

LES LIVRES ET LES BROCHURES
DE L'A.P.M.E.P.

Éléments de topologie, par A. et G. Revuz, 250 pages, 27 francs.

La mathématique à l'École Élémentaire, 540 pages, 18 francs.

Initiation au calcul des Probabilités, par Guerber et Hennequin, 232 pages, 25 francs (cartonné, 30 francs).

Les angles, par J. Frenkel, 32 pages, 3 francs.

Éléments de logique, par J. Adda et W. Faivre, 52 pages, 4 francs.

Matériaux pour l'histoire des nombres complexes, par J. Itard, 32 pages, 3 francs.

La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent (dictionnaire de l'A.P.M.E.P.), Edition 1971, 42 francs.

La Charte de Chambéry, 32 pages, 2 francs.

Première étape ... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires, 48 pages, 3 francs.

La Charte de Caen, 32 pages, 2 francs 50.

Conditions de vente et d'expédition

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser au dos du virement les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P.

M. BLONDEL, 154 avenue Marcel Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit. Aucun des ouvrages précédents n'est vendu en librairie.

Le secrétaire de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des oeuvres complètes d'Evariste Dupont dont le seul ouvrage paru est : *Apprentissage mathématique I*, un volume de 248 p., (Sudéd éditeur) (Prix : 15 F. franco pour les membres de l'A.P.M.E.P.).

B. BELOUZE
M. GLAYMANN
P. J. HAUG
et J. C. HERZ

LES CARRES MAGIQUES

BIBLIOTHEQUE DE TRAVAIL DU PROFESSEUR DE MATHEMATIQUE

Publication de l'A.P.M.E.P.

LES CARRES MAGIQUES

Thème vertical

DOCUMENT de l'A.P.M.E.P.

Rédigé par
B. BELOUZE,
M. GLAYMANN,
P.J. HAUG,
J.C. HERZ.

— janvier 1975 —

0. INTRODUCTION

Ce thème *vertical* sur les **carrés magiques** s'adresse à tous les maîtres, de la Maternelle à l'Université. Il doit permettre la rédaction d'autres documents *horizontaux* destinés aux élèves de différents niveaux (élémentaire, premier et second cycles).

Le thème abordé dans ce document est intéressant à bien des points de vue; en particulier, il touche à un grand nombre de domaines mathématiques et débouche sur des applications extérieures aux mathématiques.

Nous recommandons au lecteur de lire entièrement ce document; cependant, nous attirons son attention sur le fait qu'il n'est nullement nécessaire d'avoir tout compris pour utiliser certains

Elle est inséparable de celle des *carrés gréco-latins*, et en particulier du célèbre problème d'EULER (1782), partiellement résolu par TARRY (1898) et définitivement par BOSE, PARKER et SHRIKHANDE (1959).

La théorie des carrés gréco-latins repose essentiellement sur celle des *corps finis*, créée par GALOIS en 1830 pour élucider le problème de la résolubilité des *équations* par radicaux. Depuis 1545, grâce à CARDAN et à FERRARI, on savait résoudre les équations jusqu'au quatrième degré, mais ce n'est qu'en 1826 qu'ABEL montra que l'équation générale du cinquième degré n'est pas résoluble.

Les carrés gréco-latins se rattachent à la *géométrie projective*, créée par DESARGUES au début du 17ème siècle et développée au début du 19ème par PONCELET.

Ils ont trouvé au 20ème siècle un vaste domaine d'application en *statistique* et en *théorie de l'information*, et, par le biais de l'*algèbre linéaire* et de la *théorie des graphes*, conduisent à la résolution de certains problèmes d'*emploi du temps*.

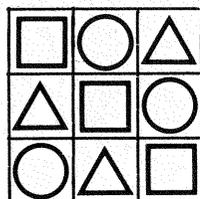
2. FORMES ET COULEURS

Voici un thème que l'on peut proposer à de jeunes enfants de l'école élémentaire.

Donnons-nous un quadrillage formé par neuf cases et trois types d'objets: des carrés, des ronds et des triangles.

Pouvons-nous placer trois carrés sur ce quadrillage de manière qu'un carré ne figure qu'une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, et de même pour trois ronds et pour trois triangles ?

Voici une disposition :



Existe-t-il d'autres dispositions ?

Donnons-nous maintenant trois couleurs: du rouge, du bleu et du vert.

Pouvons-nous colorier les différentes cases de manière que le rouge ne figure qu'une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, et de même pour le bleu et pour le vert ?

Voici une disposition:

R	B	V
B	V	R
V	R	B

Donnons-nous alors trois carrés, un rouge, un bleu et un vert, trois ronds et trois triangles de ces trois couleurs.

Pouvons-nous placer ces différentes figures sur le quadrillage de sorte qu'une forme donnée figure une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne et de même pour les couleurs ?

Une disposition est fournie par la "superposition" des deux dispositions précédentes:

□ R	○ B	△ V
△ B	□ V	○ R
○ V	△ R	□ B

Essayez de résoudre ce dernier problème en utilisant un quadrillage formé par quatre cases et en vous donnant deux formes et deux couleurs.

Même problème avec un quadrillage formé par seize cases et en prenant quatre formes et quatre couleurs.

3. CODAGE EN BASE TROIS ET CARRE CHINOIS

Adoptons alors les *codages suivants*:

$\circ \rightarrow 0$ $R \rightarrow 0$
 $\square \rightarrow 1$ et $V \rightarrow 1$
 $\triangle \rightarrow 2$ $B \rightarrow 2$

La première disposition se code:

1	0	2
2	1	0
0	2	1

De même, la seconde disposition se code :

0	2	1
2	1	0
1	0	2

Nous obtenons ainsi deux *carrés latins d'ordre 3*.

Plus généralement, un *carré latin* d'ordre n est une matrice carrée

$$A = (a_{ij}) \quad i \in [1, n] \quad \text{et} \quad j \in [1, n]$$

dont les éléments a_{ij} appartiennent à un ensemble E de cardinal n (par exemple $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$) et dans laquelle chaque élément de E apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Pour tout naturel n ($n \geq 1$), il *existe* au moins un carré latin d'ordre n : en effet, la table de Pythagore d'un *groupe d'ordre* n est un carré latin, et pour tout naturel n , il existe au moins un groupe d'ordre n .

Superposons alors les deux carrés latins d'ordre 3:

(1,0)	(0,2)	(2,1)
(2,2)	(1,1)	(0,0)
(0,1)	(2,0)	(1,2)

nous obtenons ainsi un *carré gréco-latin* d'ordre 3.

Plus généralement, si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux carrés latins d'ordre n , on dit qu'ils sont *orthogonaux* si les n^2 couples (a_{ij}, b_{ij}) sont *distincts*. La matrice

$$C = ((a_{ij}, b_{ij}))$$

est alors un *carré gréco-latin* d'ordre n . Ce terme vient de la notation initialement employée (lettres latines pour le carré A et lettres grecques pour le carré B).

Le carré gréco-latin d'ordre 3 ci-dessus peut encore s'écrire:

10	02	21
22	11	00
01	20	12

où nous avons remplacé chaque couple (u, v) par le nombre \overline{uv} écrit en base *trois*. En passant alors en base *dix*, il vient:

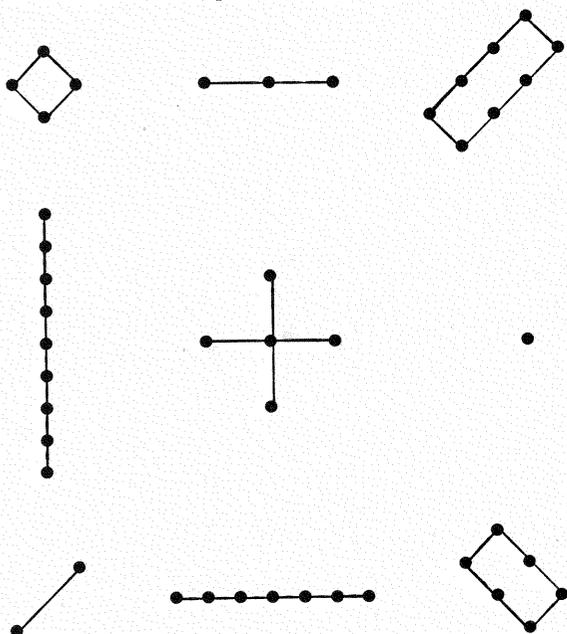
3	2	7
8	4	0
1	6	5

c'est un *carré magique*: la somme des naturels de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est *constante*.

Ajoutons à chaque naturel de ce carré magique le nombre 1.
Nous obtenons un autre carré magique:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

appelé *carré magique chinois*; ce carré, le plus anciennement connu, fut d'après la légende inscrit sur le dos d'une tortue que le ciel fit sortir de la rivière LO, pour l'empereur mythique YU:



Les neuf nombres symbolisent la *Grande Règle* en neuf paragraphes du *Classique des documents*, CHOU KING. Il a longuement préoccupé des penseurs arabes tel que GHAZALI. Manuel

MOSCHOPOULOS, humaniste qui vécut sous ANDRONIC II (1282-1328), a écrit le premier traité en Occident sur les carrés magiques; il semble que ce problème lui fut transmis par la tradition indienne.

Plus près de nous, nous pouvons encore citer les études sur les carrés magiques, passe-temps remis à la mode par BACHET vers 1612 et auquel FERMAT se livre avec une grande virtuosité à partir de 1630.

4. MANIPULATIONS SUR LES CARRES LATINS

Reprenons le carré latin

1	0	2
2	1	0
0	2	1

Permutons les deux premières colonnes:

0	1	2
1	2	0
2	0	1

c'est encore un carré latin; ce carré latin est dit *normalisé*, car la première ligne et la première colonne sont écrites dans l'ordre naturel 0, 1, 2.

Combien y a-t-il de carrés latins normalisés d'ordre 3 ?

Ecrivons la première ligne de la première colonne:

0	1	2
1		
2		

Dans la case située à l'intersection de la seconde ligne et de la seconde colonne, a priori nous pouvons mettre 2 ou 0. Si nous mettons 2, nous retrouvons le carré précédent. Si nous mettons 0, il faudrait alors compléter la seconde ligne avec 2 et il y aurait dans la troisième colonne deux fois 2. Il existe donc un *seul* carré normalisé d'ordre 3. De même, il existe un *seul* carré normalisé d'ordre 2.

0	1
1	0

Combien y a-t-il de carrés latins normalisés d'ordre 4 ?

En manipulant sur les *bijections* de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, on découvre quatre carrés latins normalisés:

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

0	1	2	3
1	3	0	2
2	0	3	1
3	2	1	0

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1

N_n désigne le nombre de carrés latins normalisés d'ordre n ; la table suivante donne les premières valeurs de N_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
N_n	1	1	1	4	56	9 408	16 942 080

5. CARRÉS GRECO-LATINS D'ORDRE 2, 3, 4

A la question: existe-t-il un carré gréco-latin d'ordre 2, on répond facilement. Aux notations près, il n'existe qu'un carré latin d'ordre 2:

a	b
b	a

α	β
β	α

etc...

La superposition donne

a α	b β
b β	a α

qui n'est pas gréco-latin: seuls deux des quatre couples sont représentés.

Aux notations près, il existe deux carrés latins d'ordre 3:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

Ils se déduisent l'un de l'autre par permutation de lignes.

Par association, ils fournissent l'unique carré gréco-latin d'ordre 3:

a α	b β	c γ
b γ	c α	a β
c β	a γ	b α

Aux notations près et aux permutations de lignes près, il existe quatre carrés latins d'ordre 4 :

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

a	b	c	d
b	d	a	c
c	a	d	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	b	a
d	c	a	b

Un carré gréco-latin d'ordre 4 ayant dans sa première ligne les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans cet ordre a nécessairement dans sa première colonne la suite $\alpha, \gamma, \delta, \beta$ ou la suite $\alpha, \delta, \beta, \gamma$. Pour trouver tous les carrés gréco-latins, il suffit donc d'associer à chacun des carrés ci-dessus les huit carrés ci-dessous :

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	α	β	γ
β	γ	δ	α

α	β	γ	δ
γ	α	δ	β
δ	γ	β	α
β	δ	α	γ

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

α	β	γ	δ
γ	δ	β	α
δ	γ	α	β
β	α	δ	γ

α	β	γ	δ
δ	α	β	γ
β	γ	δ	α
γ	δ	α	β

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	δ	α	γ
γ	α	δ	β

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

α	β	γ	δ
δ	γ	α	β
β	α	δ	γ
γ	δ	β	α

On ne trouve que deux associations donnant des couples tous distincts :

a α	b β	c γ	d δ
b γ	a δ	d α	c β
c δ	d γ	a β	b α
d β	c α	b δ	a γ

a α	b β	c γ	d δ
b δ	a γ	d β	c α
c β	d α	a δ	b γ
d γ	c δ	b α	a β

Le carré latin est le même, et les deux carrés grecs s'en déduisent par permutation de lignes. De plus, ils forment eux-mêmes un carré gréco-latin: on a un système de trois carrés latins deux à deux orthogonaux.

6. CARRES GRECO-LATINS ET PLANS D'EXPERIENCES

L'étude des carrés gréco-latins a été principalement développée par les statisticiens. Nous empruntons à Martin GARDNER la description des relations entre carrés gréco-latins et plan d'expériences :

“Sir Ronald FISHER, l'un des meilleurs statisticiens au monde, fut le premier à montrer, vers 1920, que le carré latin pouvait être appliqué aux recherches agronomiques. Supposons par exemple qu'on veuille expérimenter, avec un minimum de temps et d'argent, les effets de sept produits chimiques différents sur la croissance des végétaux. L'une des difficultés inhérentes à ce genre d'essai tient à ce que la fertilité des diverses parcelles de sol varie en général de façon irrégulière. Comment organiser une expérience pouvant tester simultanément les sept produits chimiques et éliminer en même temps tout “biais” dû aux variations de la fertilité ? Il suffit de diviser le champ expérimental en parcelles qui sont les cases d'un carré de sept par sept et de leur appliquer les sept traitements avec la structure d'un carré latin aléatoirement choisi. Compte tenu de cette structure, une analyse statistique simple des résultats éliminera tout biais dû aux variations de la fertilité du sol.

Admettons maintenant qu'au lieu d'avoir une seule variété de plantes à soumettre à ces traitements nous en ayons sept. Peut-on organiser une expérience qui tienne compte de cette quatrième variable (les trois autres étant la fertilité dans une rangée, la fertilité dans une colonne et le type de traitement)? La solution nous est fournie par le carré gréco-latin. Les lettres grecques nous indiquent où planter les sept variétés de plantes et les lettres latines où appliquer les sept traitements chimiques. Ici encore, l'analyse statistique des résultats reste simple.

Les carrés gréco-latins sont maintenant d'un usage courant au stade de la conception des expérimentations en biologie, en médecine, en sociologie et même dans l'étude des marchés. La “parcelle” n'est évidemment plus un terrain. Il peut s'agir d'une vache, d'un patient, d'une feuille, de la cage habitée par certains animaux, du point où est faite une injection, d'une période de temps ou même d'un observateur ou d'un groupe d'observateurs. Le carré gréco-latin est alors simplement la carte de l'expérience. Ses lignes correspondent à une première variable, ses colonnes à une deuxième, ses lettres latines à une troisième et ses lettres grecques à une quatrième. C'est ainsi qu'un médecin pratiquant la recherche peut chercher à vérifier les effets de cinq pilules différentes sur des personnes appartenant à cinq zones d'âge différentes, présentant cinq groupes de poids différents et parvenues à cinq étapes différentes de la même maladie. La méthode d'expérimentation la plus

commode sera basée sur un carré gréco-latin d'ordre 5 choisi au hasard parmi les diverses possibilités de cet ordre. On peut tenir compte de variables supplémentaires en superposant des carrés latins supplémentaires; pour un ordre n donné, il n'y a cependant jamais plus de n-1 carrés deux à deux orthogonaux.”

7. CARRES GRECO-LATINS D'ORDRE PREMIER

On forme très facilement un carré gréco-latin d'ordre 5, en associant deux carrés latins obtenus par permutation de lignes:

0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4
1 2 3 4 0	2 3 4 0 1	3 4 0 1 2	4 0 1 2 3
2 3 4 0 1	4 0 1 2 3	1 2 3 4 0	3 4 0 1 2
3 4 0 1 2	1 2 3 4 0	4 0 1 2 3	2 3 4 0 1
4 0 1 2 3	3 4 0 1 2	2 3 4 0 1	1 2 3 4 0

On voit que les permutations sont choisies de manière que les colonnes présentent des progressions arithmétiques modulo 5.

La même méthode s'applique à un ordre *premier impair* quelconque p, fournissant p-1 carrés latins qu'on peut associer deux à deux.

D'autre part, on sait construire, à partir d'un carré gréco-latin d'ordre n et d'un carré gréco-latin d'ordre n', un carré gréco-latin d'ordre nn': rangées et contenus étant numérotés à partir de zéro, si les cases (i, j) et (i', j') contiennent respectivement (k, h) et (k', h') dans les deux carrés donnés, on place dans la case (n'i + i', n'j + j') du carré cherché le couple (n'k + k', n'h + h').

Comme on le verra aux paragraphes 10 et 11, on sait construire des carrés gréco-latins ayant pour ordre n une puissance quelconque de 2 (sauf évidemment n = 2); il s'ensuit qu'on sait construire des carrés gréco-latins d'ordre quelconque *sauf* pour les doubles des nombres impairs (n = 4k + 2, k ∈ N).

8. LE PROBLEME DES 36 OFFICIERS D'EULER

EULER, qui connaissait la plupart des résultats précédents, s'est attaqué aux carrés gréco-latins d'ordre 4k + 2. Il donna du problè-

me des carrés gréco-latins d'ordre 6 l'énoncé célèbre: placer en carré 36 officiers représentant 6 grades dans 6 régiments de manière que chaque rangée contienne tous les grades et tous les régiments. Il constata que le problème n'avait pas de solution (la démonstration complète ne devait en être donnée qu'en 1898 par TARRY). Il en inféra hardiment qu'il n'existait aucun carré gréco-latin d'ordre double d'un impair.

La question resta pendante jusqu'à l'apparition des ordinateurs, qui donna l'espoir de découvrir pour commencer un carré gréco-latin d'ordre 10. Mais à peine ces recherches avaient-elles débuté que trois mathématiciens américains, BOSE, PARKER et SHRIKHANDE, donnaient un mode de construction valable pour tous les ordres doubles d'impairs supérieurs à 6 (1959), renversant ainsi complètement la conjecture d'EULER.

Le résultat fondamental de la théorie des carrés gréco-latins est donc le suivant: *il existe des carrés gréco-latins de tous ordres sauf 2 et 6.*

Une foule d'autres questions liées aux carrés gréco-latins ont été étudiées récemment, et beaucoup ne sont pas encore résolues. L'une concerne le cardinal $X(n)$ d'un ensemble de carrés latins d'ordre n tels que deux quelconques d'entre eux forment un carré gréco-latin (on dit qu'ils sont deux à deux *orthogonaux*). Parmi les résultats connus, citons: (MILLS)

$$X(n) = n - 1 \quad \text{si } n \text{ est une puissance de nombre premier}$$

$$X(12) \geq 5$$

$$X(21) \geq 4$$

$$X(n) \geq 3 \quad \text{si } n \text{ est congru à } 0 \text{ ou à } 1 \text{ modulo } 4.$$

On ne sait pas encore s'il existe trois carrés d'ordre 10 orthogonaux deux à deux.

On s'est intéressé aussi aux carrés latins orthogonaux à leur transposé (carrés "*autoorthogonaux*"). Voici ce qu'on en sait à l'heure actuelle:

Il existe un carré autoorthogonal d'ordre n dès que n n'est congru ni à 2 modulo 4 ni à 3 ou 6 modulo 9.

Il existe un carré autoorthogonal d'ordre n dès que n est une puissance de nombre premier à condition que $n-1$ ne soit pas une puissance de 2.

Le dernier résultat publié (HEDAYAT) donne le premier carré autoorthogonal d'ordre 10 connu.

0	1	2	7	3	4	6	9	8	5
7	6	4	3	0	8	5	1	9	2
9	0	1	5	8	6	7	2	4	3
5	9	6	4	2	7	1	0	3	8
8	2	9	1	5	3	0	4	6	7
1	7	3	9	4	2	8	6	5	0
2	4	0	8	9	5	3	7	1	6
4	3	5	6	7	9	2	8	0	1
6	5	8	2	1	0	9	3	7	4
3	8	7	0	6	1	4	5	2	9

A partir d'un carré autoorthogonal, on peut construire un carré presque magique, car les éléments de la diagonale sont nécessairement tous distincts. Pour obtenir un carré magique, HERZ a modifié le carré de HEDAYAT, obtenant le carré autoorthogonal ci-contre.

Voici donc un carré magique gréco-latin autoorthogonal:

00	17	29	75	38	41	62	94	86	53
71	66	40	39	02	87	54	13	95	28
92	04	11	56	89	63	70	25	48	37
57	93	65	44	21	79	18	06	32	80
83	20	98	12	55	34	09	47	61	76
14	78	36	97	43	22	85	69	50	01
26	45	07	81	90	58	33	72	19	64
49	31	52	60	74	96	27	88	03	15
68	59	84	23	16	05	91	30	77	42
35	82	73	08	67	10	46	51	24	99

9. EXTENSION DU CORPS $\{0, 1\}$

Les lois de composition du corps $\{0, 1\}$ sont données par leurs tables:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Le polynome $p(X) = X^2 + X + 1$ est un polynome à coefficients dans ce corps; il n'y admet pas de racine puisque $p(0) = 1$ et $p(1) = 1 + 1 + 1 = 1$.

Nous pouvons néanmoins construire un *nouveau* corps, contenant le précédent, dans lequel $p(X)$ aura *une*, et en fait deux racines. Si j est une racine de $p(X)$ ($j^2 + j + 1 = 0$), les éléments $0, 1, j, 1 + j$ forment un ensemble qu'on munit d'une structure de corps avec les deux lois de composition suivantes:

+	0	1	j	1+j
0	0	1	j	1+j
1	1	0	1+j	j
j	j	1+j	0	1
1+j	1+j	j	1	0

×	0	1	j	1+j
0	0	0	0	0
1	0	1	j	1+j
j	0	j	1+j	1
1+j	0	1+j	1	j

Pour construire ces tables, on utilise les règles

$$1 + 1 = j + j = (1 + j) + (1 + j) = 0 \quad j + j = j(1 + 1)$$

$$1 + j + j^2 = 0$$

On peut vérifier que $p(1 + j) = 0$; ainsi $p(X)$ admet bien *deux* racines dans ce corps. Fréquemment l'élément $1 + j$ est noté plus simplement \bar{j} .

Deux propriétés de ce corps

1 - Il n'est pas *algébriquement clos*; ainsi le polynome $X^2 + X + j$ n'y admet pas de racines. On peut donc légitimement envisager de construire un nouveau corps contenant le corps $\{0, 1, j, \bar{j}\}$ dans lequel le polynome $X^2 + X + j$ aura des racines. On trouverait d'ailleurs un corps à 16 éléments.

2 - C'est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\{0, 1\}$, dont une base est par exemple $\{1, j\}$

En effet:

$$0 = (0 \times 1) + (0 \times j)$$

$$1 = (1 \times 1) + (0 \times j)$$

$$j = (0 \times 1) + (1 \times j)$$

$$\bar{j} = (1 \times 1) + (1 \times j)$$

Autre construction de ce corps

Une autre construction du corps $\{0, 1, j, \bar{j}\}$ est possible à partir du corps $\{0, 1\}$. Appelons F_2 le corps $\{0, 1\}$; soit $F_2[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans F_2 .

$p(X) = X^2 + X + 1$ est un polynome irréductible dans $F_2[X]$. L'ensemble des multiples de ce polynome est un idéal premier de $F_2[X]$ noté $(p(X))$.

Alors l'anneau quotient $\frac{F_2[X]}{(p(x))}$ est un corps à 4 éléments, espace vectoriel de dimension 2 sur F_2 , de base $\{1, \alpha\}$ tel que $p(\alpha) = 0$. Aux notations près, il s'agit donc du corps $\{0, 1, j, \bar{j}\}$.

10. CONSTRUCTION EFFECTIVE DE CARRÉS GRECO-LATINS D'ORDRE 4

Ce corps à 4 éléments permet de construire des carrés latins d'ordre 4. A tout élément a non nul de $F_4 = \{0, 1, j, \bar{j}\}$ associons le carré latin d'ordre 4 dont l'élément en p ième ligne et q ième colonne est

$$x_{pq} = a \alpha_p + \alpha_q$$

avec $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = j$, $\alpha_4 = \bar{j}$

Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans un corps assurent qu'on obtient bien un carré latin. Ainsi:

pour $a = 1$ pour $a = j$ pour $a = \bar{j}$

0	1	j	\bar{j}
1	0	\bar{j}	j
j	\bar{j}	0	1
\bar{j}	j	1	0

0	1	j	\bar{j}
j	\bar{j}	0	1
\bar{j}	j	1	0
1	0	\bar{j}	j

0	1	j	\bar{j}
\bar{j}	j	1	0
1	0	\bar{j}	j
j	\bar{j}	0	1

Ces trois carrés latins ne diffèrent que par l'ordre des lignes. Ils permettent cependant de construire des carrés gréco-latins.

Ainsi avec les deux premiers, on obtient le carré gréco-latin

(0, 0)	(1, 1)	(j, j)	(\bar{j} , \bar{j})
(1, j)	(0, \bar{j})	(\bar{j} , 0)	(j, 1)
(j, \bar{j})	(\bar{j} , j)	(0, 1)	(1, 0)
(\bar{j} , 1)	(j, 0)	(1, \bar{j})	(0, j)

Chaque couple (α_p, α_q) est bien obtenu une fois et une fois seulement. Cela est vrai d'ailleurs avec deux quelconques des trois carrés latins ci-dessus car

$$(a\alpha_p + \alpha_q, b\alpha_p + \alpha_q) = (a\alpha_{p_1} + \alpha_{q_1}, b\alpha_{p_1} + \alpha_{q_1})$$

équivalent, si $a \neq b$, à $\alpha_p = \alpha_{p_1}$ et $\alpha_q = \alpha_{q_1}$, donc à $p = p_1$ et $q = q_1$.

Cette méthode pour construire des carrés latins et des carrés gréco-latins est manifestement valable chaque fois qu'il existe un corps ayant un nombre d'éléments égal à l'ordre du carré souhaité.

Ainsi, avec $F_3 = \{0, 1, 2\}$, avec $a = 1$ et $a = 2$, on obtient les carrés latins

$a = 1$

0	1	2
1	2	0
2	0	1

$a = 2$

0	1	2
2	0	1
1	2	0

puis le carré gréco-latin d'ordre 3

(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)
(1, 2)	(2, 0)	(0, 1)
(2, 1)	(0, 2)	(1, 0)

Une correspondance entre les éléments de F_3 et les formes, une autre entre les éléments de F_3 et les couleurs, permettent-elles de retrouver le carré gréco-latin du paragraphe 3 ?

Si oui, pouvait-on le prévoir ? Ainsi, *est-ce parce qu'il n'existe pas de corps à 6 éléments qu'on peut affirmer qu'il n'existe pas de carré gréco-latin d'ordre 6 ?*

11. LES CORPS FINIS

Bien que la réponse à la dernière question soit négative (le fait qu'il n'y ait pas de corps à 6 éléments ne suffit pas à prouver qu'il n'y a pas de carrés gréco-latins d'ordre 6), l'étude des corps finis a néanmoins une grande importance pour ces carrés puisque l'existence d'un corps à q éléments permet de construire au moins $q-1$ carrés latins d'ordre q et au moins

$$\binom{q-1}{2} = \frac{(q-1)(q-2)}{2}$$

carrés gréco-latins d'ordre q (certains d'entre eux pouvant éventuellement se déduire d'autres par simple permutation des lignes et des colonnes).

Cette étude des corps finis n'est pas envisageable dans le cadre d'un tel document. Tout au plus peut-on citer quelques résultats fondamentaux et renvoyer le lecteur à un certain nombre d'ouvrages les démontrant:

- 1) Le cardinal d'un corps fini est un nombre premier p^n (puissance d'un nombre premier).
- 2) Pour tout nombre premier $q = p^n$, il existe un corps de cardinal q ; ce corps de cardinal q est sous-corps du corps de

décomposition du polynôme $X^q - X$ de l'anneau des polynômes $F_p(X)$ (F_p est le corps des classes de congruences modulo p , p premier); les q éléments de ce corps sont les racines du polynôme $X^q - X$ dans ce corps de décomposition.

- 3) Tout corps de cardinal $q = p^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur le corps F_p , une base étant $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$, où ω est racine d'un polynôme irréductible de degré n de $F_p[X]$, divisant $X^q - X$.
- 4) Deux corps finis de même cardinal q sont isomorphes.

12. CARRES GRECO-LATINS ET GEOMETRIES FINIES

Considérons notre carré gréco-latin d'ordre 3:

$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$
$b\gamma$	$c\alpha$	$a\beta$
$c\beta$	$a\gamma$	$b\alpha$

Appelons *points* les 9 cases, et *droites* les ensembles de 3 cases qui ont une des propriétés communes suivantes:

- même ligne
- même colonne
- même contenu latin
- même contenu grec

Nous avons quatre familles de trois droites.

Cette "géométrie" a les propriétés suivantes:

- A1 — Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
- A2 — Par un point pris hors d'une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule.
- A3 — Il existe trois points non alignés.

On reconnaît trois des axiomes de la géométrie plane affine. On appellera selon l'usage *direction* chaque partition du plan en droites parallèles, c'est-à-dire chacune des quatre familles ci-dessus.

De la même façon, considérons nos deux carrés gréco-latins d'ordre 4, que nous associons en un "carré bigréco-latin":

$a\alpha\alpha'$	$b\beta\beta'$	$c\gamma\gamma'$	$d\delta\delta'$
$b\gamma\delta'$	$a\delta\gamma'$	$d\alpha\beta'$	$c\beta\alpha'$
$c\delta\beta'$	$d\gamma\alpha'$	$a\beta\delta'$	$b\alpha\gamma'$
$d\beta\gamma'$	$c\alpha\delta'$	$b\delta\alpha'$	$a\gamma\beta'$

Nous avons ici 16 points, 5 directions de 4 droites, et les propriétés A1, A2 et A3 sont encore vérifiées.

D'une manière générale, si nous avons $n-1$ carrés latins d'ordre n mutuellement orthogonaux, nous en déduisons une géométrie à n^2 points, $n+1$ directions de n droites qui vérifie les propriétés A1, A2 et A3.

Réciproquement, si un ensemble P ("plan") d'éléments p ("points") est muni d'un ensemble D de parties d ("droites") vérifiant les axiomes A1, A2 et A3, on définit une relation d'équivalence ("parallélisme") dans D par

$$d = d' \quad \text{ou} \quad d \cap d' = \emptyset$$

et on appelle "*directions*" les classes de cette relation. Chaque direction est une partition du plan d'après A2.

Soit Δ une direction, a et b des droites qui n'appartiennent pas à Δ ; on appelle "projection" de a sur b l'application f de a dans b ainsi définie: si $p \in a$, $f(p)$ est l'intersection de b et de la droite passant par p et appartenant à Δ . Cette application est évidemment bijective.

Compte tenu de ce qu'il existe au moins trois directions d'après A3, on peut toujours mettre en bijection deux droites à l'aide d'une projection convenable. On voit de même qu'une direction Δ et une droite a qui n'appartient pas à cette direction sont en bijection: il suffit d'associer à chaque droite de Δ l'intersection de cette droite et de a .

Supposons maintenant qu'une droite du plan ait un nombre fini n de points: d'après ce qui précède, toutes les droites ont n points,

et toutes les directions ont n droites; puisqu'une direction est une partition du plan, il en résulte que le plan a dans ce cas n^2 points. On dit que P est un *plan affine d'ordre n* .

Si un plan est d'ordre n , il a $n + 1$ directions: en effet, soit un point p et une droite d ne passant pas par p ; à chaque direction, associons la droite de cette direction passant par p : l'une de ces droites est parallèle à d , les autres coupent d , et d a n points.

Du fait que chaque direction contient n droites, il en résulte que le plan a $n(n + 1)$ droites.

Ayant un plan affine d'ordre n , on en déduit immédiatement un système de $n-1$ carrés latins mutuellement orthogonaux: deux directions donneront les lignes et les colonnes, et les $n-1$ autres définiront les emplacements des n lettres dans les $n-1$ carrés.

De même qu'on construit facilement des systèmes de carrés latins orthogonaux à partir des *corps finis*, on peut construire directement des plans affines: ce sont les espaces affines de dimension 2 sur ces corps.

Soit K un corps fini d'ordre n ; $K \times K$ sera le plan P , D l'ensemble des parties d de P caractérisées par une relation linéaire entre les coordonnées de leurs éléments. On vérifie immédiatement les propriétés $A1$, $A2$ et $A3$.

Ainsi sur le corps $\{0, 1\}$, il y a quatre points
 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$
 et six droites d'équations
 $x = 0$ $y = 0$ $x + y = 0$
 $x = 1$ $y = 1$ $x + y = 1$
 réparties en trois directions.

La question qui se pose alors est la suivante: existe-t-il d'autres plans affines que ceux qu'on a ainsi construits ?

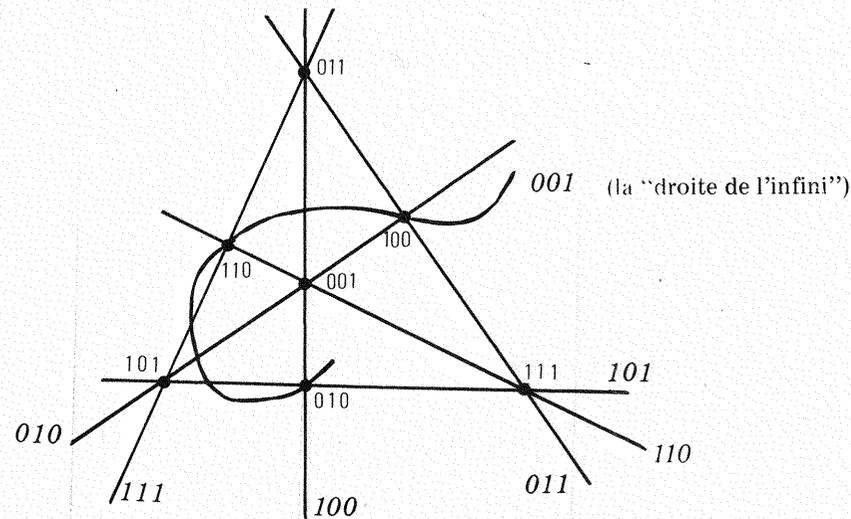
La réponse est négative jusqu'à l'ordre 8 inclus. En revanche, on connaît 4 plans d'ordre 9. Un résultat intéressant est le théorème de BRUCK-RYSER selon lequel il n'existe pas de plan affine d'ordre n dès que n est congru à 1 ou 2 modulo 4 et n'est pas somme de deux carrés, donc pour $n = 6, 14, 21, 22, 30, 33, \dots$ (Signalons à ce propos qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un naturel soit somme de deux carrés est que dans sa décomposition

en facteurs premiers, ceux qui sont congrus à 3 modulo 4 aient un exposant pair).

A chaque plan affine est associé bijectivement un *plan projectif* obtenu simplement en adjoignant un point à chaque droite (le "point à l'infini" commun aux droites d'une direction) et en considérant tous ces points comme alignés (sur la "droite de l'infini"). Un plan projectif fini d'ordre n a donc $n^2 + n + 1$ points et $n^2 + n + 1$ droites. Toute droite porte $n + 1$ points et tout point appartient à $n + 1$ droites. Les plans projectifs sont caractérisés par les axiomes:

- P1 — Identique à A1.
- P2 — Deux droites distinctes se coupent en un point et un seul.
- P3 — Il existe quatre points dont trois quelconques ne sont pas alignés.

Ainsi le plan projectif d'ordre 2 a 7 points (les éléments de $E = \{0, 1\}^3 - \{(0, 0, 0)\}$) et 7 droites (dont les équations "homogènes" ont pour systèmes de coefficients les éléments de E):



Pour terminer, notons que plans affines et plans projectifs finis sont des cas particuliers de configurations plus générales: les *systèmes de STEINER*. Un système de STEINER de paramètres (t, k, v) est par définition un ensemble fini S de cardinal v muni d'une

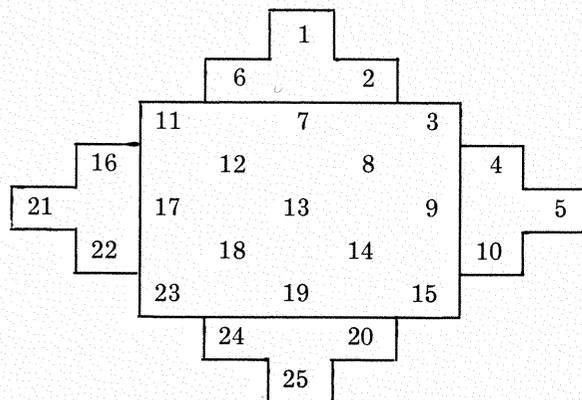
famille de parties de cardinal commun k (les "blocs") telle que toute partie de cardinal t de S est contenue dans un bloc et un seul. Les plans affines sont les systèmes de STEINER de paramètres $(2, n, n^2)$, les plans projectifs ceux de paramètres $(2, n + 1, n^2 + n + 1)$.

13. QUELQUES CARRÉS MAGIQUES

Parmi les innombrables procédés de construction de carrés magiques, il existe un procédé général pour les ordres impairs et un autre pour les ordres pairs (sauf 2).

Carrés d'ordre impair

Le procédé est exposé par BACHET DE MEZIRIAC sous la forme suivante:



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Les quatre triangles de nombres hors du premier carré sont traduits le long du côté opposé, ce qui donne le second.

En diminuant d'une unité les nombres inscrits et en les exprimant en base n (ordre du carré), on obtient un carré gréco-latin:

20	43	11	34	02
03	21	44	12	30
31	04	22	40	13
14	32	00	23	41
42	10	33	01	24

Les deux carrés latins sont obtenus l'un à partir de l'autre par symétrie pour la colonne médiane. Les lignes de chacun se correspondent par permutation circulaire, de même que les colonnes. Dans chaque carré, l'une des diagonales est constante (éléments tous égaux à $(n-1)/2$), et l'autre contient n éléments distincts.

On retrouve en particulier le carré chinois.

Carrés d'ordre pair

On associe encore deux carrés donnant les chiffres en base n des nombres cherchés. Le second est ici le transposé du premier, qui est construit de la manière suivante:

0	4	3	2	1	5
0	1	3	2	4	5
5	1	2	3	4	0
5	4	2	3	1	0
5	1	3	2	4	0
0	4	2	3	1	5

0	6	5	3	4	2	1	7
7	1	2	4	3	5	6	0
7	1	2	4	3	5	6	0
0	6	5	3	4	2	1	7
0	6	5	3	4	2	1	7
7	1	2	4	3	5	6	0
7	1	2	4	3	5	6	0
0	6	5	3	4	2	1	7

0	8	7	6	5	4	3	2	1	9
0	1	7	3	5	4	6	2	8	9
9	1	2	6	4	5	3	7	8	0
9	8	2	3	5	4	6	7	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	6	4	5	3	7	8	9
9	8	7	3	5	4	6	2	1	0
9	8	2	6	4	5	3	7	1	0
9	1	7	3	5	4	6	2	8	0
0	8	7	6	4	5	3	2	1	9

Les deux diagonales portent des chiffres croissants de gauche à droite. Chaque colonne comporte deux ensembles de $n/2$ chiffres égaux de valeur complémentaire. Chaque ligne porte des chiffres tous différents. Il s'ensuit que les sommes de lignes, de colonnes et de diagonales sont toutes égales, et il en sera de même pour le carré final obtenu par association des deux carrés.

La moitié droite du premier carré se déduit de la moitié gauche par symétrie pour la médiane verticale suivie de la complémentarisation à $n-1$. La répartition des chiffres dans chaque colonne doit être faite de manière que les couples de chiffres associés dans les deux carrés soient tous distincts; autrement dit, en posant $\bar{i} = n + 1 - i$, on doit avoir toujours

$$a_{ij} = a_{\bar{i}\bar{j}} \quad \text{ou} \quad a_{ji} = a_{\bar{j}\bar{i}} .$$

C'est très facile à réaliser pour $n/2$ pair, un peu plus compliqué pour $n/2$ impair. BACHET DE MEZIRIAC n'est pas arrivé à donner une expression simple de la méthode, qui a été formulée par son commentateur LABOSNE au 19ème siècle.

Ajoutons pour terminer qu'étant donné un carré magique d'ordre $n > 3$, il est toujours possible d'en déduire un carré magique d'ordre $2n$ en remplaçant systématiquement la case contenant le nombre i par un carré contenant les nombres $4i-3, 4i-2, 4i-1, 4i$ convenablement placés.

14. VECTORIELS DE CARRÉS MAGIQUES

Un carré magique présente la somme commune s dans ses lignes, ses colonnes et ses diagonales. On laissera tomber dans ce paragraphe la condition usuelle que les éléments du carré soient des entiers consécutifs, et on prendra la phrase précédente comme définition.

Si on supprime la condition sur les diagonales, on définit un carré semi-magique.

La somme (ou la différence) élément à élément de deux carrés (semi-)magiques de même ordre est (semi-)magique. Le produit d'un carré (semi-)magique par un nombre est un carré (semi-)magique.

Les carrés magiques d'ordre donné forment donc un vectoriel, ainsi que les carrés semi-magiques d'ordre donné.

On peut voir que le vectoriel des carrés magiques d'ordre 3 est de dimension 3 et que le vectoriel des carrés semi-magiques d'ordre 3 est de dimension 5.

Parmi les carrés semi-magiques, il en est de particulièrement importants: les matrices de permutation, formées de 0 et de 1 avec un élément 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. Il y en a six d'ordre 3:

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (1 \ 2 \ 3) &
 (1 \ 3 \ 2) &
 (2 \ 1 \ 3) &
 (2 \ 3 \ 1) \\
 \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &
 &
 \\
 (3 \ 1 \ 2) &
 (3 \ 2 \ 1) &
 &
 \end{matrix}$$

Chacune peut être décrite par la suite des indices de colonne des éléments 1 se trouvant dans les lignes successives. Cette suite est identique au vecteur obtenu en faisant le produit de la matrice par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces six matrices n'est un carré magique. Mais il s'en trouve dans les matrices de permutation d'ordre supérieur.

Par combinaison linéaire de matrices de permutation d'un ordre donné, on obtient un vectoriel de carrés semi-magiques. *Réciproquement*, le vectoriel des carrés semi-magiques d'un ordre donné est engendré par les matrices de permutation. On le démontre facilement par récurrence sur l'ordre. Nous illustrerons cette démonstration par la décomposition effective d'un carré semi-magique en une somme pondérée de matrices de permutation. Nous faisons apparaître progressivement des zéros dans la première ligne et la première colonne.

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 2 & 13 \\ 2 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 4 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 4 & 4 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow 9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 11 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \\ 4 & 15 & 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 11 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 15 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Mêmes opérations sur la sous-matrice encadrée :

$$\begin{pmatrix} -3 & 11 & 8 \\ 4 & 0 & 12 \\ 15 & 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow 11 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ -7 & 0 & 12 \\ 15 & 5 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow -7 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 12 \\ 15 & 12 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow 15 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 12 \\ 0 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

et finalement:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow 12 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

ce qui donne la décomposition

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel de deux carrés semi-magiques est semi-magique. En effet, si A est semi-magique d'ordre n avec la somme commune s, en désignant par e le vecteur à n composantes égales à 1 et par A^t la transposée de A, on a

$$A e = A^t e = s,$$

et réciproquement.

Si $A' e = A'^t e = s',$

on a $A A' e = A s' e = s' A e = s s' e,$

$$(A A')^t e = A'^t A^t e = A'^t s e = s A'^t e = s s' e.$$

Les carrés semi-magiques de même ordre forment donc une algèbre. On peut s'intéresser aussi aux inverses des carrés semi-magiques (voir D.M. ROSE).

15. POLYEDRES CONVEXES DE CARRES MAGIQUES EMPLOIS DU TEMPS

Nous nous intéressons ici aux carrés magiques et semi-magiques à éléments positifs ou nuls. Leurs propriétés sont conservées par combinaisons linéaires à coefficients positifs.

Toute matrice de permutation est un carré semi-magique de ce type, donc aussi toute combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de permutation.

Réciproquement, tout carré semi-magique à éléments positifs ou nuls (CSMP) est une combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de permutation. Cette proposition est assez difficile à établir. En voici une démonstration:

Lemme 1. Dans un CSMP non nul, d'ordre n, toute sous-matrice nulle a une somme de dimensions inférieure ou égale à n.

A est un CSMP d'ordre n, de somme s positive et B est une sous-matrice nulle de A, de dimensions p,q. Appelons C, D, E les sous-matrices complétant A, S(X) la somme des éléments de la

sous-matrice X. Nous avons

$$S(B) = 0$$

$$S(C) = p s$$

$$S(E) \geq 0$$

$$S \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} = (n - q) s \geq S(C)$$

d'où $p + q \leq n$

$$p \begin{pmatrix} & q \\ B & C \\ \hline D & E \end{pmatrix}$$

Lemme 2. Si dans une matrice carrée d'ordre n toute sous-matrice nulle a une somme de dimensions inférieure ou égale à n, il existe n éléments non nuls situés dans des lignes et des colonnes toutes différentes.

La propriété est évidente pour n = 1. Supposons-la démontrée pour toute matrice d'ordre inférieur à k et montrons-la pour une matrice d'ordre k. Nous examinerons deux cas complémentaires.

Cas 1. La somme des dimensions de toute sous-matrice nulle est inférieure à k.

Il existe au moins un élément a non nul dans la matrice. La sous-matrice ne contenant pas la ligne et la colonne de cet élément est d'ordre k-1 et vérifie la condition du lemme, donc elle contient k-1 éléments non nuls dans des rangées toutes différentes. En complétant avec a, on obtient l'ensemble cherché.

Cas 2. Il existe une sous-matrice nulle dont la somme des dimensions est égale à k.

Soit G cette sous-matrice, F, H, I les sous-matrices qui la complètent.

$$\begin{pmatrix} F & G \\ H & I \end{pmatrix}$$

F vérifie la condition du lemme (sinon [F G] ne la vérifierait pas), et de même pour I.

F et I sont d'ordre inférieur à k, donc fournissent à elles deux un ensemble d'éléments non nuls approprié.

Théorème. Tout CSMP est combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de permutation.

Si le CSMP considéré, soit A, n'est pas entièrement nul, les lemmes 1 et 2 montrent l'existence d'un ensemble d'éléments non-

nuls, donc positifs, un par ligne et par colonne. Si a est leur minimum, on peut retrancher de A le produit par a de la matrice de permutation ayant la même disposition d'éléments non nuls. Il restera un CSMP A' ayant au moins un élément nul de plus. En itérant, on obtiendra la décomposition cherchée.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarquera que les matrices de permutation obtenues se trouvent être toutes magiques, ce qui n'était pas le cas au paragraphe 14.

La démonstration ci-dessus ne fournit pas de procédé simple pour la décomposition effective. *L'algorithme hongrois* peut être employé systématiquement pour trouver rapidement un ensemble d'éléments non nuls. (Voir Ford et Fulkerson).

Parmi les CSMP, intéressons-nous à ceux de somme 1, appelés aussi *matrices bistochastiques* (chaque rangée est une loi de probabilité sur un ensemble fini). Les matrices de permutation en sont, ainsi que toute combinaison linéaire de matrices de permutation à coefficients positifs de somme 1.

Réciproquement, toute matrice bistochastique est de cette forme. La démonstration en est identique à celle du théorème précédent.

Les matrices bistochastiques d'ordre n forment un ensemble *convexe*: si A et B sont bistochastiques d'ordre n , il en est de même de $aA + bB$ si $0 \leq a \leq a + b = 1$. Comme cet ensemble est

engendré à partir d'un nombre fini d'éléments, c'est un *polyèdre convexe* de l'espace R^{n^2} .

Si pour terminer nous nous intéressons aux CSMP à coefficients *entiers*, nous retrouvons encore les matrices de permutation, ainsi que toute somme de matrices de permutation.

Réciproquement, tout CSMP entier est somme de matrices de permutation. Démonstration identique aux précédentes.

Les CSMP entiers interviennent dans des problèmes d'*emploi du temps*. Il s'agit d'examens oraux où n examinateurs interrogent s candidats, chaque candidat passant successivement devant tous les examinateurs. Les examens s'étendent sur n jours, et on connaît pour chaque jour le nombre de candidats de chaque examinateur. On demande d'attribuer à chaque candidat un calendrier d'épreuves de manière qu'aucun n'ait plus d'une épreuve par jour.

La donnée du problème est donc une matrice dont les lignes correspondent aux examinateurs et les colonnes aux jours. Les n éléments d'une ligne sont entiers, positifs ou nuls, et de somme s . Comme chaque candidat passe n épreuves en n jours, il a une épreuve par jour. Donc chaque colonne doit avoir la somme s , et la matrice donnée doit être un CSMP entier de somme s . D'après ce qui précède, on sait que cette condition est suffisante pour qu'on puisse attribuer à chaque candidat un calendrier: ce calendrier est en effet représenté par une matrice de permutation, et les matrices cherchées seront obtenues par décomposition du CSMP donné.

On généralise sans difficulté cette étude au cas d'un examen durant plus de n jours (voir J.C. HERZ).

16. FIGURES MAGIQUES

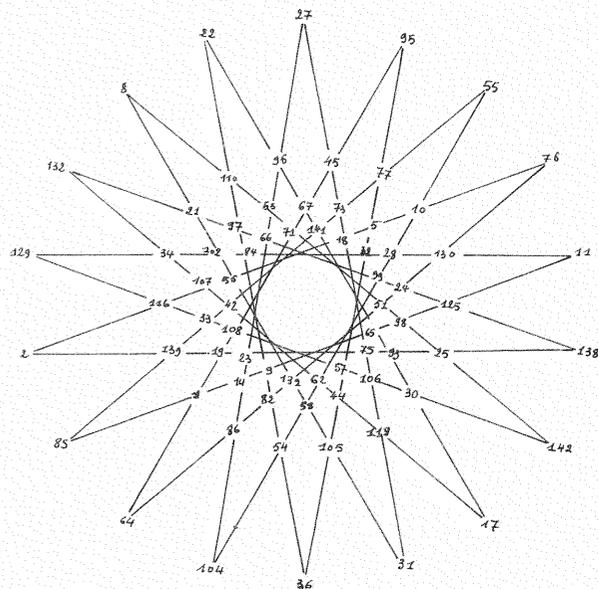
Carrés magiques et semi-magiques apparaissent comme deux cas particuliers de *figures magiques*, ensembles finis de points reliés par des lignes le long desquelles sont disposés des nombres de somme constante. Tout ensemble fini dans lequel on a défini un ensemble de parties (les "lignes") peut servir de support à une figure magique. Pour chacun, les figures magiques correspondantes forment un vectoriel, éventuellement de dimension nulle (exemple: points A, B , "lignes" $\{A\}, \{B\}, \{A, B\}$).

Voici quelques exemples de supports:

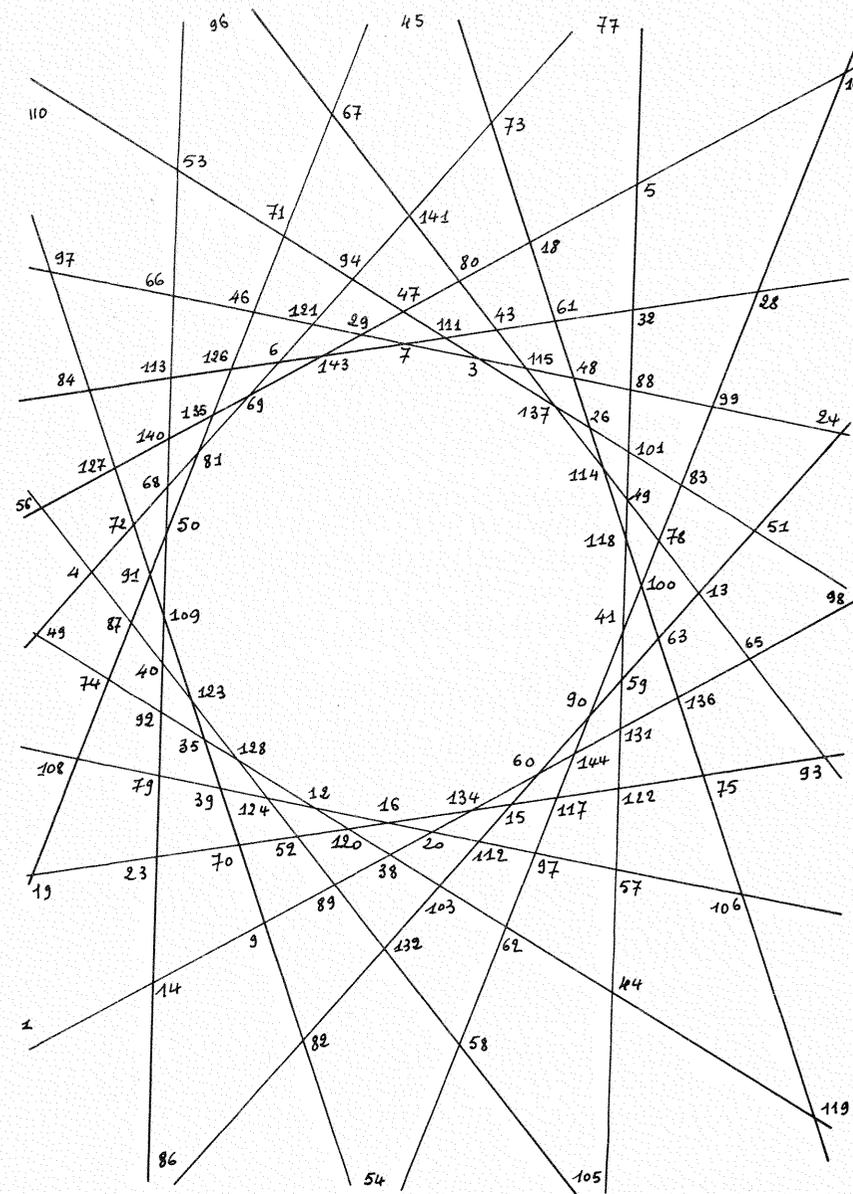
	Nombre de points	Nombre de lignes
Carrés magiques d'ordre n	n^2	$2n + 2$
Carrés semi-magiques d'ordre n	n^2	$2n$
Etoile à 5 branches	10	5
Cube d'ordre n	n^3	$3n^2$
Plan projectif d'ordre n	$n^2 + n + 1$	$n^2 + n + 1$

Exercice: dimension du vectoriel des figures magiques ayant pour support le plan projectif d'ordre 2. La réponse est 1.

Parmi les figures magiques, on s'est intéressé surtout à celles présentant des entiers consécutifs. On sait que c'est possible pour l'étoile à 6 branches et non pour celle à 5. Voici une étoile magique à 18 branches (144 points, 18 lignes) due à M.DOMERGUE.



Voici les détails de la figure précédente:



17. DETERMINATION DE TOUS LES CARRES MAGIQUES D'ORDRES 3 ET 4.

APERÇUS SUR L'ALGORITHMIQUE COMBINATOIRE

Un carré magique d'ordre 3 présente un arrangement des nombres 1 à 9 satisfaisant à 8 relations. La méthode simpliste consiste à former les $9! = 362\ 880$ carrés possibles et à vérifier pour chacun d'eux si les relations sont satisfaites.

Il est plus intelligent de se restreindre au choix arbitraire des contenus des cases (1, 1), (1, 2) et (2, 2) qui déterminent grâce aux 8 relations tous les autres contenus. On n'a plus que $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ choix, et il reste à vérifier que les 9 nombres obtenus forment bien le segment [1, 9].

Mais d'un autre côté, à toute solution du problème en correspondent sept autres par rotation ou symétrie. On éliminera donc des recherches inutiles en imposant au nombre 1 d'être dans l'une des trois cases considérées. Il ne reste plus alors que $3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$ choix. Encore certains de ceux-ci pourront-ils donner des solutions équivalentes par rotation ou symétrie.

On peut aussi restreindre a priori le choix des contenus des cases (1, 1), (1, 2) et (2, 2) puisque le contenu de chacune des autres cases doit être compris entre 2 et 9 et différent des contenus des cases précédentes. Le dénombrement n'est plus évident, mais le temps d'exploration doit en être sensiblement diminué. On verra ce principe employé plus systématiquement ci-dessous pour l'ordre 4.

Bien entendu, une réflexion plus poussée permettra d'arriver plus directement à la solution du problème. Par exemple, on remarquera que chaque rangée du carré ainsi que chaque diagonale doit contenir un ou trois impairs. Comme il y en a cinq en tout, on voit facilement que la deuxième ligne et la deuxième colonne contiennent chacune trois impairs. Si on suppose 1 en (2, 2), on ne trouve pas de solution. Si on met 1 en (1, 2), on trouve une seule solution à une symétrie près.

Les diverses remarques précédentes s'adaptent au problème de l'ordre 4. Aux symétries du carré s'ajoute la transformation qui associe les quatre symétries centrales des carrés partiels: le carré de DURER

16	3	2	13		10	5	8	11
5	10	11	8	devient	3	16	13	2
9	6	7	12		15	4	1	14
4	15	14	1		6	9	12	7

Il suffit donc d'explorer le cas où 1 est en (1, 1) et celui où 1 est en (1, 2). Pour réduire les répétitions, on imposera à 16 d'être sur la diagonale principale ou dans le triangle supérieur. On choisira les contenus de (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1) et (3, 3); les autres s'en déduisant au moyen des relations imposées. On restreindra l'exploration en utilisant les inégalités:

$$\begin{aligned}
 18 - x_{11} - x_{12} &\leq x_{13} \leq 32 - x_{11} - x_{12} \\
 18 - x_{21} - x_{22} &\leq x_{23} \leq 32 - x_{21} - x_{22} \\
 19 - x_{11} - x_{21} &\leq x_{31} \leq 32 - x_{11} - x_{21} \\
 x_{14} + x_{23} + 2 - x_{11} - x_{21} &\leq x_{31} \leq 16 + x_{14} + x_{23} - x_{11} - x_{21} \\
 x_{14} + x_{23} - x_{11} - x_{12} + 19 - x_{21} - x_{22} &\leq x_{31} \leq 32 + x_{14} + x_{23} - x_{11} - x_{12} - x_{21} - x_{22} \\
 18 - x_{31} - x_{32} &\leq x_{33} \leq 32 - x_{31} - x_{32} \\
 19 - x_{13} - x_{23} &\leq x_{33} \leq 32 - x_{13} - x_{23} \\
 18 - x_{11} - x_{22} &\leq x_{33} \leq 32 - x_{11} - x_{22}
 \end{aligned}$$

(x_{ij} désigne le contenu de la case (i, j)).

La programmation sur ordinateur de ces recherches est immédiate (que l'on utilise ou non les remarques accélératrices). Le programme consiste en un certain nombre de "boucles" imbriquées. Sa "logique" est comparable à celle du programme qui engendre toutes les permutations des nombres 1 à 9 (pour les carrés d'ordre 3) ou 1 à 16 (pour les carrés d'ordre 4).

Les choses se compliquent si on veut écrire un programme indépendant de l'ordre. On débouche là sur le problème fondamental de l'*algorithmique combinatoire*, dont la solution commence à émerger de travaux récents (WELLS) et n'a pas encore pénétré les

langages de programmation usuels. Prenons un exemple simple: soit à écrire l'ensemble des suites de n naturels (a_1, a_2, \dots, a_n) tels que $1 \leq a_i \leq i$. La méthode usuelle consiste à s'aider d'un arbre à n niveaux où le noeud de niveau $i-1$ a i successeurs et de programmer le parcours de cet arbre en descendant toujours vers le noeud non exploré le plus à gauche et en remontant le moins possible avant de redescendre. Le programme est assez long à écrire.

WELLS a introduit une formulation très simple de cet algorithme:

avec $i = 1 \text{ à } n$:
 pour $a(i) = 1 \text{ à } i$:
 écrire $a(1 \text{ à } n)$.

Ce nouveau langage se prête à l'écriture de tous les algorithmes d'exploration exhaustive de situations combinatoires.

Annexe: Voici les 80 premiers carrés magiques d'ordre 4.

1 2 15 16	1 3 16 14	1 4 13 16	1 5 12 16
12 14 3 5	13 15 2 4	15 14 3 2	14 11 6 3
13 7 10 4	8 6 11 9	12 9 8 5	15 8 9 2
8 11 6 9	12 10 5 7	6 7 10 11	4 10 7 13

1 2 15 16	1 2 16 15	1 3 14 16	1 3 14 16
13 14 3 4	13 14 4 3	10 13 4 7	12 13 4 5
12 7 10 5	12 7 9 6	15 6 11 2	15 8 9 2
8 11 6 9	8 11 5 10	8 12 5 9	6 10 7 11

1 3 14 16	1 3 14 16	1 3 16 14	1 3 16 14
15 13 4 2	15 13 4 2	8 15 2 9	12 15 2 5
10 6 11 7	12 8 9 5	13 6 11 4	13 10 7 4
8 12 5 9	6 10 7 11	12 10 5 7	8 6 9 11

1 3 16 14	1 4 13 16	1 4 13 16	1 4 13 16
13 15 2 4	8 14 3 9	8 15 2 9	12 14 3 5
12 10 7 5	15 5 12 2	14 5 12 3	15 9 8 2
8 6 9 11	10 11 6 7	11 10 7 6	6 7 10 11

1 4 13 16	1 4 13 16	1 4 13 16	1 4 13 16
12 15 2 5	14 15 2 3	14 15 2 3	15 14 3 2
14 9 8 3	8 5 12 9	12 9 8 5	8 5 12 9
7 6 11 10	11 10 7 6	7 6 11 10	10 11 6 7

1 4 14 15	1 4 14 15	1 4 15 14	1 4 15 14
13 16 2 3	13 16 2 3	13 16 3 2	13 16 3 2
8 5 11 10	12 9 7 6	8 5 10 11	12 9 6 7
12 9 7 6	8 5 11 10	12 9 6 7	8 5 10 11

1 4 16 13	1 4 16 13	1 4 16 13	1 4 16 13
14 15 3 2	14 15 3 2	15 14 2 3	15 14 2 3
7 6 10 11	11 10 6 7	6 7 11 10	10 11 7 6
12 9 5 8	8 5 9 12	12 9 5 8	8 5 9 12

1 5 12 16	1 5 12 16	1 5 16 12	1 5 16 12
15 11 6 2	15 11 6 2	8 14 3 9	10 14 3 7
10 4 13 7	14 8 9 3	10 4 13 7	8 4 13 9
8 14 3 9	4 10 7 13	15 11 2 6	15 11 2 6

1 5 16 12	1 5 16 12	1 6 11 16	1 6 11 16
10 14 3 7	15 14 3 2	7 15 2 10	8 12 5 9
15 11 6 2	10 11 6 7	14 4 13 3	15 3 14 2
8 4 9 13	8 4 9 13	12 9 8 5	10 13 4 7

1 6 11 16	1 6 11 16	1 6 11 16	1 6 11 16
8 15 2 9	12 10 7 5	12 15 2 5	12 15 2 5
12 3 14 5	13 3 14 4	8 3 14 9	14 9 8 3
13 10 7 4	8 15 2 9	13 10 7 4	7 4 13 10

1 6 11 16	1 6 11 16	1 6 11 16	1 6 11 16
13 10 7 4	14 12 5 3	14 15 2 3	14 15 2 3
12 3 14 5	15 9 8 2	7 4 13 10	12 9 8 5
8 15 2 9	4 7 10 13	12 9 8 5	7 4 13 10

1 5 12 16	1 6 11 16	1 6 11 16	1 7 10 16
10 11 6 7	15 12 5 2	15 12 5 2	15 12 5 2
15 4 13 2	8 3 14 9	14 9 8 3	14 9 8 3
8 14 3 9	10 13 4 7	4 7 10 13	4 6 11 13

1	6	12	15	1	6	12	15	1	6	15	12	1	6	15	12
11	16	2	5	11	16	2	5	11	16	5	2	11	16	5	2
8	3	13	10	14	9	7	4	8	3	10	13	14	9	4	7
14	9	7	4	8	3	13	10	14	9	4	7	8	3	10	13

1	6	16	11	1	6	16	11	1	6	16	11	1	6	16	11
12	15	5	2	12	15	5	2	15	12	2	5	15	12	2	5
7	4	10	13	13	10	4	7	4	7	13	10	10	13	7	4
14	9	3	8	8	3	9	14	14	9	3	8	8	3	9	14

1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
8	14	3	9	12	9	8	5	12	11	3	5	12	14	3	5
12	2	15	5	15	4	13	2	8	2	15	9	15	9	8	2
13	11	6	4	6	14	3	11	13	11	6	4	6	4	13	11

1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
14	9	8	3	14	12	5	3	14	12	5	3	15	9	8	2
15	6	11	2	8	2	15	9	15	9	8	2	12	4	13	5
4	12	5	13	11	13	4	6	4	6	11	13	6	14	3	11

1	7	10	16	1	7	12	14	1	7	12	14	1	7	14	12
15	14	3	2	10	16	3	5	10	16	3	5	10	16	5	3
12	9	8	5	8	2	13	11	15	9	6	4	8	2	11	13
6	4	13	11	15	9	6	4	8	2	13	11	15	9	4	6

1	7	14	12	1	7	16	10	1	7	16	10	1	7	16	10
10	16	5	3	11	13	4	6	12	14	5	3	12	14	5	3
15	9	4	6	14	12	5	3	6	4	11	13	13	11	4	6
8	2	11	13	8	2	9	15	15	9	2	8	8	2	9	15

1	7	16	10	1	7	16	10	1	8	9	16	1	8	9	16
14	12	3	5	14	13	4	3	7	13	4	10	14	13	4	3
11	13	6	4	11	12	5	6	14	2	15	3	7	2	15	10
8	2	9	15	8	2	9	15	12	11	6	5	12	11	6	5

1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	11	14	1	8	11	14
12	13	3	6	14	11	5	4	12	13	2	7	15	10	5	4
7	2	16	9	7	2	16	9	6	3	16	9	6	3	16	9
14	11	5	4	12	13	3	6	15	10	5	4	12	13	2	7

18. CODAGE ET DECODAGE DETECTION ET CORRECTION D'ERREURS

Reprenons notre carré magique d'ordre 10 (paragraphe 8) et ajoutons devant chacun des nombres y figurant le numéro de ligne et le numéro de colonne (pris entre 0 et 9). Nous obtenons un tableau de 100 nombres de 4 chiffres qui possède la propriété suivante:

Deux de ces nombres diffèrent en au moins trois chiffres.

Cela donne un principe de codage permettant de se protéger contre les erreurs de transmission. Si on utilise un langage formé à l'aide de cent messages élémentaires différents, on peut coder chaque message par l'un de ces nombres. Il faudrait que trois chiffres au moins soient modifiés au cours de la transmission d'un message élémentaire (et pas n'importe comment) pour que la suite de quatre chiffres reçue représente un message erroné. Dans tous les autres cas, l'erreur de transmission sera *détectée*. Si on sait qu'un seul chiffre a pu être modifié, on peut aussi *corriger* une erreur, car il y a un et un seul des cent nombres qui diffère en un chiffre du nombre modifié.

On peut exprimer géométriquement ce qui précède, en utilisant la notion de *distance de HAMMING*. La distance $d(a, b)$ de deux suites de même longueur

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

est le nombre de couples (a_i, b_i) tels que $a_i \neq b_i$.

Il s'agit bien d'une distance au sens mathématique:

$$d(a, b) \geq 0$$

$$d(a, b) = 0 \iff a = b$$

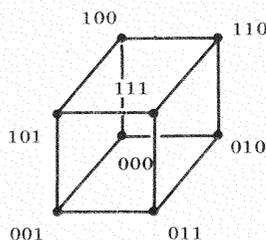
$$d(a, b) = d(b, a)$$

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$$

La même notion intervient dans le jeu linguistique bien connu: trouver un mot connaissant ses distances à d'autres mots de même longueur (voir SAUVY).

Le cas où les a_i et les b_i sont des chiffres binaires est particulièrement important dans la pratique. Les messages élémentaires sont alors représentés par les sommets d'un cube ou d'un hypercube dans un espace ayant comme dimension le nombre de chiffres du

codage. La distance de HAMMING est le nombre d'arêtes à parcourir pour aller d'un sommet à l'autre.



Les codes détecteurs et correcteurs binaires s'obtiennent par application d'une intéressante théorie développée depuis une vingtaine d'années et basée sur les propriétés des corps finis. (Voir CULLMANN).

19. BIBLIOGRAPHIE

(Les numéros renvoient aux paragraphes de ce document)

- Claude-Gaspar BACHET, sieur de MEZIRIAC. Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 5ème édition revue, simplifiée et augmentée par A.LABOSNE, Professeur de mathématiques. Nouveau tirage augmenté d'un avant-propos par J.ITARD, Agrégé de l'Université, et d'un portrait de l'auteur, Blanchard, Paris, 1959. (1, 13).
- J.C. CARREGA. Introduction à la géométrie projective. Bulletin de l'A.P.M.E.P., numéro 290 p. 547. (12).
- G. CULLMANN. Codage et transmission de l'information. Eyrolles, 1968. (18, 19).
- J. DOYEN et A. ROSA. A Bibliography & Survey of Steiner Systems. Bollettino UMI (4) 7 (1973) p. 392. (12, 19).
- Sir R. FISHER. The Design of Experiments. Oliver & Boyd, 1935. (6).
- T.J. FLETCHER. L'algèbre linéaire par ses applications. Adapté de l'anglais par GLAYMANN. CEDIC, 1972. (14, 19).
- D. FOATA. Combinatoire (Analyse). Encyclopedia Universalis. (1, 8, 12).
- L.R. FORD Jr & D.R. FULKERSON. Flots dans les graphes. Traduit par J.C.ARINAL. Gauthier-Villars, 1967. (15).
- E. FOURREY. Récréations arithmétiques. Vuibert. (13).
- M. GARDNER. Nouveaux divertissements mathématiques. Dunod. (5, 6, 7, 8).
- M. GERMEAU. Recherches sur les carrés magiques. Trocadéro, Sousse (Tunisie), inédit. (13).
- R. GUERIN. Existence et propriétés des carrés latins orthogonaux. Publications de l'ISUP, vol.15 p.113, 1966. (8, 12, 19).

- GUINET. La géométrie. Bulletin de l'A.P.M.E.P., numéro 285, p.733. (12, 13).
- M. HALL Jr. Numerical Analysis of Finite Geometries. Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, p.11, IBM DP Division, 1966. (12, 19).
- A. HEDAYAT. An Application of Sum Composition: A Self Orthogonal Latin Square of Order Ten. Journal of Combinatorial Theory (A) 14, 1973, p. 256. (8).
- J.C. HERZ. Trois exemples vécus de mathématisation. Troisième Séminaire International GALION, p.7. CEDIC, 1972. (15).
- G. HEUZE. Plans finis. Bulletin de l'A.P.M.E.P., numéro 274, p.205. (12, 19).
- B. KORDIEMSKY. Sur le sentier des mathématiques. Tome 2. Dunod. (13, 16, 17).
- G. LOPATA. Géométrie à 7 points et secours en haute montagne. CNTE, brochure YYY Id 1603. (12).
- E. LUCAS. Récréations mathématiques. Tome 4. Blanchard. 1960. (1, 13).
- W.H.MILLS. Three Mutually Orthogonal Latin Squares. Journal of Combinatorial Theory (A) 13, 1972, p.79. (8).
- N. PICARD & M.A. GIRODET. Chercher pour se former. Mathématisation de situations. Bulletin A.P.M.E.P., numéro 282, p.18. (12, 13).
- D.M.ROSE. Magic Squares & Matrices. The Mathematical Gazette LVII, numéro 399, 1973. p.36. (14).
- H.J. RYSER. Mathématiques combinatoires. Dunod. (1, 4, 7, 8, 12, 15, 19).
- S. SAUVY. Le "jeu de quatre lettres" et ses variantes. ARP 7, 1972 et 15, 1974. (18).
- A. WARUSFEL. Structures algébriques finies. Hachette. (9, 10, 11).
- M.B. WELLS. Elements of Combinatorial Computing. Pergamon, 1971. (17).

Voir aussi les périodiques suivants:

- Journal of Combinatorial Theory
- Journal of Recreational Mathematics
- Le Petit Archimède
- Scientific American.

SOMMAIRE

0. Introduction	3
1. Historique	5
2. Formes et couleurs	6
3. Codage en base trois et carré chinois	8
4. Manipulations sur les carrés latins	11
5. Carrés gréco-latins d'ordre 2, 3, 4	13
6. Carrés gréco-latins et plans d'expériences	15
7. Carrés gréco-latins d'ordre premier	17
8. Le problème des 36 officiers d'Euler	17
9. Extension du corps $\{0, 1\}$	19
10. Construction effective de carrés gréco-latins d'ordre 4	21
11. Les corps finis	23
12. Carrés gréco-latins et géométries finies	24
13. Quelques carrés magiques	28
14. Vectoriels de carrés magiques	31
15. Polyèdres convexes de carrés magiques. Emplois du temps	34
16. Figures magiques	37
17. Détermination de tous les carrés magiques d'ordre 3 et 4 Aperçus sur l'algorithmique combinatoire	40
18. Codage et décodage. Détection et correction d'erreurs	45
19. Bibliographie	46