

Prolongements

La fin de l'année survient et laisse en suspens un certain nombre de recherches. Certains groupes d'enfants s'étaient posés d'autres problèmes de pliages et étudiaient les structures sous-jacentes. D'autres groupes s'intéressaient aux divers chemins qu'il est possible d'effectuer selon les arêtes d'un pavé et qui permettent de passer par chacun des sommets (parcours hamiltoniens). Cette nouvelle recherche d'ordre combinatoire allait conduire à la réalisation d'arbres permettant l'inventaire exhaustif de ces chemins. L'examen de la structure de certains de ces chemins allait ramener à nouveau au problème de la Tour de Hanoï. Si tous les chemins mènent à Rome, un grand nombre passent par Hanoï, pour peu qu'ils suivent un itinéraire mathématique !

Le précédent et le suivant

par Maurice CARMAGNOLE, C.M.2 Pierrefeu du Var

L'activité décrite ci-dessous n'est qu'un thème parmi tant d'autres. Elle prétend uniquement aux qualités et aux défauts que lui trouveront nos collègues. Elle a été proposée à des enfants âgés de huit à onze ans, au cours des quatre dernières années.

C'est un appel précoce au raisonnement logique (cf. mon article dans le Bulletin n° 292, pages 51 et suivantes). On y propose aux enfants le début d'une règle du jeu en leur laissant le plus possible le plaisir de la découvrir, et on se contente ensuite de quelques coups de pouce pour relancer l'intérêt en cours de route.

Ce qu'il faut éviter, c'est de se passionner, de se prendre soi-même au jeu, en saturant les petits avec des exercices multiples et toujours plus sophistiqués.

Par ailleurs, il est indispensable de mesurer ce qu'on fait. Il est de ces heures de mathématique où l'enseignant a l'impression que "ça marche très bien". Les enfants interviennent, découvrent, prolongent ...

Les enfants ? Quels enfants ?

Avoir constamment sous sa main un plan de sa classe (papiers transparents interchangeables ...) et tracer des barres dans la place des enfants qui interviennent, au fur et à mesure de leurs interventions (fécondes ou non). Chaque soir, chez soi, analyser ces feuilles et bien remarquer, de jour en jour, quelles sont les places qui demeurent constamment vides, celles qui n'ont que très peu de barres, celles qui en sont pleines ... Voilà un moyen de juger sainement si telle activité "les" a intéressés, et voilà aussi un moyen d'équilibrer les groupes de travail en donnant à chacun la ration convenable.

Je présente ici différentes étapes, mais il ne faut pas les mettre en correspondance avec les différents "niveaux". On peut commencer au niveau CE comme au niveau CM, en se disant que le CM peut très bien "marcher moins fort" que le CE.

I. Première étape

Le maître pose au tableau :

$$\overrightarrow{7} = 8 \quad \overrightarrow{3} = 4 \quad \overleftarrow{5} = 4 \quad \overleftarrow{12} = 11 \quad \dots \text{etc} \dots$$

Puis :

$$\overrightarrow{6} = \dots \quad \overleftarrow{10} = \dots \quad \overrightarrow{17} = \dots \quad \text{etc} \dots$$

Tous les enfants (ou presque !) ont vu que, selon le sens donné à la flèche, chaque nombre correspond à son précédent ou à son suivant. Mais attention ! Ne pas se précipiter. Il m'est arrivé de constater que, chez certains enfants, il s'agissait parfois d'un suivant quelconque ... En dépit d'une collection impressionnante d'exemples, ils n'avaient saisi que les prédicats INFÉRIEUR ou SUPÉRIEUR A ...

Autre remarque, sur l'intérêt que présente la "finition" des flèches. Il faut que la pointe soit très mince. Je crois que certains ENFANTS PEUVENT ÊTRE INDUITS EN ERREUR par un signe comme $\overleftarrow{5} = 4$ où ils retiendront ensuite seulement la pointe dans $5 < 4$.

Le maître doit donc insister pour faire corriger ceci : $\overleftarrow{5}$

en ceci : $\overleftarrow{5}$.

II. Deuxième étape

Chez les petits, on fera rechercher les précédents fâcheux comme

$$\overleftarrow{90} = \dots \quad \overleftarrow{80} = \dots \quad \overleftarrow{980} = \dots$$

et les suivants surnois comme :

$$\overrightarrow{79} = \dots \quad \overrightarrow{209} = \dots \quad \overrightarrow{1089} = \dots$$

selon l'âge et le succès obtenu, naturellement.

III. Troisième étape (ou deuxième si l'on veut)

Dans d'autres systèmes que le décimal, on pourra rechercher par exemple :

en base huit : $\overrightarrow{5} = \dots$ puis $\overrightarrow{6} = \dots$ puis $\overrightarrow{7} = \dots$

ou encore

$$\overleftarrow{10} = \dots \quad \overleftarrow{30} = \dots$$

IV. Quatrième étape

Dans les calculs qui suivent s'établira un chassé croisé d'opérations mentales :

$$\overrightarrow{6} + \overleftarrow{4} = \dots \quad \overleftarrow{6} + \overleftarrow{4} = \dots \quad \overrightarrow{6} + \overleftarrow{4} = \dots \quad \overleftarrow{6} + \overrightarrow{4} = \dots$$

$$\overleftarrow{9} - \overleftarrow{5} = \dots \quad \overrightarrow{10} - \overleftarrow{7} = \dots \quad \dots \text{ etc } \dots \text{ etc } \dots$$

V. Cinquième étape

Même au CE 2, la petite combinatoire ci-dessous obtient sa part de succès :

J'ai dit aux enfants : "Regardez ..."

$$6 + 3 = 9 .$$

— Bof ! Et alors ? ...

— Alors ? Placez des flèches sans toucher aux nombres, pour maintenir cette égalité.

Chacun a placé ses flèches, et, naturellement, la synthèse a fait apparaître six solutions :

$$\overleftarrow{6} + 3 = \overleftarrow{9} \qquad 6 + \overleftarrow{3} = \overleftarrow{9}$$

$$\overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} = 9 \qquad \overrightarrow{6} + \overleftarrow{3} = 9$$

$$6 + \overrightarrow{3} = \overrightarrow{9} \qquad \overrightarrow{6} + 3 = \overrightarrow{9}$$

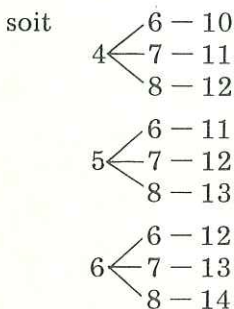
J'ai tout ramassé et j'ai demandé : "Qui est capable de trouver les six solutions pour :

$$7 + 5 = 12 \text{ ?}$$

Si on avait su ! On aurait essayé de tout retenir par coeur ...

Personne n'a trouvé les six solutions, au CE 2. Par contre, les CM 2 ont mis en chantier des arbres et des tables ...

Ils ont bien vu que le produit $\{6,7,8\} \times \{4,5,6\}$ les conduisait quelque part, et ils ont dessiné



soit

	6	7	8
4	10	11	12
5	11	12	13
6	12	13	14

L'élimination de 10 et de 14 n'a pas traîné et les six solutions sont apparues.

J'ai limité mon intervention au démarrage, qui ne s'amorçait pas. Les enfants n'avaient pas l'idée d'encadrer les nombres proposés entre leurs précédents et leurs suivants, de manière à obtenir tous les cas possibles.

Chez les petits, je me suis contenté de ce qu'ils ont trouvé. Il ne me semble pas bon de leur donner très tôt les "trucs" du métier. Arbres, diagrammes, tables ... prennent vite une allure de recette s'ils ne sont pas introduits peu à peu, largement expérimentés, bien motivés.

Pourtant, si les petits n'ont pas tout trouvé, certains d'entre eux n'en ont pas moins essayé de raisonner en groupant leurs flèches selon le sens. Dans certaines feuilles, j'ai trouvé, dans cet ordre :

d'abord $\overleftarrow{7} + 5 = \overleftarrow{12}$

et $\overrightarrow{7} + 5 = \overrightarrow{12}$

puis $7 + \overleftarrow{5} = \overleftarrow{12}$

et $7 + \overrightarrow{5} = \overrightarrow{12}$

Mais ils m'ont dit : "Maintenant ça suffit, trouvez-nous autre chose ...".

Mes CM 2, très accrocheurs, avaient compliqué le problème en recherchant, par exemple, la même combinatoire sur :

$$7 + 6 + 3 = 16$$

mais ils s'étaient pris les pieds dans leurs tables et j'avais dû les sortir d'affaire. Nous nous étions arrêtés à ceci :

	6	7	8
5	2 - 13	14	15
	3 - 14	15	16
	4 - 15	16	17
6	2 - 14	15	16
	3 - 15	16	17
	4 - 16	17	18
7	2 - 15	16	17
	3 - 16	17	18
	4 - 17	18	19

Il a suffi, alors, de barrer les nombres ne convenant pas à notre problème (13,14,18,19).

VI. Sixième étape

Où nous commençons à faire des trous :

Le maître pose : $\overrightarrow{7} + \boxed{} = \overrightarrow{10}$

ou : $\overrightarrow{7} - \boxed{} = \overleftarrow{4} \dots$

ces propositions étant faites avec discernement, selon les enfants.

On remarque ensuite :

$$1 + \overleftarrow{1} =$$

$$\overrightarrow{1} - 1 =$$

$$\overrightarrow{6} - \overleftarrow{6} =$$

$$\overrightarrow{9} - \overleftarrow{9} =$$

puis $\boxed{} - \boxed{} = 2$ etc ... Les enfants découvrent alors eux-mêmes d'autres sujets d'étonnement.

VII. Septième étape

Pour ceux qui connaissent bien leurs tables de multiplication, voici matière à réfléchir. Pour ceux qui les connaissent mal, c'est une occasion de leur montrer qu'ils y perdent :

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{6} \times \boxed{} = \overleftarrow{29} \\ \overrightarrow{7} \times \overrightarrow{\boxed{}} = \overrightarrow{47} & \text{etc ...} \\ \text{et aussi} & \overrightarrow{\boxed{}} \times \overleftarrow{\bigcirc} = \overrightarrow{53} & \text{où on recherchera} \\ \text{les solutions :} & \overrightarrow{5} \times \overleftarrow{10} = \overrightarrow{53} \\ & \overrightarrow{8} \times \overleftarrow{7} = \overrightarrow{53} \end{array}$$

Au CM 2 la surprise a été pour moi lorsque j'ai posé la colle suivante aux plus "forts" :

$$\overrightarrow{\boxed{}} \times \overleftarrow{\boxed{}} = \overleftarrow{\boxed{}} \times \boxed{}$$

en leur demandant de mettre partout le même nombre.

Personne n'a trouvé ... alors qu'il suffisait manifestement de mettre n'importe quoi (sauf zéro, sans doute, dont ils n'auraient su que faire).

En somme ils renonçaient à tâtonner, du moins à priori, et essayaient de chercher un fil d'Ariane.

Quand je leur ai montré qu'un nombre quelconque convenait toujours, ils m'ont dit : "Alors, ce n'est pas bien ..."

Par contre, ils ont beaucoup aimé le genre suivant :

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{\boxed{}} \times \overleftarrow{\bigcirc} = 35 \\ \overrightarrow{\boxed{}} \times \overrightarrow{\bigcirc} = 65 & \text{etc ...} \end{array}$$

VIII. Autres étapes

Chacun de nos collègues est capable de les faire découvrir ou de les proposer. Les enfants, d'ailleurs, en parlent avec leurs parents et il n'est pas rare de les voir arriver porteurs d'une trouvaille, devinette pour le maître ou pour les copains.

IX. Le mot de la fin

Il appartient, tel une noix d'honneur, à un papa sympathique, technicien à la Base Aéro-Navale, qui m'a dit : "Je croyais qu'il fallait réserver la flèche à la notation des vecteurs ... Ah ! ces math modernes !"