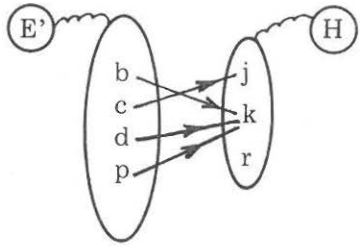
E' s'appelle, selon les auteurs, *existentiel*, *ensemble d'existence*, *ensemble des antécédents*, ...

Pratiquement, on remplace souvent l'étude de la fonction m par l'étude de l'application m' de source E', de but H et de même graphe que f.

Exemple:



Fonction n



Application associée à n

Remarques

1) On peut dire qu'une application est une fonction dont l'existentiel est égal à la source.

2) Certains auteurs restreignent le sens de *fonction* et en font un synonyme de *application*; pour désigner ce que nous avons appelé "fonction", ils utilisent "relation fonctionnelle". En revanche, tout le monde est d'accord sur le sens de *application*.

VI. Notation fonctionnelle

Revenons à la fonction f (II.1.). Les trois phrases qui la définissent (en donnant sa source, son but et son graphe) se résument en langage mathématique de la façon suivante:

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^{+} \longrightarrow \mathbf{R} \\ u \longmapsto \dfrac{80}{u} \end{array} \right.$$

L'image par f de 16 se note f(16) (lire: "f *de* seize"); ainsi:

$f(16) = 5$

$f(0{,}4) = 200$

$f(u) = \dfrac{80}{u}$ à condition que u ne soit pas nul ; f(0) ne désigne rien.

De même, l'écriture $p \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \\ t \longmapsto \dfrac{t}{2} + 1 \end{array} \right.$ signifie:

p *désigne la fonction de source* **N**, *de but* **N**, *telle que si* t *est un naturel pair, son image par* p *est* $\dfrac{t}{2} + 1$ *et que les naturels impairs n'ont pas d'image par* p.

Les écritures:

$$p \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \\ z \longmapsto \dfrac{z}{2} + 1 \end{array} \right. \qquad p \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \\ \square \longmapsto \dfrac{\square}{2} + 1 \end{array} \right. \qquad p \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{2} + 1 \end{array} \right.$$

... etc ...

ont exactement la même signification.

L'existentiel de la fonction p est l'ensemble des naturels pairs.

Si t est un naturel pair, $p(t) = \dfrac{t}{2} + 1$;

par exemple : $p(8) = 5$.

Mais p(7) ne désigne rien.

Introduisons une autre fonction q:

$$q \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{D} \\ z \longmapsto \dfrac{z}{2} + 1 \end{array} \right.$$

(**D** est l'ensemble des décimaux; voir ENSEMBLES DE NOMBRES et NOMBRE DECIMAL).

q est une application; $q(7) = 4{,}5$

Remarque

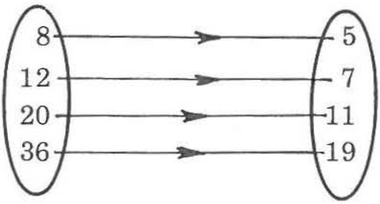
L'application associée à p (voir V.) n'est pas l'application q; c'est l'application p' telle que

$$p' \left| \begin{array}{l} \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{N} \\ u \longmapsto \frac{u}{2} + 1 \end{array} \right.$$

(**P** désignant l'ensemble des naturels pairs).

Remarque

La relation de l'exemple 3 du paragraphe VI de la rubrique RELATION BINAIRE , dont nous rappelons le schéma sagittal:



est une application; notons-la m; m peut se définir de la façon suivante:

$$m \left| \begin{array}{ccc} \{8\,;12\,;20\,;36\} & \longrightarrow & \{5\,;7\,;11\,;19\} \\ y & \longmapsto & \frac{y}{2} + 1 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'écriture mathématique est plus claire que n'importe quel lien verbal.

Remarque

De nombreux lecteurs se souviennent probablement du langage qu'ils utilisaient pendant leurs études au lycée:

"Soit la fonction $3x + 5$ " ou "Soit la fonction $f(x)$ " ...

On confondait ainsi la *fonction* f et le *nombre* $f(x)$, image de x par f.

Pis encore, on parlait aussi de "la fonction $y = 3x + 5$ ", alors que "$y = 3x + 5$" est soit une équation, soit une façon d'introduire "y" pour désigner plus brièvement le même nombre que "$3x + 5$". En tous cas, "$y = 3x + 5$" n'est pas une fonction.

On voulait parler de la fonction f de **R** vers **R** qui au réel x associe le réel $3x + 5$:

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 3x + 5 \end{array} \right.$$

VII. Représentations d'une fonction

VII.1. Les fonctions sont des relations; à ce titre, elles peuvent donc se représenter par des schémas sagittaux, cartésiens, etc. (voir RELATION BINAIRE).

On peut aussi simplifier le schéma cartésien ou le schéma sagittal d'une fonction sous forme de "table". Voici par exemple trois représentations de la même fonction k :

	4,52	13,01	7
1	X		
2		X	
3	X		
4			X

schéma cartésien de k

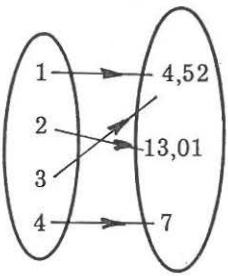


schéma sagittal de k

x	k(x)
1	4,52
2	13,01
3	4,52
4	7

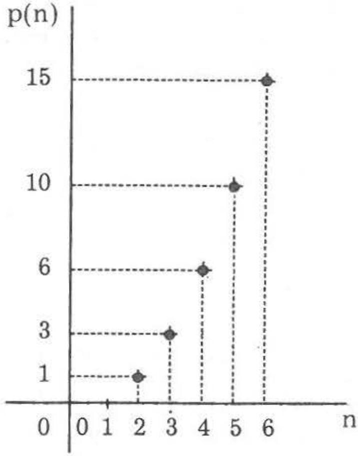
table de k

Si la source de la fonction est un ensemble infini, on peut donner des tables "partielles"; par exemple, dans le paragraphe II.5. de REPRESENTATIONS GRAPHIQUES on trouvera une table partielle relative à p, qui est une fonction de **N** vers **N** .

VII.2. Revenons sur une autre des représentations graphiques de ce même paragraphe, reproduite ci-contre.

Dans la même rubrique, au paragraphe III.3.b), on a vu que

$$p(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

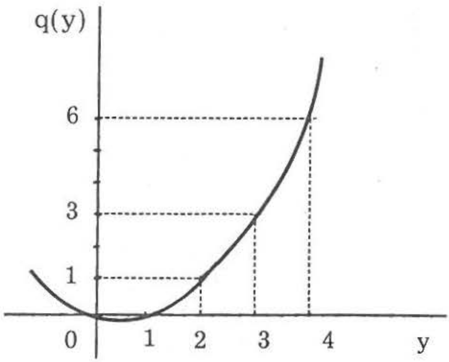


Soit maintenant la fonction q, de **R** vers **R**, telle que

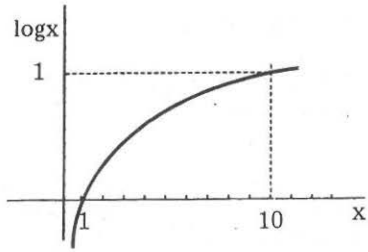
$$q(y) = \frac{1}{2}(y^2 - y)$$

On peut représenter graphiquement la fonction q — sur le même graphique que la fonction p — par une courbe qui passe par les points déjà marqués pour la fonction p.

Cette courbe (dessinée ci-dessous) s'appelle *représentation graphique* ou *courbe représentative* de la fonction q.



Voici de même, ci-contre, celle de la fonction logarithme décimal (voir III.2.i).



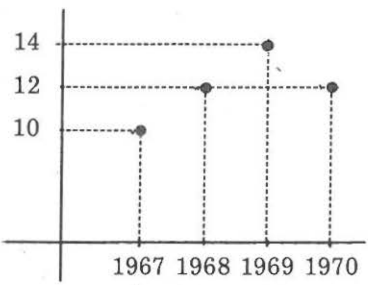
VII.3. a) Dans les petites stations météorologiques, on relève la température du lieu deux fois par jour. Ces températures peuvent se représenter sur un graphique par une succession de points isolés (comme pour la fonction p: voir VII.2.).

Pour que le dessin soit plus parlant, on joint ces points par des segments de droite qui constituent la "courbe de température"; mais cela ne signifie pas que, entre deux relevés, la température réelle du lieu varie aussi "régulièrement" que semble l'indiquer le tracé rectiligne.

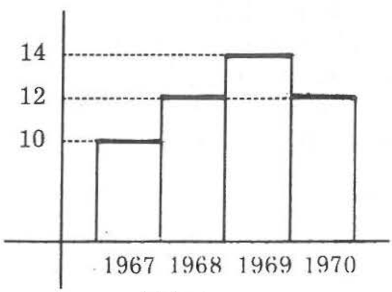
Dans les stations mieux équipées, on dispose de thermomètres enregistreurs qui donnent la température à chaque instant.

b) Dans d'autres cas, par exemple s'il s'agit de représenter la production annuelle de blé d'un pays (en millions de tonnes), on ne peut pas obtenir autre chose qu'une succession de points isolés; les segments n'auraient ici aucune signification.

On peut remplacer cette représentation "par points" par ce qu'on appelle un *histogramme*.



représentation par points



histogramme

VIII. Bijection

VIII.1. Reprenons les applications $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de III.4. Pour chacune d'elles, faisons une étude des antécédents:

Relation $\mathcal{B}$

élément du but	a	e	i	p	u
antécédent(s)	2	8	4	1	5
nombre d'antécédents	1	1	1	1	1

Relation $\mathcal{C}$

1	c	b	4	u	f
		b , a		3	
0	0	2	0	1	0

On constate que, pour $\mathcal{B}$, la troisième ligne ne comporte que des 1: tout élément du but a un antécédent et un seul.

Il n'en est pas de même pour $\mathcal{C}$.

VIII.2. Définitions

Bijection
signifie
Application telle que tout élément du but a un antécédent et un seul
ou encore
Relation telle que tout élément de la source a une image et une seule et que tout élément du but a un antécédent et un seul
ou plus rapidement
Application dont la relation réciproque est une application

VIII.3. $\mathcal{B}$ est une bijection. $\mathcal{C}$ n'en est pas une.
Cas de k (III.2.e): lorsque tous les sièges sont occupés, l'application k est une bijection.
L'application g (II.2.) n'est pas une bijection, car 3 par exemple n'a pas d'antécédent; h (III.2.d) non plus, car la classe de CM 1 a plusieurs antécédents.

VIII.4. Autres exemples et contre-exemples

a) Soit les fonction v et r ainsi définies:

$$v \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto x+3 \end{array} \right. \qquad r \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ y \longmapsto y+3 \end{array} \right.$$

v est une application; mais ce n'est pas une bijection.
r est une bijection.
Appelons M l'ensemble des naturels plus grands que 2; soit s la fonction ainsi définie:

$$s \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow M \\ t \longmapsto t+3 \end{array} \right.$$

s est une bijection.

b) Voir dans NOMBRE NATUREL ,III.a) une bijection de $\mathbb{N}$ vers P, ensemble des naturels pairs.

c) Exemple de bijection dans $\mathbb{N}$:
L'image du naturel n est: $\begin{cases} n+2 & \text{si n est pair} \\ n-2 & \text{si n est impair et différent de 1} \\ 0 & \text{si } n=1 \end{cases}$

VIII.5. Remarques

a) Toute bijection est une application. Mais les applications ne sont pas toutes des bijections.

b) Si deux ensembles E et F sont tels qu'il existe une bijection de E vers F, on dit que E et F ont même cardinal (voir NOMBRE NATUREL), ce qui, dans le cas où E et F sont finis , revient à dire qu'ils ont autant d'éléments l'un que l'autre; on s'en aperçoit, matériellement, au fait que la "correspondance un à un" épuise les deux tas simultanément.

c) La relation réciproque d'une bijection b est une bijection b', généralement différente de b.
L'expression "bijection entre les deux ensembles E et F" est critiquable car elle dissimule l'existence de deux bijections, l'une de E vers F, l'autre de F vers E, chacune étant la relation réciproque de l'autre.

d) Si E et F ont même cardinal (au moins égal à 2), il existe *plusieurs* bijections de E vers F.
On démontre que, si E et F ont n éléments chacun (n est un naturel non nul), le nombre de bijections de E vers F est:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$$

qui se note n! (lire "factorielle n").

Par exemple, il y a 5! (c'est-à-dire 120) bijections de l'ensemble des cinq doigts de la main droite vers l'ensemble des cinq doigts de la main gauche.

De même, il existe 10! façons, pour 10 élèves, de se mettre l'un derrière l'autre pour entrer en classe. Pour donner une idée de ce nombre, disons que, à raison d'une "entrée en classe" par minute, il faudrait presque 7 années pour les effectuer toutes (10! = 3 628 800).

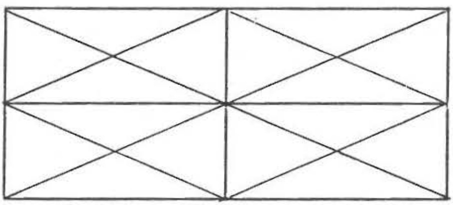
PARTITION – EQUIVALENCE

I. Un problème
II. Partition
III. Relation d'équivalence
IV. Remarque

I. Un problème

Le lecteur est invité à réfléchir quelques minutes au problème suivant:

Combien y a-t-il de quadrilatères dans le dessin ci-dessous ?



L'expérience montre que les personnes qui s'intéressent à cette figure *voient* presque tout de suite certains quadrilatères particuliers, le plus souvent des rectangles, des losanges, ... Moyennant quoi, plusieurs attitudes sont possibles:

a) commencer à compter les rectangles, puis les losanges ...

b) répertorier les différents types de quadrilatères: rectangles, losanges, trapèzes, parallélogrammes, ... de différentes formes et tailles, avant de commencer à compter.

c) essayer de grouper les quadrilatères qui ont quelque chose en commun (sommets, côtés, régions, ...)

d) commencer à compter les quadrilatères les plus petits

e) etc...

Mais on se rend compte plus ou moins rapidement que cette exploration instinctive ne suffit pas et qu'il faut s'organiser de façon plus méthodique.

II. Partition

II.1. a) Les élèves d'une école sont répartis en classes.
Chaque élève est affecté à une classe; tous les élèves sont classés; aucun élève n'est affecté à plus d'une classe.
En bref: *chaque* élève de l'école est affecté à *une* classe et à *une seule*.
En outre, il n'existe pas de classe sans élève !

b) Des jetons de couleur peuvent être répartis selon la couleur: le tas des jetons verts, le tas des jetons noirs, ... (autant de tas que de couleurs de jetons; on ne parle d'un tas que dans la mesure où il contient au moins un jeton). Ici encore, *chaque* jeton se retrouve dans *un* tas et dans *un seul*.

c) Dans l'exemple du I, les quadrilatères étant trop nombreux dans la figure, on essaie de les dénombrer par catégories. Encore faut-il choisir celles-ci de façon à passer en revue *tous* les quadrilatères sans en oublier et sans qu'un même quadrilatère soit compté plusieurs fois. Ainsi, si l'on a adopté le procédé I. b), aucun des quadrilatères déjà catalogués dans la catégorie "rectangles" ne devra être repris dans la catégorie "parallélogrammes"; cette dernière catégorie devra donc être, en fait, celle des "parallélogrammes non rectangulaires". Des précautions analogues seront à prendre à propos des losanges ...

Si l'on a pris toutes ces précautions, le décompte des quadrilatères se fera en additionnant les effectifs de toutes les catégories.

II.2. Définitions

Soit E un ensemble non vide. Répartissons les éléments de E en sous-ensembles non vides F_1, F_2, F_3, ... tels que chaque élément de E figure dans un de ces sous-ensembles et dans un seul.

L'ensemble de ces sous-ensembles: $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ est une *partition* de E; les ensembles F_1, F_2, F_3, ... sont les *classes* de cette partition.

II.3. Exemples

a) Désignons par G l'ensemble {a, b, c, d, e, f, g, h}.

- {{a, b, f}, {c}, {h, g, d, e}} est une partition de G; les classes sont les trois ensembles {a, d, f}, {h, g, d, e}, {c}.
- {{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {f}, {g}, {h}} est une partition de G: c'est la seule partition à huit classes.
- {G} est la seule partition de G à une classe.

b) Dans II. 1.a), l'ensemble des classes de l'école est une partition de l'ensemble des élèves de l'école.

Le mot *classe* est pris ici aussi bien dans son sens mathématique que dans son sens scolaire.

Autre exemple de partition de l'ensemble des élèves de l'école: en deux classes, à savoir l'ensemble des filles et l'ensemble des garçons (ici, *classe* n'a que son sens mathématique).

Ou bien encore, on demande aux enfants de se répartir au hasard en 5 groupes; on obtient alors une partition en 5 classes.

c) H = { ▲, □, ⧄, ○, •, ●, △, ⊘, ■ }

H est un ensemble d'objets colorés en noir, en gris (codé par une barre oblique) ou en blanc.

En répartissant les éléments de H par couleur, on aboutit à une partition de H à trois classes qui sont:

{ ▲, ■, ●, • }   { ⊘, ⧄ }   et   { □, ○, △ }

D'autres partitions de H pourraient être obtenues; par exemple, on obtient une partition en répartissant les éléments de H selon la forme. Mais il en existe aussi beaucoup d'autres qui ne font intervenir aucun critère perceptif du type "couleur", "forme", etc.; par exemple, voici une partition de H:

{{ ⊘, ▲ }, { □ }, { ⧄, ○, ● }, { •, ■, ▲ }}

d) Dessinons un cercle dans le plan. Nous créons ainsi plusieurs partitions de l'ensemble des points du plan; par exemple:

- la partition dont les trois classes sont: le cercle, l'intérieur du cercle, l'extérieur du cercle;
- la partition dont les deux classes sont: le cercle, et le reste du plan.

e) A tout naturel, associons son reste dans la division par 9. En regroupant les naturels qui ont le même reste, on obtient une partition de **N** en 9 classes (voir CONGRUENCES).

II.4. Contre-exemples

a) $\{\{d, a\}, \{c, g, f\}\}$ n'est pas une partition de G (Voir II.3.a) car b, par exemple, n'est pas classé.
$\{\{b, d, f, h\}, \{c, e, f\}, \{a\}, \{g\}\}$ n'est pas non plus une partition de G car f est élément de deux de ces quatre parties de G.

b) L'ensemble des triangles rectangles, l'ensemble des triangles isocèles, l'ensemble des triangles qui ne sont ni rectangles, ni isocèles, sont trois parties de l'ensemble des triangles; mais l'ensemble de ces trois parties n'est pas une partition de l'ensemble des triangles, car il existe des triangles qui sont à la fois rectangles et isocèles.

II.5. Remarques

a) Le mot "répartition" signifie tantôt l'action de répartir, tantôt le résultat de cette action. Le mot mathématique "partition" désigne le résultat, et non l'action.

b) Pour un même ensemble, il existe plusieurs partitions possibles (sauf pour un singleton !).
Le nombre de ces partitions dépend uniquement du nombre d'éléments de l'ensemble considéré (exemple: pour un ensemble à 7 éléments, il existe 877 partitions).

III. Relation d'équivalence

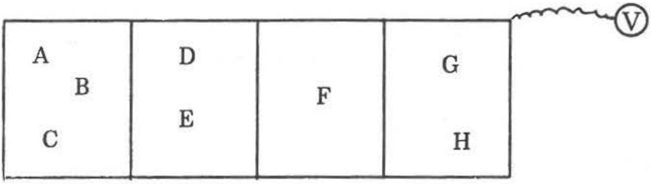
III.1. En France, les voitures sont frappées d'une taxe appelée "vignette", qui dépend de leur puissance fiscale et de leur âge. Le montant de la vignette réalise une partition de l'ensemble des voitures.

Prenons un ensemble V de huit voitures:

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

A, B, C sont taxées à 130 F;
D et E sont taxées à 50 F ;
F est la seule à être taxée à 260 F ;
G et H ne sont pas taxées.

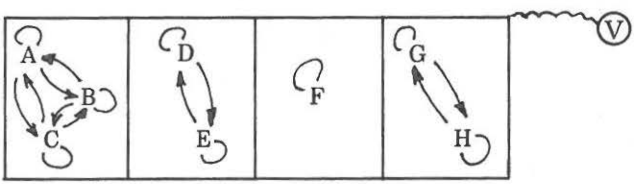
D'où une partition P de l'ensemble V, représentée ci-dessous:



Partition P

Pour le buraliste, toutes les voitures d'une même classe sont équivalentes, quelles que soient leurs couleurs, leurs marques, ... qu'il ignore ou veut ignorer. Il perçoit la même somme pour chacune de ces voitures.

Voici le schéma sagittal de la relation $\mathcal{R}$, dans l'ensemble V, de lien verbal "... est équivalente, pour le buraliste, à ...".



Relation $\mathcal{R}$

En comparant les deux dessins, on constate que, pour chaque voiture, l'ensemble de ses images par la relation $\mathcal{R}$ est la classe dans laquelle se trouve cette voiture pour la partition P.

Sur le même ensemble V, le préposé au péage du pont de Tancarville a un autre point de vue; il réalise une partition Q de V (en général, différente de la partition P) fondée sur les tarifs qu'il est chargé d'appliquer. A cette partition, on peut associer, comme plus haut, une relation $\mathcal{T}$, dans V, de lien verbal "... est équivalente, pour le préposé au péage, à ...".

Ici encore, pour chaque voiture, l'ensemble de ses images par la relation $\mathcal{T}$ est la classe où se trouve cette voiture pour la partition Q.

Nous allons étudier ce type de relations.

III.2. Désignons par K l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, et par $\mathcal{R}$ la relation binaire dans K dont le graphe est:
$\{(e, a), (b, e), (d, f), (c, c), (g, g), (e, g), (a, b), (g, e), (f, d), (e, b), (d, d), (b, a), (b, b), (g, b), (a, a), (f, f), (a, e), (e, e), (g, a), (a, g), (b, g)\}$

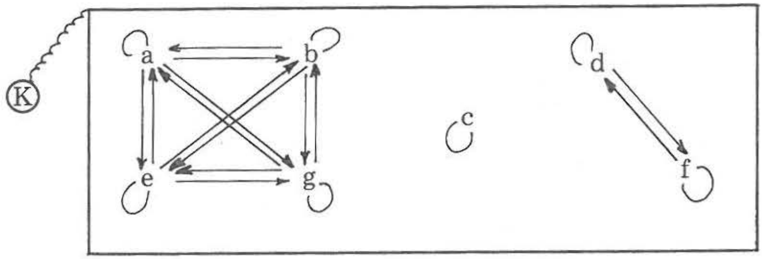
Essayons de représenter cette relation par un schéma (sagittal ou cartésien). En l'absence d'une idée directrice, un tel schéma n'apporte rien de plus que le graphe lui-même. Au contraire, cherchons, à partir du graphe, les images par $\mathcal{R}$ de chaque élément de K; par exemple, les images de a sont b, a, e, g; celles de b sont e, a, b, g; etc...

Elément de K	Ensemble des images par $\mathcal{R}$ de cet élément
a	$\{b, a, e, g\}$
b	$\{e, a, b, g\}$
c	$\{c\}$
d	$\{f, d\}$
e	$\{a, g, b, e\}$
f	$\{d, f\}$
g	$\{g, e, b, a\}$

Dans la seconde colonne du tableau ci-dessus, on ne trouve que trois ensembles:

$$\{b, a, e, g\}\ ,\quad \{f, d\}\ ,\quad \{c\}$$

qui constituent une *partition* de K, comme le montre nettement le schéma sagittal ci-dessous, organisé à la lumière de ce tableau.



Pour cette partition,

la classe de a est l'ensemble des images par $\mathcal{R}$ de a
la classe de b est l'ensemble des images par $\mathcal{R}$ de b
la classe de c est l'ensemble des images par $\mathcal{R}$ de c, etc...

(la classe de a est égale à la classe de b).

III.3. On constate que les relations $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (III.1.) et $\mathcal{R}$ (III.2.) sont à la fois réflexives, symétriques et transitives (voir ces mots).

III.4. Première définition

Étant donné une relation $\mathcal{A}$ dans un ensemble E,

" $\mathcal{A}$ est une relation d'équivalence"
signifie
"Il existe une partition P de E ayant la propriété suivante:
Pour chaque élément de E, l'ensemble des images de cet élément par la relation $\mathcal{A}$ est la classe de cet élément dans la partition P".

III.5. Deuxième définition

"Relation d'équivalence"
signifie
"Relation à la fois réflexive, symétrique et transitive".

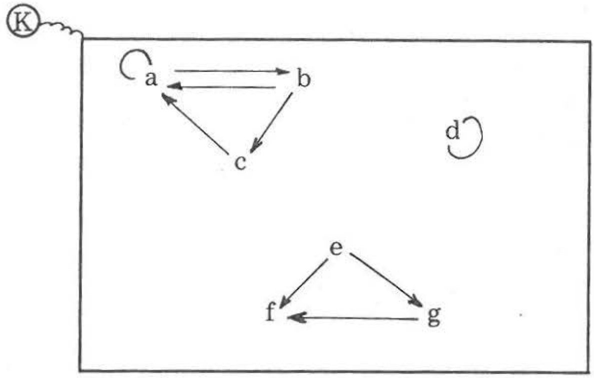
On démontre que ces deux définitions caractérisent les mêmes relations.

III.6. Premiers exemples

Les relations $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (III.1.) et $\mathcal{R}$ (III.2.) sont des relations d'équivalence.

III.7. Contre-exemple

Voici une relation dans K, notée $\mathcal{S}$, donnée par le schéma ci-dessous:



Elément de K	Ensemble des images par $\mathcal{S}$ de cet élément
a	{a, b}
b	{a, c}
c	{a}
d	{d}
e	{g, f}
f	ϕ
g	{f}

Ici, les ensembles obtenus dans la seconde colonne ne constituent pas une partition de K.
$\mathcal{S}$ n'est pas une relation d'équivalence.

III.8. Les classes de la partition associée à une relation d'équivalence s'appellent *classes d'équivalence* de cette relation.

III.9. Autres exemples

a) Dans l'ensemble des élèves de l'école, la relation de lien verbal "... est dans la même classe que ..." est une relation d'équivalence.

La partition associée est celle dont il est question plus haut (II.1.a), (II.3.b).

b) La relation dans N de lien verbal "... a même reste par 9 que ..." est une relation d'équivalence (cf. II.3.e).

c) Soit E l'ensemble des couples de naturels non nuls, et $\mathcal{F}$ la relation dans E définie par:

$$\text{" } (p, q)\ \mathcal{F}\ (r, s) \text{ "} \quad \text{signifie} \quad \text{" } ps = qr \text{ "}$$

On démontre que $\mathcal{F}$ est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence s'appelle un *rationnel strictement positif* et se représente par l'une quelconque de ses notations fractionnaires; par exemple,

$$\frac{2}{3} \quad \text{signifie} \quad \text{"classe du couple } (2, 3)\text{"}.$$

Comme le couple (4, 6) est à classer avec (2, 3) (puisque $4 \times 3 = 6 \times 2$), on peut aussi bien dire que la classe $\frac{2}{3}$ est la classe $\frac{4}{6}$, ce qui justifie l'égalité

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

entre deux écritures différentes du même rationnel (voir ENTIERS et RATIONNELS).

III.10. Intérêt des relations d'équivalence

Une relation d'équivalence $\mathcal{A}$ dans un ensemble E permet de classer les éléments de E en classes d'équivalence, donc de créer un ensemble qui, sauf cas particulier (voir II.3.a), deuxième exemple), a moins d'éléments que l'ensemble initial: l'ensemble des classes. Cet ensemble s'appelle "ensemble-quotient de E par la relation d'équivalence $\mathcal{A}$", et n'est autre que la partition associée.

Exemples:

- Le directeur d'un C.E.G. n'a pas à établir l'emploi du temps de chaque élève; il établit seulement celui de chacune des classes qu'il a décidé de former.
- Le buraliste (cf. III.1.) ne considère que l'ensemble des tarifs.

III.11. Sens de "équivalents"

Soit un ensemble E muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{A}$.

Dire que deux éléments a et b de E sont "équivalents pour $\mathcal{A}$ ", c'est dire que le couple (a, b) est élément du graphe de $\mathcal{A}$. Il revient au même de dire que a et b sont éléments de la même classe de la partition associée.

Pour certaines relations d'équivalence, on dispose de vocables spécifiques; par exemple:

"a est *congru* à b *modulo* 5" signifie "a et b ont le même reste par 5"

"segments *isométriques*" signifie "segments de même longueur".

IV. Remarque

Considérons les deux ensembles suivants:

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g\} \quad \text{et} \quad F = \{5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1\}$$

et la relation de K vers F dont le graphe est:

$$\{(a, 5), (b, 5), (c, 4), (d, 2), (e, 5), (f, 2), (g, 5)\}$$

Cette relation est une application (voir APPLICATION) de K vers F. Notons-la h. A cette application h, on associe le tableau suivant:

antécédents	éléments de F
a , b , e , g	5
c	4
	3
d , f	2
	1

Ce tableau regroupe dans chaque ligne de la première colonne les éléments de K qui ont même image par l'application.

Les trois ensembles $\{a, b, e, g\}$, $\{c\}$, $\{d, f\}$ constituent une partition de K (voir III.2.).

La relation d'équivalence associée à cette partition pourrait se formuler par le lien verbal suivant: "... a même image par h que ...".

Ce procédé est général: toute application engendre une partition de son ensemble source. II.3.e) est un exemple d'utilisation de ce procédé; l'application dont il s'agit est l'application de N vers N qui à tout naturel associe son reste par 9.

PARTAGES

I. Remarque préliminaire
II. Partages et division
III. Quelques types de partages
IV. Partages en général.

I. Remarque préliminaire

Le mot "partage" n'a pas de sens mathématique précis (sauf dans l'expression "partage d'un naturel": voir III.4.).

Néanmoins, une analyse des sens de ce mot et des modèles mathématiques qui leur sont associés semble utile dans la mesure où certaines situations dites de partage sont utilisées comme introduction à la division euclidienne (voir DIVISION EUCLIDIENNE).

II. Partages et division

Parmi des situations souvent utilisées comme introduction à la division euclidienne, considérons celle-ci:

Pour leur déjeuner, on donne vingt noisettes à trois écureuils; combien de noisettes chaque écureuil mangera-t-il ?

Privilégier l'éventualité où les écureuils mangent six noisettes chacun et en laissent deux de côté, c'est interpréter le texte dans un sens très particulier et peu réaliste; en d'autres termes, c'est appauvrir ce thème.

Plusieurs questions se posent en effet: toutes les noisettes serontelles mangées ? Toutes les noisettes se valent-elles ? (Sont-elles de même taille ? Sont-elles également mûres ? Y en a-t-il qui soient gâtées et si oui combien ?) Y a-t-il des règles de préséance entre les écureuils ou bien les trois écureuils sont-ils "égaux devant la nourriture" ? Peut-on fragmenter les noisettes ?

Suivant que l'on choisira de répondre dans un sens ou dans l'autre à ces questions, on obtiendra des solutions différentes. Par exemple:

- l'un des écureuils mange les vingt noisettes
- l'un des écureuils mange neuf noisettes, un autre en mange six, le dernier mange les cinq noisettes qui restent.

Et il y a bien d'autres choix possibles.

Ainsi, un énoncé qui paraît sans ambiguïté pour qui se contente de perpétuer des traditions peut se prêter à de nombreuses interprétations. Il serait malhonnête, et préjudiciable aux enfants, de leur en imposer une sans une discussion préalable conduisant à préciser l'énoncé par l'adjonction d'hypothèses restrictives.

Comment compléter ce texte pour qu'il conduise à la division euclidienne de 20 par 3 ? On peut penser à imposer des parts d'égal effectif. A elle seule, cette condition est insuffisante puisqu'il se peut que les écureuils mangent deux noisettes chacun et en laissent quatorze en réserve. Il faut donc imposer une deuxième condition: le reliquat doit être le plus faible possible. Sous ces deux hypothèses supplémentaires, les écureuils mangent six noisettes chacun et en réservent deux.

Ainsi, à partir de l'énoncé initial, l'analyse précédente permettrait à la classe d'aboutir par exemple à la rédaction suivante:

Trois écureuils se partagent, sans les casser, vingt noisettes toutes semblables. Ils en reçoivent chacun autant et en laissent le moins possible. Combien chaque écureuil en reçoit-il ?

III. Quelques types de partages

Voici ce qu'on trouve dans un dictionnaire:

- *partage:* action de partager
- *partager:* diviser en plusieurs parts.
  D'autres verbes ont un sens voisin: trier, distribuer, répartir, affecter, etc...

— *part:* portion d'un tout qui est divisé entre plusieurs personnes.

Effectivement, si on analyse le résultat d'un partage, on constate que chaque objet-à-distribuer a été affecté à une part*.

En termes plus précis: on dispose de deux collections E et F; E est la collection des objets à distribuer (noisettes); F est la collection des parts (écureuils et réserve) et il s'agit d'associer (qui mange quoi ?) à chaque objet (élément de E) une part (élément de F).

Par ailleurs, ainsi qu'on l'a vu dans II:

— dans certains cas, un objet en vaut un autre; personne n'est lésé si on intervertit les objets sans changer l'effectif de chaque part; on dira alors, dans ce qui suit, que les objets sont *indiscernables;*

— à l'opposé, s'il n'est pas possible de trouver deux objets qu'on puisse intervertir équitablement, nous dirons que les objets sont *tous discernables.*

On parlera de même de parts indiscernables ou de parts toutes discernables.

III.1. Objets tous discernables et parts toutes discernables

Un exemple de ce type de partage est celui des cadeaux de Noël. Les objets — ici les cadeaux — étant supposés tous discernables, on les représente par des symboles distincts: a, b, c, d. Les parts — ici les membres de la famille — seront également représentés par des symboles distincts: A, B, C.

On peut schématiser un partage par un tableau tel que:

a	b	c	d
A	B	C	B

Ce partage est différent de celui-ci:

a	b	c	d
A	B	B	C

ou de cet autre:

a	b	c	d
A	A	A	C

* Dans le cas des partages introduisant la division euclidienne, il peut être nécessaire de prévoir une part constituée des objets non effectivement distribués; alors le nombre de parts est égal au nombre de personnes augmenté de 1.

Il peut être intéressant de dresser la liste de tous les partages de ce type; elle comporterait 3^4 (c'est-à-dire 81) partages puisque chaque objet peut être affecté à n'importe laquelle des trois parts.

Modèle mathématique: Application d'un ensemble E vers un ensemble F. (Voir **APPLICATION – FONCTION – BIJECTION**).

Rappelons qu'une application de E vers F est une relation binaire de E vers F qui, à chaque élément de E, associe un et un seul élément de F.

On démontre que, si E possède n éléments et si F en possède p, il y a p^n applications de E vers F.

III.2. Objets tous discernables, parts indiscernables

On peut illustrer ces conditions de la manière suivante:

On emballe en plusieurs cartons, indiscernables de l'extérieur, une collection de livres. Ici les objets sont les livres et les parts sont les cartons.

Aucun carton n'est inutilisé. Seul importe le nombre des cartons.

Si l'on représente les livres par a, b, c, d, par exemple, on peut réaliser des partages en

— un carton:	/abcd/			
— deux cartons:	/ab/cd/	ou	/a/bcd/	
		ou	/ac/bd/	etc...
— trois cartons:	/a/b/cd/	ou	/ad/b/c/	etc...
— quatre cartons:	/a/b/c/d/			

Il est clair qu'on n'utilise pas plus de cartons qu'il n'y a de livres. Ce type de partage est fréquemment appelé *répartition*.

Notons que dans la vie courante, on ne réalise pas de répartition au hasard, car on tient compte de raisons précises liées à la situation. Voici quelques critères qui pourraient être utilisés: le format des livres (pour des raisons d'encombrement), la nature de la couverture (bibliothèque décorative), le genre (roman, histoire, art, ...), l'année de parution (revues) ...

Modèle mathématique: Partition d'un ensemble E en k classes. (Voir PARTITION).

Rappelons qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble de sous-ensembles non vides de E, soumis à la condition suivante: chaque objet de E est élément d'un seul des sous-ensembles considérés.

Les éléments de E (voir début de III.) sont ici les livres à emballer. Les sous-ensembles, ou *classes* de la partition, sont les éléments de F.

Voici les 15 partitions de {a, b, c, d} selon le nombre k de classes:

En 1 classe : /abcd/
En 2 classes: /a/bcd/ , /b/acd/ , /c/abd/ , /d/abc/ ,
/ab/cd/ , /ac/bd/ , /ad/bc/ .
En 3 classes: /a/b/cd/, /a/c/bd/ , /a/d/bc/ , /b/c/ad/ ,
/b/d/ac/, /c/d/ab/ .
En 4 classes: /a/b/c/d/ .

Le dénombrement des partitions d'un ensemble n'est pas, dans le cas général, un problème élémentaire.

III.3. Objets indiscernables, parts toutes discernables

Les sciences statistiques traitent de ces partages.

Par exemple, on se donne une liste de journaux et l'on désire savoir quelle est la vente de chaque journal dans une ville donnée. Les objets sont les exemplaires vendus, que l'on considère comme indiscernables et dont on ne retient que le nombre, tandis que les journaux tiennent le rôle des parts.

Pour une vente de 2 500 exemplaires et trois journaux A, B, C, voici trois statistiques possibles:

A	2 500
B	0
C	0

A	1 200
B	1 000
C	300

A	700
B	800
C	1 000

Modèle mathématique: Statistique d'une application de E vers F.

On appelle statistique d'une application d'un ensemble E vers un ensemble F la donnée, pour chaque élément y de F, du nombre d'éléments de E antécédents de y.

On démontre que, si E possède n éléments et si F en possède p, le nombre de statistiques est:

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times(p-1)}$$

Ainsi, avec 2 500 exemplaires et 3 journaux, le nombre de statistiques est

$$\frac{2\,501\times 2\,502}{2}$$

c'est-à-dire 3 128 751 .

III.4. Objets indiscernables et parts indiscernables

Exemple:

A la belote, chaque joueur reçoit 8 cartes qu'il classe suivant leur couleur* et il appelle "distribution" le nombre de cartes par couleur. On a ainsi les distributions:

3 , 2 , 2 , 1   5 , 1 , 1 , 1   5 , 2 , 1   etc...

"Distribution 5, 2, 1" signifie: 5 cartes d'une couleur (sans précision sur cette couleur, ni sur ces cartes), 2 cartes d'une autre couleur, 1 carte d'une troisième couleur (donc aucune carte dans la dernière couleur).

Les seules informations dont on dispose dans ce genre de partage sont le nombre des objets et celui des parts (non vides, cela va sans dire).

Modèle mathématique: partage d'un naturel n en k parts.

On appelle "partage d'un naturel n" toute écriture de n comme somme de naturels non nuls, distincts ou non, deux écritures qui ne diffèrent que par l'ordre des termes étant considérées comme définissant le même partage.

Voici les 15 partages de 7 suivant le nombre k de parts:

En 1 part : 7
En 2 parts: 1 + 6   2 + 5   3 + 4
En 3 parts: 1 + 1 + 5   1 + 2 + 4   1 + 3 + 3   2 + 2 + 3
En 4 parts: 1 + 1 + 1 + 4   1 + 1 + 2 + 3   1 + 2 + 2 + 2
En 5 parts: 1 + 1 + 1 + 1 + 3   1 + 1 + 1 + 2 + 2
En 6 parts: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2
En 7 parts: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

* Il y a quatre couleurs: trèfle, carreau, coeur, pique (appelées parfois "bois").

Le dénombrement des partages d'un naturel est, dans le cas général, un problème délicat.

IV. Partages en général

Résumons ce qui précède dans un tableau:

Objets \ Parts	Toutes discernables	Indiscernables
Tous discernables	Application d'un ensemble vers un autre	Partition d'un ensemble en k classes
Indiscernables	Statistique d'une application	Partage d'un naturel en k parts

Les quatre types de partages exposés en III. et dont les modèles mathématiques figurent dans le tableau ci-dessus ne sont que des cas particuliers d'un problème général qui peut s'énoncer comme suit:

On dispose

1) d'un ensemble donné d'objets colorés, deux objets d'une même couleur étant tenus pour indiscernables.
2) d'un ensemble donné de boîtes colorées, deux boîtes d'une même couleur étant tenues pour indiscernables.

Il s'agit alors de répartir les objets dans les boîtes et de dresser la liste des répartitions ou tout au moins de les dénombrer.

C'est en fait la situation qui se présente dans les problèmes d'héritage ou de répartition des revenus d'une entreprise. Le problème général est du type suivant:

"Un héritage est constitué de trois chameaux, deux ânes et une chèvre; deux bêtes de la même espèce sont indiscernables. Les héritiers sont trois frères et deux serviteurs; on ne distingue ni les frères entre eux, ni les serviteurs entre eux. Inventorier tous les modes de partage de l'héritage"*.

C'est un thème d'une grande richesse, du fait des conditions particulières que l'on peut imposer aux objets ou aux parts et que l'on

* Cet exemple est extrait de "Mathématiques de l'action" de ROSENSTIEHL et MOTHES (éd. DUNOD), ouvrage auquel la présente rubrique doit beaucoup.

retrouve dans un très grand nombre de situations familières, tant aux enfants qu'aux adultes.

C'est ainsi que le déjeuner des écureuils présenté au début de II. et qui a été orienté vers la division euclidienne (fin de II.) pourrait conduire à d'autres problèmes, par exemple: les noisettes sont toutes semblables et l'un des écureuils en mangera autant que les deux autres réunis; partager les 20 noisettes proportionnellement aux nombres 2, 3, 5; ...

Remarque: Pour en revenir à la division euclidienne (voir cette rubrique), on peut l'introduire à partir des partages du type III.4., mais en précisant avec soin, et dans un langage adapté aux enfants, les conditions du partage:

- objets indiscernables
- parts indiscernables
- parts (autres que le reliquat) d'égal effectif
- reliquat d'effectif minimum

Taire tout ou partie de ces conditions revient à ouvrir le problème.

DIVISIBILITE

I. Deux problèmes
II. Les modèles mathématiques
III. Diviseurs d'un naturel — Nombres premiers

I. Deux problèmes

I.1. Les propriétés fondamentales de la multiplication ayant été dégagées, on peut s'intéresser à des problèmes tels que:

a) Dix-huit enfants sont répartis en trois équipes de telle façon qu'il y ait le même nombre d'enfants dans chacune d'elles. Combien y a-t-il d'enfants dans chaque équipe ?

b) Découper dans du papier quadrillé les grilles rectangulaires, de dimensions diverses, ayant vingt-quatre cases.

I.2. Analyse

Le premier problème revient à se demander si *dix-huit* figure dans la liste des multiples de *trois*. L'examen de cette liste permet de conclure qu'il y a six enfants par équipe.

Le deuxième problème peut se traiter en examinant une table de multiplication suffisamment étendue. On constate alors que 24 apparaît comme produit de 24 et de 1, de 12 et de 2 ... ou enfin de 1 et de 24, ce qui permet de conclure qu'il y a quatre grilles répondant aux conditions du problème.

II. Les modèles mathématiques

II.1. Les équations dans N d'inconnue z: $a = b \times z$

a) On peut construire de nombreux énoncés de problèmes analogues à celui du I.1.a), que l'on vient d'analyser. Le modèle sous-jacent est le suivant: deux naturels a et b étant donnés, trouver un naturel z tel que $a = b \times z$; ou encore: résoudre l'équation dans N d'inconnue z:

$$a = b \times z$$

Lorsqu'on peut manipuler, comme par exemple dans I.1., il est clair que a et b sont des naturels différents de zéro, alors que la présentation sous forme d'équation n'impose pas cette condition à a et b.

b) Examinons d'abord les cas où l'un au moins des naturels a, b est nul:

- $0 = b \times z$
  où b est un naturel donné différent de zéro; dans ce cas, la seule solution est zéro.
- $a = 0 \times z$
  où a est un naturel donné différent de zéro; les équations de ce type n'ont pas de solution.
- $0 = 0 \times z$
  dans ce cas, l'ensemble des solutions est N.

Nous écarterons, dans la suite, ces trois cas.

c) a et b étant tous deux différents de zéro, l'équation

$$a = b \times z$$

a une solution unique si a est un multiple de b; sinon, elle n'a pas de solution.

II.2. Les équations du type $a = x \times y$ où a est un naturel donné

On peut construire de nombreux énoncés de problèmes analogues à celui du paragraphe I.1.b), Le modèle sous-jacent est le suivant: a étant un naturel donné, il s'agit de trouver l'ensemble des *couples* (x, y) de naturels tels que $x \times y = a$, ou encore de résoudre l'équation dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ d'inconnue (x, y) :

$$x \times y = a$$

Si a n'est pas trop grand et si l'on dispose d'une table de multiplication suffisamment étendue, la manière la plus simple de résoudre une telle équation est de repérer toutes les cases où a figure.

Une autre manière de procéder consiste à substituer à x un naturel que l'on choisit, par exemple: 3. On est alors amené à résoudre l'équation $a = 3 \times y$ qui est du type II.1. Et on recommence en fixant x de manières différentes.

Pour l'équation (E): $42 = x \times y$
on résoudrait les équations (A) suivantes:

(A)	Solutions de (A)	Solutions de (E)
$42 = 1 \times y$	une solution: 42	(1 ; 42)
$42 = 2 \times y$	une solution: 21	(2 ; 21)
$42 = 3 \times y$	une solution: 14	(3 ; 14)
$42 = 4 \times y$	pas de solution	
$42 = 5 \times y$	pas de solution	
$42 = 6 \times y$	une solution: 7	(6 ; 7)

La commutativité de la multiplication permet d'arrêter ici la recherche et fournit les autres solutions:

(7 ; 6) ; (14 ; 3) ; (21 ; 2) ; (42 ; 1) .

C'est ce procédé qui était suggéré dans l'analyse (I.2.) de I.1.b).

III. Diviseurs d'un naturel — Nombres premiers

L'exploration des problèmes précédents peut déboucher sur la réalisation de tableaux tels que le tableau (T) ci-dessous. Soit a et b deux naturels quelconques compris entre 1 et 12; le tableau (T) donne par simple lecture la solution, si elle existe, de l'équation dans N d'inconnue z:

$$a = b \times z$$

Par exemple:

- Si $a = 3$ et $b = 5$:
  le tableau montre que $3 = 5 \times z$ n'a pas de solution.

- Si $a = 6$ et $b = 2$:
  le tableau indique que la solution unique de $6 = 2 \times z$ est 3 .

a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	2	1										
3	3		1									
4	4	2		1								
5	5				1							
6	6	3	2			1						
7	7						1					
8	8	4		2				1				
9	9		3						1			
10	10	5			2					1		
11	11										1	
12	12	6	4	3		2						1

(T)

L'observation de tels tableaux conduit à des remarques intéressantes.

Examiner par exemple:

— la distribution des 1, des 2, etc...;

— les nombres figurant dans chaque colonne et leur répartition;

— de même pour les lignes ...

Au-delà de ces remarques, nous allons voir qu'un tel tableau peut être examiné du point de vue des relations (voir RELATIONS BINAIRES).

III.1. En lisant le tableau (T) ligne par ligne, on associe à chaque naturel a non nul l'ensemble des naturels écrits sur la ligne qui commence par a.

A chaque naturel a différent de zéro est associé un ensemble de naturels différents de zéro.

Ces naturels sont appelés les *diviseurs de* a.

a	Ensemble des diviseurs de a
1	$\{1\}$
2	$\{2 ; 1\}$
3	$\{3 ; 1\}$
4	$\{4 ; 2 ; 1\}$
5	$\{5 ; 1\}$
6	$\{6 ; 3 ; 2 ; 1\}$
etc...	

On vient ainsi de définir une application de $\mathbf{N}_*$ vers l'ensemble des parties de $\mathbf{N}_*$ (voir APPLICATION).

Voici trois phrases:

"a est un multiple de b"
"b est un diviseur de a"
"a est divisible par b"

Elles expriment le même fait: il existe un naturel z tel que $a = b \times z$.

Certains auteurs disent également: "b divise a"; cette expression est malheureuse parce qu'elle est souvent source de confusions.

Remarque sur le mot "diviseur"

Il est fâcheux que le mot *diviseur* ait (au moins) deux sens:

1) dans la locution "diviseur d'un naturel" (il a le sens qu'on vient de donner).

2) dans l'énoncé: "dans la division euclidienne, le reste est plus petit que le diviseur".

D'où le jeu de mots:

Dans la division euclidienne, si le diviseur n'est pas un diviseur du dividende, le reste n'est pas nul".

III.2. A chaque choix de a, on peut associer le nombre des naturels qui sont écrits dans le tableau (T) sur la ligne commençant par a.

On définit ainsi une application de N_* vers N qui, à chaque naturel différent de zéro, associe le nombre de ses diviseurs. Elle permet de classer (voir PARTITION) les naturels différents de zéro suivant qu'ils ont 1, 2, 3, ... diviseurs.

a	Nombre des diviseurs de a
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
etc...	

Nombre de diviseurs	1	2	3	4	5	6	......
Naturels	1	2 3 5 7 11 13 ⋮	4 9 ⋮	6 8 10 14 15 ⋮	16 ⋮	12 ⋮	

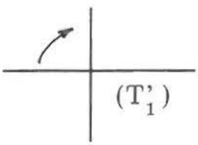
Les naturels ayant deux diviseurs et deux seulement sont appelés *naturels premiers*. Ainsi, 1 n'est pas un naturel premier. Les naturels ayant au moins trois diviseurs sont appelés *naturels composés*. On démontre que tout naturel composé peut s'exprimer d'une seule manière sous forme d'un produit de naturels premiers (on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

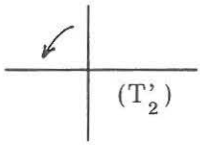
III.3. A partir du tableau (T), on peut dresser un nouveau tableau (T') en remplaçant par une croix chacun des nombres écrits à l'intérieur de (T):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X											
2	X	X										
3	X		X									
4	X	X		X								
5	X				X							
6	X	X	X			X						
7	X						X					
8	X	X		X				X				
9	X		X						X			
10	X	X			X					X		
11	X										X	
12	X	X	X	X		X						X

(T')

Au tableau (T') on peut associer, suivant de sens le lecture, deux relations dans $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$ (voir RELATIONS BINAIRES, page 11):





Le tableau (T'_1) est le schéma cartésien de la relation dont un lien verbal possible est "... est un multiple de ...".

Le tableau (T'_2) est le schéma cartésien de la relation dont un lien verbal possible est "... est un diviseur de ...".

En imaginant qu'on prolonge indéfiniment le tableau (T'), on définit dans N_* deux relations, réciproques l'une de l'autre, dont des liens verbaux possibles sont respectivement:

"... est un multiple de ..."

"... est un diviseur de ..."

DIVISION EUCLIDIENNE

I. Quelques problèmes
II. Modèle mathématique
III. Remarques

I. Quelques problèmes

Dans de nombreux problèmes, on cherche à distribuer des objets à des personnes en respectant les conditions suivantes:

— On ne distingue pas les objets les uns des autres; seul importe leur nombre.
— Il en est de même pour les personnes.
— Les parts ont toutes le même nombre d'objets.
— Ce dernier nombre est le plus grand possible, ce qui revient à dire qu'il restera le moins possible d'objets non distribués (éventuellement, il peut n'en pas rester).

Exemples:

1) Partager les bonbons d'un paquet entre des enfants.

2) Distribuer les cartes d'un jeu à un certain nombre de joueurs au début d'une partie.

Remarque. Dans la langue courante, on ne parle pas de "distribuer *un* objet" ni de "distribuer *zéro* objet" ! On ne parle pas non plus de distribuer des objets "à *une* personne", ni "à *zéro* personne".

II. Modèle mathématique

Quatre naturels interviennent:

— le nombre d'objets à distribuer: notons-le a;
— le nombre de personnes; notons-le b;
nous supposons que b *n'est pas égal* à 0; nous disons pourquoi ci-dessous;
— le nombre d'objets reçus par chaque personne; notons-le q;
— le nombre d'objets non distribués; notons-le r.

Les problèmes de I. reviennent à regarder si a est multiple de b, et sinon, à chercher quels sont les deux multiples consécutifs de b qui encadrent a. Ce qui se traduit, que a soit ou non multiple de b, par:

$$bq \leqslant a \quad \textit{et} \quad a < b(q+1)$$

ou, de façon équivalente, par:

$$r = a - bq \quad \textit{et} \quad r < b$$

La condition $r < b$ exige que b ne soit pas nul. En revanche, dans le modèle mathématique, rien ne fait obstacle aux cas où $a = 0$, $a = 1$, $b = 1$. Si a et b sont donnés ($b \neq 0$), on démontre qu'il existe toujours un couple de naturels et un seul, (q, r), tel que

$$a = bq + r \quad \textit{et} \quad r < b$$

Au couple (a, b), la *division euclidienne* fait correspondre le couple (q, r); a s'appelle le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* de a par b, r le *reste* de a par b. Lorsqu'il est nécessaire de préciser, on peut accoler l'adjectif *euclidien* à chacun de ces quatre noms.

Exemples:

a	b	$a = bq + r$ *et* $r < b$	$bq \leqslant a < b(q+1)$	q	r
32	5	$32 = (5 \times 6) + 2$ *et* $2 < 5$	$5 \times 6 \leqslant 32 < 5 \times 7$	6	2
27	9	$27 = (9 \times 3) + 0$ *et* $0 < 9$	$9 \times 3 \leqslant 27 < 9 \times 4$	3	0
0	5	$0 = (5 \times 0) + 0$ *et* $0 < 5$	$5 \times 0 \leqslant 0 < 5 \times 1$	0	0
17	32	$17 = (32 \times 0) + 17$ *et* $17 < 32$	$32 \times 0 \leqslant 17 < 32 \times 1$	0	17
8	1	$8 = (1 \times 8) + 0$ *et* $0 < 1$	$1 \times 8 \leqslant 8 < 1 \times 9$	8	0

La division euclidienne *n'est pas une opération dans* **N** (voir OPERATION), mais une application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_*$ vers $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; en effet, à tout couple (a, b) de naturels dont le second composant b (diviseur) n'est pas nul, elle associe, non pas un naturel, mais un *couple* (q, r) de naturels.

Il arrive qu'on ne s'intéresse qu'au reste, par exemple dans la "preuve par 9" (voir CONGRUENCES).

Il arrive qu'on ne s'intéresse qu'au quotient. Certains regrettent de ne pas disposer d'un signe spécial pour désigner le quotient euclidien q de a par b. On a proposé:

$$a \div b = q$$

Mais le signe $\div$ se trouve actuellement sur les machines à calculer de poche avec une autre signification (approximation du quotient).

III. Remarques

III.1. La condition $r < b$ est essentielle:

- $$9\,296 = (193 \times 48) + 32$$
  32 étant plus petit que 193, le quotient euclidien de 9 296 par 193 est 48.
  32 étant plus petit que 48, le quotient euclidien de 9 296 par 48 est 193.

- $$9\,338 = (193 \times 48) + 74$$
  74 étant plus petit que 193, le quotient euclidien de 9 338 par 193 est 48.
  74 n'étant pas plus petit que 48, le quotient euclidien de 9 338 par 48 n'est pas 193.

- $$9\,471 = (193 \times 48) + 207$$
  207 n'étant pas plus petit que 193, le quotient euclidien de 9 471 par 193 n'est pas 48.
  207 n'étant pas plus petit que 48, le quotient euclidien de 9 471 par 48 n'est pas 193.

III.2. Si le reste est 0, $a = bq$; a est un multiple de b, et a est un multiple de q (voir DIVISIBILITE); q est le quotient euclidien de a par b, et b est le quotient euclidien de a par q; dans les deux cas, le reste est nul.

Exemple: $9\,264 = 193 \times 48$

DIVISION

I. Situations vécues où l'on utilise une technique de division
II. Division dans N
III. Calculs dans D^+
IV. Division dans Q^+
V. Retour aux situations vécues

Le mot *division* traîne après lui des locutions telles que:

- division exacte
- quotient exact
- quotient entier
- division avec ou sans reste
- quotient approché par défaut ou par excès
- quotient approché à tant près
- faire une division; la poursuivre après la virgule
- la division tombe juste.

Ce langage, hérité du passé, est issu d'une classification des problèmes dits "concrets" qui servaient d'introduction à la technique de la division. De plus, cette classification a été établie à une époque où les notions mathématiques sous-jacentes n'étaient pas encore clairement dégagées.

Pour y voir clair, nous allons reprendre l'idée de division en précisant l'ensemble de nombres* dans lequel on travaille: **N, D** ou **Q**, afin de mettre en évidence les idées fondamentales. Bien que ces idées soient relativement simples, elles restent sans doute d'un

* Le lecteur est invité à se reporter — si besoin est — à la rubrique ENSEMBLES DE NOMBRES.

abord délicat pour de jeunes enfants, à plus forte raison si on maintient un langage ambigu (voir en particulier ci-dessous II.4.).

I. Situations vécues où l'on utilise une technique de division

I.1. Le volume des fouilles nécessaires à la construction d'un pavillon est de 216 m^3. La terre de déblai doit être totalement évacuée par des camions dont la capacité n'excède pas 5 m^3. Combien faut-il prévoir de camions ?

Le transporteur peut tenir le raisonnement suivant:

> Le volume du déblai est 216 m^3. Divisant 216 par 5, on trouve 43,2. Il faut donc prévoir 44 camions.

I.2. Le lotisseur d'un terrain rectangulaire de 31 × 142* (en mètres), décide de le vendre en sept lots d'égale superficie. Quelle sera la superficie de chaque lot ?

La superficie du terrain est de 4 402 m^2. La superficie de chaque lot est obtenue en divisant 4 402 par 7:

$$\begin{array}{r|l}
4\,4\,0\,2 & 7 \\ \cline{2-2}
2\,0 & \\
6\,2 & 6\,2\,8\,,\,8\,5\,7\,1 \\
6\,0 & \\
4\,0 & \\
5\,0 & \\
1\,0 & \\
3 &
\end{array}$$

Le lotisseur peut donc proposer des lots de 628,85 m^2.

I.3. Commentaires

Dans la situation I.1., le transporteur souhaite trouver un nombre n (le nombre de camions) tel que $216 = 5\ n$.

Dans la situation I.2., le lotisseur souhaite trouver un nombre s (la superficie de chaque lot en mètres carrés) tel que $4\ 402 = 7\ s$.

L'un et l'autre se posent le même problème: trouver un nombre x

* Comme disent les professionnels.

tel que $a = b \times x$, où a et b sont connus. Ils utilisent, alors, une technique de la division qui leur fournit un quotient; pour des raisons liées à la situation, ils en déduisent un nombre qui est la solution à leur problème, lequel n'est pas exclusivement mathématique.

C'est ainsi que, dans la situation I.1., on obtient pour quotient 43,2; mais, comme le nombre de camions est un naturel et comme il faut évacuer toute la terre, le transporteur choisit 44. De surcroît, un transporteur prudent aurait sans doute légèrement majoré le volume à transporter et aurait, peut-être, prévu 45 camions — soit une capacité de 225 m^3.

Dans la situation I.2., le calcul peut être poussé aussi loin qu'on veut; on obtient 628,857 142 857 142 857 ... . Mais on est convenu dans la profession de n'exprimer les superficies en mètres carrés qu'avec deux chiffres au plus après la virgule, d'où le choix de 628,85. D'ailleurs, il est possible, dans ce cas, de décider que les superficies seront exprimées en nombres entiers; on pourrait alors constituer, par exemple, quatre lots de 628 m^2 et trois lots de 630 m^2, ce qui peut être plus judicieux dans la pratique commerciale.

Il ressort de ces remarques que le quotient fourni par la technique de la division est — en général — non pas le nombre cherché, mais seulement une évaluation de ce nombre: il reste à choisir celui-ci compte tenu du problème concret à résoudre.

I.4. Le point de vue mathématique

Il consiste à mettre en évidence les seules informations utiles, puis, à l'aide d'outils appropriés, à fournir une ou plusieurs solutions entre lesquelles l'utilisateur pourra choisir, mais en connaissance de cause.

Voici comment on pourrait traduire la situation I.1. en langage mathématique: il s'agit de trouver un naturel n tel que $216 \leqslant 5n$. A partir de quoi, on peut tenir le raisonnement suivant: parmi les naturels qui répondent à la condition $216 \leqslant 5n$, il en existe un plus petit que les autres; désignons-le par n_0. Ce naturel n_0 est défini par

$$5(n_0 - 1) < 216 \leqslant 5n_0$$

Au couple (216 ; 5), la division euclidienne (voir cette rubrique) associe le couple (43 ; 1); d'où $n_0 - 1 = 43$, c'est-à-dire $n_0 = 44$. Par conséquent, il faut au moins 44 voyages de camions pour transporter la terre. L'utilisateur reste évidemment libre de choisir un naturel plus grand que 44 s'il a de bonnes raisons pratiques d'en décider ainsi.

Dans la situation I.2., il s'agit de trouver un décimal s tel que $4\,402 = 7\,s$. On démontre qu'il n'en existe pas. La technique de la division fournit une suite de quotients décimaux: 628 ; 628,8 ; 628,85 ; 628,857 ; etc... qui satisfont tous à la condition $7t \leqslant 4\,402$.

Là encore, l'utilisateur retient, pour des raisons professionnelles, le décimal 628,85.

II. Division dans N

Les deux notions essentielles sont d'une part la divisibilité, d'autre part la division euclidienne.

II.1. La divisibilité est issue de l'étude des équations dans **N** du type

$$a = b \times x$$

où a et b sont des naturels connus, b n'étant pas nul.

Exemple: 3 est un diviseur de 15 (car $15 = 3 \times 5$).

Contre-exemple: 4 n'est pas un diviseur de 15 (car l'équation dans **N** : $4x = 15$ n'a pas de solution).

II.2. La division euclidienne (voir cette rubrique) est une application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_*$ vers $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

A tout couple (a, b) de naturels dont le second composant n'est pas nul, elle associe un couple unique (q, r) de naturels tels que

$$a = bq + r \quad \textit{et} \quad r < b$$

Exemples:

à (15 ; 3) la division euclidienne associe (5 ; 0)
à (17 ; 4) la division euclidienne associe (4 ; 1)
à (37 ; 9) la division euclidienne associe (4 ; 1)

II.3. Liens entre division euclidienne et divisibilité

a) Au couple (15 ; 3), la division euclidienne associe le couple (5 ; 0) car

$$15 = (3 \times 5) + 0 \qquad et \qquad 0 < 3$$

L'égalité $15 = 3 \times 5$ montre que 3 est un diviseur de 15 (5 est également un diviseur de 15).

Plus généralement, si dans la division euclidienne de a par b, le reste est nul, alors b est un diviseur de a.

b) On constate que 7 est un diviseur de 693 (par exemple en remarquant que $693 = 700 - 7$ et que 700 et 7 sont visiblement multiples de 7).
Cela permet d'affirmer qu'il existe un naturel q et un seul tel que $693 = 7 \times q$.
De cette égalité, il résulte qu'au couple (693 ; 7) la division euclidienne associe le couple (q ; 0) où q désigne un naturel (on ne cherche pas à savoir *quel est* ce naturel; il suffit de savoir qu'il existe).

Plus généralement, si b est un diviseur de a, alors la division euclidienne de a par b donne zéro pour reste.

c) En conclusion:

- d'une part, la division euclidienne fournit *un moyen* de savoir si b est diviseur de a, ce moyen n'étant d'ailleurs pas le seul: on peut fréquemment éviter de "poser la division de a par b" (par exemple en utilisant un critère de divisibilité par b, ou des remarques analogues à celle de II.3.b);
- d'autre part,la division euclidienne fournit toujours une solution unique au problème évoqué en II.2 alors même que l'équation posée en II.1. n'en comporte pas.

II.4. Questions de vocabulaire

a) "*division exacte*", "*division sans reste*"
D'ordinaire, on entend par là "division euclidienne dans laquelle le reste est nul".
Le qualificatif "*exact*" est fâcheux, car il laisse entendre qu'il existe des divisions inexactes; "*sans reste*" ne vaut guère mieux

puisque cette façon de parler laisse entendre que zéro n'est pas un naturel.

Ces deux locutions pourraient disparaître sans inconvénient puisque l'on dispose de trois façons claires de s'exprimer:

— "dans la division euclidienne de ... par ... , le reste est nul"
— "... est un multiple de ..."
— "... est un diviseur de ..."

b) "*quotient entier*"

Cette locution possède (au moins) trois sens:

α - "quotient euclidien".
Exemple: "le quotient entier de 17 par 5 est 3".

β - "quotient euclidien dans le seul cas où le reste est nul".
Exemple: "le quotient entier de 15 par 5 est 3".

γ - "approximation entière par défaut du quotient d'un rationnel par un autre".
Exemple: "le quotient entier de 17,75 par 5,01 est 3".

A notre avis, l'usage de cette locution ne se justifie dans aucun de ces trois sens. Par contre, dire que "le quotient de a par b est entier" apporte une information (voir ci-dessous IV.3., premier exemple).

c) "*quotient exact*"

De même que ci-dessus (II.4.a), l'adjectif "*exact*" est regrettable et cette locution est inutile. Au lieu de dire: "5 est le quotient exact de 15 par 3", autant dire: "5 est le quotient de 15 par 3"; si l'on veut signaler que le reste est nul, le plus simple n'est-il pas de dire: "le reste est nul" ?

d) "*division avec reste*"

C'est faute de distinguer la division euclidienne de la divisibilité que l'on introduit les locutions: "*division avec reste*", "*division sans reste*".

"Division avec reste" signifie "division euclidienne dans laquelle le reste n'est pas nul".

Pour "division sans reste", voir II.4.a).

III. Calculs dans D^+

Remarque préliminaire: Les vocables et les notations introduits dans ce paragraphe III sont commodes pour un exposé destiné à des enseignants, mais nous pensons qu'ils sont inutiles *dans les classes.*

Les problèmes posés par les nombres négatifs n'ayant rien d'essentiel ici, nous nous limiterons volontairement à D^+. Appelons *décimaux d'ordre n* les nombres décimaux qui peuvent s'écrire avec n chiffres à droite de la virgule — c'est-à-dire ceux dont le produit par 10^n est un naturel —. Notons D^+_n l'ensemble des décimaux d'ordre n qui sont positifs ou nul (on remarque que $D^+_0 = N$).

Exemples:

$$0{,}5 \in D^+_1 \quad \text{et aussi} \quad 0{,}5 \in D^+_2 \quad (\text{car } 0{,}5 = 0{,}50)$$

$$3{,}642 \in D^+_3 \quad \text{mais} \quad 3{,}642 \notin D^+_2$$

III.1. Dans D^+, à tout couple (a, b) de décimaux dont le second composant est non nul on peut faire correspondre un couple unique (q, r) de décimaux dont le premier estd'ordre n, de telle façon que:

$$a = bq + r \qquad et \quad r < \frac{b}{10^n} \qquad \text{(voir note *)}$$

Cette condition équivaut à celle-ci:

$$a \times 10^n = b\,(q \times 10^n) + (r \times 10^n) \qquad et \quad r \times 10^n < b$$

En conséquence, si $a \times 10^n$ et b sont des naturels, on se retrouve dans le cadre de la division euclidienne avec $q \times 10^n$ comme quotient euclidien et $r \times 10^n$ comme reste, nombres à partir desquels on obtiendra les nombres q et r cherchés. Sinon, on peut toujours se ramener à ce cadre en multipliant $a \times 10^n$ et b (donc aussi $r \times 10^n$) par une puissance convenable de 10; en pratique, d'ailleurs, on se contente de "rendre le diviseur entier", de "déplacer la virgule" au dividende et de mettre la virgule au quotient lorsqu'on "abaisse" le premier chiffre qui suit la virgule.

---

* Bien que l'appellation "division euclidienne à l'ordre n" ne soit pas courante, elle pourrait avantageusement être employée pour l'application de $D^+ \times D^+_*$ vers $D^+_n \times D^+$ qui vient d'être définie; de même q pourrait être appelé "quotient euclidien d'ordre n de a par b".

Exemple 1 :

$a = 426{,}29 \qquad b = 3{,}5 \qquad n = 1$

Au lieu de se ramener à 42 629 et 350 en multipliant par 10^2, on "pose" en fait:

$$\begin{array}{lll|l} 4\,2\,6 & , & 2\,9 & 3\,5 \\ \hline \,7\,6 & & & 1\,2\,,1 \\ \,6 & & 2 & \\ \,2 & & 7 & \end{array}$$

Il importe de remarquer que le reste est ici, non pas 27, *mais* 2,79. En effet:

$$426{,}29 = (35 \times 12{,}1) + 2{,}79 \qquad et \qquad 2{,}79 < \frac{35}{10}$$

Exemple 2:

mêmes dividende et diviseur, mais $n = 3$.

$$\begin{array}{lll|l} 4\,2\,6 & , & 2\,9 & 3\,5 \\ \hline \,7\,6 & & & 1\,2\,,1\,7\,9 \\ \,6 & & 2 & \\ \,2 & & 7\,9 & \\ & & 3\,4\,0 & \\ & & \,2\,5 & \end{array}$$

Le reste est, non pas 25, mais 0,025; en effet:

$$426{,}29 = (35 \times 12{,}179) + 0{,}025 \qquad et \qquad 0{,}025 < \frac{35}{1\,000}$$

III.2. En définitive:

a) Toutes ces "divisions" se ramènent à la division euclidienne dans N.

b) C'est la *même* technique opératoire qui, avant de donner le quotient euclidien d'ordre n, a fourni les quotients euclidiens d'ordre plus petit que n et qui donnerait, si on la prolongeait en "poussant" la division, les quotients euclidiens d'ordre aussi élevé qu'on le désire.

IV. Division dans Q^+

IV.1. Rappelons que l'ensemble **Q** des rationnels a été construit précisément pour que chaque équation dans **Q** du type

$$\alpha = \beta \times x \qquad (\text{où } \alpha \in \mathbf{N} \text{ et } \beta \in \mathbf{N}_*)$$

ait une solution unique (voir ENTIERS ET RATIONNELS).

De même qu'au III., les problèmes posés par les nombres négatifs n'ont rien d'essentiel ici; nous nous limiterons donc volontairement à $\mathbf{Q}^+$.

On démontre le théorème suivant:
a étant un rationnel positif et b un rationnel positif non nul, il existe un rationnel positif q et un seul tel que $a = b \times q$.
q s'appelle le quotient de a par b et se note:

$$a : b \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} \qquad \text{ou} \qquad a/b$$

Exemples:

le quotient de	$\frac{2}{3}$	par	4/7	est	7/6
le quotient de	4,2	par	$\frac{7}{3}$	est	1,8
le quotient de	16	par	3	est	$\frac{16}{3}$
le quotient de	15	par	2	est	7,5
le quotient de	15	par	3	est	5
le quotient de	0	par	19/9	est	0

IV.2. Dans la définition, rappelée ci-dessus, du quotient d'un rationnel a par un rationnel b, a et b peuvent être des naturels puisque **N** est un sous-ensemble de **Q** (voir ENSEMBLES DE NOMBRES).

Dans ce cas, il existe un rationnel quotient de a par b, mais on prendra garde que ce rationnel n'est pas toujours un naturel. Ainsi:

— Le quotient de 15 par 3 est 5. C'est un naturel et a fortiori un rationnel.
— Le quotient de 15 par 2 est 7,5. Ce n'est pas un naturel; c'est un décimal, donc un rationnel.
— Le quotient de 15 par 7 est 15/7. Ce n'est ni un naturel, ni un décimal,mais c'est un rationnel.

IV.3. Dans la définition du quotient de deux rationnels, a et b peuvent être des décimaux puisque **D** est un sous-ensemble de **Q** (voir ENSEMBLES DE NOMBRES).

De même qu'en IV.2., le quotient de a par b, s'il est toujours rationnel, n'est pas nécessairement décimal.

— Le quotient de 7/5 par 0,2 est le naturel 7, donc c'est un décimal, donc un rationnel. Ici, on peut légitimement dire que le quotient de 7/5 par 0,2 est entier; de même qu'on peut dire qu'il est impair, qu'il est premier, ...
— Le quotient de 0,5 par 1/5 est 2,5. Ce n'est pas un naturel; c'est un décimal, donc un rationnel.
— Le quotient de 6,25 par 1,5 est 25/6. Ce n'est ni un naturel, ni un décimal, mais c'est un rationnel.

IV.4. En résumé

- sauf exception, le rationnel quotient d'un naturel par un naturel n'est pas un naturel non nul;
- sauf exception, le rationnel quotient d'un décimal par un décimal non nul n'est pas un décimal;
- dans tous les cas, le quotient d'un rationnel par un rationnel non nul est un rationnel. Ce peut être un naturel, un décimal non naturel ou un rationnel non décimal.

Ici encore, la technique de la "division euclidienne poursuivie après la virgule" :
- permet d'obtenir ce quotient si c'est un décimal non naturel;
- en fournit des approximations par défaut de plus en plus fines si ce n'est pas un décimal.

Mais il importe de ne pas confondre cette technique (qui trop souvent vient *seule* à l'esprit quand on emploie le mot *division*) avec les divers concepts théoriques évoqués dans cette rubrique.

IV.5. Il n'existe pas de rationnel dont le produit par 0 soit un rationnel non nul, puisque, quel que soit le rationnel a, a × 0 = 0. C'est pourquoi on ne peut pas parler de "quotient de a par 0".

V. Retour aux situations vécues

Dans la majorité des problèmes de la vie où l'on utilise des outils mathématiques (mécanique, commerce, physique, gestion, construction, économie, navigation aérienne ou maritime, etc...) dans le but d'obtenir des résultats numériques, les rationnels (à plus forte raison les réels) n'ont qu'un intérêt théorique.

En effet, les données numériques de départ sont, en général, entachées d'une erreur due aux appareils de mesure et aux conditions du relevé de ces mesures. Le praticien en tient compte dans la résolution du problème qu'il traite.

D'autre part, quand bien même les données numériques ne seraient entachées d'aucune erreur, il est inutile que la précision des résultats du calcul excède la précision des instruments de mesure disponibles. Par exemple, un menuisier accepte de découper une planchette de 23,5 cm; il ne garantit pas de pouvoir en découper une de 23,57 cm.

En fait, les décimaux sont les seuls nombres utiles dans la pratique et ils interviennent en tant qu'approximations des résultats numériques théoriques préalablement obtenus.

Dans la situation I.1, le résultat théorique, compte-tenu des données, est le décimal 43,2. L'utilisateur adopte l'approximation entière par excès: le naturel 44.

Dans la situation I.2., le résultat théorique compte tenu des données, est le rationnel 4 402/7. La division de 4 402 par 7 fournit une suite d'approximations décimales par défaut parmi lesquelles l'utilisateur retient par exemple 628,85 ou 628.

L'utilisation des mathématiques dans la résolution de problèmes pratiques conduit à s'interroger sur deux problèmes sous-jacents:

- les approximations décimales des rationnels et des réels
- le calcul d'incertitude (il s'agit d'estimer l'erreur commise sur le résultat d'un calcul numérique, connaissant les incertitudes portant sur les données).

COURRIER DES LECTEURS

Plusieurs collègues nous ont fait part, oralement ou par écrit, de leurs réflexions, critiques, approbations ... à propos de la brochure 1974. Nous les en remercions vivement, et nous souhaitons continuer à recevoir des lettres de lecteurs.

Nous aimerions savoir quelles rubriques vous ont paru difficiles à lire, ou au contraire faciles; si nos brochures vous sont utiles, et si oui en quoi; quelles rubriques non encore rédigées vous paraissent devoir l'être en priorité, etc...

Ecrivez-nous à l'adresse suivante:

Louis DUVERT
21, boulevard des Castors — 69005 LYON

D'une façon générale, les commisions A.P.M. DICTIONNAIRE et MOTS ne peuvent pas et surtout ne veulent pas légiférer, censurer, interdire, imposer, ... Le vocabulaire et le symbolisme actuels sont loin d'être satisfaisants; nous essayons d'en faire un bilan critique, sans nous interdire d'émettre parfois notre opinion, favorable ou défavorable, sur tel ou tel emploi d'un mot ou d'un signe, quand cette opinion nous est commune (ce qui n'est pas toujours le cas ...), mais sans prétendre détenir la vérité.

Voici, extraites de notre courrier, quelques remarques, suivies de nos réponses éventuelles.

EGALITE

De Georges CAGNAC (Treignac)

Page 6, α). On n'a pas précisé quels sont les éléments à représenter, et je suis surpris que les deux enfants aient choisi les mêmes dessins ... Vous n'écrivez A = B *qu'à cause des trois dernières lignes de la page 6.*

Dans ces trois dernières lignes, nous avons pris soin d'écrire *un* en italique, pour exprimer qu'il s'agissait d'un seul ensemble. Mais il aurait mieux valu, en effet, être plus clair et écrire:

"On place sur un bureau un jeton, une étoile et un carré, et on demande à deux enfants de représenter l'ensemble de ces objets et de le baptiser à leur guise".

A la page 8, vous employez trois fois le mot "convention"... On n'est jamais assez précis dans l'énoncé des conventions *qui sont à la base de toute considération d'ensemble (ou de tout schéma d'ensemble), et votre remarque 2, page 10, méritait mieux que ce titre de "remarque".*

Dans notre esprit, *toute* la rubrique EGALITE met en évidence la nécessité de conventions précises et l'importance du contexte; la remarque 2 de la page 10 n'est là que pour rappel, en guise de conclusion en quelque sorte.

*

* *

De P. MURBACH (57 — Fameck)

Page 1: à propos de $7 = 3 + 4$ *, le seul* $3 + 4$ *signifie qu'il y a une opération à faire; ne vaudrait-il pas mieux écrire* $(3 + 4)$ *, c'est-à-dire* $3 + 4$ *étant effectuée ? Ceci vaudrait pour bien d'autres exemples et ce serait l'occasion de dire un "mot" sur le pourquoi de l'usage de la parenthèse.*

Le rôle des parenthèses n'est pas de distinguer entre "somme à effectuer" qui s'écrirait $3 + 4$, et "somme effectuée" qui s'écrirait $(3 + 4)$.

$3 + 4$ ne désigne pas un calcul à effectuer; il désigne un nombre. C'est faute de le comprendre qu'on commet des erreurs du type $3 + 4 = 7 \times 5 = 35$ ...etc... et qu'on interdisait presque, naguère, d'écrire $7 = 3 + 4$, n'acceptant que $3 + 4 = 7$.

Page 1 et page 5, α) β) , En rapprochant ces points, j'ai envie de compléter la définition que vous donnez de l'égalité: une information, oui. Néanmoins, lorsque nous disons $a = b$ *, cette "proposition" peut être vraie ou bien fausse (liée au contexte, etc...). Dès lors, 5 α) est une proposition et 5 β) une "forme propositionnelle"...*

Le sens α) est rare à l'école élémentaire. Au sens β), il est vrai que $4 + a = 7$ n'est pas une égalité (n'est pas une "information"); c'est un "moule à égalités", qui fournit des égalités: l'une est vraie, les autres sont fausses.

COUPLE

De C. KALINOVSKI (Cayenne)

Je lis en page 10 de EGALITE :
"L'énonciation "a et b sont égaux", ..., ne résiste pas à une analyse serrée"
puis en page 7 de COUPLE :

« "Les couples (a, b) et (c, d) sont égaux" signifie ... »

Bien sûr, vous donnez la définition de la phrase entre guillemets puisque vous écrivez signifie, *mais ne serait-il pas plus simple d'écrire:*

(a, b) = (c, d) signifie ... (lire "égale")

ou (a, b) et (c, d) désignent le même couple si ... *?*

Notre collègue a raison. Il nous arrive, comme à tout le monde, de commettre quelques manquements à nos propres principes ...

NOMBRE DECIMAL – NOMBRE A VIRGULE

De P. MURBACH

Page 5, II 2 a): Le zéro derrière la virgule peut prendre — conventionnellement — une signification importante, dans une mesure physique par exemple.

Il est exact que le physicien apporte une information supplémentaire quand il écrit 5,0 au lieu de 5; mais quelle information ? Veut-il dire que la mesure considérée est certainement comprise entre 4,9 et 5,1 ou bien entre 4,95 et 5,05 ?

RELATION BINAIRE

De G. CAGNAC: à propos de la remarque 2 de la page 13:

La phrase

"Sans famille" a été emprunté par "Jeanne"

désigne aussi bien la relation $\mathcal{R}$ que la relation $\mathcal{R}'$ de la page 11;

l'essentiel est de distinguer, par un acte libre, la source et le but. Dans le français usuel, la voix active du verbe suggère une orientation, mais le mathématicien est libre de la refuser. C'est ce que je souhaiterais que vous mettiez en évidence: la même phrase *rend compte de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{R}'$ selon ce que j'ai choisi librement pour source, et pour but.*

En général, on convient (tacitement ...) de choisir comme source l'ensemble décrit par le *sujet* de la phrase française; c'est ce dont nous étions convenus dans cette remarque 2; mais il est préférable de rendre cette convention explicite: voilà qui est fait.

NOMBRE NATUREL

Pour la lecture de "$17 < 23$" (haut de la page 3), G. WALUSINSKI estime que *si on veut dire $23 > 17$, mieux vaut l'écrire ainsi et respecter par conséquent dans tous les cas la lecture de gauche à droite.*

En écrivant

$17 < 23$ se lit

"17 est plus petit que 23" ou "23 est plus grand que 17"

nous pensions au fait que "17 est plus petit que 23" et "23 est plus grand que 17" contiennent la même information qui peut se représenter aussi bien par $17 < 23$ que par $23 > 17$.

Dans la phrase incriminée, le verbe *lire* signifie: "prendre connaissance du contenu", tandis que dans la remarque de notre collègue G. WALUSINSKI, le verbe *lire* signifie "traduire par la voix les symboles écrits, en respectant l'ordre de gauche à droite". Dans ce deuxième sens, on dirait effectivement:

"$17 < 23$ *se lit dix-sept est plus petit que vingt-trois*".

Notons cependant que la lecture de gauche à droite subit quelques entorses dans les textes mathématiques du fait que certains symboles ne figurent pas sur la ligne principale de l'écriture bien que se référant aux signes qui y sont écrits, comme par exemple dans la phrase:

"L'égalité $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ est vraie".

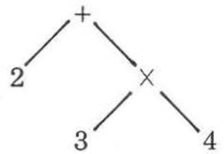
Si nous avons pris le verbe *lire* dans son sens le plus fort, c'est aussi en pensant qu'on peut "lire sans comprendre". Ainsi, on peut très bien savoir que

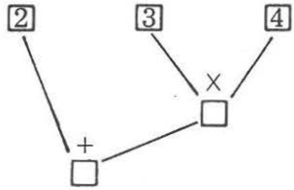
$$2 + 3 \times 4$$

se lit *deux plus trois fois quatre* sans pour autant savoir laquelle des deux égalités

$$2 + 3 \times 4 = 20 \qquad \text{et} \qquad 2 + 3 \times 4 = 14$$

est vraie. L'un ou l'autre des deux arbres suivants:





explicite sans doute mieux la signification de $2 + 3 \times 4$ et fait apparaître que celle-ci ressort moins d'une lecture linéaire que de l'analyse d'une représentation et des conventions qui lui sont attachées.

★

★ ★

A la demande de plusieurs lecteurs, précisons, à propos d'un passage de la page 2 ("...toute collection extraite de la boîte A"), qu'on ne peut pas extraire des *objets* de la boîte A; on n'en peut extraire que des collections (ces collections ont toutes le même nombre d'objets).

ENTIERS ET RATIONNELS

De P. MURBACH

Page 2: 3ème ligne, vous notez l'ensemble des naturels privé de zéro par $\mathbf{N}_*$ *; pourquoi pas* $\mathbf{N}^*$ *? Cela se justifie — il faudrait peut-être le dire — par la suite, dans des écritures telles que* $\mathbf{Q}_*^+$ *,* $\mathbf{R}_*^+$ *, etc...*

$\mathbf{N}_*$: notation préconisée par la Commission du Dictionnaire A.P.M. (Voir l'article "Aster vole", de J. CHEVALLIER, dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P., numéro 297).

Page 11 : VI, 1 α) Occasion, me semble-t-il, lorsqu'on "pose"

$$\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}\ (0, 3) = -3\ ,$$

de dire qu'il s'agit d'une convention.

Il s'agit bien en effet d'une convention. C'est plutôt l'égalité

$$\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}\ (3, 0) = 3$$

qui pose un problème (celui de l'identification de **N** et de $\mathbf{Z}^+$).

★

★ ★

De C. KALINOVSKI

En page 15, il me semble qu'il serait bon d'insister davantage *sur le fait que* 8 : 11 *a un sens car* 8 *et* 11 *sont des éléments de* **Q**, *que* 8 : 11 *désigne le quotient exact dans* **Q**, *et que* 8 : 11 *n'a pas de sens dans* **N**. *Ne croyez-vous pas que cette écriture devrait être bannie et que seule* $\frac{8}{11}$ *devrait être conservée ?*

Nous pensons que les trois écritures

$$\frac{8}{11} \quad ; \quad 8 : 11 \quad ; \quad 8/11$$

ont la même signification:
- elles ne désignent aucun naturel;
- elles désignent le rationnel quotient du rationnel 8 par le rationnel 11 (nous faisons des réserves sur l'expression "quotient exact": voir DIVISION).

Pourquoi bannir l'une d'elles ?
Il semble néanmoins que l'emploi de 8 : 11 soit en voie de disparition.

FRACTION

De P. MURBACH:

Page 3: 3) Occasion, suite à ce "en définitive", de dire "un mot" sur le moyen qu'on se donne d'avoir "plus de liberté" par la symbolisation; sans symbolisation, serait-il facile de manipuler, d'opérer ... ?

Nous sommes d'accord.

* * *

J. DEMOULIEZ (Vendin-le-Vieil) rapproche notre page 4 et le paragraphe 6.1. des Commentaires aux programmes du 2.1.1970 pour l'école élémentaire: "Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur" et demande comment on peut les concilier.

Nous laissons à J. DE GUILHERMIER (Beyrouth, Liban) le soin de répondre (en attendant d'en reparler nous-mêmes dans une rubrique ultérieure sur OPERATEUR):

C'est la notice FRACTION *qui m'a le plus intéressé. Il serait souhaitable que les Commentaires Officiels des programmes reprennent ce que vous dites: cela éviterait bien des difficultés pédagogiques !*

ENSEMBLES DE NOMBRES

De P. MURBACH

Page 4. II. 3 . A propos de dénombrable, *dire que c'est par la comparaison avec l'ensemble* **N** *qu un ensemble est dit dénombrable ou non. Est-ce bien cela ?*

C'est en effet **N** qui sert de référence:

L'ensemble E est dénombrable
signifie
Il existe une bijection de **N** vers E.

A noter un autre sens, plus large:

L'ensemble E est dénombrable
signifie
Il existe une bijection de **N** ou d'une partie de **N** vers E.

Ce qui permet de qualifier aussi de dénombrable tout ensemble fini.

A PROPOS DE SYMBOLES

G. WALUSINSKI, dans un article publié par "L'Ecole Libératrice", numéro 32 du 31.05.1974, écrit:

Pourquoi n'avoir pas traité de l'usage des symboles (autres que le signe = abondamment étudié dans la première notice) ? C'est à la page 6 de la notice EXEMPLE *qu'on voit apparaître, en note le signe d'appartenance, sans explication; c'est à la page 9 de la notice* ENTIERS et RATIONNELS *qu'apparaît le signe d'inclusion. On doit constater un usage volontairement très réduit des symboles au bénéfice d'une rédaction plus littéraire; pour la compréhension rapide et facile de ces textes, on y gagne sûrement; et puis la Commission a sans doute voulu réagir contre "l'ensemblophilie galopante", cette maladie qui a perturbé quelques convertis de la dernière heure, persuadés qu'écrire des mathématiques à coups de symboles, "ça fait moderne" !*

Nous retenons la suggestion de traiter ultérieurement de l'usage de symboles. Nous serions heureux de recevoir d'autres suggestions pour nos futures rubriques; mais nous faisons appel à la patience de nos lecteurs: notre travail de rédaction est nécessairement lent ...

INDEX TERMINOLOGIQUE

commun aux brochures I (1974) et II (1975)

Abréviations des rubriques:

EG	:	EGALITE
RB	:	RELATION BINAIRE
EX	:	EXEMPLE, CONTRE–EXEMPLE
NN	:	NOMBRE NATUREL
CO	:	COUPLE
FR	:	FRACTION
ND	:	NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE
ER	:	ENTIERS ET RATIONNELS
EN	:	ENSEMBLES DE NOMBRES
RG	:	REPRESENTATIONS GRAPHIQUES
AF	:	APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
PE	:	PARTITION, EQUIVALENCE
PA	:	PARTAGES
DT	:	DIVISIBILITE
DE	:	DIVISION EUCLIDIENNE
DI	:	DIVISION

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Les mots en majuscules sont ceux qui feront l'objet d'une rubrique dans une brochure ultérieure.

Certains mots se retrouvent dans presque toutes les rubriques: *contre-exemple*, *couple*, *définition*, *écriture*, *égalité*, *élément*, *énoncé*, *ensemble*, *exemple*, *naturel*, *nombre*, *notation*, *nul*, *situation*, *zéro*, ... Nous n'avons laissé dans l'index que l'indication des rubriques "à astérisque" éventuelles les concernant.

Nous avons supprimé des mots comme: *collection*, *construction*, *démontrer*, *dessin*, *figure*, *formule*, *généralisation*, *hypothèse*, *notion*, *objet*, *propriété*, *tableau*, *théorème*.

abus de langage FR
addition EN — ER
additionner FR
adjoindre ER
·aigu RG
aire RG
algèbre RG
angle RG
anneau EN
antécédent RB* — AF — PE — PA
application AF* — PE — DE — DT — PA — DI
approximation AF — DI
arbre RG
arrivée (ensemble d') RB*
associativité EN* — ER — EX
attribut RG
autant que NN*

base de numération EG — ND — FR — EN
bijection AF* — NN — EN
binaire (nombre) EN
binaire (relation) Voir "relation"
bouclé (élément) RB*
but RB* — AF

cardinal AF* — NN* — EX — EN
carré EG — RG
carré (d'un nombre) AF
cartésien (produit) RB*
cartésien (schéma) Voir "schéma cartésien"
cercle PE — RG
chiffre, chiffrer CO — NN — FR — EN — DI
circonscrit RG
classe d'équivalence PE* — ER — PA
classer NN — DT
classification RG
cm EG
codage FR
colonne RB — DT
commutativité EN* — EX — ER — DT

comparaison NN
composants (d'un couple, d'un n-uplet) CO* – ND – AF – DE – DI
composé ER
composé (naturel) DT*
compris entre EX
congru PE*
CONGRUENCE EG – PE – DE
contenant ER
contexte EG – EN
contre-exemple EX*
coordonnées (d'un n-uplet) CO*
corps EN
correspondance un à un NN*
correspondance terme à terme NN*
côté EG* – RG – PE
couple CO*
courbe représentative AF* – RG
critère (de divisibilité) DI
cube RG

damier RG
décimal ND* – EN* – EG – FR – ER – AF – DI
décimal (d'ordre n) DI*
défaut (par) DI
démonstration EX
démonstration de type exhaustif EX*
démonstration de type déductif EX*
denombrable EN*
dénombrement RG
dénominateur FR* – EN
départ (ensemble de) RB*
désignation, désigner EG – ER
déterminé (nombre) EG
déterminer RB*
diagramme RG
différence ER
différent EG – EN
dimension DT
discernable PA*

distinct PA
distributivité EN*
dividende DE* — DT — DI
diviser DT
diviseur DE* — DT* — DI — RB — AF — RG
divisible, divisibilité DT* — RG — DI — DE
division DI* — EG — ER
division euclidienne DE* — PE — DT — DI — PA
dm EG
double NN — RB
droite EG — RG

écriture à virgule EN — ND
égal, égaler EG*
égalité EG*
ensemble des antécédents AF*
ensemble d'existence AF*
ensemble quotient PE*
ensemble des solutions EN* — DT
entier EN* — ER* — FR
entière (partie) ND
entraîne ND
équation EG — FR — ER
équivalence (relation d') PE* — EG — FR — ER
équivalent PE* — EG — FR — ER
erreur DI
espace RG
étiquette EG
étranger ER
être mathématique EX — FR — EN — ER
euclidien DE*
euclidienne Voir "division euclidienne"
excès (par) DI
exemple EX*
existe (il existe au moins un ...) EX
existentiel (énoncé) EX*
existentiel (d'une fonction) EF*

facteur DT
factorielle AF*

faux EG — EX — RB — ER
fini (ensemble) NN* — EX — EN — AF
fléché (schéma) RB*
fonction AF* — RG
fonction (être fonction de) AF
fonctionnelle (notation) AF*
fonctionnelle (relation) AF*
fraction FR* — EN — ER
fractionnaire FR* — EN* — ND — ER — PE

géométrie RG
graphe RB* — PE — AF
graphique AF
groupe EN

hauteur RG
histogramme AF* — RG

identifier, identification ER
identité EG — RG
illimitée (écriture) ND*
illustration EX
image RB* — AF — PE
impair EX — AF
incertitude DI*
inclus, inclusion EN — RG
inconnu, inconnue EG — DT
indiscernable PA*
inégalité EX
inférieur NN*
infini (ensemble) NN* — AF
infinité EX — ER
intersection CO
inverse ER*
irrationnel EN*
irréductible FR* — ER
isocèle (triangle) PE
isométrique PE*

justifier EX*

k-aire ND*

langage   RG
langage mathématique   FR
largeur   AF
lecture   EG — NN
légende   RG
lien verbal   RB* — PE — AF — DT
ligne   RB — DT
logarithme décimal   AF*
loi de composition   EN* — ER
longueur   EG — PE
losange   PE

mesurage   EG
mesure, mesurer   EG — AF
milieu   RG
modèle   DT — PA
modulo   PE*
moins que   NN*
moitié   RB
monoïde   EN
multiple   DT* — EX — RB — DE — DI
multiplication   EN — ER — DT

naturel   NN* — EN*
négatif   ER* — ND — FR — EN — DI
neutre (élément)   EN* — ER
nom   EG
notation   FR*
numérateur   FR*
NUMERATION (système de numération)   EG — ND — FR — NN
numérique (relation)   RB*
n-uplet   CO* — AF

octal   EN
OPERATEUR   FR
OPERATION   EX — EN — ER — DE — DI
opposé   ER*
ordre   CO
ordre (d'une approximation décimale)   AF
ORDRE (relation d')   EN — ER

organigramme RG
orthocentre RG*
pair NN — EN — RG — AF
paire CO*
parallélogramme PE — RG
parenthèses FR
partage PA*
partage d'un naturel PA*
partie (ou sous-ensemble) NN — EN — RB — ER — RG — AF — PE — PA
partie entière ND
partition PE* — PA — DT
patate RG
phrase (mathématique) EG — EX — FR — RB
plan PE
plus grand que, plus petit que NN*
plus que NN*
point RG
polygonal RG
polynome FR
positif ER* — ND — FR — EN — RG — DI
précédent NN*
prédécesseur NN*
premier (naturel) DT* — EX — EN — DI
premiers entre eux ER
preuve RG
preuve par 9 DE
produit FR — ER — DI
produit cartésien RB*
prolonger EN* — ER*
proportionnellement PA
puissance NN — ND — FR — EN — AF — DI
quadrilatère PE — RG
quadruplet CO*
quel que soit EG* — ND
quotient DE* — DI* — FR — ER — AF
rationnel EN* — ER* — PE* — EG — ND — AF — DI
réciproque (relation) RB* — EN — AF — DT
réciproquement CO

rectangle PE
rectangle (triangle) PE — RG
réduction, réduire (au même dénominateur) FR — ER
réel EN* — DI
référence (ensemble de) EX*
réflexivité (relation réflexive) EG* — PE
relatif EN*
relation, relation binaire RB* — AF — PE — PA — DT
relation dans un ensemble RB* — PE
répartir, répartition PE* — PA*
repérage CO
représentation graphique d'une fonction AF*
représenter, représentation RG* — EG — FR — RB
résolution, résoudre ER — DT
reste DE* — PE — DT — DI
restriction EN*
réunion RG

sagittal (schéma) Voir "schéma sagittal"
schéma EG — RG
schéma cartésien RB* — AF — DT
schéma sagittal RB* — RG — AF — PE
schéma fléché RB*
segment (de droite) EG — RG
si ... alors EX
signe EG — FR — ND
signe opératoire ER
solution ER* — EN — DT — DI
somme EN — FR — ER
sommet RG — PE
source RB* — AF — PE
sous-ensemble Voir "partie"
sous-jacent DT — DI
soustraction ER
statistique PA*
strictement (positif, ...) EN* — ER*
structure EN — ER
successeur NN*
suite NN — AF — DI

suivant NN*
superficie DI
supérieur NN*
supérieur (cardinal) EN
symbole EG — FR — PA
symétrie EG*
symétriques (points) RG
symétrique (relation) RB — PE
symétrisé ER*
synonyme, synonymie EG — FR — ER

table AF* — RG — DT
technique (d'une opération) DI
termes (d'un couple, d'un n-uplet) CO* — RB
terme (d'une somme) PA
ternaire ND*
test EX
traduction EG
trait de fraction FR*
transitivité (relation transitive) EG* — PE
trapèze PE
triangle PE — RG
triplet CO*

un NN* — EN
unité EG
universel (énoncé) EX

valeur EX
vérifié EX
vide (ensemble) NN* — CO — RB — PE — PA
virgule, nombre à virgule ND* — EN — DI
vrai, vérité EG — EX — RB — ER

zéro NN*

LEXIQUE RECAPITULATIF
pour les deux brochures 1974 et 1975

APPLICATION
Relation binaire telle que chaque élément de la source a une image et une seule.

BIJECTION
Application telle que tout élément du but a un antécédent et un seul.
ou encore
Relation telle que tout élément de la source a une image et une seule et que tout élément du but a un antécédent et un seul.
ou plus rapidement
Application dont la relation réciproque est une application.

BUT
Voir RELATION

CLASSE
Voir PARTITION et EQUIVALENCE

COMPOSE (naturel)
qui a plus de deux diviseurs.

CONGRUS modulo 5 (naturels)
qui ont le même reste par 5.

DECIMAL
"α est un rationnel décimal" signifie "l'un au moins des couples de naturels, éléments du rationnel α, a pour second composant une puissance de *dix*".
On dit que "α est un décimal".

DENOMINATEUR
Voir FRACTION

DIVISEUR d'un naturel
Voir MULTIPLE

DIVISEUR euclidien

Voir DIVISION EUCLIDIENNE

DIVISIBLE

Voir MULTIPLE

DIVISION EUCLIDIENNE

Application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_*$ vers $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ qui, au couple (a, b), fait correspondre le couple (q, r) tel que

$$a = bq + r \quad \textit{et} \quad r < b$$

a est le *dividende* (euclidien)

b est le *diviseur* (euclidien)

q est le *quotient* (euclidien) de a par b

r est le *reste* de a par b.

EGALITE

L'égalité $a = b$ apporte l'information suivante:

"a" désigne le même objet que "b".

En d'autres termes, "a" et "b" sont deux noms différents d'un objet unique.

Exemple: $7 = 3 + 4$

On lit: "sept *est égal à* trois plus quatre", ou "sept *égale* trois plus quatre" (*égale* est l'indicatif présent du verbe "égaler").

L'intérêt essentiel de la notion d'égalité est le suivant:

Si $a = b$, on peut, dans toute phrase mathématique, remplacer indifféremment "a" par "b" et "b" par "a" sans modifier le sens de la phrase.

ENSEMBLE D'ARRIVEE

Voir RELATION

ENSEMBLE DE DEPART

Voir RELATION

ENSEMBLE QUOTIENT

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle "ensemble-quotient de E par $\mathcal{R}$".

EQUIVALENCE (relation d')

Première définition:

Etant donné une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E, "$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence" signifie "Il existe une partition P de E ayant la propriété suivante: Pour chaque élément de E, l'ensemble des images de cet élément par la relation $\mathcal{A}$ est la classe de cet élément dans la partition P".

Deuxième définition

"Relation d'équivalence" signifie "Relation à la fois réflexive, symétrique et transitive".

EQUIVALENTS pour une relation d'équivalence donnée:

qui sont éléments de la même classe d'équivalence.

EXEMPLE et CONTRE–EXEMPLE

Relativement à l'ensemble de référence E et à la propriété P, est un *exemple* tout élément de E pour lequel P est vérifiée; est un *contre-exemple* tout élément de E pour lequel P n'est pas vérifiée.

FACTORIELLE n , noté n!

Produit des n premiers naturels non nuls.

FINI (ensemble)

Voir INFINI

FONCTION

Relation binaire telle que chaque élément de la source a au plus une image.

FRACTION, NOTATION FRACTIONNAIRE

Une *fraction* est un dessin, une écriture, une représentation, un symbole, ... qui sert à représenter certains êtres mathématiques.

Elle comporte:

— un trait parallèle aux lignes d'écriture, dit "trait de fraction"; c'est un signe typographique, au même titre que les chiffres, les parenthèses, le signe +, etc...

— au-dessus de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "numérateur" de la fraction.

— au-dessous de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "dénominateur" de la fraction.

GRAPHE

Voir RELATION

INFINI (ensemble)

"L'ensemble E est infini" signifie "Il existe une bijection de E vers une

partie de E autre que E".
"Ensemble fini": ensemble qui n'est pas infini.

IRRATIONNEL
Réel non rationnel

ISOMETRIQUES (segments de droite)
qui ont la même longueur.

MULTIPLE
Les quatre phrases suivantes ont le même sens:
a est un multiple de b
b est un diviseur de a
a est divisible par b
Il existe un naturel z tel que $a = b \times z$

NUMERATEUR
Voir FRACTION

PARTAGE d'un naturel
écriture de ce naturel comme somme de naturels non nuls, distincts ou non, sans tenir compte de l'ordre des termes.

PARTIE ENTIERE d'un rationnel positif
le plus grand naturel inférieur ou égal à ce rationnel.

PARTITION d'un ensemble non vide E
ensemble de sous-ensembles non vides de E (appelés CLASSES de la partition) tel que tout élément de E figure dans un de ces sous-ensembles et dans un seul.

PREMIER (naturel)
qui a deux diviseurs et deux seulement.

PRODUIT CARTESIEN d'un ensemble E par un ensemble L
L'ensemble de tous les couples dont le premier terme est élément de E et dont le second terme est élément de L s'appelle *produit cartésien* de E par L, et se note $E \times L$ (qui se lit "E croix L").

QUOTIENT (euclidien)
Voir DIVISION EUCLIDIENNE

RECIPROQUE (relation)

Voir RELATION RECIPROQUE

RELATION BINAIRE

On appelle "relation binaire de K vers F" la donnée de trois ensembles K, F, $\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $K \times F$. On la note parfois (K, F, $\mathcal{G}$).

Pour cette relation

K s'appelle la *source* ou *l'ensemble de départ*

F s'appelle le *but* ou *l'ensemble d'arrivée*

$\mathcal{G}$ s'appelle le *graphe*.

RELATION DANS UN ENSEMBLE E

relation de source E et de but E

RELATION RECIPROQUE D'UNE RELATION

A toute relation (K, F, $\mathcal{G}$), on associe sa *relation réciproque*, qui est la relation (F, K, $\mathcal{G}$'), dont le graphe $\mathcal{G}$' est l'ensemble des couples (y, x) tels que (x, y) soit élément de $\mathcal{G}$.

La source de chacune de ces deux relations est le but de l'autre.

RESTE

Voir DIVISION EUCLIDIENNE

SOURCE

Voir RELATION BINAIRE

STATISTIQUE d'une application de E vers F

donnée, pour chaque élément y de F, du nombre d'éléments de E antécédents de y.

VIDE (ensemble)

c'est l'ensemble qui n'a aucun élément.

NOTATIONS DES PRINCIPAUX ENSEMBLES DE NOMBRES

$\mathbf{N}$: ensemble des naturels
$\mathbf{Z}$: ensemble des entiers
$\mathbf{D}$: ensemble des décimaux
$\mathbf{Q}$: ensemble des rationnels
$\mathbf{R}$: ensemble des réels

$\mathbf{N}_*$: ensemble des naturels non nuls
(De même, $\mathbf{Z}_*$, $\mathbf{D}_*$, $\mathbf{Q}_*$, $\mathbf{R}_*$)

$\mathbf{R}^+$: ensemble des réels positifs (y compris 0)
$\mathbf{R}^+_*$: ensemble des réels strictement positifs

$\mathbf{R}^-$: ensemble des réels négatifs (y compris 0)
$\mathbf{R}^-_*$: ensemble des réels strictement négatifs

(De même, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^+_*$, etc...)

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 13, rue du Jura, 75013 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". Fondée en 1909, elle regroupe aujourd'hui près de 13 000 enseignants. L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de : Pluridisciplinarité [Orléans, 1975]. Problèmes de comportement [Rennes, 1976]. Formation Permanente [Limoges, 1977]. Problèmes, évaluation, erreur [Reims, 1978]. Enseignement, innovation, recherche [Grenoble, 1979]. En septembre 1980 (4 au 7 septembre), le thème sera : Quelle formation pour les enseignants de mathématiques ? [Bordeaux].

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents.
Parmi les dernières brochures parues :
Elem-Math 5 (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire.
Activités mathématiques en 4e-3e, tome 1 (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index.
Les manuels scolaires de mathématiques (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables.
Pour une mathématique vivante en Seconde (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !
Pavés et bulles (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout).
Calculatrices quatre opérations (1979) : Elémentaire et premier cycle.
Du quotidien à la mathématique (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle).

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de Mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Juin 1980

LISTE DES SECTIONS REGIONALES

(Juin 1980)

Aix-Marseille : P. NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille
Amiens : Jean CAPRON, Résidence La Hotoie-Tivoli, bât. C, esc. 3, appt n° 53, 80000-Amiens
Besançon : Martial THIRIOT, I.U.T, 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon
Bordeaux : Viviane BASTIER-LECLERCQ, 18 rue Levieux, 33000-Bordeaux
Brest : François PARISOT, 14 rue Francis Garnier, 29200-Brest
Caen : Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu
Clermont-Ferrand : André HENNETON, Sauvagnat Ste-Marthe, 63500-Issoire
Dijon : Gérard BOUILLOT, 7 rue du Dr Durande, 21100 Dijon
Grenoble : Nicolas BALACHEFF, Université de Grenoble, Tour IRMA, B.P. 53, 38041-Grenoble Cedex
Guadeloupe : A.P.M.E.P. Guadeloupe, IREM Guadeloupe, Bât. P 3e étage, Lycée Classique et Moderne de Baimbridge, 97110-Pointe à Pitre
Lille : Jean MERCIER, B.30, Résidence Lefebvre d'Orval 59500-Douai
Limoges : Michel L'ABROUSSE, 10 rue Rhin et Danube, 87100-Limoges
Lyon : Bernard ARNAUD, 401 av. du 8 mai 1945, 69300-Caluire
Martinique : Mme LAMOTTE, 1 km 700 route de Schœlcher, voie n° 6, 97200-Fort-de-France
Montpellier : Bernard CHAUVET, Lycée Montaury, 30000-Nîmes
Nancy : André MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54000-Nancy
Nice : Monique LEENHARDT, 36 D avenue Primerose, 06000-Nice
Orléans-Tours : Pierre CHRISTOFLEAU, Résidence St-Exupéry, 10 rue Jean Duverger, 41100-Vendôme
Paris [75, 77, 78, 91, 93, 94, 95] : Marie-José HOUSSIN, 28 av. Villemain, 75014-Paris
Poitiers : Colette BLOCH, 138 rue de la Mérigote, 86000-Poitiers
Reims : Marie DETREY, 39 rue Flechambault, 51100-Reims
Rennes : Michel LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon
Rouen : Albert SAVALLE, 46 avenue de l'Hippodrome, 76310-Sainte-Adresse
Strasbourg : Guy MEHL, 8 rue de Franck, 67000-Strasbourg
Toulouse : Jean-Paul BARDOULAT, Chemin du Becq, 09000-Foix

Imprimerie VAUDREY - LYON

ISBN 2-902680-18-X