

5

QUELQUES THÈMES
AU DELA
DU PROGRAMME
RÉNOVÉ

La logique à l'École Élémentaire

par Maurice GLAYMANN

Directeur de l'I.R.E.M. de Lyon

Dans cet article, je vais présenter une brève introduction à la logique au niveau de l'Enseignement Élémentaire. J'utiliserai un langage et un symbolisme adaptés aux adultes, mais je tâcherai d'indiquer au passage les moyens de présenter ces concepts aux enfants. J'emploierai ici le symbolisme polonais, mais il va de soi que l'on pourra utiliser tout autre symbolisme, à condition qu'il soit clair et précis. Lorsque nous nous adressons aux enfants, il est prudent de ne pas introduire un nouveau symbolisme ou un nouveau concept, avant qu'ils ne comprennent parfaitement le sens opératoire du concept ; en outre, il faudrait attendre qu'ils ressentent la nécessité d'introduire un symbole ou un mot.

Il est important de travailler sur des ensembles d'objets familiers aux enfants ; ainsi par exemple on peut utiliser les blocs logiques, les élèves de la classe, etc... Nous allons nous intéresser à la *classification* des éléments de l'ensemble choisi en fonction de certains *attributs*.

L'attribut "rouge" peut être associé à la question

"ce bloc est-il rouge ? "

A chaque élément de l'ensemble des blocs logiques, cette question conduit à une réponse

oui (O) ou *non* (N)

Nous pouvons aussi associer l'attribut et la manipulation qui consiste à placer un bloc à l'intérieur ou à l'extérieur d'un domaine fermé.

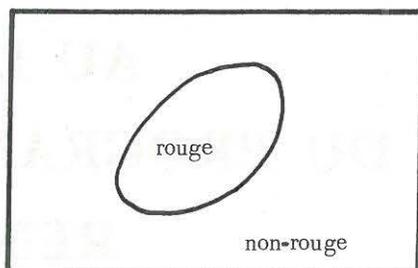


fig. 1

ou à répartir les blocs dans un domaine du type suivant :

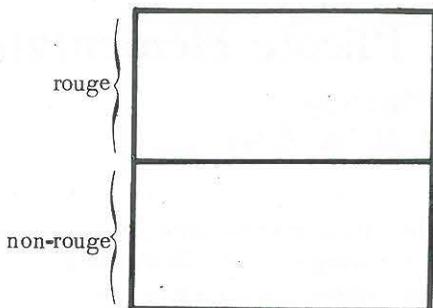


fig. 2

L'attribut *rouge* est associé à l'ensemble de tous les éléments qui sont rouges.

Les figures 1 et 2 donnent des représentations des ensembles associés aux attributs *rouge* et *non-rouge*.

Il existe plusieurs façons d'obtenir de nouveaux attributs à partir d'attributs donnés. Un moyen commode de présenter les opérations sur les attributs consiste à donner à certains enfants des *questions relatives à ces attributs* et à donner à d'autres enfants des *questions dont les réponses sont fonction des réponses données* par les premiers enfants.

Donnons un exemple. Attribuons à Anne la question :

"Ce bloc est-il rouge ?"

(ou toute autre question qui admet pour réponse *oui* ou *non*).

Attribuons alors à Bernard la question :

“*Est-ce que la réponse d’Anne est non ?*”

Voici une table qui donne les différents cas possibles :

Anne	Bernard
O	N
N	O

En effet, Bernard répond *oui* lorsque la réponse d’Anne est *non* et réciproquement.

L’attribut associé à la question de Bernard (nous dirons par abus de langage “*l’attribut de Bernard*”) s’appelle la *négation* de l’attribut d’Anne.

L’attribut d’Anne est *rouge*, celui de Bernard est *non-rouge*.

Si nous utilisons la lettre *a* pour désigner l’attribut d’Anne, alors nous pouvons désigner par *Na* la négation de cet attribut ; en désignant alors par *b* l’attribut de Bernard, nous avons

$$b = N a$$

Sur la figure 2, si vous placez les éléments qui possèdent l’attribut d’Anne dans le rectangle supérieur, alors vous devez mettre dans le rectangle inférieur les éléments qui possèdent l’attribut de Bernard.

De même, sur la figure 1, si vous placez à l’intérieur du domaine fermé les éléments qui possèdent l’attribut *a*, vous devez mettre à l’extérieur de ce domaine les éléments qui possèdent l’attribut *b*.

L’ensemble *B* associé à l’attribut *b* est formé par les éléments de l’ensemble des blocs logiques qui ne possèdent pas l’attribut *a*. L’ensemble *B* est le *complémentaire* de l’ensemble *A* associé à l’attribut *a*.

Supposons alors que l’on attribue à Claude la question :

“*Est-ce que la réponse de Bernard est non ?*”

L’attribut *c* de Claude est la négation de l’attribut *b* de Bernard :

$$c = N b$$

L’ensemble *C* associé à l’attribut de Claude est le complémentaire de l’ensemble *B*. Vous constatez que les ensembles *A* et *C* sont égaux :

$$A = C$$

Voici la table des différentes réponses possibles des enfants :

Anne	Bernard	Claude
O	N	O
N	O	N

Vous noterez que Claude et Anne donnent toujours la même réponse. Nous pouvons exprimer ce résultat en écrivant

$$a = c$$

ce qui conduit à

$$a = N b$$

ou encore

$$(1) \quad a = NN a$$

Ainsi, *la négation de la négation de l'attribut a est l'attribut lui-même.*

C'est le théorème classique de la *double négation*.

L'égalité(1) résulte du fait que, quelle que soit la réponse d'Anne, Claude répond de la même façon qu'Anne.

L'ensemble sur lequel on travaille joue un rôle important.

L'exemple suivant met en relief ce fait.

Attribuons à Danielle la question :

"Ce bloc est-il bleu ? "

Désignons par d l'attribut de Danielle.

Attribuons à Emile la question :

"Est-ce que Danielle répond non ? "

et désignons par e l'attribut d'Emile.

Si l'ensemble choisi ne contient que des blocs rouges et des blocs bleus, alors Anne et Emile répondent toujours de la même façon; dans ce cas vous avez l'égalité :

$$(2) \quad a = e$$

Par contre, si l'ensemble choisi contient aussi des blocs jaunes et si vous présentez aux enfants justement un bloc jaune, alors la réponse d'Anne est *non* et celle d'Emile est *oui* ; dans ce cas, vous ne pouvez plus écrire l'égalité (2).

Voici un problème.

Pouvez-vous trouver un bloc pour lequel la réponse d'Anne est *oui* et celle d'Emile est *non* ?

Attribuez maintenant à François la question :

“*Ce bloc est-il carré ?*”

L'attribut f de François est *carré*.

Il existe plusieurs manières intéressantes de combiner les attributs d'Anne et de François.

Voici des exemples :

1) Donnez à Georges la question :

“*Est-ce que François et Anne répondent tous deux oui ?*”

L'attribut g de Georges est *rouge et carré*.

Voici la table des différentes réponses possibles d'Anne, François et Georges

Anne	François	Georges
O	O	O
O	N	N
N	O	N
N	N	N

Un bloc possède l'attribut g de Georges s'il possède *à la fois* les attributs d'Anne et de François. L'attribut g est la *conjonction* des attributs d'Anne et de François.

Nous écrivons symboliquement

$$(3) \quad g = K \ a \ f$$

L'ensemble associé à l'attribut g est *l'intersection* des ensembles associés aux attributs a et f.

Attribuez alors à Hélène la question :

“*Est-ce que Bernard et Anne répondent tous deux oui ?*”

L'attribut h d'Hélène est la *conjonction* des attributs a et b. Nous écrivons :

$$\begin{array}{l} \text{mais comme} \\ \text{il vient} \end{array} \quad (4) \quad \begin{array}{l} h = K \ a \ b \\ b = N \ a \\ h = K \ a \ N \ a \end{array}$$

Problème 1

Est-ce qu'Hélène peut répondre oui ?

Problème 2

La réponse au problème 1 dépend-elle de la question attribuée à Anne ? (Il est entendu que b reste égal à $N a$).

Problème 3

Supposez que l'on attribue à Ida la question :

“Est-ce qu'Hélène répond non ? ”

Quelle est la réponse d'Ida ?

Ce résultat dépend-il de la question attribuée à Anne ? de l'ensemble choisi ?

2) Donnez à Jacques la question :

“Est-ce qu'Anne ou François (ou les deux) répondent oui ? ”

L'attribut j de Jacques est *rouge* ou *carré*.

Voici la table des différentes réponses d'Anne, François et Jacques :

Anne	François	Jacques
O	O	O
O	N	O
N	O	O
N	N	N

L'attribut j est la *disjonction* des attributs d'Anne et de François.

Nous écrivons symboliquement

$$(5) \quad j = A \text{ a } f$$

L'ensemble associé à l'attribut j est la *réunion* des ensembles associés aux attributs a et f .

Katy a pour question :

“Est-ce que François répond non ? ”

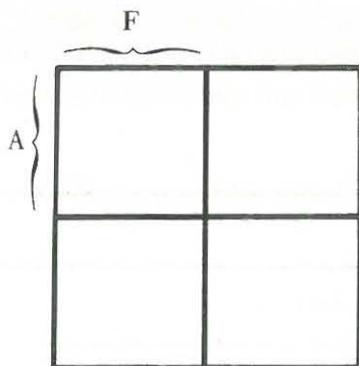
Louis a pour question :

“Est-ce que Bernard et Katy répondent tous deux oui ? ”

Problème 4

A désigne l'ensemble associé à l'attribut d'Anne ;

F désigne l'ensemble associé à l'attribut de François.



Sur le diagramme ci-dessus déterminez dans quelles régions se trouvent les éléments des ensembles :

- a) J associé à l'attribut j,
- b) L associé à l'attribut de Louis.

Que pouvez-vous dire des ensembles J et L ?

Problème 5

Marc a pour question :

“Est-ce que Jacques et Louis répondent tous deux oui ? ”

Nathalie a pour question :

“Est-ce que Jacques ou Louis répondent oui ? ”

En désignant par l l'attribut de Louis, par m celui de Marc et par n celui de Nathalie, vous pouvez écrire :

$$m = K j l \quad \text{et} \quad n = A j l$$

Que pouvez-vous dire des réponses de Marc et de Nathalie ?

Complétez la table suivante :

Anne	François	Jacques	Bernard	Katy	Louis	Marc	Nathalie
O	O						
O	N						
N	O						
N	N						

Quel est l'ensemble associé à l'attribut de Marc ?
 Quel est l'ensemble associé à l'attribut de Nathalie ?

Voici d'autres questions que vous analyserez :

	Questions	Symboles des attributs
Paul	<i>Ce bloc est-il épais ?</i>	p
Quentin	<i>Est-ce que Katy et Anne répondent toutes deux oui ?</i>	$q = K a k$
Rose	<i>Est-ce que Quentin répond non ?</i>	$r = N q$
Simon	<i>Est-ce que Bernard ou François répondent oui ?</i>	$s = A b f$
Thierry	<i>Est-ce que Paul et Jacques répondent oui ?</i>	$t = K p j$
Ursule	<i>Est-ce que Paul et Anne répondent oui ?</i>	$u = K p a$
Victor	<i>Est-ce que Paul et François répondent oui ?</i>	$v = K p f$
Walter	<i>Est-ce qu' Ursule ou Victor répondent oui ?</i>	$w = A u v$
Xavier	<i>Est-ce que Thierry et Walter donnent la même réponse ?</i>	$x =$

Problème 6

Construisez la table donnant les réponses aux questions d'Anne, de François, de Rose et de Simon.

Trouvez les ensembles associés aux attributs de Rose et de Simon.

Problème 7

Construisez la table donnant les réponses de Thierry, Walter et Xavier, sans faire intervenir les autres enfants.

Attribuez à Yvonne la question :

“Est-ce que Thierry et Walter donnent des réponses différentes ?”

Quelle relation existe-t-il entre les ensembles associés aux attributs de Xavier et d'Yvonne ?

Problème 8

Construisez la table donnant les différentes réponses d'Anne, de François et de Paul et trouvez les réponses de Jacques, Thierry, Ursule, Victor et Walter.

Comparez les réponses de Thierry et de Walter.

Représentez sur un diagramme les ensembles associés aux attributs d'Anne, de François et de Paul.

Caractérissez sur ce diagramme les ensembles associés aux attributs des autres enfants.

Problème 9

Changez les questions d'Anne, de François et de Paul en leur attribuant de nouvelles questions qui admettent pour réponses *oui* ou *non* et gardez les autres questions inchangées.

Reprenez les 8 problèmes précédents.

Quels sont les résultats inchangés ?

Quels sont les résultats différents ?

Dans les problèmes 6 et 8 vous avez découvert certaines égalités qui sont indépendantes des questions attribuées à Anne, à François et à Paul.

Il n'est pas utile que les enfants retiennent ces égalités, mais si le maître connaît ces propriétés, il pourra trouver des problèmes qui intéresseront beaucoup les enfants.

Ainsi, par exemple, si vous attribuez à sept enfants les questions du problème 6 et si vous montrez un bloc à Anne et à François, ils donneront leur réponse, puis les autres enfants donneront la leur. Après quelques essais, les enfants trouveront une relation entre les réponses de Rose et de Simon. En sera-t-il toujours ainsi ?

Peut-on trouver un bloc qui conduise à un résultat différent ?

Comment expliquer ce résultat ?

A un premier stade ces exercices suffisent pour créer chez les enfants de l'intérêt et pour les rendre sensibles à la logique, plus tard ils pourront faire des recherches systématiques et utiliser avec fruit les notations symboliques.