ELEM - MATH 1

Choix d'articles destinés à l'Ecole Elémentaire publiés dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

PREFACE

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public regroupe des enseignants de la Maternelle à l'Université. Elle leur permet de mettre en commun leurs expériences pédagogiques et de perfectionner leur culture scientifique en organisant des réunions et en publiant des documents de travail.

C'est ainsi qu'en 1973 est paru la MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE qui est désormais épuisé. Le succès réservé à cet ouvrage collectif ainsi que de nombreuses demandes de publications du même genre ont amené l'A.P.M.E.P. à regrouper quelques-uns des articles relatifs à l'école élémentaire parus dans son bulletin de liaison durant les trois dernières années.

Les auteurs des textes rassemblés ici connaissent bien l'école élémentaire, certains d'entre eux y enseignent. Les sujets abordés sont divers mais tous sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Ce recueil n'est donc pas un ouvrage de recyclage — un de plus — ou une interprétation des programmes — une de plus.

Par la publication de telles propositions concrètes, l'A.P.M.E.P. espère rendre aux maîtres les services qu'ils sont en droit d'en attendre. L'A.P.M.E.P. recevra avec reconnaissance toutes les remarques, critiques, suggestions que les lecteurs voudront bien lui adresser à partir de ce recueil.

ECRIRE A :

André FABRE
Ecole Elémentaire
93 Grande Rue, 69340 FRANCHEVILLE

Recherche dans l'Enseignement Élémentaire

par ROUQUAIROL (I.R.E.M. de Paris)

Introduction

Le travail a lieu dans une classe de cours moyen 2.

Le maître et les élèves ont choisi comme thème de travail et de recherche LA MER.

Les enfants se lancent dans toutes les directions : les bateaux, les grandes découvertes de terres lointaines, les coquillages, les poissons, la vie des ports ; une émission de télévision nous montre les chantiers de Saint-Nazaire.

L'intérêt est profond, le sujet est riche, les enfants participent, vivent, découvrent ; déjà des monceaux de documents et d'objets sont apportés en classe.

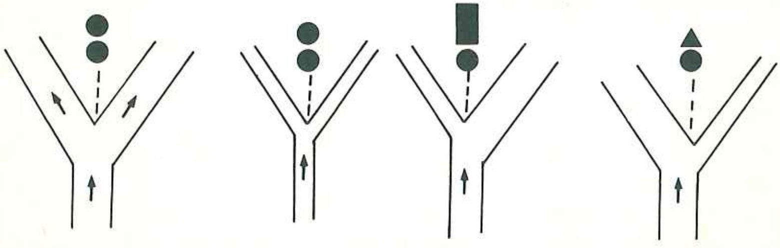
Ayant eu le privilège d'être accepté par la classe au titre d'aide mathématique, je dois participer au thème, c'est-à-dire me jeter à l'eau.

Voici donc quelques descriptions d'activités ayant des sources naturelles, un usage réel et une certaine fécondité sur le plan de la réflexion.

I Code de navigation dans les chenaux

Dans un port il existe des chenaux principaux et des chenaux secondaires. Un sens de parcours ayant été choisi sur les chenaux, on distingue des bifurcations de chenaux et des jonctions de chenaux. Des signaux existent qui discriminent ces différentes situations.

Bifurcations



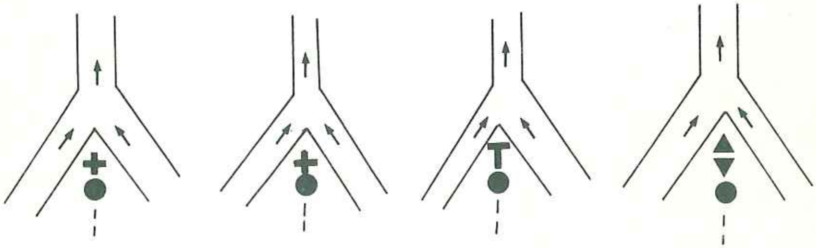
Ces signaux sont matérialisés par des espars surmontés

d'une BOULE ROUGE pour 2 chenaux de même importance

d'un CYLINDRE ROUGE si le chenal principal laisse le signal à babord, l'autre chenal étant secondaire

d'un CONE NOIR si le chenal principal laisse le signal à tribord, l'autre chenal étant secondaire.

Jonctions



Ces signaux sont matérialisés par des espars surmontés

d'une CROIX ROUGE pour 2 chenaux de même importance

d'un TE ROUGE pour la jonction d'un chenal secondaire et d'un chenal principal, le chenal secondaire arrivant à babord du chenal principal

de 2 CONES NOIRS raccordés par leur base quand le chenal secondaire débouche à tribord du chenal principal.

Nous retenons donc 6 signes :

Bifurcation	●	▮	▲
Jonction	✚	T	▲▼
	même importance	(s, p)	(p, s)

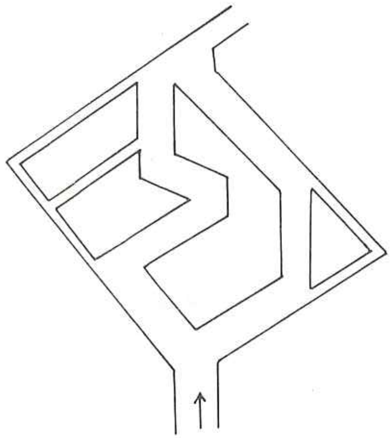
Pour retenir ces signes on a formé un tableau à 2 lignes et à 3 colonnes.

1ère ligne : les bifurcations
2ème ligne : les jonctions

1ère colonne : même importance
2ème colonne : signal à babord du principal
3ème colonne : signal à tribord du principal

2 Quelques jeux à ce premier stade

2.1 On dessine un réseau de chenaux et les élèves doivent le signaliser



Si on n'indique pas un sens de parcours on ne peut distinguer les bifurcations des jonctions.

On peut chercher les réseaux équivalents à un réseau donné.

2.2 On distribue des signaux et les élèves doivent fabriquer un réseau utilisant tous les signaux donnés.

2.3 On peut à la fois donner un réseau à compléter et des signaux à disposer sur le réseau.

3 Une écriture des signaux

Une bifurcation fait passer un chenal x à un couple ordonné de chenaux (y,z).

Appelons p un chenal principal ;
s un chenal secondaire.

Dans la bifurcation un chenal précède un couple de chenaux. On écrira une bifurcation sous la forme suivante :

(x ; (y, z))

On confondra une bifurcation avec le signal utilisé dans les chenaux.

$$(s ; (s, s)) = (p ; (p, p)) = \bullet$$

$$(p ; (p, s)) = \blacktriangle$$

$$(p ; (s, p)) = \blacksquare$$

Une jonction fait passer d'un couple ordonné de chenaux à un chenal. On a donc les égalités :

((p, p) ; p) = ((s, s) ; s) = ✚

((p, s) ; p) = ⬍

((s, p) ; p) = **T**

Certaines écritures n'ont pas de signaux.

(p ; (s, s)) un chenal principal donnant naissance à 2 chenaux secondaires : ce n'est pas impossible.

(s ; (p, p)) un chenal secondaire donnant naissance à 2 chenaux principaux : peu probable.

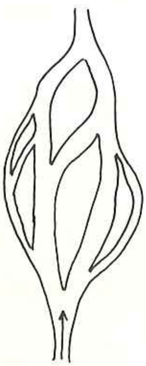
De même les bifurcations (s ; (p, s)) et (s ; (s, p)) sont peu probables.

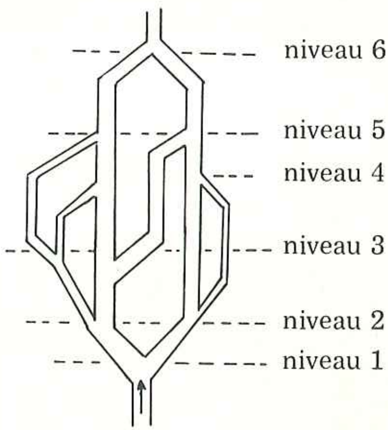
Quels sont les signaux de jonctions non rencontrés ?

Expliquer pourquoi.

4 Une écriture des réseaux

Parmi tous les dessins de réseaux équivalents seul sera lisible celui qui aura séparé les différentes opérations de bifurcations et de jonctions en niveaux





Mais alors à certains niveaux il ne se produit rien sur certains chenaux. Donc il faut fabriquer un signe pour indiquer qu'un chenal principal reste seul et principal : (p ; p) et un autre signe pour indiquer qu'un chenal secondaire reste seul et secondaire (s ; s). Alors on peut transcrire tout réseau.

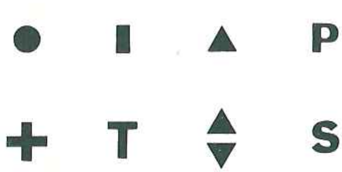
6	((p,p) ; p)
5	((s,p) ; p) ((p,p) ; p)
4	(s;s) ((s,p) ; p) (p;p) ((p,s) ; p)
3	(s ; (s,s)) (p ; (p,p)) (p;p) (s;s)
2	(p ; (s,p)) (p ; (p,s))
1	(p ; (p,p))
Niveaux	Signaux

Le fait d'avoir introduit les écritures (p ; p) et (s ; s) signifiant l'absence de bifurcation et de jonction, permet de contrôler d'un niveau à l'autre le nombre cohérent de chenaux, dans l'hypothèse d'aucun cul de sac.

Si l'on veut jouer avec des signes il faut fabriquer 2 nouveaux signes, par exemple P pour (p ; p) et S pour (s ; s).

5 Les jeux se précisent

Nous avons maintenant 8 signes :



En reproduisant 4 fois chaque signe on fabrique un jeu de 32 cartes. En distribuant 8 cartes à 4 joueurs on leur demande de disposer un réseau cohérent par niveaux et signaux.

On peut laisser aux enfants le soin d'inventer des jeux.

6 **Complément de code de navigation**

Il existe d'autres signaux concernant les épaves et les dangers. Les signaux concernant les épaves sont verts.

● BOULE VERTE : épave à bord indifférent, c'est dire qu'on peut croiser l'épave à babord ou à tribord

▮ CYLINDRE VERT : épave à laisser à babord

▲ CONE VERT : épave à laisser à tribord

● BOULE NOIRE : danger isolé

On peut donc fabriquer de nouvelles cartes et se servir de ces signaux pour obstruer les chenaux de l'adversaire : l'un crée des passages, l'autre des obstacles ; il y a affrontement, réflexion et mémorisation de signaux réels : la situation me paraît riche, saine et ouverte.

Induction et Récurrence

par LECOQ (Caen)

Cet article expose le malaise qu'a ressenti son auteur au cours de plusieurs séances de "recyclage". Rien ne sert de décrire ses états d'âme et quelques remèdes sont proposés dans la suite ; mais si d'autres collègues ont affronté la même situation et qu'ils disposent de réponses différentes, il serait intéressant de mettre en commun nos pharmacopées afin d'améliorer nos traitements. Et puis cela évite des redécouvertes longues et parfois pénibles quand elles ne sont pas décourageantes.

Dans les groupes de travail qui s'adressent aux maîtres de l'école élémentaire figure en bonne place l'étude de problèmes. Parmi ceux-ci on trouve tout naturellement de nombreux problèmes de dénombrement : ils permettent d'expérimenter sur des objets ou sur des dessins, ils utilisent les naturels, grand thème de l'école élémentaire, ils donnent assez facilement l'impression que les idées viennent d'elles-mêmes, enfin ils incitent ou devraient inciter à démontrer, à "établir une formule" comme on dit. Nous avons, par formation, le réflexe de la démonstration, mais l'expérience prouve que ce souci ne semble pas naturel, parfois, même, cette preuve nécessaire paraît inutile ; oserais-je dire qu'elle paraît relever du vice : "faut qu'y démontre". Cette commisération à l'égard du démontreur révèle en fait un point important de pédagogie : avant d'entamer une démonstration, il faut en éprouver le besoin, et pour que ce besoin naisse, il faut avoir rencontré des cas où "ça ne marche pas".

Du point de vue scolaire le raisonnement par récurrence donne lieu à des exercices plus passionnants les uns que les autres ... par exemple : "Prouvez que, pour tout naturel n, n × (n − 1) est pair — et l'on s'étonne après cela que les apprentis bacheliers maîtrisent si mal un raisonnement au demeurant délicat. Dans la réalité, avant de démontrer, il faut savoir quoi démontrer et la proposition à établir est issue de constatations, d'essais réalisés sur un nombre fini de cas qui laissent à penser que n (n − 1) a l'air d'être toujours pair.

Le problème soulevé dans les lignes qui suivent se présente ainsi : à partir d'un nombre fini d'expériences, on dégage une propriété qui semble vraie quel que soit le naturel dont elle dépend et l'on tente une démonstration. Trois cas se présentent : ou la proposition est établie, ou l'on ne parvient pas à l'établir, ou l'on montre que la proposition n'est pas universellement vraie. Dans ce cas on explore plus en détail pour imaginer une nouvelle proposition et l'on parcourt à nouveau le cycle : expérimentation-conjecture — test — preuve. Pour justifier la nécessité d'une preuve (par récurrence ou non), encore faut-il que les chercheurs aient fréquenté des situations où leur hypothèse est universellement vraie (sans qu'ils le sachent pour autant) et des situations où l'hypothèse émise n'est pas universellement vraie (il suffit alors de la tester sur un cas convenable).

Dans cet esprit, voici ce qu'on peut vivre : à l'ouverture d'une séance de travail, les participants se saluant, posez subrepticement la question suivante : nous sommes 17, combien y aura-t-il de poignées de mains échangées ? Dans le pire des cas, vous passez pour un farfelu ; ne pas s'inquiéter, c'est le métier qui veut ça. Mais si le groupe est actif et que vous l'ayez habitué à élaborer ses propres idées, la recherche s'engage. Après avoir liquidé le sens de "poignées de mains" (A serre la main de B, B serre la main de A, cela ne donne qu'une poignée de mains) on entre dans le vif du sujet ; ne parlez pas de paires dans un ensemble à 17 éléments, personne n'y croirait, laissez explorer.

Assez rapidement, mais pas toujours à l'aide d'un petit schéma qui serait cependant si utile dans la suite, des résultats apparaissent :

n	4	5	6	7
p (n)	6	10	15	21

p (n) désignant le nombre de poignées de mains échangées par les n personnes. Un tel début révèle déjà les mérites de votre pédagogie puisque les gens ont été actifs et qu'ils disposent du bon réflexe consistant à simplifier le problème pour remonter la chaîne des résultats. C'est alors de cette ascension que va apparaître le problème psychopédagogique. On peut bien sûr inciter les chercheurs à simplifier encore plus, ce qui ne laisse pas, au moins les premières fois, de les étonner. Bref, on arrive au tableau :

n	1	2	3	4	5	6	7
p (n)	0	1	3	6	10	15	21

A partir de là, la situation change d'aspect. Tout un chacun se sent désormais en mesure de répondre à la question initiale, mais est tenté de chercher une réponse quel que soit n. Et voilà d'une façon ou d'une autre lâché le fatidique "quel que soit n". Encore faudrait-il bien préciser ce qu'on cherche car au fond trouver p (100) peut apparaître long et fastidieux mais réalisable. Précisons donc (dans cet article, c'est facile ; au sein d'un groupe de travail, les mots pour le dire n'arrivent pas aisément) qu'il s'agit de trouver un polynome en n, s'il existe, qui décrive l'application de N vers N dont nous n'avons obtenu expérimentalement qu'un fragment. Au niveau de l'école élémentaire, il s'agit de trouver, si elle existe, une fonction élémentaire de n, c'est-à-dire une suite d'opérations à effectuer à partir de n — (polynome, exponentielle, fraction rationnelle).

Les discussions évoquées par les lignes précédentes amènent les gens à remarquer :

n	1	2	3	4	5	6	7
p (n)	0	1	3	6	10	15	21
		1	2	3	4	5	6
		1	1	1	1	1	

et, par voie de conséquence, à affirmer :

7	8	9	10	11
21	28	36	45	55
7	8	9	10	

Et voilà qu'un certain malaise vous prend. Au début, vous étiez en sécurité, puisque mathématiquement bien armé face à un tel problème ; les participants par contre s'attendaient plus ou moins à quelque éclair imprévisible mais efficace prouvant une fois de plus l'existence de la "bosse". Maintenant, c'est vous qui êtes pris au dépourvu et les participants se sentent sûrs d'eux car enfin : leur truc marche bien, posez la question : "et pour n = 20 ? ", quelques additions et l'on vous retourne 190. Vous sentez bien que la question : "et pour n = 1000 ? " va vous attirer l'inévitable réponse : "faut l'faire ! ". Quant à la remarque qui vous brûle les lèvres : "vous n'avez là qu'une hypothèse, encore faudrait-il démontrer", c'est le vecteur qui va vous mettre une fois de plus sur orbite mathématique. Après tout : "jusqu'à preuve du contraire, $p(n) = \frac{1}{2} n (n-1)$" est un argument imparable et ce serait plutôt à vous de fournir cette fameuse preuve du contraire.

En un mot l'animateur est pris en fourchette entre la pertinence de la conjecture émise par les animés (oh combien ! à ce point de la discussion) et ce louable souci de rigueur qui le pousse à ne pas se fier aux apparences, si évidentes soient-elles. Ayant le souci de ne rien imposer qui ne réponde à un besoin ressenti et exprimé, l'animateur est face à l'alternative : ou laisser tomber en espérant faire mieux la fois suivante, ou exhiber une situation où "ça ne marche pas". Exhiber, exhiber, c'est vite dit, pensez-vous, mais ce genre de problèmes ça marche toujours !

Avant d'exhiber des situations où "ça ne marche pas", peut-être convient-il d'examiner le problème posé dont quelques conversations entre "recycleurs" m'ont convaincu qu'il est plus fréquent qu'on ne croit et dont on parle souvent à mots couverts parce qu'on ne sait pas trop bien comment s'en sortir.

Pour arriver à la question : faut-il démontrer ? , il faut que les animés prennent au sérieux les problèmes que vous leur proposez, il faut qu'ils en aient déjà résolu par eux-mêmes, il faut qu'ils aient le réflexe d'explorer la situation, il faut que l'animateur incite à chercher pour conjecturer, il ne faut pas que les animés attendent de l'animateur/LA/réponse.

Où est alors le blocage ? De toute évidence dans la rencontre de deux démarches de l'esprit : raisonnement par induction et raisonnement par récurrence. Peut-on parler de raisonnement dans les deux cas ? Pourquoi pas ? Quoi qu'il en soit, il y a un procédé de démonstration : la récurrence, et une démarche qui permet de conjecturer : l'induction. Et nous sommes trop scrupuleux pour confondre conjecture et résultat démonstrativement avéré. Au cours de la séance de travail précédemment décrite, les chercheurs partis de quelques résultats ont induit un modèle numérique, la régularité vécue s'est traduite en régularité numérique et les plus exigeants concrétisent vite les différences premières sous la forme $p(n + 1) = p(n) + n$, le quantificateur universel étant sous-entendu ou inexprimé, ou tout simplement escamoté.

En somme leur conviction est faite, la conjecture est raisonnable, elle marche bien et on ne voit pas pourquoi elle ne continuerait pas à marcher. Cette réaction correspond bien au côté dynamique de la démarche de l'expérimentateur qui cherche à prévoir. A ce stade il est correct de dire : "il est probable que $p(n) = \frac{1}{2} n (n - 1)$" ou "on peut s'attendre à ce que ...". C'est dans un tout autre esprit que le mathématicien cherche à prouver que $(\forall_N n, p(n) = \frac{1}{2} n (n - 1))$ est vrai. Cette attitude n'est pas si naturelle qu'on veut bien le croire, il n'est que d'en faire l'essai avec des gens qui n'enseignent pas. Que l'on démontre par récurrence ou autrement importe moins que de faire sentir la nécessité d'une preuve, et c'est dans ce but que les exemples suivants d'inégale valeur pédagogique peuvent être utilisés.

Exemple 1 : Extraits de Wheeler "Mathématique dans l'enseignement élémentaire" (OCDL).

Dessinez un cercle, disposez sur ce cercle n points qui ne soient pas les sommets d'un polygone régulier. Joignez ces points 2 à 2. Quel est le nombre maximum de régions dans le disque ?

Quelques dessins vous donnent les résultats suivants :

1	2	3	4	5
1	2	4	8	16

L'exemple a ceci de remarquable que pour 6 points la figure est embrouillée et que l'on a tendance à conjecturer que pour 6 points, 32 régions, 7 points, 64 régions, etc... Par prudence, on teste sur 6 points, on obtient 31 régions, la conjecture s'effondre.

On pense alors aux différences

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 31 \\
& 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 15 & \\
& & 1 & & 2 & & 4 & & 7 & & \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & &
\end{array}$$

Si les différences troisièmes sont : 1, 2, 3, 4, 5 etc..., alors pour 7 points, il devrait y avoir 57 régions. Testez-vous cette nouvelle conjecture ? A vous de voir mais vous êtes prévenu : conjecture ne signifie pas vérité.

Voilà une belle situation où les modèles numériques élémentaires auxquels on pense sont inadéquats ; leur choix dépend en fait du degré de culture du chercheur. Il est ici plus raisonnable d'analyser le problème, d'en dégager l'aspect topologique pour obtenir une formule (non "élémentaire" pour des instituteurs, élémentaire pour un bachelier) plutôt que de jouer à la devinette.

Il n'en reste pas moins que si vous l'utilisez ça finira par se savoir ; il serait donc bien utile d'en connaître d'autres. Personnellement, avant cette situation, je n'en avais qu'une autre mais très mauvaise : lundi, mardi, mercredi il a plu, aujourd'hui il pleut, quel temps fera-t-il demain ? D'autant plus mauvais qu'il est bien connu qu'en Normandie il pleut tout le temps. (Conjecture ou vérité ?).

2e Exemple : Fortuitement ma fille aînée (8 ans) vient de me fournir une situation analogue. Elle discutait avec une amie du même âge et tout à coup — allez savoir ce qui leur passe par la tête — elle lui demande de faire dix avec deux nombres — réponse : 5 et 5 — oui, mais il y en a d'autres — Ah ? — Oui : 0 et 10 — Il était temps d'intervenir : combien y a-t-il de façons de faire 10 avec deux nombres ? Réponse 10, voyez la belle conjecture ! ... Il a fallu prendre un papier et trouver 6, encore qu'à la réflexion ce zéro ? on dirait plutôt 5. Et puis nouvelle question : "et avec trois nombres pour faire 10 ? " ; nouveau papier et ... j'ai continué tout seul.

Combien y a-t-il donc de décompositions d'un naturel n en somme de trois nombres non nuls, les répétitions étant permises ?

L'expérience donne :

3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5

Pour 9 dirait-on qu'il y a 6 décompositions ? La suite du tableau précédent :

9	10	11	12
7	8	10	12

infirme cette conjecture.

Cet exemple bien que du même type que le précédent, paraît moins bon car il est probable que les essais dépasseront 8, et qu'ainsi les chercheurs seront tout de suite en alerte ; d'autre part les deux 1 du début peuvent inciter à la prudence. En tout cas dans cet exemple on sera vraisemblablement circonspect à l'égard des conjectures émises.

3e Exemple : Qui peut s'introduire naturellement à partir du précédent : combien y a-t-il de naturels dont la somme des chiffres est 5 ? (on retrouve ce problème, à la rédaction près, dans la série pourpre des problèmes du Nuffield Project — OCDL).

L'ensemble des nombres dont la somme des chiffres est 5 n'est pas fini puisqu'on y trouve 50, 500 etc..., mais en se limitant aux naturels dont l'écriture n'utilise pas zéro on trouve :

1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32

Là encore, il semble naturel de conjecturer qu'il y a 2^{n-1} naturels dont la somme des chiffres est n — Conjecture naturelle sans doute, mais il manque le "pour tout n naturel" — Ainsi quantifiée, la proposition est fausse.

4e Exemple : Tiré de Ogilvy et Anderson "Excursions dans la théorie des nombres" (DUNOD).

Remplaçant n successivement par 0, 1, 2, 3 dans $n^2 - n + 41$ on trouve 41, 41, 43, 47 ... qui sont premiers, et on en trouve 41 de suite. Néanmoins ($\forall_N n, n^2 - n + 41$ est premier) est fausse.

Il y a mieux: $n^2 - 79n + 1601$ fournit 80 nombres premiers à la suite les uns des autres mais n = 80 donne 1681 qui est 41^2.

Ces deux exemples sont techniquement intéressants à condition de voir que les nombres obtenus sont premiers, mais pédagogiquement inefficaces par leur côté artificiel, technique précisément.

5e Exemple : On peut dans un genre voisin montrer que le tableau

1	2	3
1	2	4

est décrit aussi bien par : $n \mapsto 2^{n-1}$ que par : $n \mapsto \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ ou par : $n \mapsto 2\frac{1+n}{5-n}$

Là encore, les interlocuteurs sentent l'aspect fabriqué de telles remarques, ou peut-être leur manque-t-il la situation concrète qui sert d'arbitre dans la discussion.

6e Exemple : A la limite du sujet de cet article on peut aussi proposer des situations où dans le cadre des manipulations on ne parvient pas à conjecturer à l'aide de fonctions élémentaires. Par exemple la recherche des polyminos donne :

1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	12	35

Au-delà de 6, cela devient décourageant ... De même, placer n dames sur un échiquier nxn sans qu'aucune soit en prise donne :

2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	1	6	12

Que conclure de ce qui précède ? Les exemples 1, 2 et 3 sont pertinents en ce sens que la manipulation est "régulière" ; les résultats numériques permettent de conjecturer sans faire appel à une vaste culture mathématique et l'on peut tester l'hypothèse. Le 4e exemple peut être utile pour renforcer les précédents mais, présenté en premier, il n'est pas convaincant. Le 5e exemple ne convainc personne, car il transgresse un principe pédagogique : le modèle mathématique doit décrire une situation réelle et non être introduit et étudié pour lui-même. Autrement dit, c'est à partir d'une réalité qu'on peut construire un langage mathématique qui se trouve validé par retour à cette réalité. Enfin les situations citées en 6e exemple s'écartent du cadre de cet article ; le problème de la démonstration ne peut se poser puisqu'on n'a rien à prouver. Que les essais tentés ne permettent pas de conjecturer, cela tient peut-être à la faible culture du chercheur ou à une analyse insuffisante, ou tout simplement au fait que les applications en question ne peuvent pas s'exprimer à l'aide d'applications élémentaires (polynomes, exponentielles ...) ; c'est un phénomène bien connu des mathématiciens et ... c'est encore une conjecture. Pour les débutants, c'est décourageant à moins qu'habilement présentés ces exemples ne montrent que l'univers des applications de N vers N est plus riche qu'on ne pense — en tout cas, qu'il ne se limite pas aux opérateurs dont on fait tant de cas.

Il me reste à souhaiter que ces quelques remarques puissent être utiles à des collègues et à lancer un appel à toute personne connaissant des situations analogues aux exemples 1, 2, 3 : qu'elle veuille bien les rendre publiques ; ça peut toujours servir. Et si personne n'en connaît, qu'on se le dise.

Recherche à partir d'un jeu télévisé
dans une classe rurale à trois cours
(C.E. 2, C.M. 1, C.M. 2)

par P. LEGOUPIL, Valcanville (Manche)

I *A partir du jeu "Le compte est bon"*

Les élèves de ma classe, ayant vu à la télévision le jeu "le compte est bon", m'ont demandé s'il ne serait pas possible d'y jouer en classe. Certains, les plus jeunes, trouvaient ce jeu trop compliqué. Après discussion et tâtonnement, nous avons mis au point le jeu suivant : dans un petit sac de toile, nous avons placé 10 jetons numérotés de 0 à 9. Un élève tire 5 des jetons (exemple 1, 5, 7, 8, 9). Les jetons tirés sont ensuite remis dans le sac. Puis l'élève tire successivement 2 jetons a,b. On écrit le nombre 10a+b. Exemple : le tirage 7,8 donne le nombre 78. Le jeu consiste à former ce nombre 78, en utilisant les cinq nombres d'un chiffre une fois et une seulement et les quatre opérations. Pour les tirages 1,5,7,8,9 et 78 une solution est $\big((8+9)5\big) - (7\times 1) = 78$.

Autre exemple : 45 avec 1,4,5,7,9 ; $\big((7-1)9\big) - (4+5) = 45$.

Le premier élève qui trouve une solution marque 5 points ; s'il s'est trompé, on lui retire 5 points. Le temps est limité à 30 secondes. Passé de laps de temps, l'élève qui approche le plus près du résultat marque 3 points et les élèves qui ont le résultat exact mais avec 4,3 ou 2 nombres d'un chiffre marquent 4, 3 ou 2 points (ceci pour encourager les élèves de CE_2 moins rapides que ceux de CM_2).

Rapidement, ce jeu a passionné toute la classe et peu à peu le règlement s'est complété et a été modifié : on a d'abord totalisé les points chaque semaine, puis on a divisé la classe en deux groupes, les forts et les faibles, pour ne pas désavantager les faibles. Malgré cela, les meilleurs élèves de chaque groupe raflaient tous les points. Afin de ne pas décourager ceux qui n'en avaient jamais, la règle des 30 secondes a été généralisée. Ainsi, au bout de trente secondes, tous ceux qui avaient trouvé une solution marquaient leurs points.

Par la suite, sans utiliser le sac, certains élèves proposèrent des problèmes à leurs camarades. Certains ont tenu la classe en échec pendant plusieurs jours comme ceux-ci :

80 avec 1,3,4,6,9 $\quad (\frac{6}{3} \times 4)(9+1)$ ou $(6-1)(9+4+3)$

81 avec 1,4,7,8,9 $\quad 9(\frac{8}{4} + 7)1$

Nous avons également installé un secrétaire de séance qui notait sur un tableau tous les chiffres et nombres sortis. Au bout de quelques semaines, les élèves ont pu constater que l'espérance de sortie de tel ou tel chiffre était à peu près la même. Ils se sont aperçus également que notre univers était limité. Non seulement nous n'avions que 90 nombres de deux chiffres possibles, mais les combinaisons de 5 nombres d'un chiffre étaient très limitées. Par tâtonnement on a tenté de trouver le nombre de tirages possibles mais l'essai n'a pas abouti. Les élèves ont découvert qu'avec un sac de 5 jetons, il n'y avait qu'une possibilité, avec 6 jetons, 6 possibilités et avec 7, 21 possibilités... et ils ne sont pas allés plus loin. Il aurait été trop difficile de leur expliquer la formule

$$C(10,5) = \frac{10\,!}{5\,!\;(10-5)\,!} = 252 \quad (1)$$

(1) $3\,!$ désigne $1 \times 2 \times 3$. $5\,!$ désigne $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$; ainsi $10\,!$ désigne $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 9 \times 10$.
C(10,5) désigne le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 10 éléments.

II *Variantes*

Nous avons essayé d'élargir notre champ d'action. Tout d'abord le zéro pouvait valoir indifféremment 0 ou 10. On avait ainsi deux problèmes différents pour le même nombre. Exemples :

70 avec 2,6,8,9,0 $(9 \times 8) - 2 + (6 \times 0)$

70 avec 2,6,8,9,10 $(9 \times 10) - \big((2 \times 6) + 8\big)$

Les enfants ont remarqué qu'avec notre petit sac de 10 jetons nous ne pouvions pas sortir deux fois le même chiffre à moins de remettre le jeton tiré dans le sac après chaque tirage ; après discussion, ils ont proposé de mettre dans le sac 5 chiffres de chaque sorte. Nous avons donc confectionné 40 jetons supplémentaires et nous sommes repartis avec, cette fois, un univers considérablement élargi : 100 nombres de 2 chiffres et 2002 tirages possibles (voir paragraphe IV).

Notre secrétaire a pu nous faire constater que si l'espérance de sortie de chaque chiffre n'était pas modifiée, c'étaient les combinaisons du type a,a,b,c,d a,b,c,d,e a,a,b,b,c a,a,a,b,c qui dans l'ordre apparaissaient le plus fréquemment. Il n'y eut qu'une combinaison du type a,a,a,b,b et aucune des types a,a,a,a,b ou a,a,a,a,a.

Nous avons tenté une exploration vers les décimaux : les chiffres tirés ayant, soit leur valeur propre, soit le $\frac{1}{10}$ de leur valeur.

Exemple : 2,3,5,9,1 pour former 5,6

2 pouvant être utilisé avec valeur de 0,2 ; 3 valeur de 0,3 etc ...
On a la solution : $9 + 1 - 5 + (0{,}2 \times 3)$.

Nous avons assez rapidement abandonné cette voie, la plupart des élèves préférant les naturels.

Par contre, une exploration en direction des rationnels a été amorcée et a eu quelque succès chez les bons élèves. Cette fois, le nombre devait être de la forme $\frac{a}{b}$.

Exemples : avec le tirage 2,8,4,1,7 et $\frac{3}{5}$ on a :

$$\frac{\frac{8}{4} + 1}{7 - 2} = \frac{3}{5}$$

De même avec 1,4,6,9,2 et $\frac{5}{7}$, on peut écrire

$$\frac{5}{7} = \frac{9+1}{(4\times 2)+6}$$

Les règles de simplification offrent dans ce cas de nombreuses possibilités.

III *Un problème*

Cependant, nous sommes revenus aux naturels afin de faire participer l'ensemble de la classe à la recherche. En fin d'année, je proposais un nouveau jeu : tirer cinq nombres d'un chiffre et trouver, en une demi-heure, le plus possible de nombres de deux chiffres. Les nombres 9,3,3,1,4 furent tirés et chacun se mit au travail. Chaque élève trouva de 6 à 37 solutions. Le secrétaire les nota toutes. On obtint 57 nombres de deux chiffres.

Quelqu'un proposa alors : "Et si on essayait de les trouver tous ? " On écrivit au tableau tous les nombres manquant et dès que l'un deux était trouvé, le secrétaire le notait et on l'effaçait. Il ne resta plus bientôt que 47, 62, 63, 70, 71, 74, 87. Allait-on en rester là ?

Le lendemain 62 tombait : $\big((9\times 3)+4\big)\,(3-1)$; puis 63 : $(9+3)\,(4+1)+3$.

En fin de semaine, il ne restait que 47 et 87. Pour 47, une solution fut apportée par un élève : "c'est mon père qui l'a trouvée" ; ainsi l'expérience débordait même le cadre scolaire. Il ne restait plus que 87. Fallait-il l'abandonner ? Soudain, quelqu'un s'écria pendant la leçon de lecture : "Je l'ai ! J'ai 87". L'inventeur fut félicité par tous : $[(9-1)4-3]3$.

Si des collègues sont intéressés par cette expérience et se lancent dans cette même voie, je serais heureux de connaître leurs résultats.

J'ajoute que les élèves se sont demandé si on pouvait trouver tous les nombres de 0 à 99 à partir de 5 autres nombres d'un chiffre. Je n'ai pu que constater avec eux que le produit des 5 nombres devait au moins atteindre 99. Pour le reste le problème reste ouvert et nous demandons de l'aide.

IV *La part du maître*

Un sac contient 5 séries de 10 jetons numérotés de 0 à 9. On tire 5 jetons et on appelle tirage la liste des 5 numéros ainsi tirés en ne tenant pas compte de l'ordre de sortie.

Par exemple : (1,5,7,8,9), (9,3,3,1,4), (9,3,3,3,4) sont des tirages distincts.

Dans ces conditions, quel est le nombre de tirages ?

J'ai, d'abord, pensé à la formule $C(50,5) = \frac{50!}{5!\,(50-5)!}$ soit 2 118 760 tirages. Résultat inacceptable puisque, si on tenait compte de l'ordre de sortie des numéros, on formerait des nombres de 5 chiffres et qu'il y en a au plus 100.000.

IV — 1 *Nombre de tirages*

Les tirages ne peuvent prendre que l'une des 7 formes suivantes :

1ère forme : (a,a,a,a,a) ; 10 cas possibles : (0,0,0,0,0), (1,1,1,1,1), etc ...

2ème forme : (a,a,a,a,b) ; 10×9 cas possibles : (0,0,0,0,1), (0,0,0,0,2), etc ...

3ème forme : (a,a,a,b,b) ; 10×9 cas possibles : (0,0,0,1,1), (0,0,0,2,2), etc ...

4ème forme : (a,a,a,b,c) ; $\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2}$ cas possibles, car b et c peuvent permuter ; soit 360 cas

5ème forme : (a,a,b,b,c) ; $\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2}$ cas possibles, car a et b peuvent permuter ; soit 360 cas

6ème forme : (a,a,b,c,d) ; $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$ cas possibles, car b,c,d peuvent permuter ; soit 840 cas

7ème forme : (a,b,c,d,e) ; $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ cas possibles, compte tenu des permutations des 5 nombres ; soit 252 cas.

On a donc $(10 + 2 \times 90 + 2 \times 360 + 840 + 252)$ c'est-à-dire 2002 tirages possibles.

IV — 2 *Tirages et nombres de 5 chiffres*

Chaque type de tirages engendre une famille de nombres de 5 chiffres. Comment retrouver les 100.000 nombres prévus ?

1°) un tirage de la forme (a,a,a,a,a) n'engendre qu'un seul nombre.

2°) un tirage de la forme (a,a,a,a,b) engendre 5 nombres puisqu'il s'agit de choisir la place de b.

3°) un tirage de la forme (a,a,a,b,b) engendre 10 nombres car il s'agit de choisir la place des a. Il y a C(5,3), c'est-à-dire $\frac{5!}{3!\ 2!}$ tels choix ; soit 10 nombres.

4°) un tirage de la forme (a,a,a,b,c) engendre C(5,3) $\times$ C(2,1) nombres car il faut choisir les places des a et la place des b.

Et $C(5,3) \times C(2,1) = \frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{2!}{1!\ 1!}$, d'où 20 nombres.

5°) un tirage de la forme (a,a,b,b,c) engendre C(5,2) $\times$ C(3,2) nombres car il faut choisir les places des a et les places des b.

Comme $C(5,2) \times C(3,2) = \frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{3!}{2!\ 1!}$, on a 30 nombres.

6°) un tirage de la forme (a,a,b,c,d) engendre C(5,2) $\times$ C(3,1) $\times$ C(2,1) nombres, soit 60 nombres.

7°) un tirage de la forme (a,b,c,d,e) engendre 5! c'est-à-dire 120 nombres.

Le tableau ci-dessous résume les calculs précédents :

Forme du tirage	Nombre de tirages	Permutations	Nombre de nombres de 5 chiffres
(a,a,a,a,a)	10	1	10
(a,a,a,a,b)	90	5	450
(a,a,a,b,b)	90	10	900
(a,a,a,b,c)	360	20	7200
(a,a,b,b,c)	360	30	10800
(a,a,b,c,d)	840	60	50400
(a,b,c,d,e)	252	120	30240
Total	2002		100000

Le total correspond bien aux 100 000 premiers nombres.
Et il y a bien 2 002 cas possibles pour notre jeu.

IV — 3 *Et le nombre 2 118 760 ?*

Supposons que chaque jeton de même valeur ait une couleur différente.

Nous aurons bien alors $\frac{50!}{5!\ (50-5)!} = 2\ 118\ 760$ cas.

Comment répartir nos 2 002 cas ne tenant pas compte des couleurs dans cet ensemble de 2 118 760 ? et quelles sont les probabilités de sortie ?

1°) Pour la forme (a,a,a,a,a), nous avons vu qu'il n'y a que 10 cas sans permutation possible, la probabilité est donc de $\frac{1}{211\ 876}$ soit approximativement 5×10^{-6}.

2°) Pour la forme (a,a,a,a,b), avec les jetons de couleur les 90 cas se trouvent multipliés par

$C(5,4) \times C(5,1) \left(\frac{5!}{4!\ 1!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} = 25\right)$, soit $90 \times 25 = 2250$.

La probabilité est donc de $\frac{2\ 250}{2\ 118\ 760}$, approximativement 1/1000.

3°) Pour la forme (a,a,a,b,b) les 90 cas se trouvent multipliés par

$C(5,3) \times C(5,2) \left(\frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{5!}{2!\ 3!} = 100\right)$, soit $90 \times 100 = 9\ 000$.

La probabilité est de $\frac{9\ 000}{2\ 118\ 760}$, soit à peu près $\frac{1}{235}$.

4°) Forme (a,a,a,b,c) : les 360 cas sont multipliés par

$$C(5,3) \times C(5,1) \times C(5,1) \quad \left(\frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} = 250\right)$$

soit $360 \times 250 = 90\ 000$.

Probabilité $\frac{90\ 000}{2\ 118\ 760}$, approximativement $\frac{1}{23}$.

5°) Forme (a,a,b,b,c) : les 360 cas sont multipliés par $C(5,2) \times C(5,2) \times C(5,1)$, soit $360 \times 500 = 180\ 000$

Probabilité : $\frac{180\ 000}{2\ 118\ 760}$, comprise entre $\frac{1}{11}$ et $\frac{1}{12}$.

6°) Forme (a,a,b,c,d) :

$$C(5,2) \times C(5,1) \times C(5,1) \times C(5,1) = 10 \times 5 \times 5 \times 5 = 1\ 250$$

soit $840 \times 1250 = 1\ 050\ 000$

Probabilité : $\frac{1\ 050\ 000}{2\ 118\ 760}$, sensiblement $\frac{1}{2}$.

7°) Forme (a,b,c,d,e) : 5× 5× 5× 5× 5 = 3250
soit 252 × 3250 = 787 500

Probabilité : très près de $\frac{1}{3}$.

Le total des 7 formes donne :
10 + 2 250 + 9 000 + 90 000 + 180 000 + 1 050 000 + 787 500
c'est-à-dire 2 118 760.

Ce total correspond bien au résultat de la formule C(50,5) et les calculs qui précèdent corroborent les constatations de notre secrétaire (voir II, page 2).

V *En guise de conclusion*

Lorsque les enfants m'ont proposé de jouer à "Le compte est bon", je croyais, en acquiesçant, leur offrir des occasions de calculer. Je me suis assez vite rendu compte qu'ils me posaient, du même coup, de nombreux problèmes de dénombrement.

N'ayant pas, au départ, de connaissance en analyse combinatoire, j'ai calculé comme je le pouvais et, pour vérifier mes résultats, je me suis procuré le livre de Ivan Niven : "Premières notions de probabilité et analyse combinatoire" (Dunod) dont je conseille vivement la lecture aux collègues intéressés.

J'ai trouvé, dans ce livre, confirmation de mes recherches mais aussi la formule des combinaisons avec répétitions qui m'aurait donné directement 2002 $\left(C(10+5-1,5) \quad \text{soit} \quad \frac{14!}{5!\ 9!}\right)$ mais ne m'aurait pas permis de trouver le rapport existant entre 2002, 100 000 et 2 118 760.

Fonction sélective des exercices

par B. COLLIN, C.E.S. St Laurent de la Salanque 66

Introduction

Cet article s'appuie sur de nombreuses observations faites dans des classes de toutes catégories de mon C.E.S. (sixième III, I ou II, cinquième I ou II, cinquième accueillant des élèves issus de sixième III, ou retardés) quant aux difficultés que des élèves *réels* de sixième et de cinquième peuvent rencontrer dans la résolution des exercices les plus courants.

J'ai voulu mettre en évidence que nombre d'entre eux, qui paraissent d'autant plus anodins qu'ils sont facilement résolus par la plupart des élèves des sections I, requièrent pourtant des élèves un comportement qui n'est pas "naturel" à tous. Et si un élève, pour quelque raison, se comporte autrement qu'il le *faudrait*, l'exercice le rejette. Chaque exercice de mathématique, parmi les plus banals, a donc une *fonction sélective* qui opère en particulier dans les domaines de l'expression et de la compréhension verbales, du calcul, de l'utilisation des schémas, des signes, des conventions, ces dernières ayant beaucoup d'importance aux yeux des enseignants (Mais les exemples pris ici ne concernent que signes ou schémas).

I Les schémas d'inclusion

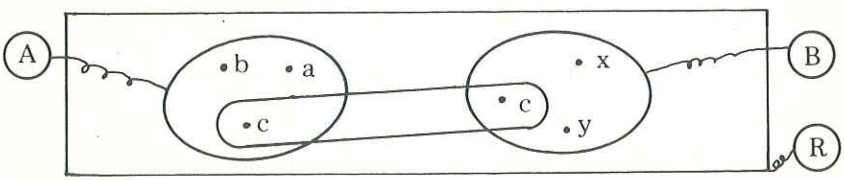
Les diagrammes de Venn utilisent des conventions qui n'ont rien d'évident pour certains élèves de sixième.

Exemples :

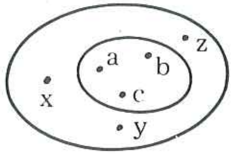
Ces deux schémas représentent-ils le même ensemble ?

Un même élément n'est représenté qu'une fois.

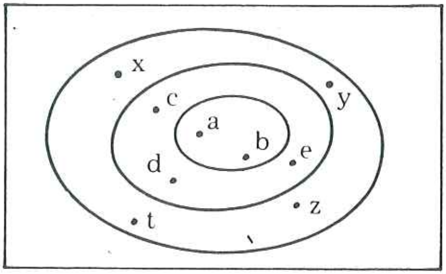
Voici comment certains représentent deux ensembles non disjoints d'un même référentiel :



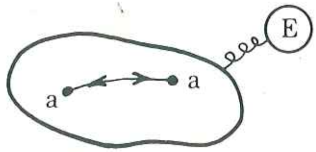
Voici une représentation de deux ensembles complémentaires $\{x,y,z\}$ et $\{a,b,c\}$.



Voici une représentation d'ensembles disjoints d'un même référentiel : $\{a,b\}$ $\{c,d,e\}$ $\{x,y,z,t\}$



Voici une représentation d'une relation :



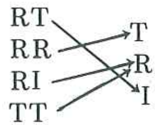
Parmi de nombreuses représentations possibles, la coutume exerce donc un choix, que nous n'avons que trop tendance à imposer à nos élèves. "Le signe linguistique est arbitraire" (De Saussure). De même, dans le langage des diagrammes, les signes utilisés sont en grande partie arbitraires. En cours d'apprentissage, le tâtonnement devrait être toléré.

II Comment fabriquer une table de Pythagore (sixième, cinquième)

Ayant fait étudier les permutations circulaires de $\{R,T,I\}$ (R, T et I étant appelées "règles" d'un "jeu à trois règles"), il est demandé aux élèves de trouver toutes les manières de composer deux des trois règles, et de ranger les résultats pour en faire un résumé concis. De la discussion émergent les idées suivantes :

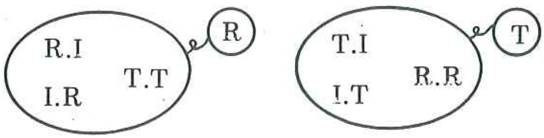
1ère idée : Rangement en colonne désordonnée : RT = I
RR = T
etc ...

2ème idée : Classement :

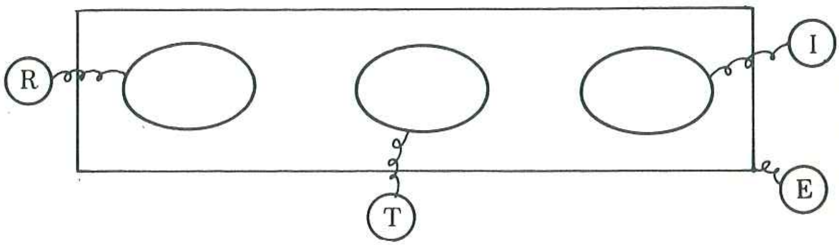


etc ...

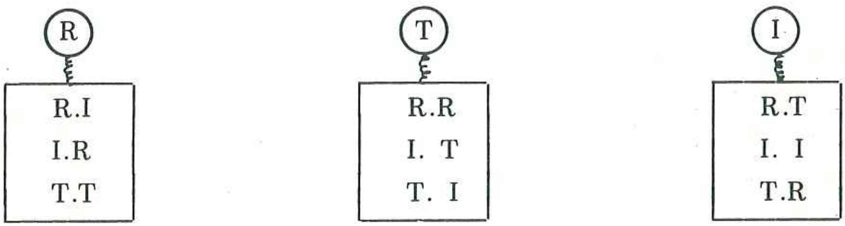
3ème idée : Partition :



puis :



4ème idée : Partition classée :

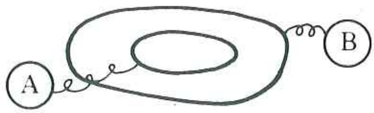


Mais aucun élève ne trouve de lui-même la présentation sous forme d'une table de Pythagore. Cette présentation fait donc appel à des conventions supplémentaires qui ne doivent pas paraître tellement "naturelles" à ce niveau. Cela expliquerait que certains aient des difficultés à lire correctement une table de Pythagore.

III Les signes de relations d'ordre

Voici des remarques tirées d'observations du comportement d'élèves de sixième et cinquième, lorsqu'ils doivent utiliser des signes comme $\leqslant$, $\subset$, $\geqslant$, $\cap$, ...

ⓐ P. est une élève dynamique, travailleuse, vive, mais elle a de légères difficultés d'orientation spatiale. Elle a compris le sens de la phrase "A est inclus dans B" et sait représenter la situation sous la forme :



mais, quand elle utilise le signe, elle écrit : $B \subset A$.

ⓑ D'autres élèves mélangent les signes $\cap$, $\subset$, $\cup$; ces confusions apparaissent surtout quand ils doivent utiliser plusieurs signes dans un même exercice.

Par exemple, voici un exercice de contrôle :

(1°) Traduire en français ces "phrases mathématiques" :

$E \subset F$; $I \cap J = K$; $M \cup N = P \cap R$

(2°) $A = \{1,2,3,7,9,11\}$ $B = \{1,4,7,9,12,13,14\}$

Compléter :

$A \cap B = \ldots\ldots$ $A \cup B = \ldots\ldots$

(3°) $X = \{a, b, c, d\}$; $\{ Y = b, c, e, f \}$;

$Z = \{c, d\}$

Ecrire toutes les intersections possibles .

Erreurs remarquables

. J. donne une bonne réponse à (2°) , mais à (3°) écrit :

$$X \cap Y = \{b, c, a, d, e, f\}$$

alors que c'est la réunion.

. J. M. traduit correctement $E \subset F$: E est inclus dans F.
mais traduit ainsi $I \cap J = K$: I est inter dans J.

Il répond correctement à (2°) , mais à (3°) écrit :

$X \subset Y = \{b, c\}$ au lieu de $X \cap Y = \{b, c\}$

et fait plusieurs erreurs analogues.

. F. écrit : $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14\}$

$A \cup B = \{ 7, 9\}$

et $A \cap B$ pas vraie car l'élément 11 de A n'appartient pas à B.

c Ayant remarqué que certains élèves de sixième écrivent encore la lettre Z à l'envers (Σ comme à la maternelle !), je leur ai fait traduire des mots comme : XENOPHON, POPOCATEPETL, ZAMBEZE, TOUTANKHAMON ... en utilisant un code (indiqué par une élève) qui consiste à remplacer chaque lettre par un signe ressemblant aux signes des relations d'ordre, par exemple : L par >, C par ∟, X par ∧, etc ...

Certains élèves se débrouillent très bien, mais d'autres commettent un grand nombre d'erreurs du type suivant :

C, qui devrait être codé ∟, est codé ⌟ ou >

et C, est décodé A, car A a pour code ⌟.

Un élève a fait dix-huit erreurs de ce genre, dans un exercice comportant trois mots à coder et huit à décoder.

Pour conclure ce paragraphe, j'observe donc que le comportement d'un élève utilisant les signes de relations d'ordre est dicté par les nécessités suivantes :

. *voir* les différences entre ces quatre signes : $\cap$, $\subset$, $\cup$, $\supset$, donc être capable de les transformer par symétrie autour des deux directions définies par les bords de la feuille de papier (ce qui revient à opérer dans un groupe de symétries).

. *se rappeler* le sens attribué à chacun de ces signes.

. *accepter* l'usage et s'y *soumettre*, en attribuant ce même sens à ces signes.

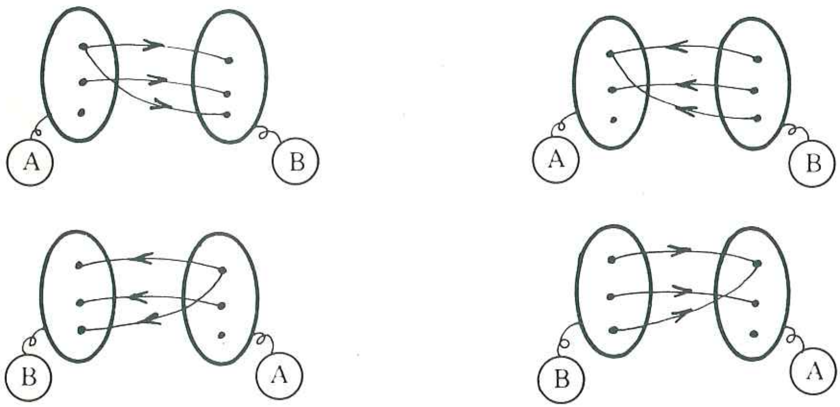
S'il n'est pas permis à l'élève de tâtonner (c'est-à-dire de se tromper) pendant un certain temps, au travers d'exercices qui devraient être exercices de contrôle s'opérera une sélection au détriment d'enfants qui par ailleurs peuvent avoir des qualités (invention, ou "intuition", par exemple).

IV Les schémas fléchés.

Lors de la reproduction de schémas fléchés, de nombreux élèves de sixième et cinquième placent le mauvais sens à certaines flèches, ou confondent ensemble de départ et ensemble d'arrivée. Voici des exemples :

① *Exercice* donné à une classe de sixième ayant déjà fait de nombreux exercices de représentation par des schémas fléchés :

"Observer ces schémas et écrire sous chacun d'eux son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée".



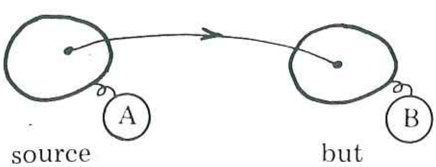
Sur 28 élèves, 4 ont encore fait des erreurs.

Il faut observer que le comportement de l'élève se situe ici dans une structure de groupe. Il doit combiner deux décisions :

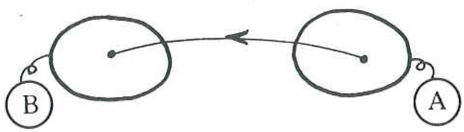
$\left\{ \begin{array}{l} \text{a : changer les patates de colonnes} \\ \text{b : changer le sens des flèches} \end{array} \right.$

Pour la composition, $\{$ e, a, b, ab $\}$ a la structure du groupe de Klein.

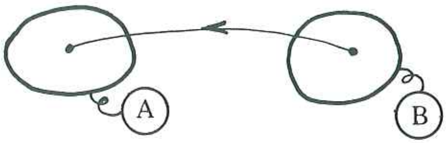
② *Autre exercice* : une relation de A vers B vient d'être étudiée et elle est représentée ainsi au tableau :



F. la représente ainsi :

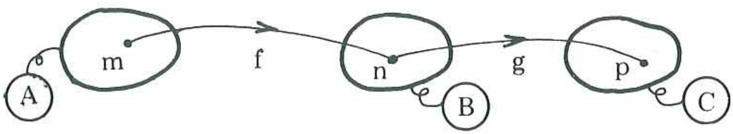


mais quelque temps après, elle la représente ainsi :



Elle n'a donc pas bien lié les décisions a et b .

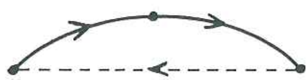
③ Ces erreurs se retrouvent quand il s'agit de composer deux relations :



Pour représenter "f suivie de g" certains dessinent :

Ici aussi, pour décider si : m est en relation avec p
ou si : p est en relation avec m,
il faut savoir combiner les décisions a et b .

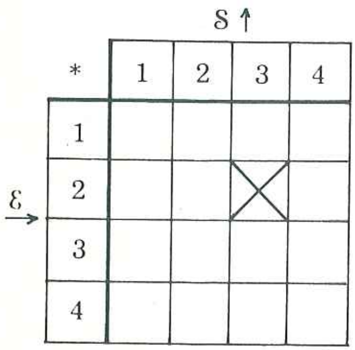
④ Enfin, dans la représentation d'une relation transitive, il arrive souvent que des élèves orientent les "raccourcis" dans le mauvais sens :



Une élève affirma "qu'on peut *aussi* dessiner la flèche dans l'autre sens".

Il semble plus facile à certains de décrire un cycle que de revenir au point de départ et aller au but dans le même sens que la première fois.

Donc, pour bien faire un schéma fléché, on doit dominer le groupe de décisions $\{e, a, b, ab\}$. On peut remarquer que la lecture correcte d'une table de Pythagore nécessite aussi d'opérer dans un groupe analogue ; le calculateur de $2 * 3$ doit combiner les instructions :



a : changer les éléments de colonne ($2 * 3$ ou $3 * 2$)

b : changer l'entrée de la table (en haut ou à gauche)

Certains élèves ont du mal à se comporter par rapport à ce groupe de décisions. Les exercices de mathématique opèrent donc une sélection suivant *le comportement* des élèves.

Conclusion : C'est dans le contenu même de l'enseignement qu'il faut chercher *les critères de sélection des élèves.*

Parce que j'ai étudié, trois années de suite, au sein de l'équipe professeurs-conseiller d'orientation, les cas et les dossiers d'élèves de sixième qui avaient de la peine à suivre (et que, pour cette raison, on avait regroupé dans une classe intermédiaire entre la sixième et la cinquième) je pense qu'il faut mettre au premier plan des critères de sélection utilisés à ce niveau les "lacunes verbales" (mais que recouvrent ces mots ?).

Seulement, il paraît vraisemblable qu'entre difficultés d'ordre verbal et difficultés dans la lecture ou l'écriture (de "phrases mathématiques" aussi) existent des relations dont on ne tient guère compte.

Ces difficultés, également, sont le fait d'un mauvais comportement des élèves en face de *conventions* ou de *décisions* de lecture ou d'écriture des diagrammes ou des "phrases mathématiques".

Faut-il continuer à sélectionner les élèves au niveau sixième et cinquième par des exercices comprenant uniquement des difficultés de "langages" ?

Ou bien, ne faut-il pas tolérer le "tâtonnement expérimental" (décrit par C. Freinet), prenant en cela le contre-pied de la doctrine officielle ?

Car la correction n'est pas naturelle à cet âge, et elle s'acquiert à la longue.

Travaux du séminaire A.P.M.E.P. LYON septembre 1974

Trois commissions B_1, B_2, B_3 ont étudié les "noyaux-thèmes" :

GROUPE B1
Commission " noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire "

"Dans la phase de formation générale une éducation mathématique commune à tous les enfants doit :

— Donner à l'élève un outil de pensée s'ajoutant à la panoplie d'explorateur du monde nécessaire à tout individu parcourant à son tour le destin de l'humanité.

— Contribuer à la formation de son intelligence et de son caractère, au développement de ses capacités de jugement, de création, d'émotion, de rigueur, de résistance à l'argument d'autorité, toutes qualités qui pourront l'aider un jour à supporter la vie en société, à s'y adapter ou à la transformer.

— Participer dans l'immédiat, c'est-à-dire dès l'âge scolaire, à son épanouissement dans des activités faisant également place à son goût du rêve, du jeu, de l'action et de la discussion."

Charte de Caen.

En 1970, des nouveaux programmes pour l'enseignement élémentaire ont été publiés ; ils ont répondu partiellement à ces finalités.

Au niveau des modalités d'application, la non-préparation des maîtres (en particulier) a amené la rédaction des Commentaires. Ceux-ci ont été ressentis (principalement par les auteurs de manuels) comme des *instructions* de programme.

C'est ainsi qu'à travers tous les mécanismes de mise en oeuvre, les finalités ont été oubliées, la situation a été gelée.

Deux exemples :

— *Les opérateurs :* passés de l'état outil à l'état technique-en-soi. Conçus comme moyen pédagogique, ils sont maintenant enseignés de façon autonome.

— *La géométrie :* le manque d'information des maîtres, malgré les commentaires peu directifs, a incité à conserver les anciens programmes (contenu et méthode).

Par conséquent :

— l'attitude dogmatique continue sous des formes différentes,

— la littérature qui a accompagné la parution de ces programmes est, comme précédemment, trop uniforme et a une influence excessive. Ces livres n'incitent pas les maîtres à diversifier les approches pédagogiques,

— explicitement ou non, à travers ce formalisme considéré comme une fin en soi, les maîtres sont sécurisés dans leur nouvelle façon d'enseigner la mathématique.

Cependant, après une lecture détaillée et attentive de la circulaire n° IV 70-2 du 2 janvier 1970, la commission a estimé qu'un certain nombre de points positifs pouvaient être objectivement dégagés ; à titre d'exemples on peut citer :

— la concision des programmes et l'introduction de la notion de commentaire opposée à celle d'instruction permettent une certaine marge de liberté dans "la perspective d'une rénovation plus profonde et plus satisfaisante" ;

— l'affirmation d'un lien nécessaire entre un programme et la formation des enseignants ;

— l'objectif d'un savoir mathématique construit, opposé à l'acquisition de certitudes.

L'application de ces textes a permis à de nombreux instituteurs l'amorce d'une rénovation de leur enseignement.

Voici, à titre d'exemples, deux utilisations possibles des programmes et commentaires actuels.

Références

— Programmes de 1970 : sous le titre "exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques" :

"· cours élémentaire première et deuxième années :
tracés, découpages, pliages, quadrillages ;

· cours moyen première et deuxième années :
bandes, parallélogramme (et ses cas particuliers), usage de la règle graduée."

— Commentaires : titre 2. Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

"L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Les exercices doivent, en même temps, aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à l'*observation* (1), mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût des travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire* (1). L'emploi des instruments (règle, équerre, compas, ...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique, sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets." ...

En partant des références ci-dessus et sans les déborder, on peut trouver des champs d'application dont voici deux exemples, parmi beaucoup d'autres.

---

(1) En italique dans le texte.

Exemple I : Frises, pavages.

Il est facile de se procurer des albums de papier peint, des catalogues de tissus, de carrelages, des reproductions de frises (décoration d'assiettes, d'édifices, etc...), des papiers-cadeau, des reproductions d'oeuvres d'art (Vasarely, Escher). On y trouve fréquemment un ou plusieurs motifs combinés de diverses façons.

La récolte de ces documents peut avantageusement être organisée avec la participation active des enfants, de façon qu'ils soient associés dès le départ à un projet qui les concernera pendant plusieurs séances. Durant cette phase de rassemblement des matériaux où la plus grande liberté est laissée aux enfants, des activités d'observation et de réflexion se développent spontanément, par échange d'informations entre les enfants, entre les enfants et leurs parents, etc...

A ce stade le maître se contente d'être à l'écoute des enfants en vue de l'organisation des travaux qui vont suivre et qui seront fonction des intérêts manifestés par les enfants. Il est hors de question d'introduire à ce niveau — à plus forte raison d'imposer — un vocabulaire trop technique.

Ces observations "en liberté" font apparaître des motifs bien caractérisés qui se répètent, qui se combinent, qui évoquent des rythmes. Apparaissent également des architectures géométriques, des alternances de couleurs.

Si les enfants disposent d'outils appropriés (planchettes à clous ou à trous, perles de couleur, papiers quadrillés (2), instruments classiques de dessin artistique ou géométrique, papier calqué, ciseaux, scotch), ils sont en général très contents de s'exercer à reproduire certains modèles observés et même d'en produire de nouveaux.

Quand les enfants ont pu s'exprimer librement et que leur intérêt commence à s'émousser, un travail d'organisation en profondeur intervient sous l'impulsion du maître. En comparant des classements réalisés par diverses équipes, les enfants sont à même de dégager des propriétés, des régularités, des répétitions systématiques.

Ce qui précède n'est que l'illustration, sur un exemple, des intentions indiquées dans les Considérations générales de la circulaire du 2 janvier 1970 : "..., le souci majeur du maître est de

(2) Outre le papier quadrillé classique, il y aurait intérêt à disposer de papier à maille triangulaire, hexagonale, etc...

donner à ses élèves une formation mathématique véritable qui leur permette, d'une manière adaptée à leur âge, à partir de l'observation et de l'analyse de situations qui leur sont familières, de dégager des concepts mathématiques, de les reconnaître et de les utiliser dans des situations variées, de s'assurer ainsi la maîtrise d'une pensée mathématique disponible et féconde".

En effet, dans l'observation et la construction de frises et de dallages, sont mises en oeuvre des opérations de symétrie, de translation, de répétition, d'homothétie, de composition d'opérateurs, qui constituent autant de contacts intuitifs avec certains concepts de base des mathématiques. Il s'agit, à ce stade, de préparer le terrain pour des acquisitions plus systématiques au cours d'années ultérieures.

Néanmoins, dans le prolongement immédiat des activités précédemment décrites peut se développer une phase d'approfondissement et d'affinement au cours de laquelle les observations et les constructions peuvent être reprises sous l'éclairage de la réflexion.

Exemple II : Pliages, découpages-collages, sciages.

Les enfants trouvent dans leurs journaux des incitations à réaliser des objets par pliage et collage. Des activités de ce type peuvent être développées dans la classe en mettant à la disposition des enfants des papiers de format et de texture divers, coloriés uniformément ou avec des couleurs distinctes recto-verso, de préférence non réglés.

Après une libre exploration, on peut envisager de recentrer l'intérêt général sur un sujet particulier, par exemple : pliage de bande.

Une expérience a été menée dans un CM1 selon les modalités suivantes : les enfants ont été invités, par une fiche appropriée, à plier une bande de papier blanc et à renforcer la marque des plis successifs, en rouge au premier pliage, en bleu au second, en vert au troisième. Les enfants ayant observé les résultats obtenus, on leur a demandé de prévoir ce qui se passerait au quatrième pliage sans l'effectuer. Une réflexion s'est alors développée individuellement ou par petites équipes (quatre au maximum, regroupés librement sans intervention du maître).

Trois grand types de démarches sont apparus :

· la découverte de la solution par extrapolation sans qu'il ait été possible de savoir ce qui s'était passé dans la tête des enfants,

· le recours à des outils mathématiques précédemment rencontrés et utilisés : arbres, codages en binaire,

· la reprise spontanée — en "infraction" avec la consigne stricte — des manipulations, sans doute par besoin de bien "voir" le mécanisme mis en oeuvre.

En travaillant dans le même esprit, différents prolongements s'offrent : usage des ciseaux et du scotch, ou bien de la scie et des charnières pour démonter et remonter un objet, construction par tâtonnement d'une graduation à l'aide d'un compas par reports successifs d'une même distance ou bien par divisions successives d'un même segment, pliages de papiers coloriés différemment sur leur recto et leur verso, fabrication d'accordéons, de bracelets, de rubans de Möbius (3), fabrication d'un livret par pliages perpendiculaires d'une feuille de papier, fabrication de boîtes par pliages et scotchages, recherche des symétries d'un objet.

Ces deux exemples s'appuient sur la conviction que tout travail manuel met en oeuvre une activité intellectuelle et qu'inversement il n'y a pas de travail intellectuel sans recours à l'activité manuelle. Par ailleurs, l'expérience montre que l'activité manuelle et corporelle est un mode d'expression spécifique à l'enfance et l'aide à se maîtriser et à s'organiser en vue d'une action ultérieure. L'activité manuelle laisse à l'enfant le temps de la réflexion et lui permet de trouver ses rythmes propres qu'un enseignement trop rigide ignore.

Pour continuer ce travail dans le sens d'un approfondissement des thèmes proposés plus haut et un élargissement à d'autres thèmes, la Commission se réunira le 7 décembre à Melun, les 26, 27 avril, au cours du second séminaire A.P.M. Par ailleurs, elle souhaite entrer en contact avec les Régionales ou Départementales ayant déjà engagé des réflexions et actions dans les directions rappelées plus haut (ou d'autres). Un des objectifs de ce travail est la publication de brochures proposant des thèmes et leurs exploitations possibles dans les classes. A ce titre, elle invite instamment des collègues (instituteurs, etc...) à se joindre à elle lors des prochaines séances de travail. Joindre à cet effet Monique BEGUIN, 9 Place du Champ Benoist, 51120 Sézanne.

---

(3) Cet objet s'obtient en collant les deux extrémités d'une bande de papier après torsion d'un demi-tour de l'une des extrémités.

PLIAGES ET MODELES MATHEMATIQUES (1)

par Alain FOULIARD

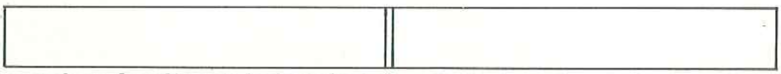
Le présent compte-rendu concerne des travaux qui se sont prolongés pendant plusieurs semaines au dernier trimestre de l'année scolaire 1973-74 dans une classe de Cours Moyen 1 d'une école de la région parisienne.

Certains des problèmes et des manipulations qui leur ont servi de base sont tirés ou adaptés d'exemples pris dans l'ouvrage "Problèmes" — série verte (Nuffield project). O.C.D.L. Paris.

Premier problème : on plie

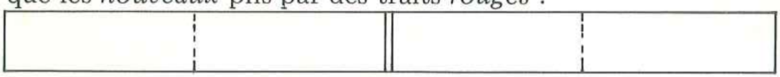
La fiche suivante est remise aux enfants :

Si l'on plie une bande de papier en deux, puis si l'on déplie cette bande, où se trouvera le pli ? Indique le pli par un trait *bleu.*



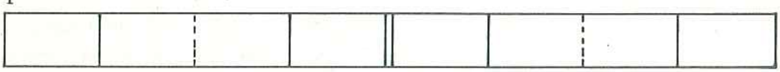
nombre de plis sur la bande : 1

On replie la bande, on plie à nouveau en deux ; on déplie la bande. Comment seront disposés les plis sur la bande ? Indique les *nouveaux* plis par des traits *rouges* :



nombre total de plis sur la bande : 3 (1 bleu, 2 rouges)

On recommence une nouvelle fois. Indique les nouveaux plis par des traits *verts* :



nombre de plis sur la bande : 7 (1 bleu, 2 rouges, 4 verts)

Si l'on pliait une quatrième fois, saurais-tu, sans faire l'expérience, indiquer dans quel ordre de succession on trouverait les plis ? Combien trouverait-on de plis ? Et si l'on pliait une cinquième fois ?

---

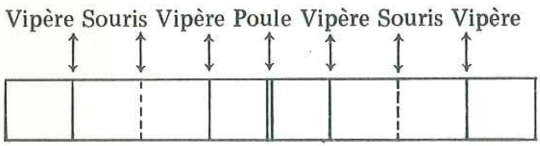
(1) L'article ci-dessous décrit de façon détaillée "l'expérience" à laquelle il a été fait allusion dans le texte de la Commission "Noyaux-Thèmes : Enseignement élémentaire". Nous remercions la revue *Activités Recherches Pédagogiques* (27, avenue du Onze Novembre, 92190 MEUDON) de nous avoir autorisés à le reproduire.

A chaque opération de pliage, deux types de résultats sont consignés, nombre de plis sur la bande et ordre de succession des plis sur la bande (une couleur différente intervenant pour distinguer chaque nouveau pliage).

J'invite les enfants à prévoir les résultats de l'expérience et à ne procéder à la manipulation qu'en cas de difficultés trop grandes, ou qu'en guise de vérification. De nombreux enfants parviennent à déterminer la disposition des plis sans avoir recours à la manipulation. Quelques-uns éprouvent des difficultés à partir du troisième pliage et doivent utiliser une bande de papier. D'une manière générale, les manipulations suivantes sont ensuite aisément réalisées.

Spontanément, un rapprochement est établi entre les résultats de cette manipulation et le problème des "animaux en cages' que les enfants avaient rencontré précédemment (cf. l'article sur la "Tour de Hanoï" dans ARP 17 novembre 1974). Un enfant perçoit cette similitude entre les deux problèmes avant même d'entamer toute recherche. La plupart reconnaissent la suite des nombres 1, 3, 7, 15, ... qui leur est familière et la règle de récurrence qui s'y rattache — exprimée sous la forme : "on double (1) et on ajoute 1" —. Pour beaucoup aussi, c'est la symétrie constatée dans l'ordre de succession des plis qui joue le rôle de "déclic" ("Si on pliait la bande en deux, les plis rouges seraient sur des plis rouges, les plis bleus sur des plis bleus ... on avait déjà remarqué ça pour les animaux !). Je demande alors qu'une correspondance plus précise soit établie entre les deux problèmes.

Dans l'ensemble, c'est l'association "animaux/couleurs des plis" qui est faite sous la forme de la *figure 1* :



(dans le cas du déplacement de 3 animaux différents)

(dans le cas où l'on a plié la bande à 3 reprises)

Figure 1

J'insiste pour qu'une correspondance terme à terme plus fine soit établie. Mais ma demande est mal interprétée. Aussi je décide de préparer le tableau ci-dessous (*figure 2*) en invitant les enfants à compléter cette espèce de "dictionnaire". La plupart des enfants dressent d'une manière intuitive un parallèle précis et satisfaisant.

(1) Sous-entendu "on double le *terme précédent*".

Mais la formulation pose de gros problèmes, l'expression demeurant confuse et ambiguë. Une mise au clair portant davantage sur le langage que sur la mathématique intervient donc au cours d'un travail collectif. De la même manière, la règle qui permet de déterminer l'ordre de succession des plis dans le cas où l'on décide de poursuivre l'expérience est dans l'ensemble clairement perçue bien qu'elle soit difficilement ou imparfaitement exprimée. (Peu d'enfants sont embarrassés lorsqu'il s'agit d'écrire les suites correspondant à 5 pliages successifs, 6 pliages successifs ...)

Cas des animaux en cage	⟷	Problème de pliage en deux
déplacer les animaux	⟷	....
....	⟷	nombre de plis sur la bande
ajouter un nouvel animal	⟷	....
l'animal le plus gros	⟷	....
....	⟷	.... plis jaunes

Figure 2

"On intercale toujours les nouveaux plis entre les anciens" ; "On partage chaque intervalle en 2" ; "Si on plie une nouvelle fois, il suffit de mettre une autre couleur dans chaque trou". Certains enfants réutilisent des propriétés dégagées lors de la recherche sur le problème des "animaux en cages" pour construire les nouvelles suites, notamment la règle qui donne la fréquence d'apparition des diverses couleurs affectées aux plis (identique, dans le cas des "animaux en cages", à la fréquence suivant laquelle on déplace chaque animal).

Ainsi, dans le cas d'un 6ème pliage, on placera les plis selon la répartition suivante :

1 fois sur 2	les plis corespondant au 6ème pliage.
1 fois sur 4	les plis correspondant au 5ème pliage.
1 fois sur 8	les plis correspondant au 4ème pliage.
1 fois sur 16	les plis correspondant au 3ème pliage.

etc ...

Afin de vérifier si la structure mathématique sous-jacente à ce problème de pliage a été bien comprise, je propose * aux enfants neuf suites composées de lettres, de chiffres et de signes divers organisés suivant différents modèles (*figure 3*). Les enfants doivent

* Par la suite, certains enfants réaliseront eux-mêmes et proposeront de telles suites à leurs camarades, quelques-unes d'entre elles se développant sur des bandes aux dimensions impressionnantes !

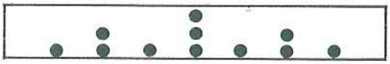
distinguer les suites qui répondent au modèle rencontré dans le problème de pliage — forme ABA — et qui présentent l'ensemble des caractéristiques de ce modèle. Les trois suites conformes — marquées d'un astérisque — sont aisément repérées.

G J M J M J G

1 3 2 1 1 3 2 1 2 3 1 1 2 3 1

E D E W E D E X E D E W E D E	*

9 6 9 0 0 9 6 9

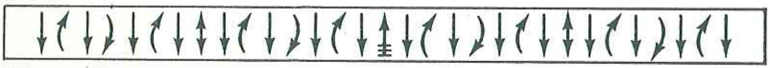


*

+ , ● + , ● + ▲ + ● , + ● , +

8 6 7 6 8 6 7 5 7 6 8 6 7 6 8

⊘ ↑ ≈ ↑ ⊘ ↑ ≈ ✸ ≈ ↑ ⊘ ↑ ≈ ↑ ⊘



*

Figure 3

Deuxième problème : on plie et on coupe

Nouvelle fiche accompagnée des consignes suivantes :

Prends une bande de papier d'une vingtaine de centimètres. Plie-la en deux puis coupe au milieu. Combien de morceaux obtiens-tu ? Place les morceaux l'un sur l'autre et coupe à nouveau au milieu. Combien de morceaux obtiens-tu ? Fais la même chose une nouvelle fois. Combien de morceaux obtiens-tu ? Peux-tu continuer à inscrire les résultats sans faire l'expérience ?

	0 coup.	1ère coup.	2ème coup.	3ème coup.	4ème coup.	5ème coup.	6ème coup.	7ème coup.
Nombre de morceaux	1	3	7	...				

Les nombres trouvés te rappellent-ils quelque chose ?

Les enfants trouvent à nouveau la suite de nombres 1, 3, 7, 15, 31, ...

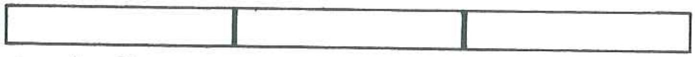
A l'occasion d'une mise au point collective, on rapproche les deux problèmes dont il vient d'être question, ainsi que les deux problèmes étudiés antérieurement, "Tour de Hanoï" et "animaux à déplacer". On cherche à justifier le fait que les résultats obéissent à la même formule : $2n + 1$ (1). A quoi se rattache la constante 1 ? Comment expliquer, dans les deux exemples de pliage, que seule la première opération repose sur un nombre impair de plis ? A quoi tient le fait que les résultats sont chaque fois impairs ? Autant de questions qui mettent à l'épreuve des explications souvent embrouillées ou qui justifient des itinéraires de recherche parfois bien détournés mais qui favorisent de meilleures prises de conscience ; des prises de conscience qui, à leur tour, sont à même de renforcer les intuitions initiales

Troisième problème : pliage en trois

Nouvelle fiche, nouvelles consignes ... :

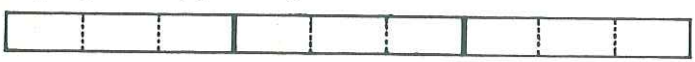
Si, au lieu de plier une bande de papier en 2, puis encore en 2, puis encore en 2 ..., on pliait d'abord en 3, puis encore en 3, puis encore en 3 ..., saurais-tu prévoir où se trouveraient les plis sur la bande et dans quel ordre ils se placeraient ?

1er pliage en 3 ; plis *bleus*



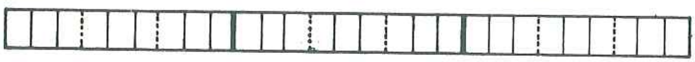
nombre de plis sur la bande : 2

2ème pliage en 3 ; plis *rouges*



nombre de plis sur la bande : 8 (2 rouges et 6 bleus)

3ème pliage : plis *verts*



nombre de plis : 26 (2 rouges, 6 bleus, 18 verts).

As-tu découvert une tactique qui te permettrait de trouver facilement dans quel ordre viendraient les plis si l'on continuait à plier en 3 ? As-tu trouvé une règle qui te permettrait de calculer le nombre de plis, si l'on continuait l'expérience ?

(1) Dans cette formule, rappelons-le, n désigne le nombre de plis obtenus lors du pliage précédent.

De même que pour les problèmes précédents, je suggère que l'on prévoie les résultats de l'expérience. Mais, cette fois, bien peu d'enfants y parviennent sans avoir recours à la manipulation ! Certains enfants éprouvent même des difficultés pour réaliser cette manipulation et ce n'est souvent qu'après de longs tâtonnements que l'on parvient à plier "en 3". La règle qui permet de prévoir l'ordre de succession des plis est cependant assez vite découverte, sans doute parce qu'elle s'apparente à celle des problèmes 1 et 2. Par contre, la règle de construction de la suite 2, 8, 26, 80, ... est moins évidente. Pour certains enfants, cette découverte est facilitée par l'examen de la suite des nombres correspondant aux nouveaux plis ajoutés à chaque pliage : 2 plis bleus, 6 plis rouges, 18 plis verts ..., examen qui fait ressortir le facteur de triplement qui intervient entre deux résultats consécutifs ($6 = 2 \times 3$ et $18 = 6 \times 3$). La nouvelle formule s'écrit cette fois $3n + 2$, ou, comme disent les enfants : "on multiplie par 3 et on ajoute 2".

J'attire alors l'attention des enfants sur les lois découvertes à l'occasion des problèmes 1 et 3. Lorsqu'on plie en 2, et chaque fois en 2, le nombre de plis répond à la formule $2n + 1$. Lorsqu'on plie en 3, et chaque fois en 3, le nombre de plis est donné par la formule $3n + 2$. Peut-on en déduire ce qui se passera dans le cas d'un pliage en 4 ? d'un pliage en 5 ? Cette nouvelle loi de récurrence qui lie les expressions $2n + 1$, $3n + 2$, $4n + 3$, $5n + 4$ ... et qui intervient "au second degré" en quelque sorte, est assez aisément saisie. De leur côté, les enfants reviennent à la suite 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, ...

D'autres propriétés sont mises en lumière.

Le chiffre des unités des nombres de cette suite obéit au cycle :

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 8 \arrow[dl] \\ & 6 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Les nombres de la suite sont tous *pairs*. Au premier pliage, on part en effet d'un nombre pair : 2. En appliquant la formule $3n + 2$, à partir de ce nombre pair initial, on constate que la parité du résultat final est maintenue : un nombre pair multiplié par 3 donne dans tous les cas un nombre pair. Ajouter 2 ne peut en rien modifier la parité du résultat.

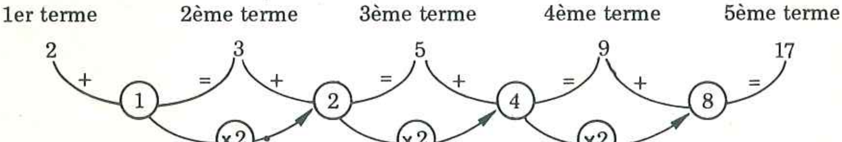
Quatrième problème : on coupe et on colle

Prends une bande. Coupe-la d'un coup de ciseaux. Colle les morceaux.
Nombre de morceaux : 2
Prends une autre bande. Plie-la en 2 puis coupe-la d'un coup de ciseaux sans la déplier. Colle les morceaux en commençant par les morceaux pliés.
Nombre de morceaux : 3
Prends une troisième bande. Plie-la en 2 puis encore en 2 puis coupe-la d'un coup de ciseaux sans la déplier. Colle les morceaux après les avoir classés.
Nombre de morceaux : 5
Prends une quatrième bande. Plie-la en 2, puis encore en 2, puis encore en 2, puis coupe-la d'un coup de ciseaux. Colle les morceaux.
Nombre de morceaux : 9
Qu'as-tu remarqué ? Les nombres que tu as trouvés suivent-ils une règle ? Si l'on continuait l'expérience, quels nombres trouverait-on ?

——,——,——,——,——, ...

L'examen des termes de la suite fait apparaître la règle suivante : chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 2 et en retranchant 1 (formule $2n - 1$ dans laquelle n représente le nombre de morceaux obtenus le coup précédent).

Certains enfants cherchent les termes de la suite en se servant des nombres exprimant les différences entre termes consécutifs suivant le schéma ci-dessous.



Le tri en "morceaux pliés/morceaux non pliés" permet la mise en lumière de certaines remarques : les *deux* morceaux non pliés restent en nombre constant (ils correspondent aux deux extrémités de la bande) ; quant aux morceaux pliés, ils suivent la progression : 1 (1 pliage), 3 (2 pliages), 7 (3 pliages), 15 (4 pliages), 31 (5 pliages), déjà rencontrée dans les problèmes 1 et 2.

Prolongements

La fin de l'année survient et laisse en suspens un certain nombre de recherches. Certains groupes d'enfants s'étaient posés d'autres problèmes de pliages et étudiaient les structures sous-jacentes. D'autres groupes s'intéressaient aux divers chemins qu'il est possible d'effectuer selon les arêtes d'un pavé et qui permettent de passer par chacun des sommets (parcours hamiltoniens). Cette nouvelle recherche d'ordre combinatoire allait conduire à la réalisation d'arbres permettant l'inventaire exhaustif de ces chemins. L'examen de la structure de certains de ces chemins allait ramener à nouveau au problème de la Tour de Hanoï. Si tous les chemins mènent à Rome, un grand nombre passent par Hanoï, pour peu qu'ils suivent un itinéraire mathématique !

Le précédent et le suivant

par Maurice CARMAGNOLE, C.M.2 Pierrefeu du Var

L'activité décrite ci-dessous n'est qu'un thème parmi tant d'autres. Elle prétend uniquement aux qualités et aux défauts que lui trouveront nos collègues. Elle a été proposée à des enfants âgés de huit à onze ans, au cours des quatre dernières années.

C'est un appel précoce au raisonnement logique (cf. mon article dans le Bulletin n° 292, pages 51 et suivantes). On y propose aux enfants le début d'une règle du jeu en leur laissant le plus possible le plaisir de la découvrir, et on se contente ensuite de quelques coups de pouce pour relancer l'intérêt en cours de route.

Ce qu'il faut éviter, c'est de se passionner, de se prendre soi-même au jeu, en saturant les petits avec des exercices multiples et toujours plus sophistiqués.

Par ailleurs, il est indispensable de mesurer ce qu'on fait. Il est de ces heures de mathématique où l'enseignant a l'impression que "ça marche très bien". Les enfants interviennent, découvrent, prolongent ...

Les enfants ? Quels enfants ?

Avoir constamment sous sa main un plan de sa classe (papiers transparents interchangeables ...) et tracer des barres dans la place des enfants qui interviennent, au fur et à mesure de leurs interventions (fécondes ou non). Chaque soir, chez soi, analyser ces feuilles et bien remarquer, de jour en jour, quelles sont les places qui demeurent constamment vides, celles qui n'ont que très peu de barres, celles qui en sont pleines ... Voilà un moyen de juger sainement si telle activité "les" a intéressés, et voilà aussi un moyen d'équilibrer les groupes de travail en donnant à chacun la ration convenable.

Je présente ici différentes étapes, mais il ne faut pas les mettre en correspondance avec les différents "niveaux". On peut commencer au niveau CE comme au niveau CM, en se disant que le CM peut très bien "marcher moins fort" que le CE.

I. Première étape

Le maître pose au tableau :

$\overrightarrow{7} = 8$ $\quad\overrightarrow{3} = 4$ $\quad\overleftarrow{5} = 4$ $\quad\overleftarrow{12} = 11$ ... etc ...

Puis :

$\overrightarrow{6} = ...$ $\quad\overleftarrow{10} = ...$ $\quad\overrightarrow{17} = ...$ etc ...

Tous les enfants (ou presque !) ont vu que, selon le sens donné à la flèche, chaque nombre correspond à son précédent ou à son suivant. Mais attention ! Ne pas se précipiter. Il m'est arrivé de constater que, chez certains enfants, il s'agissait parfois d'un suivant quelconque ... En dépit d'une collection impressionnante d'exemples, ils n'avaient saisi que les prédicats INFERIEUR ou SUPERIEUR A ...

Autre remarque, sur l'intérêt que présente la "finition" des flèches. Il faut que la pointe soit très mince. Je crois que certains ENFANTS PEUVENT ETRE INDUITS EN ERREUR par un signe comme $\overleftarrow{5} = 4$ où ils retiendront ensuite seulement la pointe dans $5 < 4$.

Le maître doit donc insister pour faire corriger ceci : $\overleftarrow{5}$

en ceci : $\overleftarrow{5}$.

II. Deuxième étape

Chez les petits, on fera rechercher les précédents fâcheux comme

$$\overleftarrow{90} = \ldots \qquad \overleftarrow{80} = \ldots \qquad \overleftarrow{980} = \ldots$$

et les suivants sournois comme :

$$\overrightarrow{79} = \ldots \qquad \overrightarrow{209} = \ldots \qquad \overrightarrow{1089} = \ldots$$

selon l'âge et le succès obtenu, naturellement.

III. Troisième étape (ou deuxième si l'on veut)

Dans d'autres systèmes que le décimal, on pourra rechercher par exemple :

en base huit : $\overrightarrow{5} = \ldots$ puis $\overrightarrow{6} = \ldots$ puis $\overrightarrow{7} = \ldots$

ou encore

$$\overleftarrow{10} = \ldots \qquad \overleftarrow{30} = \ldots$$

IV. Quatrième étape

Dans les calculs qui suivent s'établira un chassé croisé d'opérations mentales :

$$\overrightarrow{6} + \overleftarrow{4} = \ldots \qquad \overleftarrow{6} + \overleftarrow{4} = \ldots \qquad \overrightarrow{6} + \overleftarrow{4} = \ldots \qquad \overleftarrow{6} + \overrightarrow{4} = \ldots$$

$$\overleftarrow{9} - \overleftarrow{5} = \ldots \qquad \overrightarrow{10} - \overleftarrow{7} = \ldots \qquad \ldots \text{ etc } \ldots \text{ etc } \ldots$$

V. Cinquième étape

Même au CE 2, la petite combinatoire ci-dessous obtient sa part de succès :

J'ai dit aux enfants : "Regardez ..."

$$6 + 3 = 9\,.$$

— Bof ! Et alors ? ...

— Alors ? Placez des flèches sans toucher aux nombres, pour maintenir cette égalité.

Chacun a placé ses flèches, et, naturellement, la synthèse a fait apparaître six solutions :

$$\overleftarrow{6} + 3 = \overleftarrow{9} \qquad 6 + \overleftarrow{3} = \overleftarrow{9}$$

$$\overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} = 9 \qquad \overrightarrow{6} + \overleftarrow{3} = 9$$

$$6 + \overrightarrow{3} = \overrightarrow{9} \qquad \overrightarrow{6} + 3 = \overrightarrow{9}$$

J'ai tout ramassé et j'ai demandé : "Qui est capable de trouver les six solutions pour :

$$7 + 5 = 12 \quad ?$$

Si on avait su ! On aurait essayé de tout retenir par coeur ...

Personne n'a trouvé les six solutions, au CE 2. Par contre, les CM 2 ont mis en chantier des arbres et des tables ...

Ils ont bien vu que le produit $\{6,7,8\} \times \{4,5,6\}$ les conduisait quelque part, et ils ont dessiné

soit

$$4 \begin{cases} 6 - 10 \\ 7 - 11 \\ 8 - 12 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 6 - 11 \\ 7 - 12 \\ 8 - 13 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 6 - 12 \\ 7 - 13 \\ 8 - 14 \end{cases}$$

soit

	6	7	8
4	~~10~~	11	12
5	11	12	13
6	12	13	~~14~~

L'élimination de 10 et de 14 n'a pas traîné et les six solutions sont apparues.

J'ai limité mon intervention au démarrage, qui ne s'amorçait pas. Les enfants n'avaient pas l'idée d'encadrer les nombres proposés entre leurs précédents et leurs suivants, de manière à obtenir tous les cas possibles.

Chez les petits, je me suis contenté de ce qu'ils ont trouvé. Il ne me semble pas bon de leur donner très tôt les "trucs" du métier. Arbres, diagrammes, tables ... prennent vite une allure de recette s'ils ne sont pas introduits peu à peu, largement expérimentés, bien motivés.

Pourtant, si les petits n'ont pas tout trouvé, certains d'entre eux n'en ont pas moins essayé de raisonner en groupant leurs flèches selon le sens. Dans certaines feuilles, j'ai trouvé, dans cet ordre :

d'abord $\overleftarrow{7} + 5 = \overleftarrow{12}$

et $\overrightarrow{7} + 5 = \overrightarrow{12}$

puis $7 + \overleftarrow{5} = \overleftarrow{12}$

et $7 + \overrightarrow{5} = \overrightarrow{12}$

Mais ils m'ont dit : "Maintenant ça suffit, trouvez-nous autre chose ...".

Mes CM 2, très accrocheurs, avaient compliqué le problème en recherchant, par exemple, la même combinatoire sur :

$$7 + 6 + 3 = 16$$

mais ils s'étaient pris les pieds dans leurs tables et j'avais dû les sortir d'affaire. Nous nous étions arrêtés à ceci :

		6	7	8
5	2 —	13	14	15
	3 —	14	15	16
	4 —	15	16	17
6	2 —	14	15	16
	3 —	15	16	17
	4 —	16	17	18
7	2 —	15	16	17
	3 —	16	17	18
	4 —	17	18	19

Il a suffi, alors, de barrer les nombres ne convenant pas à notre problème (13,14,18,19).

VI. Sixième étape

Où nous commençons à faire des trous :

Le maître pose : $\vec{7} + \overrightarrow{\square} = \overrightarrow{10}$

ou : $\vec{7} - \overrightarrow{\square} = \overleftarrow{4}$ ...

ces propositions étant faites avec discernement, selon les enfants.

On remarque ensuite :

$$1 + \overleftarrow{1} =$$

$$\vec{1} - 1 =$$

$$\vec{6} - \overleftarrow{6} =$$

$$\vec{9} - \overleftarrow{9} =$$

puis $\overrightarrow{\square} - \overleftarrow{\square} = 2$ etc ... Les enfants découvrent alors eux-mêmes d'autres sujets d'étonnement.

VII. *Septième étape*

Pour ceux qui connaissent bien leurs tables de multiplication, voici matière à réfléchir. Pour ceux qui les connaissent mal, c'est une occasion de leur montrer qu'ils y perdent :

$$\overrightarrow{6} \times \square = \overleftarrow{29}$$

$$\overrightarrow{7} \times \overrightarrow{\square} = \overrightarrow{47} \qquad \text{etc ...}$$

et aussi les solutions :

$$\overrightarrow{\square} \times \overleftarrow{\bigcirc} = \overrightarrow{53} \qquad \text{où on recherchera}$$

$$\overrightarrow{5} \times \overleftarrow{10} = \overrightarrow{53}$$

$$\overrightarrow{8} \times \overleftarrow{7} = \overrightarrow{53}$$

Au CM 2 la surprise a été pour moi lorsque j'ai posé la colle suivante aux plus "forts" :

$$\overrightarrow{\square} \times \overleftarrow{\square} = \overleftarrow{\square \times \square}$$

en leur demandant de mettre partout le même nombre.

Personne n'a trouvé ... alors qu'il suffisait manifestement de mettre n'importe quoi (sauf zéro, sans doute, dont ils n'auraient su que faire).

En somme ils renonçaient à tâtonner, du moins à priori, et essayaient de chercher un fil d'Ariane.

Quand je leur ai montré qu'un nombre quelconque convenait toujours, ils m'ont dit : "Alors, ce n'est pas bien ..."

Par contre, ils ont beaucoup aimé le genre suivant :

$$\overrightarrow{\square} \times \overleftarrow{\bigcirc} = 35$$

$$\overrightarrow{\square} \times \overrightarrow{\bigcirc} = 65 \qquad \text{etc ...}$$

VIII. *Autres étapes*

Chacun de nos collègues est capable de les faire découvrir ou de les proposer. Les enfants, d'ailleurs, en parlent avec leurs parents et il n'est pas rare de les voir arriver porteurs d'une trouvaille, devinette pour le maître ou pour les copains.

IX. *Le mot de la fin*

Il appartient, tel une noix d'honneur, à un papa sympathique, technicien à la Base Aéro-Navale, qui m'a dit : "Je croyais qu'il fallait réserver la flèche à la notation des vecteurs ... Ah ! ces math modernes ! "

BIBLIOGRAPHIE

Les brèves indications bibliographiques qui suivent ne prétendent pas dresser une liste exhaustive des ouvrages destinés soit aux élèves, soit aux enseignants du 1er degré. Elles se contentent de recommander quelques livres pour les enfants de 7 à 77 ans.

La littérature mathématique relative à l'école élémentaire est abondante et on ne lit pas un livre de mathématique d'une traite ; on le consulte fréquemment. Ces quelques notes auront atteint leur but si elles incitent les maîtres à se constituer une bibliothèque de base ou, à défaut, à amorcer une indispensable bibliothèque d'établissement.

BANWELL, SAUNDERS, TAHTA : Points de départ (CEDIC)

On trouvera dans ce livre une foule de situations présentées sans idée préconçue sur les thèmes qu'elles recouvrent et de nombreuses suggestions d'utilisations de matériels en usage dans les classes ou faciles à construire.

WHEELER : Mathématique dans l'enseignement élémentaire (OCDL)

Même esprit que Points de départ. Ces deux ouvrages sont indispensables à qui veut pratiquer des mathématiques vivantes.

PROJET NUFFIELD : Problèmes (OCDL)
Parus : série verte et série rouge
En préparation : série pourpre

Un régal : collections de problèmes présentés sur fiches avec livret d'accompagnement pour le maître.

PROJET NUFFIELD : La mathématique commence (OCDL)

Comment organiser la classe de mathématique .

A. MYX : 6 thèmes pour 6 semaines (CEDIC)

En fait, beaucoup plus de 6 thèmes auxquels petits et grands trouveront matière à réflexion.

DIENES : La géométrie par les transformations (OCDL)

3 fascicules.

Des fiches pour les enfants ... des découvertes pour les adultes.

A.P.M.E.P. : Charte de Caen (1)

Un projet pour l'école.

---

(1) APMEP : 13, rue du Jura, 75013 PARIS
OCDL : 65, rue Claude Bernard, 75005 PARIS
CEDIC : 93, avenue d'Italie, 75013 PARIS

En septembre 1975 :
MOTS II

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire: égalité; exemple et contre-exemple; couple; relation binaire; nombre naturel; entiers et rationnels; nombre décimal, nombre à virgule; fraction; ensembles de nombres (brochure 1974); représentations graphiques; application, fonction, bijection; partition, équivalence; partages; divisibilité; division euclidienne; division (brochure 1975).

Chaque rubrique est détachable; les feuilles, de format 15 × 21, sont perforées. La première brochure (1974) a 106 pages; la suivante (1975) en a à peu près autant.

MOTS est une oeuvre collective; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants:

Chacune des deux brochures:	6 F	(port compris: 8 F)
Les deux brochures:	10 F	(port compris: 13 F)

Pour se les procurer, s'adresser à la Régionale (ou à la Départementale) de l'APMEP.

ASSOCIATION DES
PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

29, rue d'Ulm - Paris 5e

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Réunissant à ses débuts des professeurs de l'enseignement secondaire public, elle a progressivement étendu son recrutement à tous les degrés de l'Enseignement public : premier degré, second degré classique et technique, supérieur. A la fin de 1973, elle réunit **quinze mille membres.**

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, **"de la Maternelle à l'Université"**, mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Conscients du rôle de plus en plus important que la formation mathématique joue et doit jouer dans l'éducation, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer les méthodes et les programmes.

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres). En liaison avec les autres Associations et spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services, avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'Association est organisée en Régionales académiques (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres (cours et conférences pour la formation continue des maîtres en particulier).

Un Comité national élu par correspondance au moment de l'Assemblée Générale annuelle, désigne un Bureau qui assure le fonctionnement administratif de l'Association, exécute les décisions de l'Assemblée générale et représente l'Association auprès des autorités de l'Education Nationale.

Chaque année, l'A.P.M.E.P. organise des journées d'étude sur des thèmes pédagogiques et scientifiques (moyens audiovisuels, mise en application de la Réforme à divers niveaux, mathématisation du réel, etc...)

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique (plus de 900 pages par an). Chaque abonné reçoit, en plus du Bulletin, un recueil de textes, extraits de sujets d'examen : B.E.P.C., baccalauréat.

Depuis 1960, l'A.P.M.E.P. édite des ouvrages de documentation pour les maîtres et les vend au prix coûtant. Devançant toute organisation administrative du "recyclage", elle a fourni aux maîtres soucieux de rénover leur enseignement une documentation abondante spécialement conçue pour eux, par des collègues particulièrement compétents et dévoués (consulter la liste des ouvrages dans le Bulletin).

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites le donc sans tarder.

Les Régionales de l'A.P.M.E.P.

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, il existe des sections départementales qui se constituent à l'intérieur de la Régionale à laquelle elles sont rattachées.

Les lecteurs du Bulletin sont invités à prendre contact avec les animateurs de ces sections régionales ou départementales, voire locales. A la dispersion géographique de ses adhérents qui correspond à leurs fonctions, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par dessus les barrières artificielles des divers degrés d'enseignement. Elle propose à chacun et de conserver l'autonomie de son action et de sa réflexion, conditions indispensables d'un enseignement libéral, d'une éducation libératrice, et de coopérer au travail collectif sans lequel aucun ouvrage n'est plus possible à l'échelle de nos sociétés. Elle reprendrait donc volontiers à son compte la devise des coopérateurs : "tous pour un, un pour tous" pour le seul profit, ici, de l'enseignement mathématique et de la formation de la jeunesse.

Liste des sections régionales ou départementales.

Pour chaque section, nous donnons l'adresse d'un animateur à qui les Collègues s'adresseront pour avoir des informations supplémentaires sur l'activité de sa section. Entre crochets [ ], nous donnons les numéros des départements qui sont du ressort de la régionale. Entre doubles parenthèses (( )) le numéro de chèque postal quand il y a lieu (sauf avis contraire, l'intitulé du compte est "Régionale A.P.M.E.P. de ...").

AIX-MARSEILLE [04, 05, 13, 84]
Pierre NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille ((Marseille 28-94-82)).

AMIENS [02, 60, 80]
MANGIN, 7 place de la Mairie, Liez-02700-Tergnier ((Lille 862-04)).
J. PROTIN, 7 rue de Compiègne, St-Liger-aux-Bois, 60170-Ribécourt.

BESANCON [25, 39, 70, 90]
Y. PELTRAULT, 57 avenue de Montjoux, 25000-Besançon ((Dijon 2505-45 V)).
Section du Jura : ROBBE, Les Prés Cantaux, 39-Salins.
Section de Belfort : J. DAUTREVAUX, 41 rue du Château-Essert, 90000-Belfort.

BORDEAUX [24, 33, 40, 47, 64]
LOUQUET Pierre, 47 cours de la Somme, 33000-Bordeaux ((Bordeaux 3902-91)).
Section de la Dordogne : Mlle MARCHIVIE, 8 rue des Vaures, 24100-Bergerac.
Section de la Gironde : TEXTIER, Boutus, Beychac et Caillau, 33-Saint-Germain-du-Puch.
Section des Landes : LAVIGNE, 40-Aire-sur-Adour.
Section du Lot-et-Garonne : DE LATAULADE, 1 rue Claude Rivemale, 47-Villeneuve-sur-Lot.
Section des Pyrénées-Atlantiques : CELHAY, allée de la Forêt, 64600-Anglet.

BREST [29]
LE ROUX, 24 rue de Vendée, 29-Brest ((Rennes 25-5927)).

CAEN [14, 50, 61]
Jacky COCHEPIN, rue de la Chasse, 14290-Mathieu ((Rouen 1084-56 M)).

CLERMONT-FERRAND [03, 15, 43, 63] ((Clermont 1569-75))
André HENNETON, Sauvagnat Ste Marthe, 63500-Issoire.

DIJON [21, 58, 71, 89]
O. RENAUT, 38 bd. de l'Université, 21-Dijon (Dijon 1751-05 V)).
Section de l'Yonne : D. REISZ, 11 rue du Saule, 89610-Vincelles.
Section de la Saône-et-Loire : MICHELOT, 32 avenue Boucicaut, 71100-Châlon/s/Saône.
Section de la Nièvre : PUISSEGUR, 2 place de la Résistance, 58000-Nevers.
Section de Mâcon : Mlle DOMINIQUE, rue du Lavoir Charnay, 71000-Mâcon.

GRENOBLE [07, 26, 38, 73, 74]
C. BENZAKEN, 17 avenue du Vercors, 38240-Meylan ((Grenoble 343-49 U)).
Section de Chambéry : COMPAIN, Lycée Technique, 1 avenue du Colombier, 73000-Chambéry.
Section de Vienne : CHARNAY, Estrablin, 38780-Pont-Evêque.
Section d'Annecy : VIDIANI, B.P. 316, 74000-Annecy.

LILLE [59, 62]
MAS, Lycée Faidherbe, rue A. Carrel, 59-Lille ((Lille 4242-55)).
Section du Pas-de-Calais : LAURENT, 15 rue Albert-1er, 62-Arras.

LIMOGES [19, 23, 87]
UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87100-Limoges ((Limoges 117-66 P)).
Section d'Egletons : HAKENHOLZ, CES Albert Thomas, 19300-Egletons.

LYON [01, 42, 69]
Gilbert CROS, 86 avenue Jean Jaurès, 69007-Lyon ((Lyon 7081-18)).
Section de Saint-Etienne : M. BOUTEILLE, Résidence de l'Hippodrome, Bât. D4, 42390-Villars.
Section de Bourg : R. CHARNAY, E.N., 01-Bourg-en-Bresse.

MONTPELLIER [11, 30, 34, 48, 66]
Mme FUCHS, 10 rue des Glaïeuls, 34-Montpellier ((Montpellier 385-25 W)).
Section du Gard : J. CHABRIER, 10 rue de Loye, 30000-Nîmes.
Section des Pyrénées Orientales : GALTIE, 16 rempart Villeneuve, 66-Perpignan.
Section de l'Aude : Mlle CABANEL, Lycée Lacroix, 11-Narbonne.

NANCY [54, 55, 57, 88]
MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54-Nancy ((Nancy 1394-64 S)).
Section de la Moselle : E. SAUVADET, 17 rue du Fort, Longeville-les-Metz, 57000-Metz.

NANTES [44, 49, 53, 72, 85]
Mme PEYROT, 41 Les Hauts de l'Erdre, 44240-La Chapelle / Erdre.
Section de la Sarthe : KLAEYLE, 2 impasse Fizeau, 72100-Le Mans.

NICE [06, 20, 83] ((Marseille 5758-43))
J. MARIA, 5 ter rue Edith Cavell, 06000-Nice.
Section du Var : M.J. PAPAZIAN, La Colle d'Artaux, 83500-La Seyne.

ORLEANS - TOURS [18, 28, 36, 37, 41, 45]
P. MONSEILLER, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45045-Orléans Cedex ((La Source 1440-09)).
Section de Tours : Monique GODICHEAU, Appt. 235, 14 rue Léonard de Vinci, 37170-Chambray-lès-Tours.
Section de Montargis : KISTER, 52 rue des Vignes, 45120-Chalette.

PARIS [75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, 95]
J. ADDA, 10 rue Vandrezanne, 75013-Paris.
Section de la Seine-Saint-Denis : M. LOI, 68 rue des Ecoles, Bât A 318, 93300-Aubervilliers.
((Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Paris 25 108 63)).
Bulletin de la Régionale : Gilbert GRIBONVAL, 129 avenue du Général Leclerc, 91120-Palaiseau.

POITIERS [16, 17, 79, 86]
J. BOROWCZYK, 1 rue de Provence, 86000-Poitiers ((Bordeaux 38-52-59)).
Section des Deux Sèvres : FROMENTIN, 29 avenue de Nantes, 79000-Niort.
Section de la Charente : MARRON, CES La Grande Garenne, rue Pierre Aumaître, 16000-Angoulême.
Section de la Charente Maritime : Y. DARDANT, 25 rue Philippe Vincent, 17000-La Rochelle.

REIMS [08, 10, 51, 52]
THIERUS, 57 rue David, 51100-Reims ((Châlons-sur-Marne 1262-80 L)).
Section des Ardennes : ZILLI, 12 boulevard de Béthune, 08000-Charleville Mézières.
Section de l'Aube : HAUBRY, 16 A rue Jules Didier, 10120-Saint-André-les-Verges.
Section de la Haute-Marne : Mlle GODON, 8 rue de Lorraine, 52000-Chaumont.
Section de la Marne : SCHACHERER, 26 rue du Moulin à Vent, 51200-Epernay.

RENNES [22, 35, 56]
LEVEILLEY, 28 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblun ((Rennes 1707-29)).
Section du Morbihan : LAGREE, Mme COUTANT, Vannes.

ROUEN [27, 76]
Michèle CHOUCHAN, 16 rue du Bailliage, 76000-Rouen ((Rouen 1350-13 D)).
Section du Havre : PESTEL, 2 rue J. Langlois, 76-Le Havre.

STRASBOURG [67, 68]
SYLVESTRE, 17 rue Grimling, 67200-Strasbourg.
Section du Haut-Rhin : LEVASSORT, 27 rue Georges Sand, 68-Mulhouse-Dornach.
Section de l'Allemagne Fédérale : G. TOUYET, S.P. 69.037 F.F.A.

TOULOUSE [09, 12, 31, 32, 46, 65, 81, 82]
DESQ, Université Paul Sabatier, 31077-Toulouse Cédex ((Toulouse 2035-51)).
Section de l'Ariège : Mme GALY, 96 avenue V. Pilhes, 09400-Tarascon-sur-Ariège.
Section de l'Aveyron : SCHIOPETTO, CES La Penderie, 12000-Rodez.
Section du Gers : Mlle BORIES, 29 rue de Metz, 32000-Auch.
Section des Hautes-Pyrénées : TARBOULIER, 36 rue M. Lamarque, 65000-Tarbes.
Section du Tarn-et-Garonne : FOURNIE, CES Bourdelle, boulevard Herriot, 82000-Montauban.
Section du Lot : Mme PICARD, E.N. av. Henri Martin, 46000-Cahors.
Section du Tarn : Christine MANDIRAC, Lycée de Carmaux, 81400-Carmaux.

Pour les nouveaux adhérents et les adhérents ayant changé de résidence :

COUPON DE MISE A JOUR DU FICHIER REGIONAL

A détacher et à envoyer d'urgence au Président de votre Régionale (adresse ci-dessus)

Nom : ....

Prénom : ....

Adresse personnelle : ....

Etablissement : ....

Fonction : ....

☐ **Nouvel adhérent**

☐ **Ancien adhérent muté dans la circonscription de la Régionale**

n° ....

Mettre une X dans la case convenable.

CONDITIONS D'ADHESION ET D'ABONNEMENT

Abonnement (valable pour l'année civile)	60 F
Pour les membres de l'A.P.M.E.P.	
— **Cotisation d'adhésion**	15 F
— **Abonnement au Bulletin et annales**	
— **membres en activité**	35 F
— **membres retraités**	20 F

La cotisation et le prix de l'abonnement sont perçus par année civile. Ceux qui désirent adhérer et s'abonner au début de l'année scolaire peuvent, au choix, prendre un abonnement rétroactif et reçoivent alors les numéros parus pendant l'année civile en cours, ou prendre l'abonnement pour l'année civile suivante : dans ce cas il leur est adressé le dernier numéro à paraître dans l'année civile en cours.

MODES DE PAIEMENT

1° Détacher et remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement au verso.

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris - 5e. C.C.P. Paris 5 708-21.

3° Sous enveloppe affranchie adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

> *Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.*

4° Envoyer à votre régionale le coupon de mise à jour du fichier régional.

ATTENTION ! La présente fiche dite "fiche rose" est à utiliser EXCLUSIVEMENT POUR SOUSCRIRE UNE ADHESION (OU UN ABONNEMENT) A L'A.P.M.E.P.

Le RENOUVELLEMENT vous est automatiquement demandé par un "appel à coupon détachable" que vous recevez courant Janvier.

POUR UN CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ETAT CIVIL) : porter sur une feuille, **et non au dos d'un chèque**, l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), *rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P.*, puis donner les renseignements nouveaux ; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

> *Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A.P.M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin).*

SI VOUS ENSEIGNEZ MATHEMATIQUES ET BIOLOGIE, vous pouvez, pour une cotisation de 20 F et un abonnement jumelé réduit de 35 F, participer aux activités des deux associations APBG et APMEP.

Demandez pour cela au siège, 29, rue d'Ulm, Paris - 5e, une fiche d'adhésion "Maîtres polyvalents" (dite "fiche jaune").

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

A. P. M. E. P.

FICHE D'ADHESION OU D'ABONNEMENT

à remplir complètement et à adresser à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e
accompagné des 3 volets d'un virement postal à A.P.M.E.P. Paris-5.708-21

M. - Mme - Mlle (Rayer les mentions inutiles)

Nom et prénom :

(en capitales d'imprimerie)

Adresse à laquelle vous désirez recevoir le Bulletin :

N° et rue :

(suite)

Code postal | Ville ou pays

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Année de naissance :

Nom et adresse de l'établissement dans lequel vous enseignez : (2)

Nom :

Adresse :

Département (en code) : Ville :

Titres universitaires (1)

- Bachelier ou équiv. . . . 1 ☐
- C.A.P. - C.E.G. . . . . 2 ☐
- Licencié . . . . 3 ☐
- Certifié . . . . 4 ☐
- Agrégé . . . . 5 ☐
- Docteur . . . . 6 ☐
- Autres (maîtrise, etc.) 7 ☐

La plus grande partie de votre service est effectuée dans (1) :

- Ens. pré-élémentaire . . 1 ☐
- Ens. élémentaire . . . . . 2 ☐
- C.E.G. - C.E.T. . . . . . . 3 ☐
- C.E.S. . . . . 4 ☐
- Lycée 1er cycle . . . . . 5 ☐
- 2e cycle . . . . . 6 ☐
- Cl. préparatoires . . . . 7 ☐
- Ecole normale . . . . . 8 ☐
- I.U.T. . . . . 9 ☐
- Ens. sup. 1er cycle . . 10 ☐
- Ens. sup. 2e, 3e cycle 11 ☐
- Administration . . . . 12 ☐
- Inspection . . . . 13 ☐

Nouvel adhérent ☐
Ancien adhérent ☐

Année de la première adhésion

Versement pour l'année civile 197

Cotisation d'adhésion à l'APMEP

Adhérents APM en activité . . . . 15 F ☐ *
Adhérents APM retraités . . . . 15 F ☐

Bulletin — Abonnement annuel

Etablissements - Bibliothèques - non adhérents . . . . 60 F ☐
Adhérents APM en activité . . . . 35 F ☐
Adhérents APM retraités . . . . 20 F ☐

Attention ! La cotisation seule ne donne pas droit au service du Bulletin.

Je joins le titre de paiement complet correspondant à la catégorie choisie 60 - 50 - 35 - 15 F et j'adresse le tout sous enveloppe timbrée à l'A.P.M.E.P., 29 rue d'Ulm, Paris 5e.

A ...., le..............................

Mettre une croix dans la case qui convient

Signature :

Imprimerie Vaudrey - LYON