# Musique "classique" et mathématique "moderne" quelques éléments de solfège

"La Musique est un exercice d'arithmétique secrète, et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres".

LEIBNIZ

(Une partie du sujet de cette brochure, adapté au programme de Seconde, a fourni la matière de plusieurs séances de coordination interdisciplinaire, réalisées dans deux classes de Seconde $C_4$ du Lycée Michelet, séances animées simultanément par les professeurs de Mathématique et de Musique de ces classes).

## I La Gamme chromatique

En Musique, un son est caractérisé par :

— sa hauteur (liée à la fréquence de la vibration);
— son timbre ;
— son intensité.

Nous ne nous intéresserons ici qu'à la première caractéristique, c'est-à-dire que, pour nous, *un son sera identifié à sa fréquence f.* Cette fréquence étant un réel positif, nous identifierons donc l'ensemble des sons (audibles ou non) à $\mathbf{R}_+$, ensemble des réels positifs.

On appelle *intervalle* (au sens musical) un couple de sons, c'est-à-dire un élément (f,f') de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$.

Si $f' > f$, l'intervalle est dit ascendant.

Si $f > f'$, l'intervalle est dit descendant.

En particulier, si $f' = 2f$, le son f' est dit *à l'octave supérieure* de f, et l'intervalle (f, 2f) est appelé *octave.*

On se propose maintenant de partager l'intervalle réel [f, 2f[ en 12 intervalles $[f_i, f_{i+1}[$ $(i = 0, 1, 2, \dots, 11)$ de telle façon que le rapport de $f_{i+1}$ à $f_i$ soit constant et égal à k. (C'est ce qu'on appelle *tempérer* l'octave). Nous avons bien sûr $f_o = f$, $f_{12} = 2f$ et

$$\frac{f_1}{f_o} \times \frac{f_2}{f_1} \times \dots \times \frac{f_{12}}{f_{11}} = k^{12}$$

Or le premier membre est égal à $\frac{f_{12}}{f_0}$, soit 2, d'où $k = 2^{\frac{1}{12}}$ et $f_i = 2^{\frac{i}{12}}.f_0$.

Un son $f_0$ étant fixé, limitons-nous désormais à l'ensemble $\mathcal{E}$ des sons de la forme $f_n = 2^{\frac{n}{12}}.f_0$ $(n \in \mathbf{Z})$. Cet ensemble s'appelle une *échelle de sons.*

Traditionnellement, l'échelle choisie est définie par $f_0 = 32{,}7$ (1). C'est ce que nous supposerons dans la suite.

Soient $f_i$ et $f_j$ deux éléments de $\mathcal{E}$ $(f_i = 2^{\frac{i}{12}}.f_0$ et $f_j = 2^{\frac{j}{12}}.f_0)$ ; si on pose $i - j = a$, on dit que l'intervalle $(f_i, f_j)$ est de $|a|$ *demi-tons* (ascendant si $j > i$, descendant si $i > j$).

Nous dirons d'autre part que deux sons $f_i$ et $f_j$ de $\mathcal{E}$ sont équivalents s'ils déterminent un intervalle qui soit un nombre entier d'octaves, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif n tel que $f_i = 2^n.f_j$ :

$$
\begin{aligned}
f_i \sim f_j &\iff \exists n \in \mathbf{Z} \quad f_i = 2^n.f_j\\
f_i \sim f_j &\iff \exists n \in \mathbf{Z} \quad 2^{\frac{i}{12}}.f_0 = 2^n.2^{\frac{j}{12}}.f_0\\
f_i \sim f_j &\iff \exists n \in \mathbf{Z} \quad \frac{i}{12} = n + \frac{j}{12}\\
f_i \sim f_j &\iff \quad i \equiv j\ (12).
\end{aligned}
$$

Ceci définit une bijection $\varphi : \bar{i} \longrightarrow f_i$ de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ sur l'ensemble-quotient de $\mathcal{E}$ par cette relation d'équivalence (soit G), bijection qui à la classe de l'entier i associe celle du son $f_i$. G s'appelle la *gamme chromatique*, et ses éléments sont appelés *notes*.

Posons de plus $\overline{f_i} \oplus \overline{f_j} = \varphi\,(\overline{i+j})$ ; cette addition que nous définissons dans G est une loi interne : $\overline{f_i} \oplus \overline{f_j}$ est la note de G dont une fréquence est $2^{\frac{i+j}{12}}.f_0$ ; $\varphi$ est alors un isomorphisme de $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$ sur $(G, \oplus)$. Nous pourrons donc dans la suite identifier ces deux groupes, et noter $\bar{i}$ la note $\overline{f_i}$.

Dans l'échelle $\mathcal{E}$ traditionnelle :

$\bar{0}$ s'appelle "Do"
$\bar{1}$ s'appelle "Do dièse" ou "ré bémol" (2)
$\bar{2}$ s'appelle "Ré"
$\bar{3}$ s'appelle "Ré dièse" ou "Mi bémol"
. . . . . . . . . .
$\overline{11}$ s'appelle "Si" ou "Do bémol"

(1) En fait, elle est définie par $f_{45} = 440$.
(2) Nous verrons plus loin comment "lever l'indétermination".

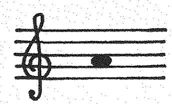


A partir de ces noms on pourra "baptiser" tous les sons de $\mathcal{E}$. En effet, à chaque son est associée une note par la surjection canonique s :

$$
\left|\begin{array}{l}
\mathcal{E} \longmapsto G\\
f_i \longmapsto \bar{i}
\end{array}\right.
$$

Si on effectue la division euclidienne de i par 12, on a $i = \alpha + 12k$ $(k \in \mathbf{Z})$, le couple $(\alpha, k)$ étant déterminé de façon unique.
Le nom du son $f_i$ sera alors celui de la note $\bar{i}$ suivi de "k", et on pourra le noter $\alpha_k$.

Par exemple : Quel est le nom de $f_{53}$ ?
$53 = 12.4 + 5$ donc (puisque $\bar{5}$ s'appelle "Fa") $f_{53}$ sera appelé "Fa 4", et noté $5_4$.
De même $f_{45}$ (qui sert à définir l'échelle $\mathcal{E}$ ) est le "La 3", car $45 = 12.3 + 9$. En clé de Sol (1), le La 3 est représenté à la place indiquée ci-dessous.



Voici, à titre d'exemple, un extrait d'une Pastorale de Scarlatti, et la transcription chiffrée des sons représentés :

$0_4 \quad 5_4 \quad 7_4 \quad 9_4 \quad 10_4 \quad 9_4 \quad 2_5 \quad 0_5 \quad 4_4 \quad 5_4 \quad 10_3 \quad 9_3 \quad 7_3 \quad 5_3 \quad 7_3 \quad 7_3 \quad 7_3$

## II Les transpositions

1) Soit l'application $t_a$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par :

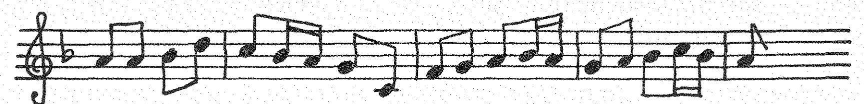
$$t_a : f_i \longmapsto f_{i+a} \qquad (a \in \mathbf{Z})$$

On a
$$f_{i+a} = 2^{\frac{i+a}{12}}.f_0 = 2^{\frac{a}{12}}.2^{\frac{i}{12}}.f_0 = 2^{\frac{a}{12}}.f_i$$

Donc, quel que soit i, l'intervalle $(f_i, f_{i+a})$ est un intervalle de $|a|$ demi-tons.
On dit que $t_a$ est la *transposition de* $|a|$ *demi-tons* ("au-dessus" ou "en-dessous", suivant que a est positif ou négatif). Pour simplifier, nous appellerons $t_a$ la transposition de a demi-tons, le signe de a indiquant le "sens" de cette transposition.

(1) Voir § VII

Soit par exemple l'extrait suivant de la Symphonie Pastorale :



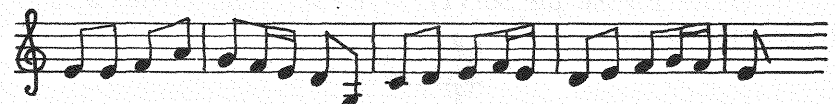
On se propose de le transposer "à la quarte inférieure" (donc 5 demi-tons en-dessous). La transcription chiffrée des sons de ce passage est :

$9_3\ 9_3\ 10_3\ 2_4\ 0_4\ 10_3\ 9_3\ 7_3\ 0_3\ 5_3\ 7_3\ 9_3\ 10_3\ 9_3\ 7_3\ 9_3\ 10_3\ 0_4\ 10_3 9_3$

Par la transposition $t_{-5}$ nous obtenons :

$4_3\ 4_3\ 5_3\ 9_3\ 7_3\ 5_3\ 4_3\ 3_3\ 7_2\ 0_3\ 2_3\ 4_3\ 5_3\ 4_3\ 2_3\ 4_3\ 5_3\ 7_3\ 5_3\ 4_3$

Retranscrivons enfin le transposé ci-dessus en gardant à chaque son sa durée :



Avant de passer à la suite, signalons les transpositions particulières $t_1$ (notée $\sharp$) et $t_{-1}$ (notée $\flat$) : on les appelle *altérations*.
*On a :* $\sharp \circ \flat = \flat \circ \sharp = t_0 = Id_G$ ($Id_G$ est notée $\natural$).

2) A partir de $t_a : f_i \longmapsto f_{i+a}$ on peut induire l'application :

$$t_{\overline{a}} : \overline{i} \longmapsto \overline{i+a}$$

($t_{\overline{a}}$ est l'application de G dans G qui, à la note associée à $f_i$, fait correspondre la note associée à son transposé $t_a(f_i)$ ).
Puisque $\overline{i+a} = \overline{i} \oplus \overline{a}$, $t_{\overline{a}}$ n'est autre que la translation d'amplitude a dans G. On pourra l'appeler *transposition de $\overline{a}$ demi-tons dans G.*

## III Les tonalités majeures

La tonalité de Do Majeur est le sous-ensemble suivant de G, noté $M_{\overline{0}}$ :

$$M_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$$

D'après ce qu'on a vu plus haut :
$\overline{0}$ s'appelle Do, $\overline{2}$ s'appelle Ré, $\overline{4}$ s'appelle Mi, $\overline{5}$ s'appelle Fa, $\overline{7}$ s'appelle Sol, $\overline{9}$ s'appelle La et $\overline{11}$ s'appelle Si. Il n'y a donc aucune ambiguïté quant au nom de ces notes.
Remarquons que $M_{\overline{0}}$ n'est pas un sous-groupe de G ( $\overline{2} \oplus \overline{4} \notin M_{\overline{0}}$ ).



Nous noterons $M_{\overline{a}}$ le transformé de $M_{\overline{0}}$ par la transposition de a demi-tons, soit $t_{\overline{a}}$.
$M_{\overline{a}}$ n'est égale à aucune de ses transposées. Faisons par exemple subir à $M_{\overline{a}}$ la transposition de 8 demi-tons ; nous avons :

$$M_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$$
$$t_{\overline{8}}(M_{\overline{0}}) = (M_{\overline{8}}) = \{\overline{8}, \overline{10}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$$

Les notes de $M_{\overline{0}}$ qu'on retrouve dans $M_{\overline{8}}$ sont : $\overline{0}, \overline{5}, \overline{7}$.
Les notes de $M_{\overline{8}}$ n'appartenant pas à $M_{\overline{0}}$ sont : $\overline{1}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{10}$.

Supposons que, dans le cours d'une pièce musicale, dans l'écriture de laquelle on n'a utilisé jusque-là (sauf "accident") que les notes de $M_{\overline{i}}$, on veuille ne plus utiliser que les notes de $M_{\overline{j}}$ ($i \neq j$) : plus on introduira de notes nouvelles en passant de $M_{\overline{i}}$ à $M_{\overline{j}}$, et plus le "dépaysement" musical sera grand. C'est pourquoi on cherche dans la musique "traditionnelle" à déterminer j à partir de i de façon que Card ($M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{j}}$) soit assez élevé.

Prenons par exemple le cas d'un passage écrit avec les notes de $M_{\overline{0}}$ ; si on dresse le tableau donnant Card($M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$) en fonction de $M_{\overline{a}}$ on obtient (pour $\overline{a} \neq \overline{0}$, bien sûr) :

| $M_{\overline{a}}$ | $M_{\overline{1}}$ | $M_{\overline{2}}$ | $M_{\overline{3}}$ | $M_{\overline{4}}$ | $M_{\overline{5}}$ | $M_{\overline{6}}$ | $M_{\overline{7}}$ | $M_{\overline{8}}$ | $M_{\overline{9}}$ | $M_{\overline{10}}$ | $M_{\overline{11}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Card ($M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$) | 2 | 5 | 4 | 3 | 6 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 | 2 |

Les tonalités $M_{\overline{5}}$ et $M_{\overline{7}}$ sont donc celles pour lesquelles Card($M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$) est maximum ; on les appelle les *tonalités majeures voisines* de $M_{\overline{0}}$. Plus généralement, les tonalités majeures voisines de $M_{\overline{i}}$ sont $M_{\overline{i+5}}$ et $M_{\overline{i+7}}$. En effet, considérons la transposition $t_{\overline{i}}$ :

$$t_{\overline{i}}(M_{\overline{0}}) = M_{\overline{i}}$$
$$t_{\overline{i}}(M_{\overline{a}}) = M_{\overline{a+i}}$$

$t_{\overline{i}}$ étant bijective, on a $t_{\overline{i}}(M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}) = M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{a+i}}$, et Card($M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{a+i}}$) = Card($M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$).
Card($M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$) étant maximum pour $\overline{a} = \overline{5}$ ou $\overline{a} = \overline{7}$, il en sera de même pour Card($M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{a+i}}$).

(N.B. : On a pu remarquer dans le tableau ci-dessus que $\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap M_{-\overline{a}})$ ; ceci est dû au fait que $t_{\overline{a}}(M_{\overline{0}} \cap M_{-\overline{a}}) = M_{\overline{0}} \cap M_{\overline{a}}$ ).

La tonalité $M_{\overline{i}}$ s'appelle *tonalité de* $\overline{i}$ *Majeur* ($\overline{i}$ en est la *tonique*).

D'après ce qu'on a vu plus haut, on obtient les tonalités voisines de $M_{\overline{i}}$ en faisant opérer sur elle $t_{\overline{5}}$ et $t_{-\overline{5}}$.

1) Examinons d'abord ce qui se passe lorsqu'on utilise $t_{\overline{5}}$ :

$$M_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$$
$$M_{\overline{5}} = t_{\overline{5}}(M_{\overline{0}}) = \{\overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$$

Toutes les notes de $M_{\overline{0}}$ se retrouvent dans $M_{\overline{5}}$, sauf $\overline{11}$ (qui est remplacée par $\overline{10}$). Comme $\overline{10} = \flat\,(\overline{11})$, la note $\overline{10}$ sera appelée "Si bémol" dans $M_{\overline{5}}$ (les autres notes gardant bien sûr le nom qu'elles portent dans $M_{\overline{0}}$).

Notons que, 5 étant premier avec 12, nous obtiendrons, par des transpositions successives de $\overline{5}$ demi-tons, les 12 tonalités majeures à partir de $M_{\overline{0}}$.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des 12 tonalités majeures.

On peut donc écrire $\mathcal{M} = \{M_{\overline{5k}} ; k \in \{0, 1, 2, ..., 11\}\}$ .

De façon générale, $M_{\overline{5(k+1)}}$ ne diffère de $M_{\overline{5k}}$ que par la note $\overline{5k+10}$ (alors que dans $M_{\overline{5k}}$ se trouve $\overline{5k+11}$). Voyons quelles sont ces notes $\overline{5k+11}$ pour k entier compris entre 0 et 11 ; ce sont successivement :

$$\overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6} .$$

Nous remarquons que, pour k compris entre 0 et 6, nous obtenons toutes les notes de $M_{\overline{0}}$ et elles seulement, c'est-à-dire successivement :

SI, MI, LA, RE, SOL, DO, FA.

Nous pourrons donc donner un nom à la note $\overline{5k+10}$ de la tonalité $M_{\overline{5(k+1)}}$, pour k compris entre 0 et 6 ; ce nom sera celui de la note $\overline{5k+11}$ dans la tonalité de Do Majeur, suivi de "bémol".

De plus, toutes les autres notes de $M_{\overline{5(k+1)}}$ sont des notes de $M_{\overline{5k}}$ ; on leur donnera donc le nom qu'elles portent dans $M_{\overline{5k}}$ (par récurrence à partir de $M_{\overline{0}}$). Par conséquent dans $M_{\overline{5\,(k+1)}}$ ($k \in \{0, 1, ..., 6\}$) il y aura k+1 noms de notes suivis de "bémol". Autrement dit (en posant n = k+1) : dans $M_{\overline{5n}}$ il y aura n noms de notes suivis de "bémol" ; ces noms seront les n premiers de la suite (Si, Mi, La, Ré, Sol, Do, Fa) ; les autres noms seront ceux des autres notes de $M_{\overline{0}}$.



2) Si nous nous intéressons maintenant à $t_{-\overline{5}}$ :

$$M_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$$
$$M_{\overline{7}} = t_{-\overline{5}}(M_{\overline{0}}) = \{\overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$

Cette fois, c'est la note $\overline{5}$ de $M_{\overline{0}}$ qui est remplacée par $\overline{6}$. Comme $\overline{6} = \#\,(\overline{5})$, on appellera cette note (dans $M_{\overline{7}}$) : "Fa dièse".

Remarquons qu'on a également :

$$\mathcal{M} = \{M_{-\overline{5k}} ; k \in \{0, 1, 2, ..., 11\}\}.$$

De façon générale, $M_{-\overline{5(k+1)}}$ ne diffère de $M_{-\overline{5k}}$ que par la note $\overline{-5k+6}$ (remplaçant la note $\overline{-5k+5}$ de $M_{-\overline{5k}}$). Ces notes $\overline{-5k+5}$ sont successivement, pour k entier compris entre 0 et 11 :

entre 0 et 11 : $\overline{5}, \overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}$ .

Comme précédemment, nous remarquons que, pour k compris entre 0 et 6, nous obtenons toutes les notes de $M_{\overline{0}}$ et elles seulement ; ce sont successivement :

FA, DO, SOL, RE, LA, MI, SI .

On pourra, de même que précédemment, définir par récurrence les noms des notes de toutes les tonalités $M_{-\overline{5n}}$ ($n \in \{1, 2, ..., 7\}$).

Dans $M_{-\overline{5n}}$, n noms de notes seront suivis de "dièse" ; ces noms seront les n premiers de la suite (Fa, Do, Sol, Ré, La, Mi, Si) ; les autres noms seront bien sûr ceux des autres notes de $M_{\overline{0}}$.

On aura bien entendu remarqué que l'ordre d'"apparition" des dièses est inverse de celui des bémols. Ce fait s'explique en remarquant que dans la tonalité "à n bémols" $M_{\overline{5n}}$ la note bémolisée $\overline{5(n-1)+10}$ porte le nom de la note $\overline{5(n-1)+11}$ de $M_{\overline{5(n-1)}}$, tandis que dans la tonalité "à p dièses" $M_{-\overline{5p}}$ la note diésée $\overline{-5(p-1)+6}$ a le nom de la note $\overline{-5(p-1)+5}$ de $M_{-\overline{5(p-1)}}$.

Or $\overline{5(n-1)+11} = \overline{5n+6}$ et $\overline{-5(p-1)+5} = \overline{-5p+10}$.

Si on résout (dans $\mathbf{Z}/12\,\mathbf{Z}$ ) l'équation $\overline{5n+6} = \overline{5p+10}$, on trouve $\overline{n+p} = \overline{8}$, d'où n+p = 8 (puisque n et p sont compris entre 1 et 7).

Appelons $\mathcal{M}\flat$ l'ensemble des tonalités majeures "á bémols" définies plus haut, et $\mathcal{M}\,\#$ l'ensemble des tonalités "à dièses". Nous avons :

$$\mathcal{M}\flat = \{M_{\overline{5n}} ; n \in \{1, 2, ..., 7\}\} = \{M_{\overline{1}}, M_{\overline{3}}, M_{\overline{5}}, M_{\overline{6}}, M_{\overline{8}}, M_{\overline{10}}, M_{\overline{11}}\}$$

$$\mathcal{M}\,\# = \{M_{-\overline{5p}} ; p \in \{1, 2, ..., 7\}\} = \{M_{\overline{1}}, M_{\overline{2}}, M_{\overline{4}}, M_{\overline{6}}, M_{\overline{7}}, M_{\overline{9}}, M_{\overline{11}}\}$$

D'où :

$$\mathcal{M}_\flat \cup \mathcal{M}\# \cup \{M_{\overline{0}}\} = \mathcal{M} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_\flat \cap \mathcal{M}\# = \{M_{\overline{1}}, M_{\overline{6}}, M_{\overline{11}}\} \quad (2)$$

(1) montre que $\mathcal{M}$ peut s'écrire $\mathcal{M} = \{M_{\overline{5z}} ; z \in \{-7, -6, ..., +7\}\}$
(2) indique que 3 tonalités "á bémols" sont également des tonalités "à dièses".

Donc toute tonalité majeure possède au moins un nom, et trois d'entre elles en ont même deux ! Ce sont, on vient de le voir :

$M_{\overline{1}}$, qui pourra s'appeler "Do dièse Majeur" ou "Ré bémol Majeur";

$M_{\overline{6}}$, qui pourra s'appeler "Fa dièse Majeur" ou "Sol bémol Majeur";

$M_{\overline{11}}$, qui pourra s'appeler "Si Majeur" ou "Do bémol Majeur".

N.B. : Les musiciens s'intéressent plutôt au signifiant qu'au signifié, et disent par exemple que Fa dièse Majeur et Sol bémol Majeur sont des tonalités *enharmoniques* (et non égales), ce qui signifie pour eux que les *noms* "Fa dièse Majeur" et "Sol bémol Majeur" correspondent à la même *tonalité* $M_{\overline{6}}$, la seule différence résidant dans les noms que portent les notes dans chacun des deux cas.

Il nous faut dire ici un mot des noms qu'on attribuera aux tonalités voisines d'une tonalité majeure donnée.

*Par convention, les musiciens ne considèrent comme tonalités voisines que celles dont tous les* **noms** *de notes* (sauf un puisque $\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+5}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+7}}) = 6$) *sont identiques à ceux de la tonalité majeure donnée.*

Au sens musical, les tonalités majeures voisines de la tonalité "à n dièses" (soit $M_{\overline{-5n}}$) seront donc, si elles existent, les tonalités "à (n-1) dièses" et "à (n+1) dièses" (soit $M_{\overline{-5(n-1)}}$ et $M_{\overline{-5(n+1)}}$ et ceci pour n naturel compris entre 0 et 7. Il en sera de même pour la tonalité "à n bémols".

Toute tonalité "à n dièses" (resp. bémols) — avec n compris entre 1 et 6 — admettra donc deux tonalités majeures voisines.

Il en sera de même de Do Majeur (correspondant à n = 0), qui admettra pour tonalités majeures voisines les tonalités de Sol Majeur (à 1 dièse) et de Fa Majeur (à 1 bémol).



Par contre, la tonalité à 7 dièses (resp. bémols) n'aura qu'une seule tonalité voisine : la tonalité à 6 dièses (resp. bémols) :

Si on ne s'intéresse qu'aux notes (et non à leur nom) la tonalité à 7 dièses, soit Do dièse Majeur (qui correspond à $M_{\overline{1}}$) admet comme tonalités majeures voisines $M_{\overline{6}}$ et $M_{\overline{8}}$ :

- $M_{\overline{6}}$ peut porter les noms de Sol bémol Majeur (à 6 bémols) ou de Fa dièse Majeur (à 6 dièses).

- $M_{\overline{8}}$ ne peut porter que le nom de La bémol Majeur (à 4 bémols). Seule la tonalité de Fa dièse Majeur ($M_{\overline{6}}$) sera considérée comme voisine de Do dièse Majeur, $M_{\overline{8}}$ étant à rejeter à cause de la convention faite plus haut.

Voici enfin deux problèmes, relatifs aux tonalités majeures, qu'ont souvent à se poser les musiciens :

*Premier problème :* Quel est le nom de la tonalité majeure dans laquelle n notes sont altérées (dièsées ou bémolisées) ?

Exemple : Dans quelle tonalité trouve t-on 5 notes dièsées ?

Nous savons que cette tonalité est $M_{\overline{-5 \times 5}}$, c'est-à-dire $M_{\overline{11}}$. Or $\overline{11}$ peut porter les noms de "Si" ou de "Do bémol" ; comme il s'agit ici d'une tonalité à dièses ce nom sera forcément "Si", et le nom de la tonalité cherchée est donc "Si Majeur".

*Deuxième problème :* On donne une tonalité majeure. Combien y a-t-il de notes altérées dans cette tonalité ? (C'est ce qu'on appelle chercher l'*armure* ou l'*armature* de la tonalité).

On repère d'abord si on se trouve en présence d'une tonalité à dièses ou d'une tonalité à bémols, ce qui est aisé en se basant sur la remarque suivante : les noms de toutes les tonalités majeures à bémols, autres que Fa Majeur, comportent le mot "bémol". Si donc le mot "bémol" ne figure pas dans le nom d'une tonalité majeure autre que Do Majeur ou Fa Majeur, il s'agit nécessairement d'une tonalité à dièses.

D'autre part, le nom de la tonalité est celui d'une note (par exemple : dans le cas de "Mi bémol Majeur", Mi bémol est le nom de la note $\overline{3}$) ; soit $\overline{k}$ cette note.

a) *S'il s'agit d'une tonalité à bémols,* le nombre n de notes bémolisées sera donné en résolvant l'équation $\overline{5n} = \overline{k}$ (puisque $M_{\overline{5n}}$ comporte n notes bémolisées), et en supposant de plus n compris entre 1 et 7.

On a donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} 5n \equiv k \ (12) \\ 1 \leqslant n \leqslant 7 \end{cases}$$

5 et 12 étant premiers entre eux, les 11 restes de la division de 5n par 12 (n naturel compris entre 1 et 11) sont tous non nuls et différents.

En effet :

$$5n \equiv 5n' \ (12) \Leftrightarrow 5(n-n') \equiv 0 \ (12) \Leftrightarrow n \equiv n' \ (12)$$

Ceci implique n = n', puisque n et n' sont compris entre 1 et 11.

k étant un naturel compris entre 1 et 11, l'équation $5n \equiv k \ (12)$ admettra donc une solution n et une seule, comprise entre 1 et 11.

Elle admettra par conséquent une solution au plus, comprise entre 1 et 7.

Or il y a effectivement une telle solution pour k égal à 1, 3, 5, 6, 8, 10 ou 11 (de par la construction même de $\mathcal{M}\flat$ ), qui sera donc unique.

Résolution pratique (sur un exemple) : Combien y a-t-il de notes altérées dans la tonalité de "La bémol Majeur" ?

D'après la remarque faite plus haut, il s'agit d'une tonalité à bémols. De plus, "La bémol" étant un nom de la note $\overline{8}$, nous aurons à résoudre l'équation $\overline{5n} = \overline{8}$, avec de plus n compris entre 1 et 7. Il nous faut donc trouver l'élément de $\overline{8}$ (donc de la forme 8+12p) qui est multiple de 5, et compris entre 5×1=5 et 5×7=35. En donnant à p les valeurs naturelles croissantes à partir de 0, on trouve aisément que cet élément est 20, donc n = 4. L'armure de La bémol Majeur est donc : 4 bémols.

b) *S'il s'agit d'une tonalité à dièses*, le problème est le même que ci-dessus, avec cette seule différence que le nombre de notes diésées sera trouvé en résolvant l'équation $-\overline{5n} = \overline{k}$ (n étant, ici aussi, compris entre 1 et 7). Cette équation est la même que $\overline{7n} = \overline{k}$ et, puisque 7 et 12 sont eux aussi premiers entre eux, on obtiendra des résultats identiques.

Exemple : Combien y a-t-il de notes diésées dans la tonalité de "Ré Majeur" ?

"Ré" est un nom de la note $\overline{2}$ ; nous avons donc à résoudre l'équation $-\overline{5n} = \overline{2}$, c'est-à-dire $\overline{7n} = \overline{2}$, en supposant de plus n compris entre 1 et 7. Cherchons donc l'élément de $\overline{2}$ (compris entre 7 et 49) qui est multiple de 7. C'est 14, d'où n = 2. L'armure de Ré Majeur est donc : 2 dièses.

(Evidemment cette méthode de recherche est peu rentable pour un musicien rompu à la méthode "classique", mais il s'agit surtout



d'exercices d'application des congruences, destinés à des élèves qui, pour la plupart, ne sont pas musiciens).

## IV Les tonalités mineures

On définit cette fois la tonalité de Do mineur comme étant l'ensemble $m_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}\}$ , et on pose $m_{\overline{a}} = t_{\overline{a}}(m_{\overline{0}})$.

Il se peut que, dans le cours d'une oeuvre musicale, on désire passer de l'emploi des notes de la tonalité majeure $M_{\overline{i}}$ à celui des notes de la tonalité mineure $m_{\overline{j}}$. Dans la musique "traditionnelle" on cherche à ne pas trop "dépayser" l'auditeur, et on prend $\overline{j}$ tel que $\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{j}})$ soit assez grand. Remarquant que (puisque $t_{\overline{i}}$ est bijective) l'on a $\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+a}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap m_{\overline{a}})$, il suffira de dresser le tableau donnant $\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap m_{\overline{a}})$ en fonction de $m_{\overline{a}}$ pour connaître tous les cas qui peuvent se présenter :

| $m_{\overline{a}}$ | $m_{\overline{0}}$ | $m_{\overline{1}}$ | $m_{\overline{2}}$ | $m_{\overline{3}}$ | $m_{\overline{4}}$ | $m_{\overline{5}}$ | $m_{\overline{6}}$ | $m_{\overline{7}}$ | $m_{\overline{8}}$ | $m_{\overline{9}}$ | $m_{\overline{10}}$ | $m_{\overline{11}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Card}\ (M_{\overline{0}} \cap m_{\overline{a}})$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 6 | 3 | 4 |

$\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap m_{\overline{a}})$ est donc maximum pour $\overline{a} = \overline{9}$, et il en sera par conséquent de même pour $\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+a}})$. La tonalité $m_{\overline{i+9}}$ est appelée *tonalité mineure relative* de $M_{\overline{i}}$.

Supposons maintenant que l'on veuille au contraire passer de la tonalité mineure $m_{\overline{i}}$ à la tonalité majeure $M_{\overline{i}}$. D'après ce qui précède, $\mathrm{Card}(m_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+b}})$ sera maximum pour $\overline{i} = \overline{i+b+9}$, c'est-à-dire pour $\overline{b} = \overline{3}$ ; la tonalité $M_{\overline{i+3}}$ sera donc appelée tonalité majeure relative de $m_{\overline{i}}$.

Remarquons que, puisque

$\mathrm{Card}\ (M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+9}}) = \mathrm{Card}\ (m_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+3}}) = 6$, une tonalité et sa relative ne diffèrent que par une seule note. En effet :

$$m_{\overline{i}} = \{\overline{i}, \overline{i+2}, \overline{i+3}, \overline{i+5}, \overline{i+7}, \overline{i+8}, \overline{i+11}\}$$
$$M_{\overline{i+3}} = \{\overline{i+3}, \overline{i+5}, \overline{i+7}, \overline{i+8}, \overline{i+10}, \overline{i}, \overline{i+2}\}$$

$\overline{i+11} \in m_{\overline{i}}$, $\overline{i+11} \notin M_{\overline{i+3}}$ . Cette note $\overline{i+11}$ est la *note sensible* de $m_{\overline{i}}$ : c'est elle qui fait "sentir", à l'écoute d'un morceau, qu'on est "en mineur" et non pas "en majeur").

On définit les noms des tonalités mineures à partir de ceux des tonalités majeures : remarquant que $\overline{i+9}$ est une note de $M_{\overline{i}}$, le nom de la tonalité mineure relative de $M_{\overline{i}}$ sera celui que porte la note $\overline{i+9}$ dans $M_{\overline{i}}$.

Prenons par exemple la tonalité de Mi Majeur ; quelle est sa tonalité mineure relative ?

Mi Majeur correspond à $M_{\overline{4}}$, dont la relative est $m_{\overline{1}}$. Dans $M_{\overline{4}}$, la note $\overline{1}$ a pour nom "do dièse" ; la tonalité relative de Mi Majeur est donc "Di dièse mineur".

Considérons maintenant le problème inverse ; par exemple, quel est le nom de la tonalité majeure relative de Si Bémol mineur ?

Si bémol mineur est un nom de $m_{\overline{10}}$, dont la relative est $M_{\overline{1}}$. Or $M_{\overline{1}}$ peut porteur deux noms : Do dièse Majeur et Ré bémol Majeur ; dans le premier cas la note $\overline{10}$ s'appelle "La dièse", et dans le second "Si bémol" ; c'est donc la seconde hypothèse que nous retiendrons : la tonalité relative de Si bémol mineur est "Ré bémol Majeur".

D'autre part, on convient de donner aux 6 notes de la relative mineure qui appartiennent aussi à la tonalité majeure le même nom que dans celle-ci. Quant à la note sensible, on remarque qu'elle est la transposée par # de la note $\overline{i+10}$ de la tonalité majeure relative $M_{\overline{i+3}}$ (si la tonalité mineure est $m_{\overline{i}}$) : son nom sera donc formé à partir de celui que porte $\overline{i+10}$ dans $M_{\overline{i+3}}$, en effectuant la transformation adéquate. Par exemple, si $\overline{i+10}$ s'appelle "Ré bémol", $\overline{i+11}$ s'appellera "Ré" ; si $\overline{i+10}$ s'appelle "Sol", $\overline{i+11}$ s'appellera "Sol dièse" ; si $\overline{i+10}$ s'appelle "Fa dièse", $\overline{i+11}$ s'appellera "Fa double dièse" ...

Notons enfin que l'*armature* d'une tonalité mineure est, par définition, celle de la tonalité majeure relative.

## V Tonalités voisines

Pour définir la notion de "tonalités voisines" nous devrons recourir aux tonalités mineures "anciennes". En effet, à l'origine, la tonalité de Do mineur était

$\mu_{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}\}$ (1) (la seule différence étant que la note $\overline{10}$ remplace $\overline{11}$).

Voici le tableau donnant $\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap \mu_{\overline{a}})$ en fonction de $\mu_{\overline{a}}$ :

| $\mu_{\overline{a}}$ | $\mu_{\overline{0}}$ | $\mu_{\overline{1}}$ | $\mu_{\overline{2}}$ | $\mu_{\overline{3}}$ | $\mu_{\overline{4}}$ | $\mu_{\overline{5}}$ | $\mu_{\overline{6}}$ | $\mu_{\overline{7}}$ | $\mu_{\overline{8}}$ | $\mu_{\overline{9}}$ | $\mu_{\overline{10}}$ | $\mu_{\overline{11}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap \mu_{\overline{a}})$ | 4 | 3 | 6 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 | 2 | 7 | 2 | 5 |

(1) En fait, il ne s'agissait pas alors d'une "tonalité", mais du "mode hypodorien".



$\mathrm{Card}(M_{\overline{0}} \cap \mu_{\overline{a}})$ est donc maximum (et égal à 7) pour $\overline{a} = \overline{9}$ ; c'est-à-dire que l'on a $M_{\overline{0}} = \mu_{\overline{9}}$, et, plus généralement, $M_{\overline{i}} = \mu_{\overline{i+9}}$ (d'où $\mu_{\overline{i}} = M_{\overline{i+3}}$).

La différence due à la note "sensible" disparaît donc ici.

Par analogie avec les tonalités mineures définies plus haut, on dira que $\mu_{\overline{i+9}}$ est la *tonalité mineure "ancienne" relative* de $M_{\overline{i}}$.

N.B. : En fait, le mot "relative" signifie ici "égale", du point de vue ensembliste tout au moins, car les tonalités $M_{\overline{i}}$ et $\mu_{\overline{i+9}}$, bien que constituées des mêmes éléments, n'ont pas le même rôle en Musique, du fait des relations différentes qui peuvent s'établir entre ces éléments, et qui constituent l'harmonie.
Notons de plus que tout ce que nous avons dit au sujet des tonalités mineures reste valable pour les tonalités mineures anciennes : noms des notes, ...; on n'a même plus ici le problème de la note sensible).

Puisque $\mu_{\overline{i}} = M_{\overline{i+3}}$ nous avons :

$$\mathrm{Card}(\mu_{\overline{i}} \cap \mu_{\overline{j}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{i+3}} \cap M_{\overline{j+3}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{j}}).$$

Donc — comme c'est le cas pour $\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap M_{\overline{j}})$ — $\mathrm{Card}(\mu_{\overline{i}} \cap \mu_{\overline{j}})$ sera maximum (et égal à 6) pour $\overline{j} = \overline{i+5}$ et $\overline{j} = \overline{i+7}$. Les tonalités $\mu_{\overline{i+5}}$ et $\mu_{\overline{i+7}}$ sont les *tonalités mineures anciennes voisines* de $\mu_{\overline{i}}$ ; pour leurs noms on fera les mêmes conventions que pour ceux des tonalités majeures voisines.

On se propose maintenant de définir la notion de "tonalités voisines", non plus seulement pour les tonalités majeures *ou* mineures anciennes, mais pour les tonalités majeures *et* mineures anciennes : nous appellerons tonalités voisines d'une tonalité donnée celles qui n'en diffèrent que par une note au plus.

a) Si la tonalité donnée est une tonalité majeure $M_{\overline{i}}$, on trouve d'après les divers tableaux qui précèdent que les tonalités voisines de $M_{\overline{i}}$ sont :

. $M_{\overline{i+5}}$ et $M_{\overline{i+7}}$ (tonalités majeures voisines de $M_{\overline{i}}$)

. $\mu_{\overline{i+2}}$, $\mu_{\overline{i+4}}$ et $\mu_{\overline{i+9}}$ (voir tableau précédent).

Remarquons que les tonalités $\mu_{\overline{i+2}}$, $\mu_{\overline{i+4}}$ et $\mu_{\overline{i+9}}$ sont respectivement les tonalités mineures anciennes relatives de $M_{\overline{i+5}}$, $M_{\overline{i+7}}$ et $M_{\overline{i}}$.

b) Si la tonalité donnée est une tonalité mineure ancienne $\mu_{\overline{i}}$, nous voyons d'après le tableau précédent (en remarquant tout d'abord que $\mathrm{Card}(\mu_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+a}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap \mu_{\overline{i-a}})$) que $\mathrm{Card}(\mu_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+a}})$ sera égal à 7 pour $\overline{-a} = \overline{9}$ (c'est-à-dire $\overline{a} = \overline{3}$), et égal à 6 pour $\overline{-a} = \overline{2}$ et $\overline{-a} = \overline{4}$ (c'est-à-dire $\overline{a} = \overline{10}$ et $\overline{a} = \overline{8}$).

Les tonalités voisines de $\mu_{\overline{i}}$ sont donc :

$\mu_{\overline{i+5}}$ et $\mu_{\overline{i+7}}$ (tonalités mineures anciennes voisines de $\mu_{\overline{i}}$)

et $M_{\overline{i+3}}$, $M_{\overline{i+8}}$ et $M_{\overline{i+10}}$.

Nous pouvons remarquer que, comme dans le cas précédent, les tonalités $M_{\overline{i+3}}$, $M_{\overline{i+8}}$ et $M_{\overline{i+10}}$ sont respectivement les tonalités majeures relatives de $\mu_{\overline{i}}$, $\mu_{\overline{i+5}}$ et $\mu_{\overline{i+7}}$.

Le "mode" mineur ancien fut progressivement abandonné au profit du mode mineur que nous avons défini en premier lieu. Cependant, les tonalités mineures continuèrent à bénéficier des privilèges de leurs "anciennes" en ce qui concerne la notion de "voisinage" (1) ; c'est pourquoi on convient d'appeler *tonalités mineures voisines* de $M_{\overline{i}}$ les tonalités $m_{\overline{i+2}}$, $m_{\overline{i+4}}$ et $m_{\overline{i+9}}$, et tonalités voisines de $m_{\overline{i}}$ les tonalités $M_{\overline{i+3}}$, $M_{\overline{i+8}}$, $M_{\overline{i+10}}$, $m_{\overline{i+5}}$ et $m_{\overline{i+7}}$, bien que :

$\mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+2}}) = \mathrm{Card}(M_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+4}}) = \mathrm{Card}(m_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+8}}) = \mathrm{Card}(m_{\overline{i}} \cap M_{\overline{i+10}}) = 5$ (et non 6), et même :

$$\mathrm{Card}(m_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+5}}) = \mathrm{Card}(m_{\overline{i}} \cap m_{\overline{i+7}}) = 4 \ !$$

De ce fait les tonalités mineures voisines d'une tonalité mineure donné m sont les tonalités mineures relatives des tonalités majeures voisines de la relative M de m (cf. schéma ci-dessous) :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\text{vois.}"] & M' \arrow[d, "\text{rel.}"] \\ m \arrow[u, "\text{rel.}"] \arrow[r, dashed, "\text{vois.}"] & m' \end{tikzcd}$$

(1) au sens musical, bien sûr !



Nous ferons cependant la même convention que pour les tonalités majeures voisines sur le nom des notes.

Les résultats obtenus plus haut peuvent donc finalement s'énoncer : "Les tonalités voisines d'une tonalité majeure (resp. mineure) donnée sont :

. sa relative ;

. ses tonalités majeures (resp. mineures) voisines et leurs relatives."

## VI L'imitation directe

Le problème que nous nous posons maintenant est le suivant :

Soit, dans une oeuvre musicale, un passage P ; on désire écrire un passage P' ressemblant le plus possible (pour l'oreille) à P, mais dont les sons n'auront plus la même hauteur que dans P.

La méthode la plus simple consistera bien sûr à effectuer une simple transposition de P, comme nous l'avons fait au paragraphe II avec un extrait de la Symphonie Pastorale. Mais ce procédé introduit un changement de tonalité : en effet, si P est écrit dans la tonalité $M_{\overline{i}}$ (par exemple), $P' = t_x(P)$ sera écrit dans la tonalité $M_{\overline{i+x}}$.

Si on ne veut pas changer de tonalité, il faudra donc "adapter" $t_x(P)$, c'est-à-dire qu'on cherchera à obtenir, à partir de $t_x(P)$, un passage P' :

(1) qui sera écrit dans la tonalité de P (soit $M_{\overline{i}}$) ;

(2) dont les sons seront les plus "proches" possible de ceux de $t_x(P)$, c'est-à-dire qu'on son de $t_x(P)$ (non associé à une note de $M_{\overline{i}}$) sera remplacé par un son (associé à une note de $M_{\overline{i}}$) situé à un demi-ton ;

(3) tel qu'à deux notes distinctes de $M_{\overline{i+x}}$ soient associées deux notes distinctes de $M_{\overline{i}}$.

Si nous appelons $S_i$ l'ensemble des sons associés aux notes de $M_{\overline{i}}$, nous avons $P \subset S_i$ et nous voulons $P' \subset S_i$.

Comment passer de P à P' ?

Ceci revient à chercher une application $\Phi$ de $S_i$ dans lui-même, vérifiant les conditions (2) et (3) :

$$\Phi : f_a \longrightarrow f_b$$

Or $\phi$ induit une application g de $M_{\bar{i}}$ dans $M_{\bar{i}}$ :

$$g : \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$$

On pourra donc d'abord chercher à déterminer cette application g, puis définir de la façon suivante :

$f_a \xrightarrow{s} \bar{a} \xrightarrow{g} \bar{b} \longrightarrow f_b$, $f_b$ étant déterminé à partir de $\bar{b}$ comme l'élément (unique) de $\bar{b}$ qui est situé à un demi-ton au plus de $t_x(f_a)$. Cet élément existe bien puisque $\bar{b}$ est situé à un demi-ton au plus de $t_{\bar{x}}(\bar{a})$. (1)

Etudions maintenant l'application g :

Tout d'abord, g est injective : en effet, à deux notes distinctes de $M_{\bar{i}}$ correspondent par $t_{\bar{x}}$ deux notes distinctes de $M_{\overline{i+x}}$ et, d'après la condition (3), à ces deux notes de $M_{\overline{i+x}}$ correspondront deux notes distinctes de $M_{\bar{i}}$.

Or une injection d'un ensemble fini dans lui-même est bijective ; g sera donc une permutation de $M_{\bar{i}}$. Nous allons même montrer que g est nécessairement une *permutation circulaire de $M_{\bar{i}}$* ; mais il nous faut pour cela définir auparavant ce que nous appellerons "permutations circulaires" de $M_{\bar{i}}$.

On "numérote" d'abord les notes de $M_{\bar{i}}$ de 0 à 6 en considérant la bijection canonique de $\mathbf{Z}/_{7\mathbf{Z}}$ sur $M_{\bar{i}}$ qui à $\bar{\bar{0}}$ (classe de 0 pour la congruence modulo 7) associe $\bar{i}$, à $\bar{\bar{1}}$ associe $\overline{i+2}$, ..., à $\bar{\bar{6}}$ associe $\overline{i+11}$. On définit ensuite les permutations circulaires de $M_{\bar{i}}$ comme les permutations de $M_{\bar{i}}$ induites (grâce à cette bijection) par les translations de $\mathbf{Z}/_{7\mathbf{Z}}$.

Comme on l'a déjà vu à plusieurs reprises, on ne restreint pas le problème en supposant que la tonalité dans laquelle est écrit le passage P est $M_{\bar{0}}$ (au lieu de $M_{\bar{i}}$). Montrons donc que g est une permutation circulaire de $M_{\bar{0}}$.

D'après la condition (2), il faut que (si $\bar{a}$ est une note quelconque de $M_{\bar{0}}$) $g(\bar{a})$ soit située à un demi-ton au plus de $t_{\bar{x}}(\bar{a})$. En particulier

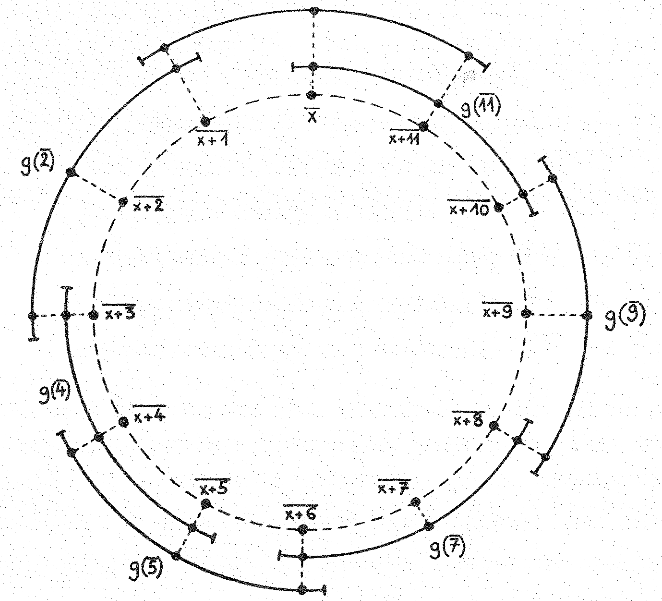
---

(1) Par abus de langage, nous dirons que $\bar{a}$ est situé à un demi-ton au plus de $\bar{b}$ lorsque a-b est congru à 0,1 ou −1 modulo 12.



puisque $t_{\bar{x}}(\bar{0}) = \bar{x}$), $g(\bar{0})$ pourra être égale à $\overline{x-1}$, $\bar{x}$ ou $\overline{x+1}$; de même puisque $t_{\bar{x}}(\bar{2}) = \overline{x+2}$), $g(\bar{2})$ pourra être égale à $\overline{x+1}$, $\overline{x+2}$ ou $\overline{x+3}$, et ainsi de suite.

Nous obtiendrons finalement (en utilisant la représentation classique du groupe additif $\mathbf{Z}/_{7\mathbf{Z}}$) le schéma suivant, où nous avons indiqué les images possibles, par g, des différentes notes de $M_{\bar{0}}$ :




Nous voyons sur cette figure que g sera une permutation circulaire de $M_{\bar{0}}$, sauf dans deux cas :

*1er cas :* $g(\bar{4}) = \overline{x+5}$ et $g(\bar{5}) = \overline{x+4}$.

*2ème cas :* $g(\bar{0}) = \overline{x+11}$ et $g(\overline{11}) = \bar{x}$.

Montrons que ces deux cas ne peuvent se produire :

*1er cas :* Puisque $g(\bar{4})$ n'est pas égal à $t_{\bar{x}}(\bar{4})$ (c'est-à-dire $\overline{x+4}$), c'est que $\overline{x+4} \notin M_{\bar{0}}$ (condition 2) ; ceci est incompatible avec le fait que $g(\bar{5})$ ($= \overline{x+4}$) appartient à $M_{\bar{0}}$. Ce cas est donc à rejeter.

*2ème cas :* De même que ci-dessus, $\overline{x} \notin M_{\overline{0}}$ (puisque $g(\overline{0}) \neq \overline{x}$) est incompatible avec le fait que $g(\overline{11})$ appartient à $M_{\overline{0}}$. Ce cas est donc également à éliminer.

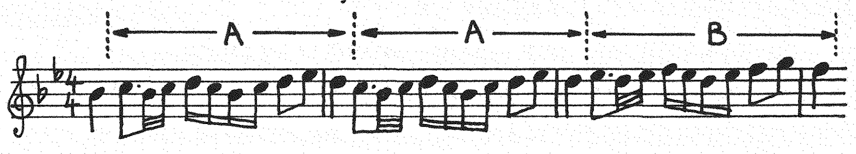
Par conséquent g, qui est une permutation circulaire de $M_{\overline{i}}$, sera déterminée dès qu'on connaîtra $g(\overline{i})$ ; cette note ($g(\overline{i})$ devant, elle aussi, appartenir à $M_{\overline{i}}$, on aura sept types possibles d'imitation sans modulation (1), qui seront associés aux permutations circulaires suivantes de $M_{\overline{i}}$ :

$g_1 : \overline{i} \longmapsto \overline{i}$ (imitation à l'unisson)
$g_2 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+2}$ (imitation à la Seconde supérieure)
$g_3 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+4}$ (imitation à la Tierce supérieure)
$g_4 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+5}$ (imitation à la Quarte supérieure)
$g_5 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+7}$ (imitation à la Quinte supérieure)
$g_6 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+9}$ (imitation à la Sixte supérieure)
$g_7 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+11}$ (imitation à la Septième supérieure)

Les permutations réciproques de ces permutations définissent les imitations aux "intervalles inférieurs" ; comme le groupe des permutations circulaires de $M_{\overline{i}}$, isomorphe au groupe additif $Z/_{7Z}$, comporte 7 éléments, ces permutations réciproques sont des permutations déjà trouvées ; on remarque d'ailleurs que $(g_k)^{-1} = g_{9-k}$ pour k entier compris entre 2 et 7, et que $(g_1)^{-1} = g_1$.

Bien sûr, si P est écrit dans la tonalité $M_{\overline{i}}$, ce sont les permutations circulaires de $M_{\overline{i}}$ (et non de $M_{\overline{0}}$) que l'on considérera.

Prenons à titre d'exemple le début de cet Air à Variations de Haëndel :




(1) En Musique, changer de tonalité se dit "moduler".



Le thème A, écrit en Si bémol Majeur (armature : 2 bémols), se transcrit :

$$0_4\ 10_3\ 0_4\ 2_4\ 0_4\ 10_3\ 0_4\ 2_4\ 3_4\ 2_4$$

Effectuons une imitation sans modulation de ce thème à la tierce supérieure. [Signalons au passage que la hauteur des sons-images n'est pas précisée ; dans ce cas, on sous-entend que le transformé d'un son $f_i$ par $\Phi$ est :

. au-dessus (resp. en-dessous) de $f_i$ si l'imitation est "supérieure" (resp. "inférieure")

. situé à moins d'un octave de f]

A est écrit dans la tonalité $M_{\overline{10}}$ ; l'imitation à la tierce supérieure correspond à l'indice 3. Nous devons donc considérer la permutation circulaire $g_3$ de $M_{\overline{10}}$, soit :

$$\begin{array}{l} \overline{10} \longmapsto \overline{2} \\ \overline{0} \longmapsto \overline{3} \\ \overline{2} \longmapsto \overline{5} \\ \overline{3} \longmapsto \overline{7} \\ \overline{5} \longmapsto \overline{9} \\ \overline{7} \longmapsto \overline{10} \\ \overline{9} \longmapsto \overline{0} \end{array}$$

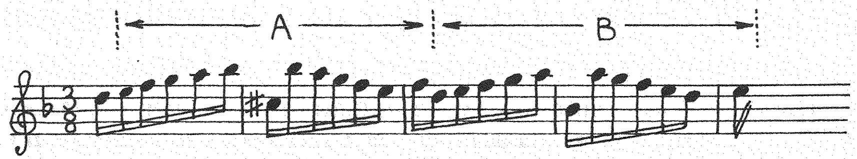
L'imitation de A sera donc :

$$3_4\ 2_4\ 3_4\ 5_4\ 3_4\ 2_4\ 3_4\ 5_4\ 7_4\ 5_4$$

Nous remarquons qu'il s'agit de B.

Si le passage P est écrit dans une tonalité mineure $m_{\overline{i}}$, on se ramènera d'abord à la tonalité mineure ancienne $\mu_{\overline{i}}$ (en bémolisant la note sensible $\overline{i+11}$) ; comme $\mu_{\overline{i}} = M_{\overline{i+3}}$, on est ramené au cas d'une tonalité majeure ; il ne restera plus ensuite qu'à diéser la note $\overline{i+10}$, et finalement l'application h cherchée sera une permutation circulaire de $m_{\overline{i}}$. On indexera ces permutations circulaires de la même façon que dans le cas d'une tonalité majeure.

Soit par exemple cet extrait de l'Invention à deux voix n° 4 de J.-S. Bach :




Le théme A, écrit en Ré mineur, se transcrit :

$$4_4\ 5_4\ 7_4\ 9_4\ 10_4\ 1_4\ 10_4\ 9_4\ 7_4\ 5_4\ 4_4\ 5_4$$

Si nous voulons effectuer une imitation sans modulation de ce thème à la seconde inférieure, nous devrons considérer la permutation circulaire $\gamma_6$ de $m_{\bar 2}$ :

$$\begin{array}{rcl} \bar 2 & \longmapsto & \bar 1 \\ \bar 4 & \longmapsto & \bar 2 \\ \bar 5 & \longmapsto & \bar 4 \\ \bar 7 & \longmapsto & \bar 5 \\ \bar 9 & \longmapsto & \bar 7 \\ \overline{10} & \longmapsto & \bar 9 \\ \bar 1 & \longmapsto & \overline{10} \end{array}$$

L'imitation de A sera donc :

$$2_4\ 4_4\ 5_4\ 7_4\ 9_4\ 10_3\ 9_4\ 7_4\ 5_4\ 4_4\ 2_4\ 4_4$$

Il s'agit du thème B, qui succède à A.

Il existe bien d'autres types d'imitation directe ; en voici encore un autre, à titre indicatif : l'*imitation à l'unisson dans la tonalité homonyme*, c'est-à-dire la reprise d'un thème "majeur"en mineur, ou inversement.

On appelle tonalités homonymes deux tonalités portant le même nom, mais dont l'une est majeure et l'autre mineure (comme par exemple Mi bémol Majeur et Mi bémol mineur).

Prenons le cas de la reprise d'un thème majeur en mineur : le passage P est écrit avec les notes de $M_{\bar a}$, et on cherche à l'imiter à l'unisson par P', écrit avec les notes de $m_{\bar a}$. La bijection $h_{\bar a}$ de $M_{\bar a}$ sur $m_{\bar a}$ que l'on utilisera sera la bijection "canonique" qui laissera invariantes les notes de $M_{\bar a} \cap m_{\bar a}$ (c'est-à-dire $\bar a$, $\overline{a+2}$, $\overline{a+5}$, $\overline{a+7}$ et $\overline{a+11}$) et transformera $\overline{a+4}$ et $\overline{a+9}$ (notes de $M_{\bar a} - m_{\bar a}$) respectivement en $\overline{a+3}$ et $\overline{a+8}$ (notes de $m_{\bar a} - M_{\bar a}$).



Ordonnons $M_{\bar a}$ de la façon habituelle :

Considérant la bijection canonique de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sur $M_{\bar a}$ qui à 1 associe $\bar a$, à 2 associe $\overline{a+2}$, ..., à 7 associe $\overline{a+11}$, $M_{\bar a}$ sera ordonné par la relation induite par la relation $<$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

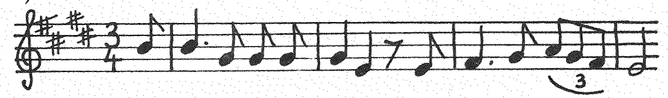
La $i^e$ note de $M_{\bar a}$ sera donc l'image de i par cette bijection.

Nous pourrons bien entendu ordonner $m_{\bar a}$ de la même façon.

Alors nous pouvons définir $h_{\bar a}$ comme la bijection qui, à la $i^e$ note de $M_{\bar a}$, fait correspondre la $i^e$ note de $m_{\bar a}$.

$h_{\bar a}$ induit une bijection $k_{\bar a}$ de $S_{\bar a}$ (ensemble des sons associés aux notes de $M_{\bar a}$) sur $S'_{\bar a}$ (ensemble des sons associés aux notes de $m_{\bar a}$) : $k_{\bar a}(f_i)$ sera le représentant de $h_{\bar a}(\bar i)$ qui est situé à un demi-ton au plus de $f_{\bar i}$.

Prenons par exemple cet extrait du Voyage d'Hiver, de Schubert (Le Tilleul) :




Ce passage, écrit en Mi majeur ($M_{\bar 4}$), se transcrit :

$$9_3\ 9_3\ 8_3\ 8_3\ 8_3\ 8_3\ 4_3\ 4_3\ 6_3\ 8_3\ 9_3\ 8_3\ 6_3\ 4_3$$

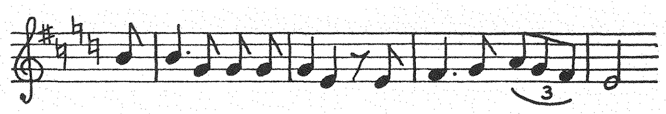
La bijection $h_{\bar a}$ étant :

$$\begin{array}{rcl} \bar 4 & \longmapsto & \bar 4 \\ \bar 6 & \longmapsto & \bar 6 \\ \bar 8 & \longmapsto & \bar 7 \\ \bar 9 & \longmapsto & \bar 9 \\ \overline{11} & \longmapsto & \overline{11} \\ \bar 1 & \longmapsto & \bar 0 \\ \bar 3 & \longmapsto & \bar 3 \end{array}$$

L'imitation du passage précédent en Mi mineur se transcrira donc :

$$9_3\ 9_3\ 7_3\ 7_3\ 7_3\ 7_3\ 4_4\ 4_3\ 6_3\ 7_3\ 9_3\ 7_3\ 6_3\ 4_3$$

On trouve effectivement, dans la suite de l'oeuvre :




( Au point de vue de l'écriture musicale, remarquons que, puisque le nom des notes ne change pas, la position de celles-ci reste la même sur la portée).

Si au contraire on veut passer d'une tonalité mineure à la tonalité majeure homonyme, on utilisera bien sûr la bijection réciproque $(h_{\overline{a}})^{-1}$ de $m_{\overline{a}}$ sur $M_{\overline{a}}$.

Signalons enfin que l'imitation à l'unisson dans la tonalité homonyme peut être "combinée" avec une "véritable" transposition :

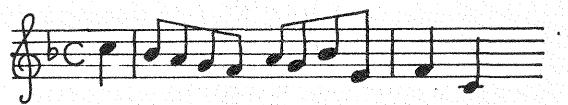
Considérons par exemple $t_x o k_{\overline{a}}$ ; cette application est associée à $t_{\overline{x}} o h_{\overline{a}}$, qui fait passer de $M_{\overline{a}}$ à $m_{\overline{a+x}}$ et fait correspondre à la $i^e$ note de $M_{\overline{a}}$ la $i^e$ note de $m_{\overline{a+x}}$.

(On peut en outre remarquer que $t_{\overline{x}} o h_{\overline{a}} = h_{\overline{a+x}} o t_{\overline{x}}$ )

Inversement $t_y o (k_{\overline{a}})^{-1}$ est associée à $t_{\overline{y}} o (h_{\overline{a}})^{-1}$ qui fait correspondre, à la $i^e$ note de $m_{\overline{a}}$, la $i^e$ note de $M_{\overline{a+y}}$. Cette dernière application est égale à $(h_{\overline{a+y}})^{-1} o t_{\overline{y}}$.

C'est ce type d'imitation que Mozart utilise en particulier dans le Premier mouvement de la Sonate pour piano en Fa Majeur (KV 533) :

Le thème est exposé sous la forme A :

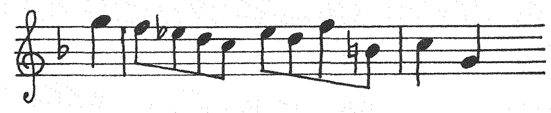


qui se transcrit :

$$0_4\ 10_3\ 9_3\ 7_3\ 5_3\ 9_3\ 7_3\ 10_3\ 4_3\ 5_3\ 0_3$$



Ce thème est repris plus loin sous la forme B :



qui se transcrit :

$$7_4\ 5_4\ 3_4\ 2_4\ 0_4\ 3_4\ 2_4\ 5_4\ 11_3\ 0_4\ 7_3$$

Le thème A est écrit en Fa Majeur ($M_{\overline{5}}$), alors que B est écrit en Do mineur ($m_{\overline{0}}$) [note sensible : Si bécarre].

Cherchons quel est $t_7 o k_{\overline{5}}(A)$ :

a) $k_{\overline{5}}$ est associé à $h_{\overline{5}}$ :

$$\begin{array}{ccc} M_{\overline{5}} & \longrightarrow & m_{\overline{5}} \\ \overline{5} & \longmapsto & \overline{5} \\ \overline{7} & \longmapsto & \overline{7} \\ \overline{9} & \longmapsto & \overline{8} \\ \overline{10} & \longmapsto & \overline{10} \\ \overline{0} & \longmapsto & \overline{0} \\ \overline{2} & \longmapsto & \overline{1} \\ \overline{4} & \longmapsto & \overline{4} \end{array}$$

Nous aurons donc, pour $k_{\overline{5}}$, en notant le son $f_i$ sous la forme $\alpha_k$ (cf. paragraphe I) :

$$\begin{array}{ccc} 5_k & \longmapsto & 5_k \\ 7_k & \longmapsto & 7_k \\ 9_k & \longmapsto & 8_k \\ 10_k & \longmapsto & 10_k \\ 0_k & \longmapsto & 0_k \\ 2_k & \longmapsto & 1_k \\ 4_k & \longmapsto & 4_k \end{array}$$

b) Finalement, pour $t_7 o k_{\overline{5}}$ :

$$\begin{aligned} 5_k &\longmapsto 0_{k+1} \\ 7_k &\longmapsto 2_{k+1} \\ 9_k &\longmapsto 3_{k+1} \\ 10_k &\longmapsto 5_{k+1} \\ 0_k &\longmapsto 7_k \\ 2_k &\longmapsto 8_k \\ 4_k &\longmapsto 11_k \end{aligned}$$

Alors $t_7 o k_{\overline{5}}(A)$ s'écrit :

$7_4\ 5_4\ 3_4\ 2_4\ 0_4\ 3_4\ 2_4\ 5_4\ 11_3\ 0_4\ 7_3$, qui n'est autre que B.

## VII L'imitation par mouvement contraire

Il s'agit cette fois d'imiter un passage P par "mouvement contraire", c'est-à-dire que tout intervalle ascendant (resp. descendant) sera transformé en un intervalle descendant (resp. ascendant), différant aussi peu que possible de cet intervalle.

Nous aurons besoin pour cela de définir les *symétries* de l'échelle de sons $\mathcal{E}$ .

Une symétrie $s_x$ est l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par :

$$f_i \longmapsto f_{x-i}$$

(x étant un entier **donné**).

Remarquons que, si $f_j$ est un autre son de $\mathcal{E}$, on a $(x-j)-(x-i) = -(j-i)$, ce qui montre que si deux sons déterminent un intervalle de $|k|$ demi-tons ascendant (resp. descendant), leurs images déterminent un intervalle de $|k|$ demi-tons descendant (resp. ascendant).

De plus, on a $s_x o s_y = t_{x-y}$ (ce qui montre, en prenant x = y, que $s_x$ est involutive).

La symétire $s_x$ induit sur G une application $\sigma_{\overline{x}} : \overline{i} \longmapsto \overline{x-i}$

On a de même $\sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{y}} = t_{\overline{x-y}}$ (donc $\sigma_{\overline{x}}$ est, elle aussi, involutive).

Nous avons aussi (en faisant $\overline{y} = \overline{0}$) : $\sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{0}} = t_{\overline{x}}$ .



D'où, en composant avec $\sigma_{\overline{0}}$ à droite :

$$\sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{0}} \circ \sigma_{\overline{0}} = t_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{0}}\text{, soit : } \sigma_{\overline{x}} = t_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{0}} .$$

Pour trouver les tranformés de $M_{\overline{0}}$ par $\sigma_{\overline{x}}$, il nous suffira donc de connaître $\sigma_{\overline{0}}(M_{\overline{0}})$.

Or on a :

$$\sigma_{\overline{0}} \left| \begin{aligned} \overline{0} &\longmapsto \overline{0} \\ \overline{2} &\longmapsto \overline{10} \\ \overline{4} &\longmapsto \overline{8} \\ \overline{5} &\longmapsto \overline{7} \\ \overline{7} &\longmapsto \overline{5} \\ \overline{9} &\longmapsto \overline{3} \\ \overline{11} &\longmapsto \overline{1} \end{aligned} \right.$$

Nous remarquons que $\sigma_{\overline{0}}(M_{\overline{0}}) = M_{\overline{8}}$ , et donc que :

$$\sigma_{\overline{x}}(M_{\overline{0}}) = t_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{0}}(M_{\overline{0}}) = t_{\overline{x}}(M_{\overline{8}}) = M_{\overline{x+8}}.$$

Remarquons maintenant que $\sigma_{\overline{x}} \circ t_{\overline{y}} = \sigma_{\overline{x-y}}$ (en effet on a :

$$\overline{a} \overset{t_{\overline{y}}}{\longmapsto} \overline{a+y} \overset{\sigma_{\overline{x}}}{\longmapsto} \overline{(x-y)-a} ).$$

On aura alors :

$$\sigma_{\overline{x}}(M_{\overline{i}}) = \sigma_{\overline{x}} \circ t_{\overline{i}}(M_{\overline{0}}) = \sigma_{\overline{x-i}}(M_{\overline{0}}) = M_{\overline{x-i+8}} = M_{\overline{x+8-i}}.$$

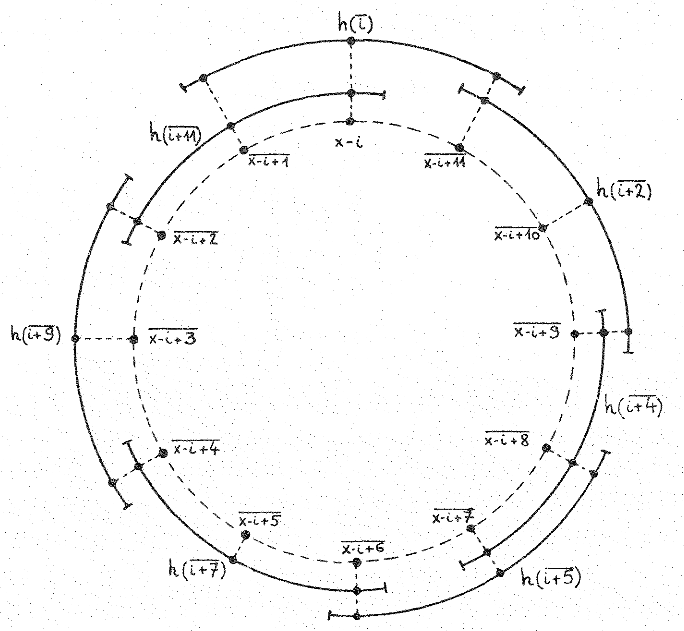
Donc, si P est écrit en $M_{\overline{i}}$, $s_x(P)$ sera écrit en $M_{\overline{x+8-i}}$ et (sauf si $\overline{2i} = \overline{x+8}$) il y aura modulation.

Si on ne désire pas changer de tonalité, il faudra donc, ici aussi, "adapter" $s_x(P)$ en un passage P' écrit en $M_{\overline{i}}$.

On posera les mêmes conditions que pour l'imitation directe sans modulation (page **15** ), en remplaçant bien sûr $t_x$ par $s_x$.

On est donc ramené à chercher une bijection h de $M_{\overline{i}}$ dans lui-même.

Nous allons montrer, de la même manière qu'au paragraphe VI, que h est une "*permutation anticirculaire*" de $M_{\overline{i}}$ ; nous appellerons permutation anticirculaire de $M_{\overline{i}}$ une permutation de $M_{\overline{i}}$ induite (grâce à la bijection canonique de $\mathbf{Z}/_{7}\mathbf{Z}$ sur $M_{\overline{i}}$ définie page 16) par une symétrie de $\mathbf{Z}/_{7}\mathbf{Z}$. La démonstration est tout à fait analogue à la démonstration du paragraphe VI ; elle est laissée au soin du lecteur. La figure est cette fois la suivante (puisque $\sigma_{\overline{x}}(\overline{i}) = \overline{x-i}$ ) :




h sera donc déterminée dès qu'on connaîtra $h(\overline{i})$, ce qui donnera sept types possibles d'imitation pour une tonalité donnée :

$$h_1 : \overline{i} \longmapsto \overline{i}$$
$$h_2 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+2}$$
$$h_3 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+4}$$
$$h_4 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+5}$$
$$h_5 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+7}$$
$$h_6 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+9}$$
$$h_7 : \overline{i} \longmapsto \overline{i+11}$$

Remarquons que ces permutations seront involutives, puisqu'elles sont induites par les symétries de $\mathbf{Z}/_{7}\mathbf{Z}$.



Le problème est maintenant de passer de h à une application h' de $S_i$ dans $S_i$ (rappelons que $S_i$ est l'ensemble des sons associés aux notes de $M_{\overline{i}}$). Nous avons :

$$f_a \overset{s}{\longmapsto} \overline{a} \overset{h}{\longmapsto} h(\overline{a}) \longmapsto f_b$$

$f_b$ sera déterminé comme le son (associé à $h(\overline{a})$) situé à un demi-ton au plus de $s_x(f_a)$.

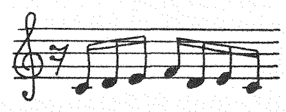
Remarquons que (si nous notons un son donné $\alpha_k$ comme indiqué page 3 ), si on a : $h'(\alpha_k) = \beta_{k'}$ , alors

$$h'(\alpha_{k+p}) = \beta_{k'-p} \quad (p \in \mathbf{Z}).$$

En effet : $\alpha_{k+p}$ est associé à la même note que $\alpha_k$, donc $h'(\alpha_{k+p})$ sera associé à la même note que $\beta_{k'}$. D'autre part l'intervalle $(\alpha_k, \alpha_{k+p})$ est un intervalle de $|p|$ octaves, et on aura donc $h'(\alpha_{k+p}) = \beta_{k+q}$, avec $q = p$ ou $q = -p$ ; l'imitation se faisant par mouvement contraire, seule la seconde possibilité est à retenir.

Exemple pratique d'imitation par mouvement contraire :

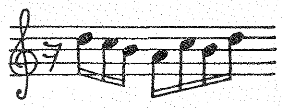
Le sujet (soit A) de l'Invention à deux voix n° 1 (en Do Majeur) de J.-S. Bach comporte le passage suivant :



qui se transcrit :

$0_3\ 2_3\ 4_3\ 5_3\ 2_3\ 4_3\ 0_3$

Plus loin nous trouvons plusieurs imitations par mouvement contraire de ce passage, entre autres B :



soit $2_4\ 0_4\ 11_3\ 9_3\ 0_4\ 11_3\ 2_4$

Considérons d'abord $h_2$ (qui fait passer de $\overline{0}$ à $\overline{2}$) :

$$\overline{0} \longmapsto \overline{2}$$
$$\overline{2} \longmapsto \overline{0}$$
$$\overline{4} \longmapsto \overline{11}$$
$$\overline{5} \longmapsto \overline{9}$$
$$\overline{7} \longmapsto \overline{7}$$
$$\overline{9} \longmapsto \overline{5}$$
$$\overline{11} \longmapsto \overline{4}$$

Si nous voulons passer de $0_3$ à $2_4$ nous aurons, pour h' (en procédant de proche en proche) :

$$\begin{array}{ccc} 0_3 & \longmapsto & 2_4 \\ 2_3 & \longmapsto & 0_4 \\ 4_3 & \longmapsto & 11_3 \\ 5_3 & \longmapsto & 9_3 \\ 7_3 & \longmapsto & 7_3 \\ 9_3 & \longmapsto & 5_3 \\ 11_3 & \longmapsto & 4_3 \end{array}$$

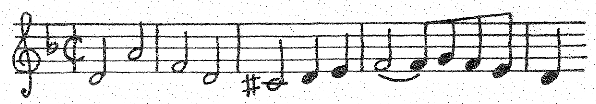
Et, plus généralement (d'après la remarque faite plus haut) :

$$\begin{array}{l} 0_{3+p} \longmapsto 2_{4-p} \\ 2_{3+p} \longmapsto 0_{4-p} \\ 4_{3+p} \longmapsto 11_{3-p} \\ 5_{3+p} \longmapsto 9_{3-p} \\ 7_{3+p} \longmapsto 7_{3-p} \\ 9_{3+p} \longmapsto 5_{3-p} \\ 11_{3+p} \longmapsto 4_{3-p} \end{array}$$

Nous constatons que h' fait bien passer de A à B.

Si le passage P est écrit dans une tonalité mineure $m_{\bar{i}}$, on utilisera de même les permutations anticirculaires de $m_{\bar{i}}$ .

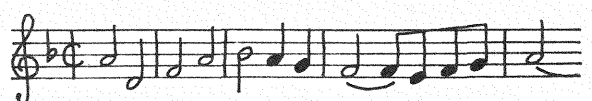
Prenons par exemple le thème suivant de l'Art de la Fugue (1) :



Ce thème se transcrit :

$$2_3\ 9_3\ 5_3\ 2_3\ 1_3\ 2_3\ 4_3\ 5_3\ 7_3\ 5_3\ 4_3\ 2_3$$

Il est écrit en Ré mineur ($m_{\bar{2}}$). Nous trouvons dans le cours de l'oeuvre :



(Contrapunctus IV)

(1) L'oeuvre de Bach est vraiment une mine inépuisable pour toutes ces questions.



La transcription chiffrée de ce passage est :

$$9_3\ 2_3\ 5_3\ 9_3\ 10_3\ 9_3\ 7_3\ 5_3\ 4_3\ 5_3\ 7_3\ 9_3.$$

L'application h' qui fait passer de $2_3$ à $9_3$ est la suivante :

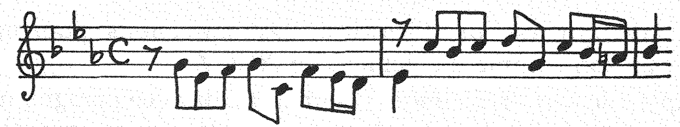
$$\begin{array}{l} 2_{3+p} \longmapsto 9_{3-p} \\ 4_{3+p} \longmapsto 7_{3-p} \\ 5_{3+p} \longmapsto 5_{3-p} \\ 7_{3+p} \longmapsto 4_{3-p} \\ 9_{3+p} \longmapsto 2_{3-p} \\ 10_{3+p} \longmapsto 1_{3-p} \\ 1_{4+p} \longmapsto 10_{2-p} \end{array}$$

Cette application fait bien passer du sujet de la fugue de base à celui du "Contrapunctus IV".

N.B. : Pour terminer, notons que, pour des raisons d'ordre harmonique, l'imitation d'un thème n'est pas toujours aussi rigoureuse que celles que nous venons de voir. L'exemple d'"irrégularité" le plus courant est la *mutation :*

Si l'imitation par mouvement contraire est involutive, il n'en est pas de même de l'imitation directe. En particulier, si on a $g(\bar{i}) = \overline{i+7}$, on aura $g(\overline{i+7}) = \overline{i+2}$ (que la tonalité soit majeure ou mineure). La mutation consiste à remplacer $\overline{i+2}$ par $\bar{i}$.

Exemple : Sujet et réponse de la Fugue 2, vol. II, du Clavecin bien tempéré (J.-S. Bach) :



Ce passage a pour transcription :

$$(7_3\ 3_3\ 5_3\ 7_3\ 0_3\ 5_3\ 3_3\ 2_3\ 3_3)\ (0_4\ 10_3\ 0_4\ 2_4\ 7_3\ 0_4\ 10_3\ 9_3\ 10_3)$$

L'imitation du sujet (écrit en $M_{\bar{3}}$) à la quinte supérieure devrait normalement être :

$$2_4\ 10_3\ 0_4\ 2_4\ 7_3\ 0_4\ 10_3\ 8_3\ 10_3$$

Nous constatons donc deux anomalies dans cette imitation :

a) $2_4$ est remplacé par $0_4$ : ce n'est autre que la mutation.

b) $8_3$ est remplacé par $9_3$ : il s'agit d'une modulation, tout à fait transitoire, en $M_{\overline{10}}$.

## VIII L'écriture des sons

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé connue l'écriture musicale. Voyons comment on pourrait l'introduire.

Ceci pourrait se faire juste après le § I, mais nous avons préféré regrouper tout ce qui était basé sur la division en 12 de l'octave.

Comme nous l'avons vu au début, le nom d'un son $f_i$ de l'échelle des sons $\mathcal{E}$ est constitué de :

a) un nom de note (Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si)

b) un entier, quotient de la division euclidienne de i par 12.

c) éventuellement, une altération (dièse, bémol ou bécarre), voire parfois deux.

L'altération sera indiquée explicitement, juste devant le signe graphique représentant le son, ou au début de l'oeuvre (cas de l'armure, voir plus loin). Nous ne nous en occuperons pas ici.

D'autre part, convenons de numéroter les noms de notes grâce à la bijection canonique :

$$1 \longmapsto \text{Do}$$
$$2 \longmapsto \text{Ré}$$
$$\cdots\cdots$$
$$7 \longmapsto \text{Si}$$

Nous pourrons alors, grâce à cette bijection, identifier l'ensemble $\{\text{Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$ à l'ensemble :

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Pour ce qui est de l'écriture des sons nous pourrons donc considérer un son comme un élément de $\mathcal{N} \times \mathbf{Z}$.

Par exemple : le son "La bémol 3" sera noté, dans ce paragraphe : (6,3) (comme nous l'avons dit plus haut, on ne tient pas compte, ici, de l'altération éventuelle).

Définissons maintenant une application de $\mathcal{N} \times \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ :

$$\Theta : \quad \mathcal{N} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$
$$(a, p) \longmapsto a + 7p$$

Nous dirons que le son (a,p) est situé "*X crans (1) au-dessus*" du son (b,q) si :

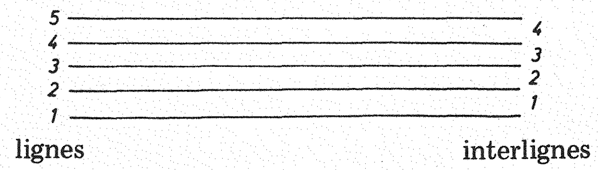
$$\Theta(a,p) - \Theta(b,q) = (a+7p) - (b+7q) = X \qquad (X \in \mathbf{Z}_+).$$

(1) ce terme a été forgé pour les besoins de la cause ; ce n'est pas un terme musical.



(Nous pourrons bien sûr dire aussi que (b,q) est X crans en-dessous de (a,p)).

Venons-en maintenant à l'écriture des sons : pour cela, on utilise une *portée*, constituée de 5 parallèles "horizontales", implicitement numérotées en partant du bas, et appelées *lignes* ; les interlignes sont, eux aussi, numérotés de bas en haut :

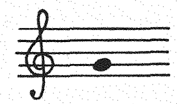



Ceci définit une échelle de 9 "barreaux", (lignes et interlignes), l'écart entre deux barreaux consécutifs correspondant à un cran.

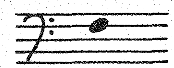
Cette portée est destinée à représenter une partie de l'échelle des sons. Pour cela, on fixe la position d'un son de cette échelle grâce à une *clé*.

Les deux clés les plus couramment utilisées sont :

a) *la clé de "Sol 2e ligne"*, qui fixe la position du Sol 3 sur la deuxième ligne :



b) *la clé de "Fa 4e ligne"*, qui fixe la position du Fa 2 sur la quatrième ligne :

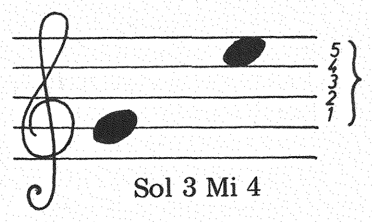


Les sons seront placés de gauche à droite (dans l'ordre de leur émission), et sur le "barreau" correspondant au nombre de crans qui sépare le son considéré du son de référence.

Exemple : Prenons la clé de Sol 2e ligne. Où placer le Mi 4 (soit (3,4)) ? Sol 3 se note (5,3) et nous aurons donc :

$$(3,4) = 3 + 7 \cdot 4 = 31$$
$$(5,3) = 5 + 7 \cdot 3 = 26$$

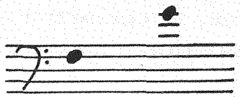
Mi 4 est donc situé 5 crans au-dessus de Sol 3 ; on le placera donc dans le 4e interligne.




Si certains sons ne peuvent (en raison du grand nombre de crans qui les sépare du son de référence) s'écrire sur la portée, on les place hors de celle-ci, en matérialisant de petites lignes supplémentaires.

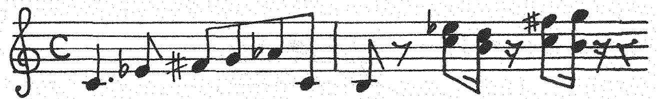
Par exemple : en clé de Fa 4e ligne, où s'écrira Sol 3 ?

Nous avons : $(5 + 7.3) - (4 + 7.2) = 8$, donc Sol 3 est situé 8 crans au-dessus de Fa 3, et s'écrira par conséquent :




Il resterait encore à transcrire la durée des sons et le rythme ; le rythme est indiqué par la mesure, la durée relative par le signe graphique représentant le son (ronde, blanche, noire, croche, ...), et la durée absolue par une indication métronomique. Nous n'insisterons pas ici sur ces points.

Voici un exemple de lecture de sons : le début de la Fantaisie pour piano en Di mineur (KV 475) de Mozart :



Do3 Mi♭3 Fa#3 Sol3 La♭3 Do3 Si2 $\left\{\begin{matrix}\text{Mi}\flat 4\\ \text{Do4}\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\text{Ré4}\\ \text{Si3}\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\text{Fa}\#4\\ \text{Do4}\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\text{Sol4}\\ \text{Si3}\end{matrix}\right.$

Notons enfin que, pour simplifier l'écriture, on indique l'armure de la tonalité d'un morceau au début de celui-ci : les notes diésées (resp. bémolisées) sont représentées par un # (resp. ♭ ) placé sur la ligne (ou dans l'interligne) d'un son représentant cette note. Ceci dispensera (dans le cours du morceau) d'écrire le signe # ou ♭ devant chaque son



équivalent à ceux indiqués. Pour des raisons d'économie du même ordre, lorsqu'un son est altéré accidentellement dans une mesure, tous les sons suivants de cette mesure qui lui sont équivalents sont altérés de la même façon (pour plus de détails, veuillez vous reporter à votre Solfège habituel).

Ces quelques pages n'avaient pour but que de montrer un certain nombre de résultats que l'on peut obtenir à partir de quelques notions assez simples de Mathématique (congruences, isomorphismes de groupes, permutations d'un ensemble fini, ...). Elles ne prétendent qu'à indiquer quelques directions de réflexion qui pourront peut-être aider des collègues à trouver de nouveaux exercices d'application de leur cours, en se faisant au besoin épauler par le professeur de Musique. De plus, il va sans dire que ces exercices, où l'on peut vérifier à l'oreille l'exactitude d'un raisonnement ou d'un calcul, sont très bien accueillis par les élèves, une fois le premier moment de surprise passé. Et peut-être les aideront-ils plus tard à découvrir et à apprécier la vraie Musique de leur temps.

*Bibliographie :* P. BARBAUD : la Musique, discipline scientifique (Dunod, 1968).

Imprimerie VAUDREY – LYON

Le directeur de la publication M. GLAYMANN