Fonction sélective des exercices

par B. COLLIN, C.E.S. St Laurent de la Salanque 66

Introduction

Cet article s'appuie sur de nombreuses observations faites dans des classes de toutes catégories de mon C.E.S. (sixième III, I ou II, cinquième I ou II, cinquième accueillant des élèves issus de sixième III, ou retardés) quant aux difficultés que des élèves *réels* de sixième et de cinquième peuvent rencontrer dans la résolution des exercices les plus courants.

J'ai voulu mettre en évidence que nombre d'entre eux, qui paraissent d'autant plus anodins qu'ils sont facilement résolus par la plupart des élèves des sections I, requièrent pourtant des élèves un comportement qui n'est pas "naturel" à tous. Et si un élève, pour quelque raison, se comporte autrement qu'il le *faudrait*, l'exercice le rejette. Chaque exercice de mathématique, parmi les plus banals, a donc une *fonction sélective* qui opère en particulier dans les domaines de l'expression et de la compréhension verbales, du calcul, de l'utilisation des schémas, des signes, des conventions, ces dernières ayant beaucoup d'importance aux yeux des enseignants (Mais les exemples pris ici ne concernent que signes ou schémas).

I Les schémas d'inclusion

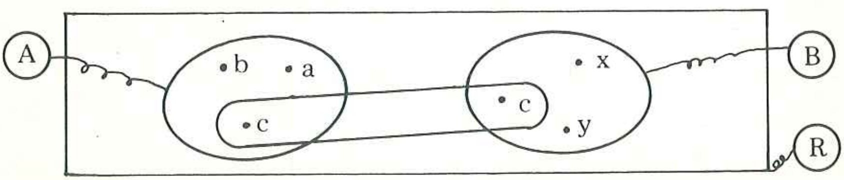
Les diagrammes de Venn utilisent des conventions qui n'ont rien d'évident pour certains élèves de sixième.

Exemples :

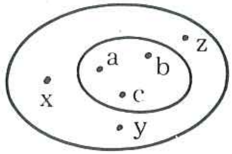
Ces deux schémas représentent-ils le même ensemble ?

Un même élément n'est représenté qu'une fois.

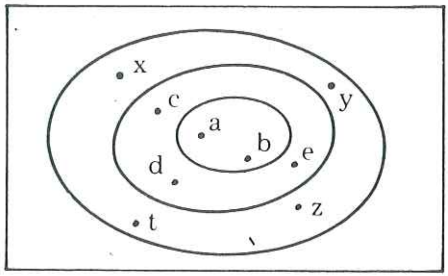
Voici comment certains représentent deux ensembles non disjoints d'un même référentiel :



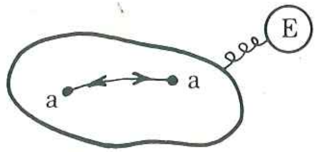
Voici une représentation de deux ensembles complémentaires $\{x,y,z\}$ et $\{a,b,c\}$.



Voici une représentation d'ensembles disjoints d'un même référentiel : $\{a,b\}$ $\{c,d,e\}$ $\{x,y,z,t\}$



Voici une représentation d'une relation :



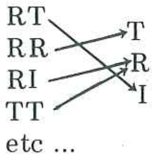
Parmi de nombreuses représentations possibles, la coutume exerce donc un choix, que nous n'avons que trop tendance à imposer à nos élèves. "Le signe linguistique est arbitraire" (De Saussure). De même, dans le langage des diagrammes, les signes utilisés sont en grande partie arbitraires. En cours d'apprentissage, le tâtonnement devrait être toléré.

II Comment fabriquer une table de Pythagore (sixième, cinquième)

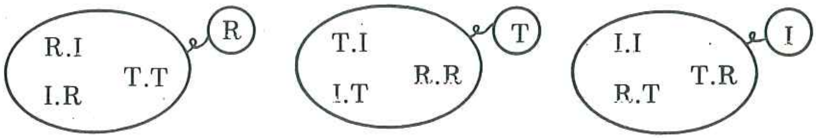
Ayant fait étudier les permutations circulaires de $\{R,T,I\}$ (R, T et I étant appelées "règles" d'un "jeu à trois règles"), il est demandé aux élèves de trouver toutes les manières de composer deux des trois règles, et de ranger les résultats pour en faire un résumé concis. De la discussion émergent les idées suivantes :

1ère idée : Rangement en colonne désordonnée : RT = I
RR = T
etc ...

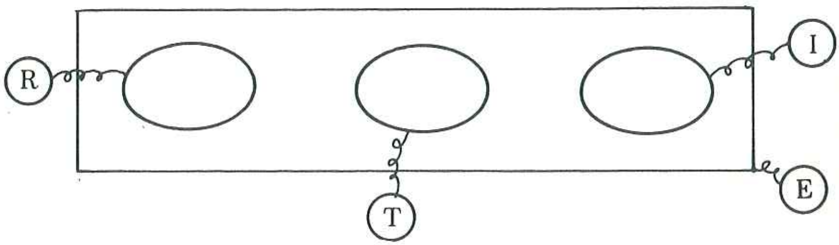
2ème idée : Classement :



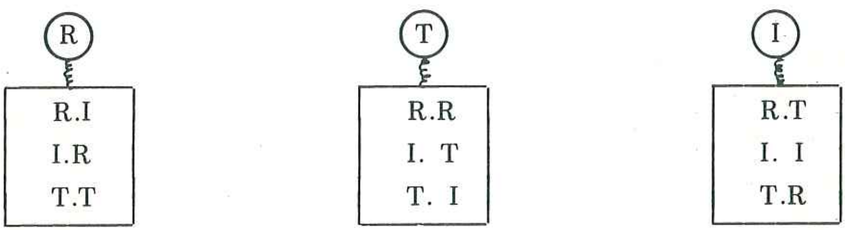
3ème idée : Partition :



puis :



4ème idée : Partition classée :

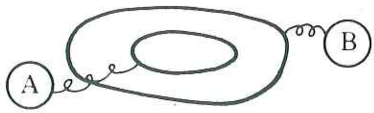


Mais aucun élève ne trouve de lui-même la présentation sous forme d'une table de Pythagore. Cette présentation fait donc appel à des conventions supplémentaires qui ne doivent pas paraître tellement "naturelles" à ce niveau. Cela expliquerait que certains aient des difficultés à lire correctement une table de Pythagore.

III Les signes de relations d'ordre

Voici des remarques tirées d'observations du comportement d'élèves de sixième et cinquième, lorsqu'ils doivent utiliser des signes comme $\leqslant$, $\subset$, $\geqslant$, $\cap$, ...

(a) P. est une élève dynamique, travailleuse, vive, mais elle a de légères difficultés d'orientation spatiale. Elle a compris le sens de la phrase "A est inclus dans B" et sait représenter la situation sous la forme :



mais, quand elle utilise le signe, elle écrit : $B \subset A$.

(b) D'autres élèves mélangent les signes $\cap$, $\subset$, $\cup$; ces confusions apparaissent surtout quand ils doivent utiliser plusieurs signes dans un même exercice.

Par exemple, voici un exercice de contrôle :

(1°) Traduire en français ces "phrases mathématiques" :

$E \subset F$; $I \cap J = K$; $M \cup N = P \cap R$

(2°) $A = \{1,2,3,7,9,11\}$ $B = \{1,4,7,9,12,13,14\}$

Compléter :

$A \cap B = ...$ $A \cup B = ...$

(3°) $X = \{a, b, c, d\}$; $\{ Y = b, c, e, f \}$; $Z = \{c, d\}$

Ecrire toutes les intersections possibles .

Erreurs remarquables

. J. donne une bonne réponse à (2°) , mais à (3°) écrit :

$$X \cap Y = \{b, c, a, d, e, f\}$$

alors que c'est la réunion.

. J. M. traduit correctement $E \subset F$: E est inclus dans F.
mais traduit ainsi $I \cap J = K$: I est inter dans J.
Il répond correctement à (2°) , mais à (3°) écrit :

$$X \subset Y = \{b, c\} \quad \text{au lieu de} \quad X \cap Y = \{b, c\}$$

et fait plusieurs erreurs analogues.

. F. écrit : $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14\}$
$A \cup B = \{7, 9\}$

et $A \cap B$ pas vraie car l'élément 11 de A n'appartient pas à B.

c Ayant remarqué que certains élèves de sixième écrivent encore la lettre Z à l'envers (Ƨ comme à la maternelle !), je leur ai fait traduire des mots comme : XENOPHON, POPOCATEPETL, ZAMBEZE, TOUTANKHAMON ... en utilisant un code (indiqué par une élève) qui consiste à remplacer chaque lettre par un signe ressemblant aux signes des relations d'ordre, par exemple : L par >, C par ∟, X par Λ, etc ...

Certains élèves se débrouillent très bien, mais d'autres commettent un grand nombre d'erreurs du type suivant :

C, qui devrait être codé ∟, est codé ┘ ou >

et C, est décodé A, car A a pour code ┘.

Un élève a fait dix-huit erreurs de ce genre, dans un exercice comportant trois mots à coder et huit à décoder.

Pour conclure ce paragraphe, j'observe donc que le comportement d'un élève utilisant les signes de relations d'ordre est dicté par les nécessités suivantes :

. *voir* les différences entre ces quatre signes : $\cap$, $\subset$, $\cup$, $\supset$, donc être capable de les transformer par symétrie autour des deux directions définies par les bords de la feuille de papier (ce qui revient à opérer dans un groupe de symétries).

. *se rappeler* le sens attribué à chacun de ces signes.

. *accepter* l'usage et s'y *soumettre*, en attribuant ce même sens à ces signes.

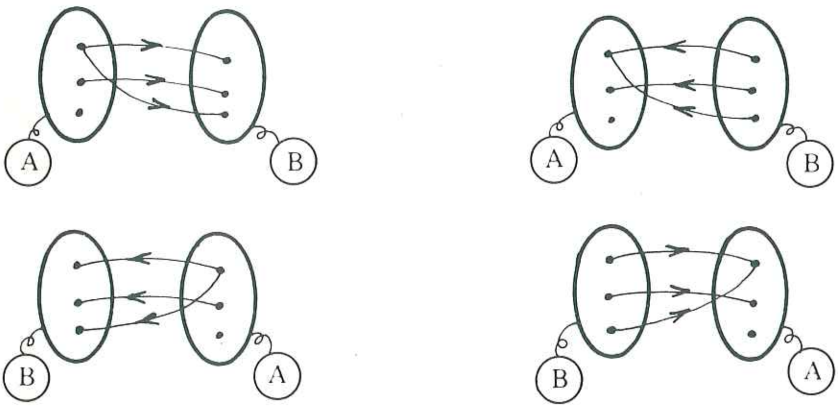
S'il n'est pas permis à l'élève de tâtonner (c'est-à-dire de se tromper) pendant un certain temps, au travers d'exercices qui devraient être exercices de contrôle s'opérera une sélection au détriment d'enfants qui par ailleurs peuvent avoir des qualités (invention, ou "intuition", par exemple).

IV Les schémas fléchés

Lors de la reproduction de schémas fléchés, de nombreux élèves de sixième et cinquième placent le mauvais sens à certaines flèches, ou confondent ensemble de départ et ensemble d'arrivée. Voici des exemples :

① *Exercice* donné à une classe de sixième ayant déjà fait de nombreux exercices de représentation par des schémas fléchés :

"Observer ces schémas et écrire sous chacun d'eux son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée".



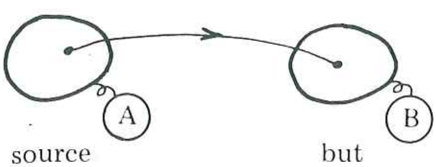
Sur 28 élèves, 4 ont encore fait des erreurs.

Il faut observer que le comportement de l'élève se situe ici dans une structure de groupe. Il doit combiner deux décisions :

a : changer les patates de colonnes
b : changer le sens des flèches

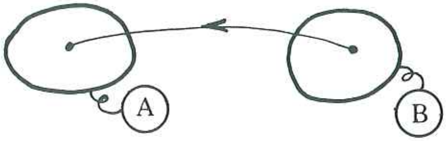
Pour la composition, {e, a, b, ab} a la structure du groupe de Klein.

② *Autre exercice* : une relation de A vers B vient d'être étudiée et elle est représentée ainsi au tableau :



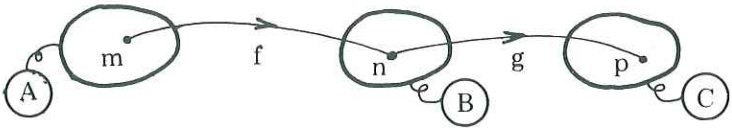
F. la représente ainsi :

mais quelque temps après, elle la représente ainsi :



Elle n'a donc pas bien lié les décisions a et b .

③ Ces erreurs se retrouvent quand il s'agit de composer deux relations :



Pour représenter "f suivie de g" certains dessinent :

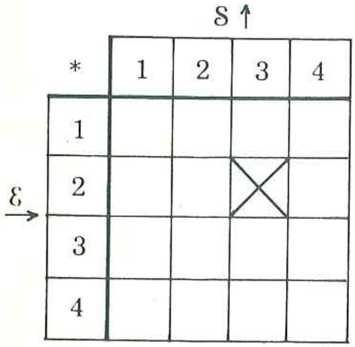
Ici aussi, pour décider si : m est en relation avec p
ou si : p est en relation avec m,
il faut savoir combiner les décisions a et b .

④ Enfin, dans la représentation d'une relation transitive, il arrive souvent que des élèves orientent les "raccourcis" dans le mauvais sens :

Une élève affirma "qu'on peut *aussi* dessiner la flèche dans l'autre sens".

Il semble plus facile à certains de décrire un cycle que de revenir au point de départ et aller au but dans le même sens que la première fois.

Donc, pour bien faire un schéma fléché, on doit dominer le groupe de décisions $\{e, a, b, ab\}$. On peut remarquer que la lecture correcte d'une table de Pythagore nécessite aussi d'opérer dans un groupe analogue ; le calculateur de $2 * 3$ doit combiner les instructions :



a : changer les éléments de colonne ($2 * 3$ ou $3 * 2$)

b : changer l'entrée de la table (en haut ou à gauche)

Certains élèves ont du mal à se comporter par rapport à ce groupe de décisions. Les exercices de mathématique opèrent donc une sélection suivant *le comportement* des élèves.

Conclusion : C'est dans le contenu même de l'enseignement qu'il faut chercher *les critères de sélection des élèves.*

Parce que j'ai étudié, trois années de suite, au sein de l'équipe professeurs-conseiller d'orientation, les cas et les dossiers d'élèves de sixième qui avaient de la peine à suivre (et que, pour cette raison, on avait regroupé dans une classe intermédiaire entre la sixième et la cinquième) je pense qu'il faut mettre au premier plan des critères de sélection utilisés à ce niveau les "lacunes verbales" (mais que recouvrent ces mots ?).

Seulement, il paraît vraisemblable qu'entre difficultés d'ordre verbal et difficultés dans la lecture ou l'écriture (de "phrases mathématiques" aussi) existent des relations dont on ne tient guère compte.

Ces difficultés, également, sont le fait d'un mauvais comportement des élèves en face de *conventions* ou de *décisions* de lecture ou d'écriture des diagrammes ou des "phrases mathématiques".

Faut-il continuer à sélectionner les élèves au niveau sixième et cinquième par des exercices comprenant uniquement des difficultés de "langages" ?

Ou bien, ne faut-il pas tolérer le "tâtonnement expérimental" (décrit par C. Freinet), prenant en cela le contre-pied de la doctrine officielle ?

Car la correction n'est pas naturelle à cet âge, et elle s'acquiert à la longue.

Travaux du séminaire A.P.M.E.P. LYON septembre 1974

Trois commissions B_1, B_2, B_3 ont étudié les "noyaux-thèmes" :

GROUPE B1
Commission "noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire"

"Dans la phase de formation générale une éducation mathématique commune à tous les enfants doit :

— Donner à l'élève un outil de pensée s'ajoutant à la panoplie d'explorateur du monde nécessaire à tout individu parcourant à son tour le destin de l'humanité.

— Contribuer à la formation de son intelligence et de son caractère, au développement de ses capacités de jugement, de création, d'émotion, de rigueur, de résistance à l'argument d'autorité, toutes qualités qui pourront l'aider un jour à supporter la vie en société, à s'y adapter ou à la transformer.

— Participer dans l'immédiat, c'est-à-dire dès l'âge scolaire, à son épanouissement dans des activités faisant également place à son goût du rêve, du jeu, de l'action et de la discussion."

Charte de Caen.