Le jeu des poignées de mains

par André FABRE - I.R.E.M. de Lyon

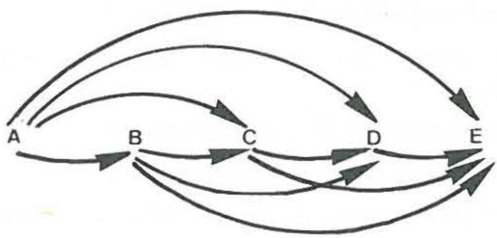
Ce jeu a été proposé l'an dernier à des élèves de CM_2. Il pourrait être abordé au CE_2 dans sa première partie.

1) *Thème du jeu*

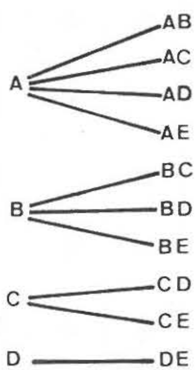
Le matin, en arrivant à l'école, les élèves se serrent la main. On ne serre la main qu'une fois. Si A serre la main de B, B ne serre pas la main de A à nouveau.

2) *Le jeu*

5 élèves d'une équipe sont munis d'un badge sur leur poche de poitrine : A, B, C, D, E. Un secrétaire dénombre les poignées de mains. Ensuite, dans les équipes, on analyse ce qui s'est passé.
Deux équipes donnent le schéma suivant :



On trouve ainsi 10 poignées de mains.
Deux autres proposent un arbre :



Une équipe a tracé le schéma cartésien de la relation $\mathcal{S}$: "*...serre la main de ...*" dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$:

	A	B	C	D	E
A		★	★	★	★
B			★	★	★
C				★	★
D					★
E					

On suppose ici que, lors d'une poignée de mains, l'un des élèves, A par exemple, serre la main de B sans que B serre la main de A (la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique). Ainsi, le nombre de poignées de mains est le nombre d'éléments du graphe de $\mathcal{S}$.

Mais on aurait pu envisager une autre relation $\mathcal{T}$ dans $\{A, B, C, D, E\}$:

"*...et...se serrent la main*" ($\mathcal{T}$ est symétrique).

Voici ci-dessous le schéma cartésien de $\mathcal{T}$.

Le nombre de poignées de mains (10) est *la moitié* du nombre d'éléments (20) du graphe de $\mathcal{T}$.

	A	B	C	D	E
A		★	★	★	★
B	★		★	★	★
C	★	★		★	★
D	★	★	★		★
E	★	★	★	★	

3) *Poursuite du jeu*

Pour 5 élèves, on a échangé 10 poignées de mains. Y a-t-il une règle donnant le nombre de poignées de mains connaissant le nombre d'élèves ?

Un élève dit : *le double*. Il est contesté par d'autres qui lui disent : "*sûrement pas, car pour 2 élèves on n'a pas 4 poignées de mains*".

Les élèves sont invités à chercher ce qui se passe pour 1, 2, 3, 4, 6, 7 élèves. Leurs recherches sont résumées dans un tableau de ce type :

Nombre d'élèves		Nombre de poignées de mains
1	0	0
2	1	1
3	1 + 2	3
4	1 + 2 + 3	6
5	1 + 2 + 3 + 4	10
6	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	21

Avant de faire établir le tableau, le maître demande aux élèves d'expliquer le résultat des recherches.

Dans toutes les équipes, on a vu que pour :

1 élève, on avait 0 poignée de mains.
2 élèves, on avait 1 poignée de mains.
3 élèves, on avait 1 + 2 poignées de mains.
4 élèves, on avait 1 + 2 + 3 poignées de mains.
5 élèves, on avait 1 + 2 + 3 + 4 poignées de mains.

Deux équipes ont schématisé ainsi le problème :

Il y a 1 élève (le premier) : 0 poignée de mains.

Un autre élève arrive : 1 poignée de mains.

Un 3ème arrive, les 2 déjà arrivés lui serrent la main, donc 1 + 2.

Un 4ème arrive, les 3 déjà arrivés lui serrent la main, donc 1 + 2 + 3, etc...

4) *Généralisation*

Essayons de trouver une formule (activité réservée au CM 2).

Pour 3 élèves, j'ai	$1 + 2$	poignées de mains
Pour 4 élèves, j'ai	$1 + 2 + 3$	poignées de mains
Pour 5 élèves, j'ai	$1 + 2 + 3 + 4$	poignées de mains

Et pour un nombre n d'élèves ?
Toutes les équipes répondent :
Le nombre de poignées de mains sera :
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots\ldots\ldots + (n - 1)$

Ici les élèves se souviennent de la formule qu'ils avaient trouvée lors de deux approches différentes de la somme des naturels d'ordre a : $1 + 2 + 3 + \cdots + a$. Ils adaptent la formule $(a = n - 1)$ et trouvent que le nombre de poignées de mains est :

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (1)$$

(n étant le nombre d'élèves).

Ce résultat est vérifié pour les valeurs de n de 1 à 7.

On cherche le nombre de poignées de mains pour les 24 élèves de la classe ; pour les 10 maîtres de l'école ; un matin où il y a déjà 78 élèves à 8 h. 20.

Le schéma cartésien de la relation $\mathcal{C}$ (voir fin du 2)) aurait pu conduire au raisonnement suivant :

Pour n élèves, le nombre total de cases est $n \times n$ (nombre d'éléments du produit cartésien de l'ensemble des élèves par lui-même) ou n^2.

Le nombre de cases sans croix (diagonale) est n.

Le graphe de la relation a donc $(n^2 - n)$ éléments.

Et le nombre de poignées de mains est la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $\dfrac{n^2 - n.}{2}$

5) *Poursuite du jeu*

Les élèves ont grandi. Maintenant ils sont mariés. Souvent, le soir, ils se retrouvent à plusieurs ménages. Bien entendu, en arrivant on se serre la main.

Un soir, il y a 3 ménages (c'est-à-dire 3 messieurs et 3 dames). Combien de poignées de mains ?

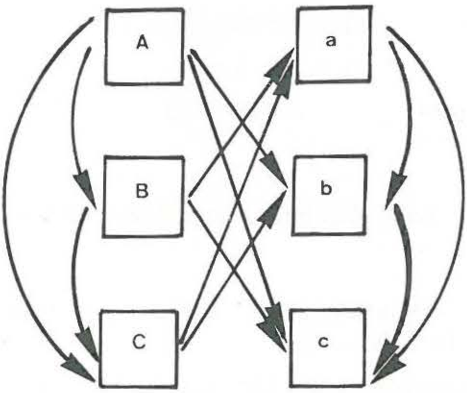
Certains élèves (peu nombreux) veulent répondre aussitôt :

6 (le double de 3 qu'on trouvait avec $n = 3$);

15 (ce qu'on trouvait avec $n = 6$).

On fait jouer la scène (la classe est mixte).

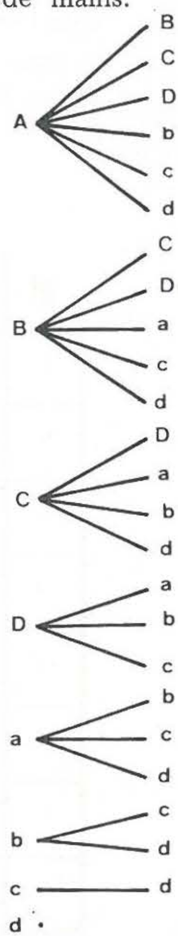
Après quelques hésitations, on convient qu'aucun mari ne serre la main de son épouse. Sur le schéma, A désigne monsieur A, a désigne madame A, etc...



L'analyse de la situation donne :
les hommes entre eux :
3 poignées de mains
les femmes entre elles :
3 poignées de mains

chaque homme serre la main de 2 dames :
$2 \times 3 = 6$ poignées.

Nombre total :
12 poignées de mains.



On constate que la règle n'est plus la même. Les équipes vont donc chercher la nouvelle règle en reprenant pour 1 ménage, 2 ménages, 3 ménages, 4 ménages, etc...

Là encore, diverses méthodes sont utilisées selon les équipes :

a) *Avec un arbre*

On travaille pour 4 ménages (A,B,C,D) ce qui donne :

Puis, sur une question du maître, on fait un arbre donnant les poignées de mains entre hommes, un autre donnant les poignées de mains entre dames, un autre donnant les poignées de mains des hommes aux dames.

a - *entre hommes :* $1 + 2 + 3 = 6$

b - *entre dames :* $1 + 2 + 3 = 6$

c - *entre hommes et dames :* $4 \times 3 = 12$

donc, au total, $6 + 6 + 12 = 24$

b) *par un schéma sagittal :* voir plus haut. Le schéma devient vite confus.

c) *par un schéma cartésien :* de la relation $\mathcal{S}'$: "*...serre la main de...*" dans l'ensemble $\{A, B, C, D, a, b, c, d\}$.

Un élève a repris le schéma cartésien fait dans le cas de 4 élèves, et en isolant des parties sur le schéma (voir traits noirs) montre qu'on obtient 4 fois le nombre de poignées de mains trouvé dans le cas de 4 élèves.

$\mathcal{R}$	A	B	C	D	a	b	c	d
A		★	★	★		★	★	★
B			★	★	★		★	★
C				★	★	★		★
D					★	★	★	
a						★	★	★
b							★	★
c								★
d								

6) *Analysons nos résultats*

Par exemple pour 4 ménages :

a) *entre hommes,* on utilise la formule trouvée précédemment :

le nombre de poignées de mains est $\dfrac{4 \times (4-1)}{2} = 6$

b) *entre dames :* $\dfrac{4 \times (4-1)}{2} = 6$

c) chaque homme serre la main de chaque dame sauf de sa propre femme : $4 \times 3 = 12$

Et avec n ménages (il y a n hommes et n dames) :

a) entre messieurs : $\dfrac{n(n-1)}{2}$

b) entre dames : $\dfrac{n(n-1)}{2}$

c) n hommes serrent la main de $n - 1$ dames : $n(n-1)$

Ce qui fait au total deux fois $n(n-1)$.

Le nombre de poignées de mains pour les n ménages est :

$$2n\,(n-1) \qquad (2)$$

7) *Applications*

a) Comment passe-t-on de (1) à (2) ?
En appliquant l'opérateur multiplicatif $4^{\times}$.

b) Vérifier, à l'aide de (2), les résultats trouvés antérieurement pour 1, 2, 3, 5 ménages.

c) Chercher le nombre de poignées de mains pour 6, 7, 8, 10 ménages.

d) Un jour, il y a exceptionnellement 6 ménages et un monsieur célibataire.
Combien de poignées de mains ?

Messieurs : $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$

Dames : $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

Les 6 époux avec 5 dames : $6 \times 5 = 30$

Le célibataire avec 6 dames : $1 \times 6 = 6$

Au total : 72 poignées de mains.

On peut essayer de généraliser ce problème avec n ménages et p célibataires.

e) Un jour où il n'y a que des ménages, on a compté 84 poignées de mains.
Combien de ménages ?

$$2n\,(n-1) = 84$$
$$\text{ou} \quad n\,(n-1) = 42$$

Les élèves cherchent les décompositions de 42 en produit de 2 facteurs qui diffèrent de 1.

Dans leur liste, ils trouvent 7×6

donc $n = 7$

C'est la seule solution.

f) Même question pour 144 poignées de mains.

Introduction des probabilités à l'Elémentaire

par Daniel GILIS et Bernard HERAUD - Québec, Canada

Sous l'impulsion dynamique de Willi Walser, un programme d'étude des notions de probabilité et statistique a été introduit et développé dans les écoles pilotes de l'Elémentaire de Sherbrooke (Québec) à partir de l'automne 1969.

Dans cet article, nous nous proposons d'analyser différents aspects du contenu de ce programme expérimental.

1. *Insertion du programme de probabilité dans le contexte général du projet mathématique de Sherbrooke.*

L'introduction, au moyen de jeux conceptuels appropriés, de certaines notions fondamentales des probabilités auprès des enfants de l'Elémentaire a été favorisée par l'existence de certains facteurs tel que le maniement sous forme opératoire des notions ensemblistes et des concepts logiques du calcul des attributs.

Voici,à titre d'exemple concret, une activité au cours de laquelle des enfants de 10 ans, en utilisant les concepts logiques de négation, de conjonction, de disjonction appréhendés antérieurement, ont pu concevoir avec plus de clarté ce qu'il faut entendre par le terme probabiliste *d'événement.*

Matériel

Le matériel de l'*expérience* est constitué des 24 grands blocs logiques peints sur des balles de ping-pong, placées dans une urne.