PLIAGES ET MODELES MATHEMATIQUES (1)

par Alain FOULIARD

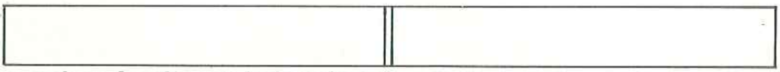
Le présent compte-rendu concerne des travaux qui se sont prolongés pendant plusieurs semaines au dernier trimestre de l'année scolaire 1973-74 dans une classe de Cours Moyen 1 d'une école de la région parisienne.

Certains des problèmes et des manipulations qui leur ont servi de base sont tirés ou adaptés d'exemples pris dans l'ouvrage "Problèmes" — série verte (Nuffield project). O.C.D.L. Paris.

Premier problème : on plie

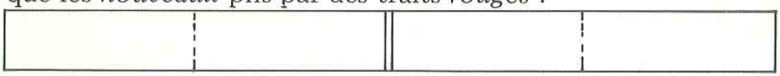
La fiche suivante est remise aux enfants :

Si l'on plie une bande de papier en deux, puis si l'on déplie cette bande, où se trouvera le pli ? Indique le pli par un trait *bleu.*



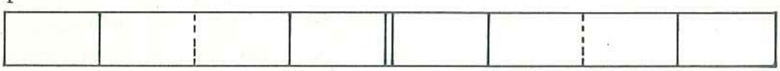
nombre de plis sur la bande : 1

On replie la bande, on plie à nouveau en deux ; on déplie la bande. Comment seront disposés les plis sur la bande ? Indique les *nouveaux* plis par des traits *rouges* :



nombre total de plis sur la bande : 3 (1 bleu, 2 rouges)

On recommence une nouvelle fois. Indique les nouveaux plis par des traits *verts* :



nombre de plis sur la bande : 7 (1 bleu, 2 rouges, 4 verts)

Si l'on pliait une quatrième fois, saurais-tu, sans faire l'expérience, indiquer dans quel ordre de succession on trouverait les plis ? Combien trouverait-on de plis ? Et si l'on pliait une cinquième fois ?

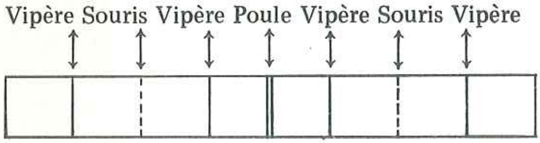
(1) L'article ci-dessous décrit de façon détaillée "l'expérience" à laquelle il a été fait allusion dans le texte de la Commission "Noyaux-Thèmes : Enseignement élémentaire". Nous remercions la revue *Activités Recherches Pédagogiques* (27, avenue du Onze Novembre, 92190 MEUDON) de nous avoir autorisés à le reproduire.

A chaque opération de pliage, deux types de résultats sont consignés, nombre de plis sur la bande et ordre de succession des plis sur la bande (une couleur différente intervenant pour distinguer chaque nouveau pliage).

J'invite les enfants à prévoir les résultats de l'expérience et à ne procéder à la manipulation qu'en cas de difficultés trop grandes, ou qu'en guise de vérification. De nombreux enfants parviennent à déterminer la disposition des plis sans avoir recours à la manipulation. Quelques-uns éprouvent des difficultés à partir du troisième pliage et doivent utiliser une bande de papier. D'une manière générale, les manipulations suivantes sont ensuite aisément réalisées.

Spontanément, un rapprochement est établi entre les résultats de cette manipulation et le problème des "animaux en cages" que les enfants avaient rencontré précédemment (cf. l'article sur la "Tour de Hanoï" dans ARP 17 novembre 1974). Un enfant perçoit cette similitude entre les deux problèmes avant même d'entamer toute recherche. La plupart reconnaissent la suite des nombres 1, 3, 7, 15, ... qui leur est familière et la règle de récurrence qui s'y rattache — exprimée sous la forme : "on double (1) et on ajoute 1" —. Pour beaucoup aussi, c'est la symétrie constatée dans l'ordre de succession des plis qui joue le rôle de "déclic" ("Si on pliait la bande en deux, les plis rouges seraient sur des plis rouges, les plis bleus sur des plis bleus ... on avait déjà remarqué ça pour les animaux !). Je demande alors qu'une correspondance plus précise soit établie entre les deux problèmes.

Dans l'ensemble, c'est l'association "animaux/couleurs des plis" qui est faite sous la forme de la *figure 1* :



(dans le cas du déplacement de 3 animaux différents)

(dans le cas où l'on a plié la bande à 3 reprises)

Figure 1

J'insiste pour qu'une correspondance terme à terme plus fine soit établie. Mais ma demande est mal interprétée. Aussi je décide de préparer le tableau ci-dessous (*figure 2*) en invitant les enfants à compléter cette espèce de "dictionnaire". La plupart des enfants dressent d'une manière intuitive un parallèle précis et satisfaisant.

(1) Sous-entendu "on double le *terme précédent*".

Mais la formulation pose de gros problèmes, l'expression demeurant confuse et ambiguë. Une mise au clair portant davantage sur le langage que sur la mathématique intervient donc au cours d'un travail collectif. De la même manière, la règle qui permet de déterminer l'ordre de succession des plis dans le cas où l'on décide de poursuivre l'expérience est dans l'ensemble clairement perçue bien qu'elle soit difficilement ou imparfaitement exprimée. (Peu d'enfants sont embarrassés lorsqu'il s'agit d'écrire les suites correspondant à 5 pliages successifs, 6 pliages successifs ...)

Cas des animaux en cage	⟷	Problème de pliage en deux
déplacer les animaux	⟷	....
....	⟷	nombre de plis sur la bande
ajouter un nouvel animal	⟷	....
l'animal le plus gros	⟷	....
....	⟷	.... plis jaunes

Figure 2

"On intercale toujours les nouveaux plis entre les anciens" ; "On partage chaque intervalle en 2" ; "Si on plie une nouvelle fois, il suffit de mettre une autre couleur dans chaque trou". Certains enfants réutilisent des propriétés dégagées lors de la recherche sur le problème des "animaux en cages" pour construire les nouvelles suites, notamment la règle qui donne la fréquence d'apparition des diverses couleurs affectées aux plis (identique, dans le cas des "animaux en cages", à la fréquence suivant laquelle on déplace chaque animal).

Ainsi, dans le cas d'un 6ème pliage, on placera les plis selon la répartition suivante :

1 fois sur 2	les plis corespondant au 6ème pliage.
1 fois sur 4	les plis correspondant au 5ème pliage.
1 fois sur 8	les plis correspondant au 4ème pliage.
1 fois sur 16	les plis correspondant au 3ème pliage.

etc ...

Afin de vérifier si la structure mathématique sous-jacente à ce problème de pliage a été bien comprise, je propose * aux enfants neuf suites composées de lettres, de chiffres et de signes divers organisés suivant différents modèles (*figure 3*). Les enfants doivent

* Par la suite, certains enfants réaliseront eux-mêmes et proposeront de telles suites à leurs camarades, quelques-unes d'entre elles se développant sur des bandes aux dimensions impressionnantes !

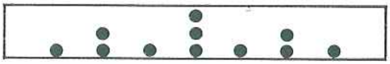
distinguer les suites qui répondent au modèle rencontré dans le problème de pliage — forme ABA — et qui présentent l'ensemble des caractéristiques de ce modèle. Les trois suites conformes — marquées d'un astérisque — sont aisément repérées.

G J M J M J G

1 3 2 1 1 3 2 1 2 3 1 1 2 3 1

E D E W E D E X E D E W E D E *

9 6 9 0 0 9 6 9

 *

+ , ● + , ● + ▲ + ● , + ● , +

8 6 7 6 8 6 7 5 7 6 8 6 7 6 8

⊘ ↑ ≈ ↑ ⊘ ↑ ≈ ✱ ≈ ↑ ⊘ ↑ ≈ ↑ ⊘

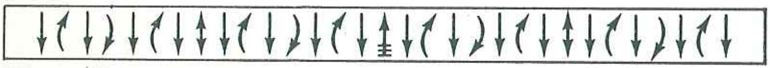
 *

Figure 3

Deuxième problème : on plie et on coupe

Nouvelle fiche accompagnée des consignes suivantes :

Prends une bande de papier d'une vingtaine de centimètres. Plie-la en deux puis coupe au milieu. Combien de morceaux obtiens-tu ? Place les morceaux l'un sur l'autre et coupe à nouveau au milieu. Combien de morceaux obtiens-tu ? Fais la même chose une nouvelle fois. Combien de morceaux obtiens-tu ? Peux-tu continuer à inscrire les résultats sans faire l'expérience ?

	0 coup.	1ère coup.	2ème coup.	3ème coup.	4ème coup.	5ème coup.	6ème coup.	7ème coup.
Nombre de morceaux	1	3	7	...				

Les nombres trouvés te rappellent-ils quelque chose ?

Les enfants trouvent à nouveau la suite de nombres 1, 3, 7, 15, 31, ...

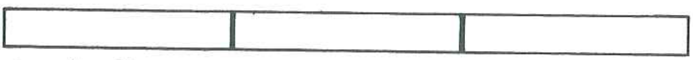
A l'occasion d'une mise au point collective, on rapproche les deux problèmes dont il vient d'être question, ainsi que les deux problèmes étudiés antérieurement, "Tour de Hanoï" et "animaux à déplacer". On cherche à justifier le fait que les résultats obéissent à la même formule : $2n + 1$ (1). A quoi se rattache la constante 1 ? Comment expliquer, dans les deux exemples de pliage, que seule la première opération repose sur un nombre impair de plis ? A quoi tient le fait que les résultats sont chaque fois impairs ? Autant de questions qui mettent à l'épreuve des explications souvent embrouillées ou qui justifient des itinéraires de recherche parfois bien détournés mais qui favorisent de meilleures prises de conscience ; des prises de conscience qui, à leur tour, sont à même de renforcer les intuitions initiales

Troisième problème : pliage en trois

Nouvelle fiche, nouvelles consignes ... :

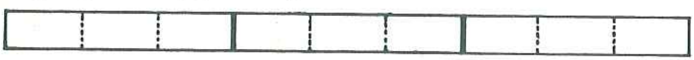
Si, au lieu de plier une bande de papier en 2, puis encore en 2, puis encore en 2 ..., on pliait d'abord en 3, puis encore en 3, puis encore en 3 ..., saurais-tu prévoir où se trouveraient les plis sur la bande et dans quel ordre ils se placeraient ?

1er pliage en 3 ; plis *bleus*



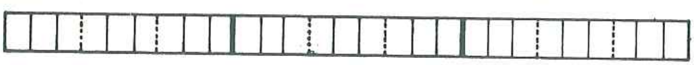
nombre de plis sur la bande : 2

2ème pliage en 3 ; plis *rouges*



nombre de plis sur la bande : 8 (2 rouges et 6 bleus)

3ème pliage : plis *verts*



nombre de plis : 26 (2 rouges, 6 bleus, 18 verts).

As-tu découvert une tactique qui te permettrait de trouver facilement dans quel ordre viendraient les plis si l'on continuait à plier en 3 ? As-tu trouvé une règle qui te permettrait de calculer le nombre de plis, si l'on continuait l'expérience ?

(1) Dans cette formule, rappelons-le, n désigne le nombre de plis obtenus lors du pliage précédent.

De même que pour les problèmes précédents, je suggère que l'on prévoie les résultats de l'expérience. Mais, cette fois, bien peu d'enfants y parviennent sans avoir recours à la manipulation ! Certains enfants éprouvent même des difficultés pour réaliser cette manipulation et ce n'est souvent qu'après de longs tâtonnements que l'on parvient à plier "en 3". La règle qui permet de prévoir l'ordre de succession des plis est cependant assez vite découverte, sans doute parce qu'elle s'apparente à celle des problèmes 1 et 2. Par contre, la règle de construction de la suite 2, 8, 26, 80, ... est moins évidente. Pour certains enfants, cette découverte est facilitée par l'examen de la suite des nombres correspondant aux nouveaux plis ajoutés à chaque pliage : 2 plis bleus, 6 plis rouges, 18 plis verts ..., examen qui fait ressortir le facteur de triplement qui intervient entre deux résultats consécutifs ($6 = 2 \times 3$ et $18 = 6 \times 3$). La nouvelle formule s'écrit cette fois $3n + 2$, ou, comme disent les enfants : "on multiplie par 3 et on ajoute 2".

J'attire alors l'attention des enfants sur les lois découvertes à l'occasion des problèmes 1 et 3. Lorsqu'on plie en 2, et chaque fois en 2, le nombre de plis répond à la formule $2n + 1$. Lorsqu'on plie en 3, et chaque fois en 3, le nombre de plis est donné par la formule $3n + 2$. Peut-on en déduire ce qui se passera dans le cas d'un pliage en 4 ? d'un pliage en 5 ? Cette nouvelle loi de récurrence qui lie les expressions $2n + 1$, $3n + 2$, $4n + 3$, $5n + 4$ ... et qui intervient "au second degré" en quelque sorte, est assez aisément saisie. De leur côté, les enfants reviennent à la suite 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, ...

D'autres propriétés sont mises en lumière.

Le chiffre des unités des nombres de cette suite obéit au cycle :

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 8 \arrow[dl] \\ & 6 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

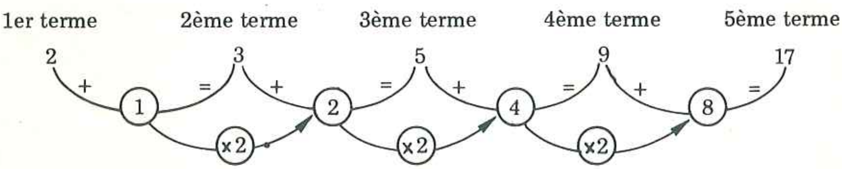
Les nombres de la suite sont tous *pairs*. Au premier pliage, on part en effet d'un nombre pair : 2. En appliquant la formule $3n + 2$, à partir de ce nombre pair initial, on constate que la parité du résultat final est maintenue : un nombre pair multiplié par 3 donne dans tous les cas un nombre pair. Ajouter 2 ne peut en rien modifier la parité du résultat.

Quatrième problème : on coupe et on colle

> Prends une bande. Coupe-la d'un coup de ciseaux. Colle les morceaux.
> Nombre de morceaux : 2
> Prends une autre bande. Plie-la en 2 puis coupe-la d'un coup de ciseaux sans la déplier. Colle les morceaux en commençant par les morceaux pliés.
> Nombre de morceaux : 3
> Prends une troisième bande. Plie-la en 2 puis encore en 2 puis coupe-la d'un coup de ciseaux sans la déplier. Colle les morceaux après les avoir classés.
> Nombre de morceaux : 5
> Prends une quatrième bande. Plie-la en 2, puis encore en 2, puis encore en 2, puis coupe-la d'un coup de ciseaux. Colle les morceaux.
> Nombre de morceaux : 9
> Qu'as-tu remarqué ? Les nombres que tu as trouvés suivent-ils une règle ? Si l'on continuait l'expérience, quels nombres trouverait-on ?
>
> —,—,—,—,—, ...

L'examen des termes de la suite fait apparaître la règle suivante : chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 2 et en retranchant 1 (formule $2n - 1$ dans laquelle n représente le nombre de morceaux obtenus le coup précédent).

Certains enfants cherchent les termes de la suite en se servant des nombres exprimant les différences entre termes consécutifs suivant le schéma ci-dessous.



Le tri en "morceaux pliés/morceaux non pliés" permet la mise en lumière de certaines remarques : les *deux* morceaux non pliés restent en nombre constant (ils correspondent aux deux extrémités de la bande) ; quant aux morceaux pliés, ils suivent la progression : 1 (1 pliage), 3 (2 pliages), 7 (3 pliages), 15 (4 pliages), 31 (5 pliages), déjà rencontrée dans les problèmes 1 et 2.

Prolongements

La fin de l'année survient et laisse en suspens un certain nombre de recherches. Certains groupes d'enfants s'étaient posés d'autres problèmes de pliages et étudiaient les structures sous-jacentes. D'autres groupes s'intéressaient aux divers chemins qu'il est possible d'effectuer selon les arêtes d'un pavé et qui permettent de passer par chacun des sommets (parcours hamiltoniens). Cette nouvelle recherche d'ordre combinatoire allait conduire à la réalisation d'arbres permettant l'inventaire exhaustif de ces chemins. L'examen de la structure de certains de ces chemins allait ramener à nouveau au problème de la Tour de Hanoï. Si tous les chemins mènent à Rome, un grand nombre passent par Hanoï, pour peu qu'ils suivent un itinéraire mathématique !

Le précédent et le suivant

par Maurice CARMAGNOLE, C.M.2 Pierrefeu du Var

L'activité décrite ci-dessous n'est qu'un thème parmi tant d'autres. Elle prétend uniquement aux qualités et aux défauts que lui trouveront nos collègues. Elle a été proposée à des enfants âgés de huit à onze ans, au cours des quatre dernières années.

C'est un appel précoce au raisonnement logique (cf. mon article dans le Bulletin n° 292, pages 51 et suivantes). On y propose aux enfants le début d'une règle du jeu en leur laissant le plus possible le plaisir de la découvrir, et on se contente ensuite de quelques coups de pouce pour relancer l'intérêt en cours de route.

Ce qu'il faut éviter, c'est de se passionner, de se prendre soi-même au jeu, en saturant les petits avec des exercices multiples et toujours plus sophistiqués.

Par ailleurs, il est indispensable de mesurer ce qu'on fait. Il est de ces heures de mathématique où l'enseignant a l'impression que "ça marche très bien". Les enfants interviennent, découvrent, prolongent ...