Activités non-numériques

par A. MYX - I.R.E.M. de Lyon

Les nouveaux programmes de 1970 font une assez faible part aux activités *non-numériques*. Dans les objectifs du Cours Préparatoire, nous relevons ce titre : activités de classement et de rangement.

Ces premières activités sur des ensembles d'objets ont pour but, dans l'esprit de ce programme, de contribuer essentiellement à l'acquisition des expressions : "autant que" ; "plus que" ; "moins que".

Ces activités de rangement, de classement, de mise en correspondance terme à terme, doivent permettre une meilleure compréhension du concept de *naturel*.

Ensuite, à part les têtes de chapitres concernant l'observation de l'espace et la description d'objets géométriques, on ne semble s'intéresser qu'aux concepts de *nombres* et *d'opérations*.

Les Commentaires du Programme 1970 nous apportent une confirmation de ce jugement.

Consultons alors les ouvrages parus jusqu'à ce jour, soit pour le maître, soit pour l'enfant. Que relevons-nous ?

— De nombreux jeux sur des manipulations d'objets tendant à développer *l'esprit logique* de l'enfant ;

— D'importantes activités sur des *relations non-numériques*, sur la composition des relations, sur la notion de bijection ;

— Des jeux menant à la notion d'*opérateur non-numérique*. Ces jeux, d'une grande importance pédagogique, sont une initiation très fructueuse à une bonne compréhension de la notion d'opérateur numérique.

C'est à ce dernier aspect des activités non-numériques proposées aux enfants que nous allons consacrer cet article.

1. *Fabrication d'un ensemble d'objets*

On dispose de jetons de deux couleurs : noire et blanche.

Un jeton de couleur blanche sera symbolisé par ○.

Un jeton de couleur noire sera symbolisé par ●.

On forme des assemblages de trois jetons posés côte à côte. Deux assemblages peuvent différer :

— soit par l'ordre dans lequel se succèdent les couleurs,

— soit par le choix des couleurs elles-mêmes.

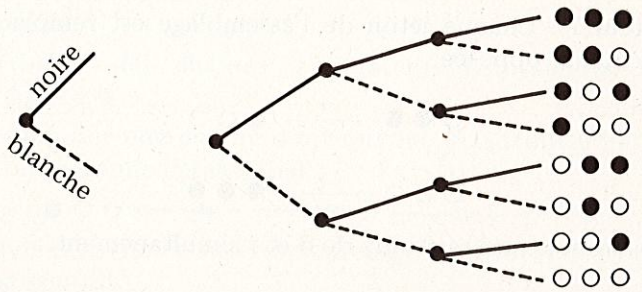
Exemples :

● ○ ○ , ○ ● ○ , ○ ○ ● sont trois assemblages distincts.

○ ● ● , ● ○ ○ , ● ● ● sont trois assemblages également distincts.

Combien d'assemblages distincts pouvons-nous former ?

1) Un arbre peut nous donner la solution : c'est en général la solution du maître ; pas toujours celle de l'enfant.



2) Les enfants trouvent facilement les huit assemblages possibles, soit de façon empirique, soit aussi en décomposant la difficulté de la façon suivante :

Ils cherchent les assemblages

ne contenant *aucun jeton blanc :* ● ● ●

ne contenant qu'*un seul jeton blanc :* ○ ● ●
● ○ ●
● ● ○

ne contenant que *deux jetons blancs :* ○ ○ ●
○ ● ○
● ○ ○

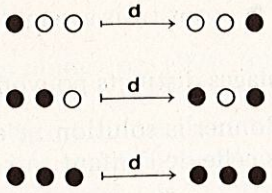
contenant les *trois jetons blancs :* ○ ○ ○

C'est dans cette collection de huit assemblages que les enfants vont travailler, définir des "machines" transformant un assemblage en un autre...

2. *Les opérateurs*

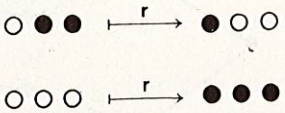
opérateur d : On place le jeton de *gauche tout à droite.*

Exemples :

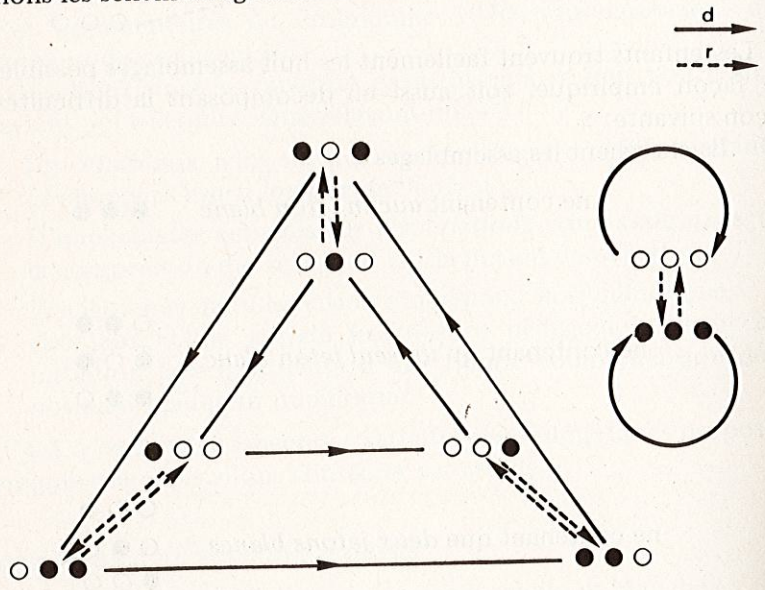


opérateur r : Chaque jeton de l'assemblage est remplacé par un jeton de couleur opposée.

Exemples :



Dessinons les schémas sagittaux de d et r simultanément :



Les enfants doivent bien entendu dessiner séparément ces deux schémas.

Sur le schéma de d, ils observent la présence de quatre "îlots" ou "orbites".

Dans un îlot, on retrouve les assemblages ne contenant qu'un seul jeton noir ; dans un autre, les jetons ne contenant que deux jetons noirs ... etc...

Sur le schéma de r, il apparaît quatre orbites également intéressantes à décrire. Soulignons, sans nous attarder, un certain nombre de remarques très importantes :

1) En appliquant successivement soit la machine d, soit la machine r, on ne peut pas atteindre certains assemblages à partir d'un assemblage donné à l'avance. Ainsi, il n'est pas possible d'atteindre ●●● à partir de ○●● par une chaîne d'opérateurs contenant d et r.
Avant d'arriver aux dessins de ces schémas, il est peut-être bon de faire un peu de "golf"...
Par exemple :

— Trouver des chaînes d'opérateurs équivalentes allant de l'état ●●○ à ●○○.

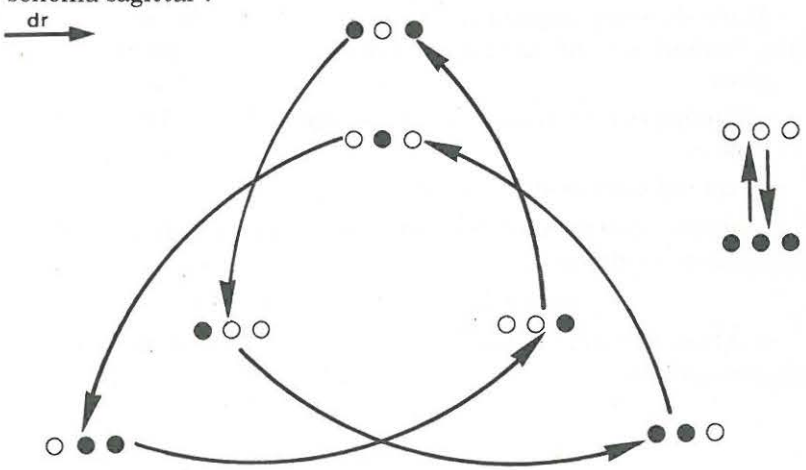
— S'imposer une chaîne d'opérateurs, puis trouver l'état final si l'on se donne l'état initial :

2) d-suivi-de-d est un nouvel opérateur (codé dd). On en dessine le schéma sagittal.
Chaque fois que l'on définit un nouvel opérateur (par exemple dd), il est fructueux de se demander s'il existe une manipulation *simple* correspondante, aisée à décrire dans la langue de l'enfant.

3) Il apparaît évident que ddd et rr représentent la "*machine à ne rien faire*", c'est-à-dire, au niveau mathématique, l'opérateur *neutre*. Nous le coderons e :

$$ddd = e \ ; \ rr = e$$

4) dr (c'est-à-dire d-suivi-de-r) est un nouvel opérateur dont voici le schéma sagittal :



Sur le schéma sagittal de dr, on dénombre deux orbites :

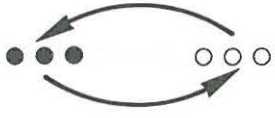
— l'une contenant six assemblages,

— l'autre contenant deux assemblages.

C'est à ce stade de l'étude que nous pouvons mesurer l'intérêt pédagogique de ce jeu.

Bien souvent, trop souvent même, pour vérifier l'*égalité* de deux opérateurs, les enfants "partent" d'un seul état et vérifient qu'ils arrivent au même état final en appliquant chaque opérateur.

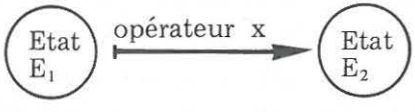
On voit donc l'intérêt du second îlot :



pour lequel les schémas sagittaux de r et dr sont les mêmes !

Cela est fondamental : trop de jeux — à mon avis — soulignent le caractère "ponctuel" des bijections (opérateurs).

On s'intéresse à des schémas du type :



au lieu de dresser le schéma sagittal *complet* de la bijection.

3. *Table de Pythagore*

Après diverses manipulations sur l'ensemble de ces huit assemblages, l'enfant aura découvert un certain nombre de propriétés.

Ainsi,

— l'opérateur rd (r-suivi-de-d) est égal à l'opérateur dr (d-suivi-de-r).

— rdd (rd-suivi-de-d) est un nouvel opérateur.

Donnant initialement les deux seuls opérateurs r et d, nous aurons mis en évidence :

e (rr ou ddd), rd (ou dr), dd, rdd

— Avant d'établir la table de Pythagore, on peut faire découvrir quelques égalités :

rdr = d

rddr = dd ... etc ...

Voici la table de Pythagore :

2ème opérateur

1er opérateur suivi de	e	rd	dd	r	d	rdd
e	e	rd	dd	r	d	rdd
rd	rd	dd	r	d	rdd	e
dd	dd	r	d	rdd	e	rd
r	r	d	rdd	e	rd	dd
d	d	rdd	e	rd	dd	r
rdd	rdd	e	rd	dd	r	d

J'ai délibérément décrit cette troisième étape (table de Pythagore) avec rapidité.

Il s'agit là d'un travail que l'on ne peut aborder qu'au niveau du Cours Elémentaire 2.

Je ne soulignerai pas davantage l'exploitation que l'on peut faire de cette table :

Simplification de chaînes d'opérateurs sans avoir recours aux schémas sagittaux.

Exemple :

rdrdrdd = rd

Résolution d'équations.

Exemple : Trouver l'opérateur x tel que x-suivi-de-d = e ...etc...

4) *Conclusion*

Sans vouloir minimiser l'intérêt de la table de Pythagore, il semble souhaitable de travailler le plus longtemps possible au niveau des opérateurs eux-mêmes et sur les schémas sagittaux.

Au lieu de construire cette table, examinons une autre étape tout aussi enrichissante.

Nous verrons qu'elle nous amènera à réfléchir en profondeur sur les notions de bijection, de composition des bijections, de codage de ces bijections.

Revenons à l'opérateur dr (d-suivi-de-r).

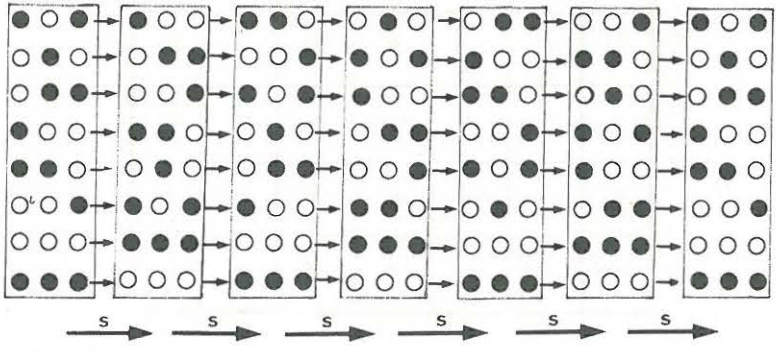
Codons-le désormais s et étudions combien de fois nous devons composer s avec lui-même pour obtenir l'opérateur neutre.

Le schéma sagittal de dr (voir 2) nous donne intuitivement le résultat :

$$s - s - s - s - s - s = e$$

(en examinant "globalement" les deux orbites).

Dressons les schémas sagittaux de s ; ss ; sss ; ...etc...



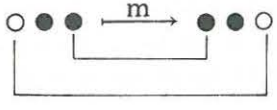
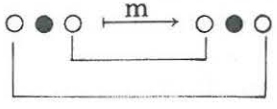
On vient de vérifier que ssssss = e.

De plus, on établit les résultats suivants :

ss est égal à dd
sss est égal à r
ssss est égal à d
sssss est égal à rdd
ssssss est égal à e

Si le lecteur est patient, il pourra recommencer ce petit jeu, sur le même ensemble des huit assemblages de jetons, en choisissant cette fois-ci les deux opérateurs suivants :

d (inchangé) : on place le jeton de gauche tout à droite.

m : on échange les jetons situés aux deux extrémités.

Exemples :