## 6 Complément de code de navigation

Il existe d'autres signaux concernant les épaves et les dangers. Les signaux concernant les épaves sont verts.

● BOULE VERTE : épave à bord indifférent, c'est dire qu'on peut croiser l'épave à babord ou à tribord

▮ CYLINDRE VERT : épave à laisser à babord

▲ CONE VERT : épave à laisser à tribord

● BOULE NOIRE : danger isolé

On peut donc fabriquer de nouvelles cartes et se servir de ces signaux pour obstruer les chenaux de l'adversaire : l'un crée des passages, l'autre des obstacles ; il y a affrontement, réflexion et mémorisation de signaux réels : la situation me paraît riche, saine et ouverte.

# Induction et Récurrence

*par LECOQ (Caen)*

Cet article expose le malaise qu'a ressenti son auteur au cours de plusieurs séances de "recyclage". Rien ne sert de décrire ses états d'âme et quelques remèdes sont proposés dans la suite ; mais si d'autres collègues ont affronté la même situation et qu'ils disposent de réponses différentes, il serait intéressant de mettre en commun nos pharmacopées afin d'améliorer nos traitements. Et puis cela évite des redécouvertes longues et parfois pénibles quand elles ne sont pas décourageantes.

Dans les groupes de travail qui s'adressent aux maîtres de l'école élémentaire figure en bonne place l'étude de problèmes. Parmi ceux-ci on trouve tout naturellement de nombreux problèmes de dénombrement : ils permettent d'expérimenter sur des objets ou sur des dessins, ils utilisent les naturels, grand thème de l'école élémentaire, ils donnent assez facilement l'impression que les idées viennent d'elles-mêmes, enfin ils incitent ou devraient inciter à démontrer, à "établir une formule" comme on dit. Nous avons, par formation, le réflexe de la démonstration, mais l'expérience prouve que ce souci ne semble pas naturel, parfois, même, cette preuve nécessaire paraît inutile ; oserais-je dire qu'elle paraît relever du vice : "faut qu'y démontre". Cette commisération à l'égard du démontreur révèle en fait un point important de pédagogie : avant d'entamer une démonstration, il faut en éprouver le besoin, et pour que ce besoin naisse, il faut avoir rencontré des cas où "ça ne marche pas".

Du point de vue scolaire le raisonnement par récurrence donne lieu à des exercices plus passionnants les uns que les autres ... par exemple : "Prouvez que, pour tout naturel n, n $\times$ (n $-$ 1) est pair $-$ et l'on s'étonne après cela que les apprentis bacheliers maîtrisent si mal un raisonnement au demeurant délicat. Dans la réalité, avant de démontrer, il faut savoir quoi démontrer et la proposition à établir est issue de constatations, d'essais réalisés sur un nombre fini de cas qui laissent à penser que n (n $-$ 1) a l'air d'être toujours pair.

Le problème soulevé dans les lignes qui suivent se présente ainsi : à partir d'un nombre fini d'expériences, on dégage une propriété qui semble vraie quel que soit le naturel dont elle dépend et l'on tente une démonstration. Trois cas se présentent : ou la proposition est établie, ou l'on ne parvient pas à l'établir, ou l'on montre que la proposition n'est pas universellement vraie. Dans ce cas on explore plus en détail pour imaginer une nouvelle proposition et l'on parcourt à nouveau le cycle : expérimentation-conjecture — test — preuve. Pour justifier la nécessité d'une preuve (par récurrence ou non), encore faut-il que les chercheurs aient fréquenté des situations où leur hypothèse est universellement vraie (sans qu'ils le sachent pour autant) et des situations où l'hypothèse émise n'est pas universellement vraie (il suffit alors de la tester sur un cas convenable).

Dans cet esprit, voici ce qu'on peut vivre : à l'ouverture d'une séance de travail, les participants se saluant, posez subrepticement la question suivante : nous sommes 17, combien y aura-t-il de poignées de mains échangées ? Dans le pire des cas, vous passez pour un farfelu ; ne pas s'inquiéter, c'est le métier qui veut ça. Mais si le groupe est actif et que vous l'ayez habitué à élaborer ses propres idées, la recherche s'engage. Après avoir liquidé le sens de "poignées de mains" (A serre la main de B, B serre la main de A, cela ne donne qu'une poignée de mains) on entre dans le vif du sujet ; ne parlez pas de paires dans un ensemble à 17 éléments, personne n'y croirait, laissez explorer.

Assez rapidement, mais pas toujours à l'aide d'un petit schéma qui serait cependant si utile dans la suite, des résultats apparaissent :

| n | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| p (n) | 6 | 10 | 15 | 21 |

p (n) désignant le nombre de poignées de mains échangées par les n personnes. Un tel début révèle déjà les mérites de votre pédagogie puisque les gens ont été actifs et qu'ils disposent du bon réflexe consistant à simplifier le problème pour remonter la chaîne des résultats. C'est alors de cette ascension que va apparaître le problème psychopédagogique. On peut bien sûr inciter les chercheurs à simplifier encore plus, ce qui ne laisse pas, au moins les premières fois, de les étonner. Bref, on arrive au tableau :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p (n) | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |

A partir de là, la situation change d'aspect. Tout un chacun se sent désormais en mesure de répondre à la question initiale, mais est tenté de chercher une réponse quel que soit n. Et voilà d'une façon ou d'une autre lâché le fatidique "quel que soit n". Encore faudrait-il bien préciser ce qu'on cherche car au fond trouver p (100) peut apparaître long et fastidieux mais réalisable. Précisons donc (dans cet article, c'est facile ; au sein d'un groupe de travail, les mots pour le dire n'arrivent pas aisément) qu'il s'agit de trouver un polynome en n, s'il existe, qui décrive l'application de N vers N dont nous n'avons obtenu expérimentalement qu'un fragment. Au niveau de l'école élémentaire, il s'agit de trouver, si elle existe, une fonction élémentaire de n, c'est-à-dire une suite d'opérations à effectuer à partir de n — (polynome, exponentielle, fraction rationnelle).

Les discussions évoquées par les lignes précédentes amènent les gens à remarquer :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p (n) | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

et, par voie de conséquence, à affirmer :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | |
| 21 | | 28 | | 36 | | 45 | | 55 | |
| | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | |

Et voilà qu'un certain malaise vous prend. Au début, vous étiez en sécurité, puisque mathématiquement bien armé face à un tel problème ; les participants par contre s'attendaient plus ou moins à quelque éclair imprévisible mais efficace prouvant une fois de plus l'existence de la "bosse". Maintenant, c'est vous qui êtes pris au dépourvu et les participants se sentent sûrs d'eux car enfin : leur truc marche bien, posez la question : "et pour $n = 20$ ? ", quelques additions et l'on vous retourne 190. Vous sentez bien que la question : "et pour $n = 1000$ ? " va vous attirer l'inévitable réponse : "faut l'faire ! ". Quant à la remarque qui vous brûle les lèvres : "vous n'avez là qu'une hypothèse, encore faudrait-il démontrer", c'est le vecteur qui va vous mettre une fois de plus sur orbite mathématique. Après tout : "jusqu'à preuve du contraire, $p(n) = \frac{1}{2} n (n - 1)$" est un argument imparable et ce serait plutôt à vous de fournir cette fameuse preuve du contraire.

En un mot l'animateur est pris en fourchette entre la pertinence de la conjecture émise par les animés (oh combien ! à ce point de la discussion) et ce louable souci de rigueur qui le pousse à ne pas se fier aux apparences, si évidentes soient-elles. Ayant le souci de ne rien imposer qui ne réponde à un besoin ressenti et exprimé, l'animateur est face à l'alternative : ou laisser tomber en espérant faire mieux la fois suivante, ou exhiber une situation où "ça ne marche pas". Exhiber, exhiber, c'est vite dit, pensez-vous, mais ce genre de problèmes ça marche toujours !

Avant d'exhiber des situations où "ça ne marche pas", peut-être convient-il d'examiner le problème posé dont quelques conversations entre "recycleurs" m'ont convaincu qu'il est plus fréquent qu'on ne croit et dont on parle souvent à mots couverts parce qu'on ne sait pas trop bien comment s'en sortir.

Pour arriver à la question : faut-il démontrer ? , il faut que les animés prennent au sérieux les problèmes que vous leur proposez, il faut qu'ils en aient déjà résolu par eux-mêmes, il faut qu'ils aient le réflexe d'explorer la situation, il faut que l'animateur incite à chercher pour conjecturer, il ne faut pas que les animés attendent de l'animateur/LA/réponse.

Où est alors le blocage ? De toute évidence dans la rencontre de deux démarches de l'esprit : raisonnement par induction et raisonnement par récurrence. Peut-on parler de raisonnement dans les deux cas ? Pourquoi pas ? Quoi qu'il en soit, il y a un procédé de démonstration : la récurrence, et une démarche qui permet de conjecturer : l'induction. Et nous sommes trop scrupuleux pour confondre conjecture et résultat démonstrativement avéré. Au cours de la séance de travail précédemment décrite, les chercheurs partis de quelques résultats ont induit un modèle numérique, la régularité vécue s'est traduite en régularité numérique et les plus exigeants concrétisent vite les différences premières sous la forme $p\,(n+1) = p\,(n) + n$, le quantificateur universel étant sous-entendu ou inexprimé, ou tout simplement escamoté.

En somme leur conviction est faite, la conjecture est raisonnable, elle marche bien et on ne voit pas pourquoi elle ne continuerait pas à marcher. Cette réaction correspond bien au côté dynamique de la démarche de l'expérimentateur qui cherche à prévoir. A ce stade il est correct de dire : "il est probable que $p(n) = \frac{1}{2}\,n\,(n-1)$" ou "on peut s'attendre à ce que ...". C'est dans un tout autre esprit que le mathématicien cherche à prouver que $(\forall_N\, n, p(n) = \frac{1}{2}\,n\,(n-1))$ est vrai. Cette attitude n'est pas si naturelle qu'on veut bien le croire, il n'est que d'en faire l'essai avec des gens qui n'enseignent pas. Que l'on démontre par récurrence ou autrement importe moins que de faire sentir la nécessité d'une preuve, et c'est dans ce but que les exemples suivants d'inégale valeur pédagogique peuvent être utilisés.

*Exemple 1 :* Extraits de Wheeler "Mathématique dans l'enseignement élémentaire" (OCDL).

Dessinez un cercle, disposez sur ce cercle n points qui ne soient pas les sommets d'un polygone régulier. Joignez ces points 2 à 2. Quel est le nombre maximum de régions dans le disque ?

Quelques dessins vous donnent les résultats suivants :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

L'exemple a ceci de remarquable que pour 6 points la figure est embrouillée et que l'on a tendance à conjecturer que pour 6 points, 32 régions, 7 points, 64 régions, etc... Par prudence, on teste sur 6 points, on obtient 31 régions, la conjecture s'effondre.

On pense alors aux différences

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 31 \\
& 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 15 & \\
& & 1 & & 2 & & 4 & & 7 & & \\
& & & 1 & & 2 & & 3 & & &
\end{array}
$$

Si les différences troisièmes sont : 1, 2, 3, 4, 5 etc..., alors pour 7 points, il devrait y avoir 57 régions. Testez-vous cette nouvelle conjecture ? A vous de voir mais vous êtes prévenu : conjecture ne signifie pas vérité.

Voilà une belle situation où les modèles numériques élémentaires auxquels on pense sont inadéquats ; leur choix dépend en fait du degré de culture du chercheur. Il est ici plus raisonnable d'analyser le problème, d'en dégager l'aspect topologique pour obtenir une formule (non "élémentaire" pour des instituteurs, élémentaire pour un bachelier) plutôt que de jouer à la devinette.

Il n'en reste pas moins que si vous l'utilisez ça finira par se savoir ; il serait donc bien utile d'en connaître d'autres. Personnellement, avant cette situation, je n'en avais qu'une autre mais très mauvaise : lundi, mardi, mercredi il a plu, aujourd'hui il pleut, quel temps fera-t-il demain ? D'autant plus mauvais qu'il est bien connu qu'en Normandie il pleut tout le temps. (Conjecture ou vérité ? ).

*2e Exemple :* Fortuitement ma fille aînée (8 ans) vient de me fournir une situation analogue. Elle discutait avec une amie du même âge et tout à coup — allez savoir ce qui leur passe par la tête — elle lui demande de faire dix avec deux nombres — réponse : 5 et 5 — oui, mais il y en a d'autres — Ah ? — Oui : 0 et 10 — Il était temps d'intervenir : combien y a-t-il de façons de faire 10 avec deux nombres ? Réponse 10, voyez la belle conjecture ! ... Il a fallu prendre un papier et trouver 6, encore qu'à la réflexion ce zéro ? on dirait plutôt 5. Et puis nouvelle question : "et avec trois nombres pour faire 10 ? " ; nouveau papier et ... j'ai continué tout seul.

Combien y a-t-il donc de décompositions d'un naturel n en somme de trois nombres non nuls, les répétitions étant permises ?

L'expérience donne :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Pour 9 dirait-on qu'il y a 6 décompositions ? La suite du tableau précédent :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7 | 8 | 10 | 12 |

infirme cette conjecture.

Cet exemple bien que du même type que le précédent, paraît moins bon car il est probable que les essais dépasseront 8, et qu'ainsi les chercheurs seront tout de suite en alerte ; d'autre part les deux 1 du début peuvent inciter à la prudence. En tout cas dans cet exemple on sera vraisemblablement circonspect à l'égard des conjectures émises.

*3e Exemple :* Qui peut s'introduire naturellement à partir du précédent : combien y a-t-il de naturels dont la somme des chiffres est 5 ? (on retrouve ce problème, à la rédaction près, dans la série pourpre des problèmes du Nuffield Project — OCDL).

L'ensemble des nombres dont la somme des chiffres est 5 n'est pas fini puisqu'on y trouve 50, 500 etc..., mais en se limitant aux naturels dont l'écriture n'utilise pas zéro on trouve :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

Là encore, il semble naturel de conjecturer qu'il y a $2^{n-1}$ naturels dont la somme des chiffres est n — Conjecture naturelle sans doute, mais il manque le "pour tout n naturel" — Ainsi quantifiée, la proposition est fausse.

*4e Exemple :* Tiré de Ogilvy et Anderson "Excursions dans la théorie des nombres" (DUNOD).

Remplaçant n successivement par 0, 1, 2, 3 dans $n^2 - n + 41$ on trouve 41, 41, 43, 47 ... qui sont premiers, et on en trouve 41 de suite. Néanmoins ($\forall_N$ $n, n^2 - n + 41$ est premier) est fausse.

Il y a mieux: $n^2 - 79n + 1601$ fournit 80 nombres premiers à la suite les uns des autres mais $n = 80$ donne 1681 qui est $41^2$.

Ces deux exemples sont techniquement intéressants à condition de voir que les nombres obtenus sont premiers, mais pédagogiquement inefficaces par leur côté artificiel, technique précisément.

*5e Exemple :* On peut dans un genre voisin montrer que le tableau

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |

est décrit aussi bien par : $n \mapsto 2^{n-1}$ que par : $n \mapsto \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ ou par : $n \mapsto 2\frac{1+n}{5-n}$

Là encore, les interlocuteurs sentent l'aspect fabriqué de telles remarques, ou peut-être leur manque-t-il la situation concrète qui sert d'arbitre dans la discussion.

*6e Exemple :* A la limite du sujet de cet article on peut aussi proposer des situations où dans le cadre des manipulations on ne parvient pas à conjecturer à l'aide de fonctions élémentaires. Par exemple la recherche des polyminos donne :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 12 | 35 |

Au-delà de 6, cela devient décourageant ... De même, placer n dames sur un échiquier nxn sans qu'aucune soit en prise donne :

| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 6 | 12 |

Que conclure de ce qui précède ? Les exemples 1, 2 et 3 sont pertinents en ce sens que la manipulation est "régulière" ; les résultats numériques permettent de conjecturer sans faire appel à une vaste culture mathématique et l'on peut tester l'hypothèse. Le 4e exemple peut être utile pour renforcer les précédents mais, présenté en premier, il n'est pas convaincant. Le 5e exemple ne convainc personne, car il transgresse un principe pédagogique : le modèle mathématique doit décrire une situation réelle et non être introduit et étudié pour lui-même. Autrement dit, c'est à partir d'une réalité qu'on peut construire un langage mathématique qui se trouve validé par retour à cette réalité. Enfin les situations citées en 6e exemple s'écartent du cadre de cet article ; le problème de la démonstration ne peut se poser puisqu'on n'a rien à prouver. Que les essais tentés ne permettent pas de conjecturer, cela tient peut-être à la faible culture du chercheur ou à une analyse insuffisante, ou tout simplement au fait que les applications en question ne peuvent pas s'exprimer à l'aide d'applications élémentaires (polynomes, exponentielles ...) ; c'est un phénomène bien connu des mathématiciens et ... c'est encore une conjecture. Pour les débutants, c'est décourageant à moins qu'habilement présentés ces exemples ne montrent que l'univers des applications de N vers N est plus riche qu'on ne pense — en tout cas, qu'il ne se limite pas aux opérateurs dont on fait tant de cas.

Il me reste à souhaiter que ces quelques remarques puissent être utiles à des collègues et à lancer un appel à toute personne connaissant des situations analogues aux exemples 1, 2, 3 : qu'elle veuille bien les rendre publiques ; ça peut toujours servir. Et si personne n'en connaît, qu'on se le dise.

# Recherche à partir d'un jeu télévisé

## dans une classe rurale à trois cours (C.E. 2, C.M. 1, C.M. 2)

*par P. LEGOUPIL, Valcanville (Manche)*

I *A partir du jeu "Le compte est bon"*

Les élèves de ma classe, ayant vu à la télévision le jeu "le compte est bon", m'ont demandé s'il ne serait pas possible d'y jouer en classe. Certains, les plus jeunes, trouvaient ce jeu trop compliqué. Après discussion et tâtonnement, nous avons mis au point le jeu suivant : dans un petit sac de toile, nous avons placé 10 jetons numérotés de 0 à 9. Un élève tire 5 des jetons (exemple 1, 5, 7, 8, 9). Les jetons tirés sont ensuite remis dans le sac. Puis l'élève tire successivement 2 jetons a,b. On écrit le nombre 10a+b. Exemple : le tirage 7,8 donne le nombre 78. Le jeu consiste à former ce nombre 78, en utilisant les cinq nombres d'un chiffre une fois et une seulement et les quatre opérations. Pour les tirages 1,5,7,8,9 et 78 une solution est $\big((8+9)5\big) - (7\times 1) = 78$.

Autre exemple : 45 avec 1,4,5,7,9 ; $\big((7-1)9\big) - (4+5) = 45$.