

Mathématique à l'Ecole Elémentaire⁽¹⁾

par Madame ROBERT

I L'intersection et la réunion

Au moment où se multiplient les publications destinées aux enseignements pré-élémentaires et élémentaires, ne convient-il pas de réfléchir sur le sens d'opérations sur les ensembles, telles que l'intersection et la réunion ? Elles sont présentées comme les plus simples. Sont-elles vraiment des notions premières, c'est-à-dire celles par lesquelles il convient de commencer ?

Nous pensons qu'il n'en est rien, car elles interviennent toujours, en fait, comme lois de composition internes dans $\mathcal{F}(E)$. Ce sont des lois de composition sur des parties d'un ensemble et non sur les éléments d'un ensemble. Nous sommes loin d'être dans une situation simple. On ne peut l'aborder avec justesse qu'après une étude, si sommaire et incomplète soit-elle, de $\mathcal{F}(E)$ et l'acquisition de la notion de loi de composition interne dans un ensemble.

A. Etude de $\mathcal{F}(E)$.

1) Un enfant du C.P. a besoin de former d'abord des parties de E sans que cette étude soit bloquée sur l'image mentale donnée par le diagramme de Venn ou de Carroll et sans qu'elle soit limitée aux seuls sous-ensembles des éléments ayant un attribut commun tel que forme, couleur, ou encore être, animal, fleur, etc.

Il nous paraît indispensable d'aborder cette étude de façon très générale et de la mener de front, tant à l'aide des tables de vérité donnant l'appartenance de chacun des éléments de l'ensemble à la partie considérée, qu'à l'utilisation de l'écriture de l'ensemble et de la partie par énumération de leurs éléments et au dessin des diagrammes de Venn ou de Carroll.

a) Utilisation d'une table de vérité pour former une partie A de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$

	$x \in A$
a	0
b	1
c	1
d	0
e	1
f	0

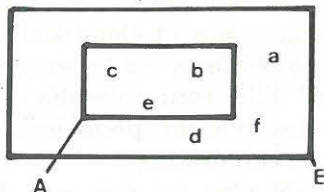
(1) Ce texte a déjà été publié dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. (n° 277, janv. fév. 71).

b) Ecriture, pour former A, par énumération des éléments de la partie

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{b, c, e\}$$

c) Diagramme de Venn



On ne peut privilégier l'une de ces représentations au détriment des autres. Par contre, il est essentiel de passer de l'une à l'autre et de traduire l'une quelconque d'entre elles sous les deux autres formes.

Personnellement, à cause du travail antérieur fait dans la classe, nous avons abordé cette étude par la table de vérité. Les élèves "lisaient" donc directement la table. Le passage à la "lecture" de l'écriture en extension de la partie et au diagramme s'est fait de lui-même. Mais nous avons remarqué que, sans doute à cause de l'orientation de leur formation antérieure, le diagramme est plutôt un dessin illustrant une vision intellectuelle que le support d'une image mentale pour nos élèves. Autrement dit, elles ne "voient" pas à l'aide du diagramme. Le diagramme dessine plutôt ce qu'elles voient.

Remarquons que la table de vérité permet de former naturellement la partie pleine et surtout la partie vide dont l'écriture en extension ne va pas de soi et qui ne peut se représenter dans le diagramme de Venn.

2) *Pouvons-nous former toutes les parties de E ?*

C'est-à-dire pouvons-nous dresser la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$? Bien entendu, nous ne travaillons que sur des ensembles finis de petit cardinal. Nous ne croyons pas cependant que ce problème de dénombrement soit du ressort du C.P. encore qu'il soit résolu facilement, par tâtonnements, avec un ensemble E à trois éléments.

L'essentiel n'est pas là, car E est un univers dont nous ne sortons pas. Nous travaillons toujours sur des parties de E. Il est dans l'examen de deux parties pour reconnaître, dans les différents cas possibles, si elles ont ou non des éléments communs et dans l'affirmative pour distinguer le cas où tous les éléments de l'une sont éléments de l'autre, pour savoir quels sont les éléments de l'une qui

ne sont pas éléments de l'autre et s'il y a des éléments de E qui n'appartiennent à aucune des deux.

C'est avec les tables de vérité que nous avons abordé ce travail. Leur lecture s'est faite spontanément avec aisance.

Ainsi, à partir de l'ensemble E du paragraphe 1) et en donnant la table :

	$x \in A$	$x \in B$
<i>a</i>	0	1
<i>b</i>	1	1
<i>c</i>	1	0
<i>d</i>	0	0
<i>e</i>	1	1
<i>f</i>	0	1

les élèves voient directement que *b*, *e* appartiennent aux deux parties, que *d* n'appartient à aucune, que *a*, *f* appartiennent à B sans appartenir à A tandis que *c* appartient à A sans appartenir à B.

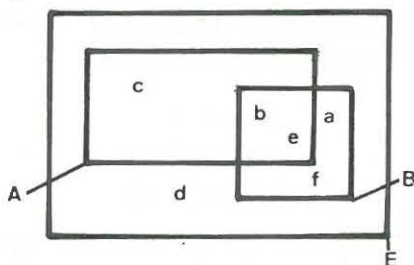
Elles traduisent naturellement cette représentation par l'écriture en extension des parties

$$E = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

$$A = \{ b, c, e \}$$

$$B = \{ a, b, e, f \}$$

et le dessin du diagramme



Bien entendu, comme précédemment, nous les faisons passer de l'une des deux dernières représentations aux autres, de façon à ce qu'elles voient immédiatement sur l'une quelconque des trois la situation de deux parties l'une par rapport à l'autre et par rapport à l'ensemble E.

Car nous croyons essentiel que ce travail mental ne soit pas lié à une seule représentation — il resterait trop près d'elle — et surtout qu'il ne soit pas sous la stricte dépendance du diagramme de Venn car il ne serait pas assez dégagé de la perception de la localisation spatiale pour être une activité mathématique. Le diagramme serait un objet et non sa représentation. C'est pourquoi il est toujours bon de compléter le diagramme de Venn par celui de Carroll.

B. La notion de loi de composition interne dans un ensemble.

C'est une notion que nous croyons fondamentale, qui ne va pas de soi, comme on semble souvent le penser, et qui demande à être étudiée pour elle-même.

Nous ne pouvons détailler ici les étapes de son étude. Disons qu'elle se fait lentement, sous sa forme la plus générale, avec des cas très simples et très variés.

Citons deux exemples :

a) Dans l'ensemble

$$E = \{ \bigcirc, \square, \triangle \}$$

la loi

$$\bigcirc * \bigcirc = \bigcirc \qquad \bigcirc * \square = \square * \bigcirc = \triangle$$

$$\square * \square = \square \qquad \bigcirc * \triangle = \triangle * \bigcirc = \square$$

$$\triangle * \triangle = \triangle \qquad \square * \triangle = \triangle * \square = \bigcirc$$

Commutative, non associative. Pas d'élément neutre, ni d'absorbant.

b) Dans l'ensemble

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

la loi définie par : le composé de deux éléments est le plus grand des deux. S'ils sont égaux, le composé leur est égal.

Ainsi :

$$2 * 5 = 5$$

$$3 * 0 = 3$$

$$4 * 4 = 4 \text{ etc.}$$

Commutative, associative. Un neutre et un absorbant.

Nous multiplions de tels exemples. Cela nous permet, après avoir étudié la conjonction et la disjonction de deux propositions, d'aborder l'étude de l'intersection et de la réunion de deux parties de E.

Ces deux opérations étant des lois de composition sur des ensembles d'éléments de E, on ne peut, en effet, les rendre claires à la pensée qu'en cherchant, pour tout élément a de E, la valeur de vérité de chacune des propositions " a est élément de la partie A", " a est élément de la partie B", et en appliquant ensuite les règles de la conjonction et de la disjonction inclusive à ces deux propositions.

C'est pourquoi nous préférons partir des tables de vérité plutôt que de l'écriture en extension des ensembles ou des diagrammes pour définir l'intersection et la réunion.

De même, nous définissons le complémentaire d'une partie à partir de la règle de la négation d'une proposition et la différence symétrique des deux parties à partir de la règle de la disjonction exclusive des deux propositions.

Ainsi, pour l'intersection, sur l'exemple précédent, nous aurons :

	$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \text{ et } x \in B$
<i>a</i>	0	1	0
<i>b</i>	1	1	1
<i>c</i>	1	0	0
<i>d</i>	0	0	0
<i>e</i>	1	1	1
<i>f</i>	0	1	0

Et nous remplacerons :

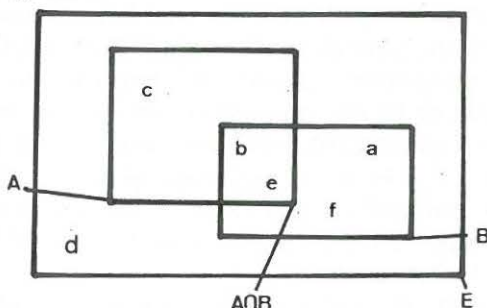
$$x \in A \text{ et } x \in B \quad \text{par} \quad x \in A \cap B$$

Nous passerons ensuite, par traduction, à l'écriture en extension

$$A \cap B = \{b, e\}$$

et nous chercherons comment obtenir directement cette écriture à partir de celle des parties A et B.

Puis au diagramme :



Il peut sembler plus simple, pour des enfants, de commencer par le diagramme. Nous l'avons cru longtemps. C'est peut-être plus facile, apparemment du moins, pour l'intersection. Ce l'est déjà moins pour la réunion et la différence symétrique. Mais s'en tenir au diagramme bloque la pensée sur une image mentale globale en la privant de sa mobilité et de sa puissance.

Comme nous l'avons dit, elle reste ainsi trop près de la perception, inanalysée, sans structure sous-jacente, donc fermée et par là impropre à un progrès de la démarche de l'esprit. Il n'est que de voir comment elle achoppe dans le cas où l'une des parties est incluse dans l'autre, aussi bien pour l'intersection que pour la réunion et la différence symétrique. Il en est de même pour le complémentaire d'une partie.

L'image mentale reste trop visuelle pour ne pas être sous la dépendance des contours des "patates" et trop strictement liée à chacune des dispositions possibles des différents dessins. Elle ne peut ainsi fournir un véritable outil pour la pensée mathématique.

Par contre, nous avons constaté que l'emploi des tables de vérité, en dégageant l'esprit de la perception, lui apporte dynamisme et sûreté. Le dessin des diagrammes prend alors sa liberté vis-à-vis du contour des "patates". Il est bien une représentation d'une réalité mathématique, il n'est pas cette réalité. Les enfants du C.P. font des dessins très différents les uns des autres pour illustrer la même situation qui leur est proposée. De même, elles reconnaissent l'identité de la situation représentée par des dessins différents.

Et si, par la suite, nous voulons dégager quelques propriétés de ces lois dans $\mathcal{T}(E)$, il est manifeste que le seul diagramme nous donne un appareil encombrant, trop lourd parce que trop perceptif, lié à trop de dispositions possibles. Nous devons commencer par les étudier sur la conjonction et la disjonction des propositions. Ce n'est qu'après que nous passerons aux lois sur les parties de E , par examen de chacun des éléments de E comme il a été dit précédemment.

En fait, nous pensons qu'il n'y a aucun intérêt à étudier tôt des lois comme l'intersection et la réunion, que leur étude prématurée est plutôt nocive car elle ne peut être que mal faite. Il nous semble bien autrement important, pour des enfants du C.P. et même de la section enfantine, de commencer l'étude des parties d'un ensemble et d'aborder la notion de loi de composition sur des cas simples.

Cette année, simplement pour voir, nous avons étudié en juin l'intersection au C.P. Les élèves ont travaillé avec aisance, liberté et rapidité, car tout était prêt. Mais c'est ce travail préparatoire qui nous paraît être le propre du C.P. Mieux vaut le faire solidement, sans hâte, et reporter l'intersection au C.E.

Pourquoi tant de publications commencent-elles par cette notion ? Parce qu'il est simple de dire que l'intersection des sous-ensembles des jetons ronds et des jetons rouges est celui des jetons ronds et rouges ? C'est restreindre considérablement la notion d'intersection, c'est partir dans une certaine confusion, c'est surtout s'arrêter tout de suite. On ne peut que répéter la même chose en variant les exemples, on ne peut avancer.

Une démarche bloquée, sans ouverture ni fécondité, n'est pas une démarche mathématique.

II Les opérateurs numériques

La notion d'opérateur numérique, que l'on trouve dans les commentaires des programmes provisoires de 1970, et qui est utilisée

dans les publications destinées à l'enseignement élémentaire, a besoin d'être précisée car, ou elle reste floue, ou elle est employée dans une telle confusion qu'elle entraîne de grosses erreurs.

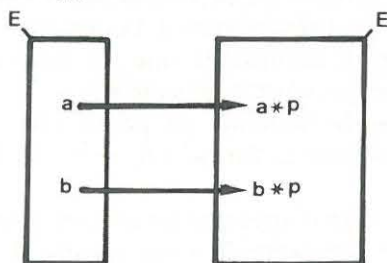
Nous l'étudierons dans le cas où elle se présente à l'école primaire, c'est-à-dire comme application d'un ensemble vers lui-même définie à partir d'une loi de composition interne dans l'ensemble.

Précisons cette situation.

Une loi de composition interne notée $*$ a été étudiée dans un ensemble E

$$a \in E, b \in E, a * b \in E$$

On isole un élément quelconque p de E et à chaque élément x de E on fait correspondre le composé $x * p$ qui est un élément de E . On définit donc ainsi une application de E vers E :



Cette application est souvent appelée une "machine" à l'école primaire en précisant machine à ajouter, à multiplier, suivant la nature de la loi de composition interne utilisée.

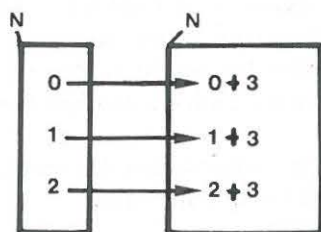
Elle est notée souvent

$$\xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{\times 3}$$

C'est là qu'une première question se pose : *quelle est la signification des signes $+$ et $\times$ que l'on vient d'écrire ?*

Prenons le cas de l'addition dans l'ensemble des naturels.

Isolons le naturel 3 pour l'utiliser comme opérateur numérique appliquant N dans N .



N'introduit-on pas une source de confusion en désignant cette application par

$$\xrightarrow{+3} \quad ?$$

En effet, le symbole “+” qui figure sur la flèche n’est pas un signe opératoire car le signe opératoire se trouve dans les composés $0 + 3$, $1 + 3$, etc., images des éléments de l’ensemble du départ. C’est un signe prédicatoire. Si on tient, pour des raisons pratiques, à l’employer, mieux vaudrait ne pas lui donner la place qui est celle du signe opératoire. Nous verrons par la suite qu’on éviterait ainsi un certain nombre de difficultés qui se présenteront dans la composition des opérateurs.

Mais déjà nous voyons la source des erreurs relevées dans certains ouvrages. Par exemple, sur une graduation.

Prends le trait marqué 2 — Fais un “pont” de 3 — Tu obtiens le trait marqué 5 — Tu écris $2 + 3 = 5$.

C’est ainsi qu’est définie l’addition dans N !

Le “pont” + 3 lancé à partir de l’élément 2 aboutit à l’élément $2 + 3$. On a glissé du prédicatoire à l’opérateur et on a fait une pétition de principe en définissant une loi interne par un procédé externe. C’est ignorer ce qu’est une translation.

Dans les classes de Sixième, on prend soin maintenant de ne plus noter les entiers sous la forme +3, -2. On les écrit 3^e , 2^o ou encore 3^+ , 2^- .

Ne serait-il pas sage d’apporter les mêmes distinctions au C.P. et au C.E. et de noter par exemple (voir annexe 1, page 261) :

$$1 \xrightarrow{+3} 1+3 \qquad 1 \xrightarrow{\times 3} 1 \times 3$$

Une confusion plus subtile vient du fait que le mot “opérateur” fait penser plutôt à “opération” dans son sens traditionnel qu’à “application”. On perd ainsi de vue que l’opérateur opère sur un ensemble et qu’il n’est pas défini à partir d’un élément et de son image.

Nous avons rencontré des exercices du type :

$$2 \xrightarrow{?} 6$$

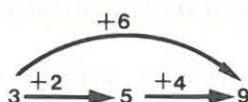
Pour poser un tel exercice, il faudrait donner tous les éléments d’un ensemble et leurs images. Il est toujours gênant d’omettre les ensembles quand on utilise les applications : on ne sait plus très bien sur quoi on travaille et le flou ainsi introduit dans la pensée engendre les erreurs.

C’est à propos de la composition des opérateurs que nous avons rencontré le plus souvent cette confusion.

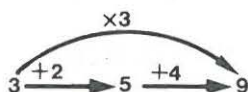
$$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+4} 9$$

on cherche “l’opérateur” qui remplace la suite de ces deux opérateurs, c’est-à-dire qui, appliqué à 3, donne 9.

Et l'on écrit :



alors qu'on aurait aussi bien pu écrire, entre autres :

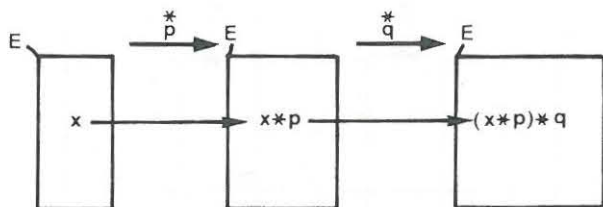


Oubliant qu'on appliquait un ensemble dans un ensemble, on se borne à chercher quelle "opération" permet, à partir d'un naturel, d'en trouver un autre.

On ne se demande même pas si la loi de composition de deux opérateurs de même type peut être définie. Etudions cette question.

Composition de deux opérateurs définis à partir de la même loi de composition interne dans un ensemble.

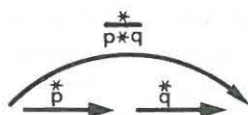
Soit une loi de composition interne notée $*$ dans un ensemble E et deux éléments p et q de cet ensemble utilisés comme opérateurs. Chacun d'eux définit une application de E dans E . Le problème est de savoir si la composée de ces applications peut être définie à partir d'un élément de E utilisé comme opérateur.



Ce n'est que si la loi $*$ est associative que l'image de x peut s'écrire

$$x * (p * q)$$

donc que le composé des deux opérateurs p et q est l'opérateur $p * q$, ce que nous pouvons écrire



Il n'en est pas ainsi pour la soustraction et la division dans N , d'où la difficulté de noter la composition des opérateurs définis à partir de ces lois.

Encore peut-on, pour ces deux lois, recourir aux "opérateurs-retour" issus de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire de lois associatives.

Avant de détailler ce recours, donnons un exemple très simple, non numérique, d'un cas où la composition de deux opérateurs ne peut être définie.

Soit l'ensemble :

$$E = \{\circ, \square, \triangle\}$$

et la loi de composition interne $*$ définie par

$$\circ * \circ = \circ \quad \circ * \square = \square * \circ = \triangle$$

$$\square * \square = \square \quad \circ * \triangle = \triangle * \circ = \square$$

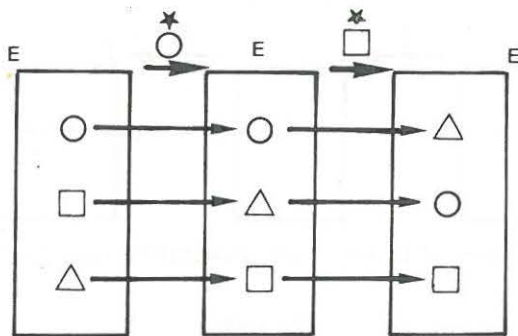
$$\triangle * \triangle = \triangle \quad \square * \triangle = \triangle * \square = \circ$$

Cette loi n'est pas associative. En effet, par exemple :

$$(\circ * \circ) * \square = \triangle$$

$$\circ * (\circ * \square) = \square$$

Prenons successivement les éléments $\circ$ et $\square$ comme opérateurs :



Aucun élément de E , utilisé comme opérateur, ne permet d'appliquer le premier ensemble sur le troisième puisque chaque élément a pour image un élément différent de lui.

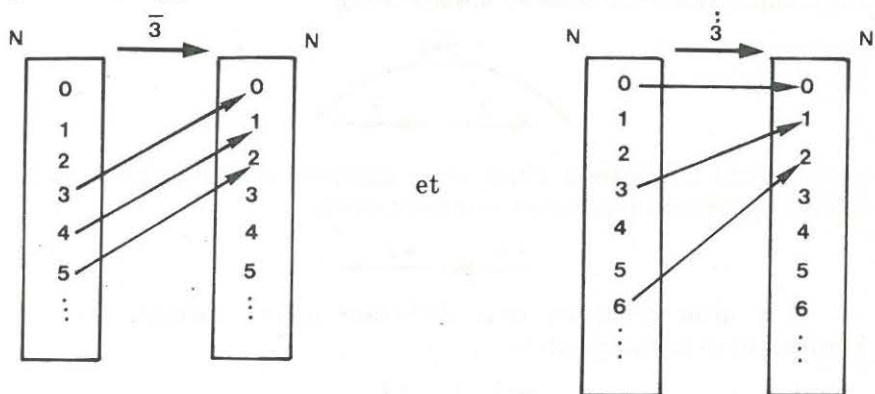
On ne peut donc composer, à la légère, deux opérateurs, et on ne saurait se passer de l'associativité de la loi interne. C'est pourquoi nous pensons non seulement qu'il est essentiel d'introduire la notion de loi de composition au C.P., mais qu'il est aussi important de multiplier les exemples de lois de composition afin de dégager la notion d'associativité.

Il s'agit là d'un travail de base qui mérite qu'on s'y arrête et qui d'ailleurs convient bien aux enfants de cet âge, plus utile à la formation de l'esprit que l'introduction prématurée de la composition des opérateurs. Ou alors on risque de revenir aux recettes et au conditionnement de l'esprit.

Revenons à la composition des opérateurs-retour définis à partir de la soustraction dans N et de la division.

Remarquons tout d'abord que ces deux opérations ne sont pas des lois de composition interne dans N : on ne peut composer les termes du couple $(3,4)$ par aucune de ces lois.

Si nous voulons introduire des "opérateurs soustractifs", et nous en avons besoin dans les classes primaires, il nous faut donc passer de l'application à la fonction (1). Ainsi :



Pouvons-nous composer deux opérateurs définis à partir de la soustraction ?

$$x \xrightarrow{\bar{p}} x-p \xrightarrow{\bar{q}} (x-p)-q$$

Cette loi n'est pas associative. Mais l'expression $(x-p)-q$ s'écrit, lorsqu'elle a une signification, sous la forme

$$x-(p+q)$$

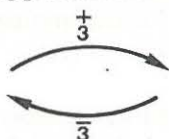
Le composé de deux opérateurs définis à partir de la soustraction sera bien un opérateur défini lui aussi à partir de la soustraction. Seulement, pour l'obtenir il faudra faire appel à la somme des deux naturels utilisés comme opérateurs.

C'est pourquoi nous utiliserons la notion "d'opérateur-retour" : si $\bar{3}$ applique E dans E , $\bar{3}$ indique la relation, qui est ici une fonction,

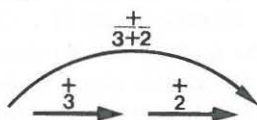
(1) Une *application* est une relation binaire telle que tout élément de la source a une image et une seule.

Une *fonction* est une relation binaire telle que tout élément de la source a au plus une image.

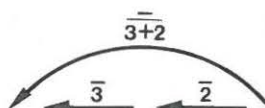
réciroque de cette application. Nous avons vu, rappelons-le, que cette relation n'est pas une application.



Ce qui nous permettra de passer de la composition connue



à la composition (voir annexe 2, page 262) :



On voit ici l'intérêt d'une place distincte pour les signes opératoires et prédicatoires. Sinon comment écrire



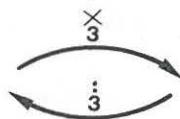
Il y avait d'ailleurs déjà difficulté pour l'opérateur additif. Ecrivons-nous la composition



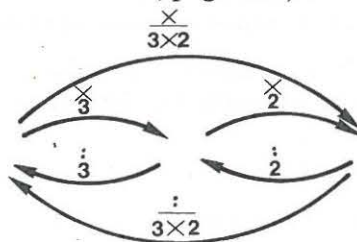
sous forme d'une addition ? Nous risquons d'avoir trois signes +. Quels seraient leurs sens respectifs ?

La même étude peut être reprise pour la composition des opérateurs définis à partir de la division dans N .

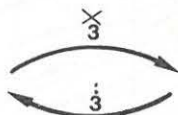
Avec



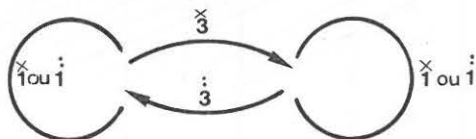
nous obtiendrons (voir annexe 3, page 263) :



Il n'en reste pas moins que, sur cette figure, comme sur la précédente, nous avons en haut des compositions d'applications, en bas des compositions de fonctions puisque les opérateurs du bas n'opèrent pas sur tous les éléments de l'ensemble. Ce qui n'échappe pas aux élèves puisque des fillettes qui avaient mis des "oreilles" au schéma



sous la forme

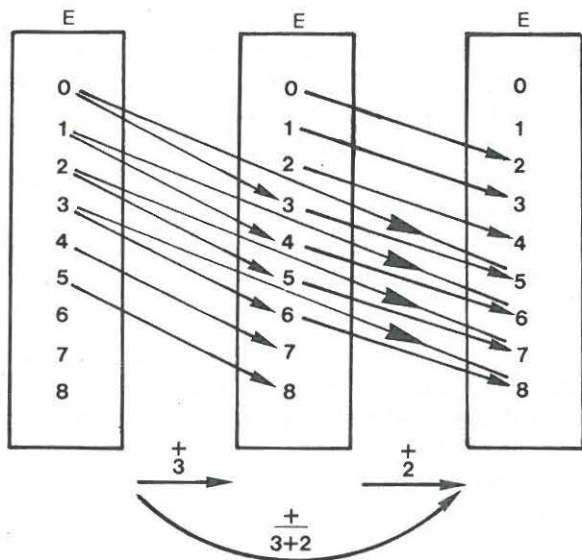


nous ont fait remarquer que tous les naturels "circulent" dans l'oreille de gauche tandis que celle de droite ne laisse "passer" que les multiples de trois.

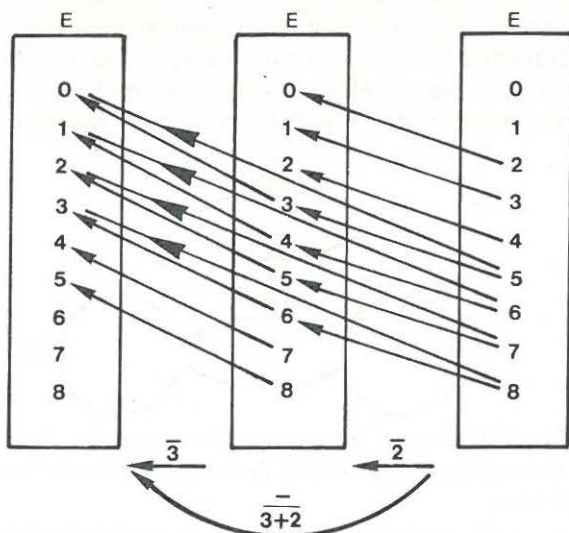
En fait, si les opérateurs additifs et multiplicatifs opèrent sur tous les éléments de $\mathbb{N}$, c'est parce que nous utilisons cet ensemble. Or, comme nous le verrons, nous avons intérêt, à l'Ecole Primaire, à opérer dans des ensembles finis. Mais l'addition et la multiplication ne sont pas des lois internes dans un ensemble fini de naturels, une partie finie de $\mathbb{N}$ n'étant généralement pas stable pour ces lois.

Si bien que nos compositions d'opérateurs sont en général des compositions de fonctions.

Ainsi avec l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nous aurons :

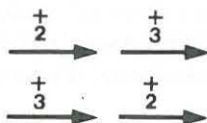


et



Il n'est pas sans intérêt de faire de telles compositions comme aussi de comparer les compositions

et



Si nous voulions résumer ce développement, nous dirions qu'on ne peut parler d'un opérateur sans savoir sur quel ensemble il opère, que souvent il n'opère pas sur tous les éléments de l'ensemble car il n'est que l'indicatif d'une relation fonctionnelle de cet ensemble vers lui-même, et que l'essentiel est de séparer les ensembles d'opérateurs des ensembles numériques sur lesquels ils opèrent, en marquant nettement la différence de nature entre une relation fonctionnelle de N vers N et un élément de N .

Ou encore, pour être plus complet, et de façon plus abstraite :

Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $*$

$$\forall a \in E, \forall b \in E \quad b * a \in E$$

On peut définir une loi de composition externe sur E en prenant pour ensemble d'opérateurs Ω l'ensemble E lui-même. Notons cette loi " $\cdot$ " et selon l'usage courant écrivons l'opérateur en avant de l'élément sur lequel il "agit".

Elle est définie par

$$b.a = b * a$$

Dans le premier membre : $b \in \Omega$, dans le second : $b \in E$, dans les deux membres : $a \in E$.

Disons, de façon imagée, que l'opérateur b agit sur l'élément a de E pour le transformer en $b*a$, élément de E .

C'est ce que nous représentons par le dessin

$$a \xrightarrow{b} b*a$$

Faisons agir l'opérateur c sur le composé précédent :

$$c.(b.a) = c.(b*a) = c*(b*a)$$

Si la loi $*$ est associative, nous pouvons écrire :

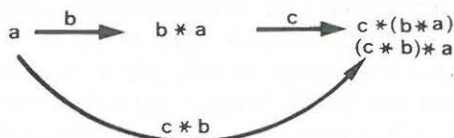
$$c.(b.a) = (c*b)*a$$

ou encore

$$c.(b.a) = (c*b).a$$

Faire agir l'opérateur c sur le résultat de l'action de l'opérateur b sur l'élément a , c'est faire agir un nouvel opérateur $c*b$ sur l'élément a . Nous avons ainsi transporté la loi de composition interne $*$ de l'ensemble E à l'ensemble des opérateurs Ω égal à E , définissant par là une loi de composition interne des opérateurs.

Ce que nous représentons par le dessin :



ou $c*b*a$ (loi associative).

Mais il importe de bien distinguer les trois lois rencontrées successivement aux trois niveaux du travail :

1) Loi de composition interne $*$ dans E . Ce sera souvent la loi $+$ ou la loi $\times$ dans N .

2) Loi de composition externe qui n'est pas notée par un signe mais représentée par une flèche attachée à chaque opérateur.

3) Loi de composition interne dans Ω , si la loi $*$ est associative. Il s'agit de la loi de composition $*$, transportée dans l'ensemble des opérateurs.

Ce n'est qu'avec cette nette distinction qu'on évitera la confusion, combien dommageable au moment de la formation des premières notions, de ces trois lois par l'emploi abusif d'un même signe pour les désigner.

Et risquons la redite pour conclure qu'il vaut mieux aller lentement d'une étape à la suivante et savoir attendre que vouloir les aborder toutes sans posséder les moyens de le faire avec jutesse.

III Opérer sur des ensembles finis

Nous venons de voir qu'on ne peut utiliser un opérateur sans savoir dans quel ensemble il opère. S'il a été défini à partir d'une loi de composition interne, il applique cet ensemble dans lui-même. Si c'est à partir d'une opération, il établit une relation fonctionnelle de cet ensemble vers lui-même.

Une question se pose alors : à l'Ecole Primaire, on n'utilise que des ensembles finis. Les opérateurs numériques qui figurent le plus souvent dans les publications, c'est-à-dire ceux qui sont tirés de l'addition et de la multiplication, semblent opérer dans N , ensemble infini. A vrai dire, l'ensemble en question n'est jamais nettement précisé. Doit-on laisser un certain flou dans la pensée en n'explicitant que les éléments de N dont on a besoin ou faut-il donner clairement l'ensemble sur lequel on travaille, ce qui conduira à n'utiliser que des ensembles finis ?

Nous avons été amenées, après avoir longuement suivi la première attitude, à modifier notre façon de procéder et à adopter la seconde. Pourquoi ?

D'abord pour éviter, ainsi que nous l'avons exposé dans l'étude précédente, certaines erreurs grossières sur la composition des opérateurs. Avec un ensemble fini nous pouvons relier les éléments de l'ensemble à leur image donnée par le premier opérateur, nous pouvons les relier à leur image donnée par le second opérateur et voir alors ceux qui ont une image finale, c'est-à-dire une "image d'image" et définir ainsi, s'il existe, le composé des opérateurs, en nous rendant compte des difficultés de son "alimentation".

Ensuite parce qu'il nous paraît que ce sont ces difficultés mêmes, par les questions qu'elles provoquent dans les esprits, qui sont une bonne voie d'accès pour les enfants à la notion d'ensemble infini, du moins pour N .

Montrons-le sur deux exemples.

I. Exemple qui peut être utilisé avant l'étude de l'addition.

Soit l'ensemble

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

et la loi de composition interne dans cet ensemble, notée $*$, définie par : le composé de deux naturels différents est le plus grand des deux, le composé de deux naturels égaux leur est égal.

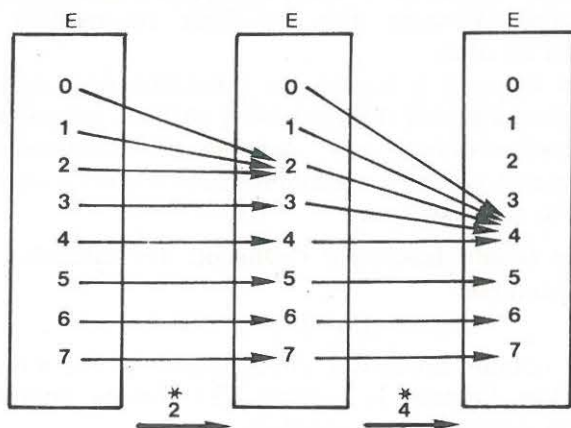
Ainsi :

$$4 * 1 = 4$$

$$2 * 6 = 6$$

$$3 * 3 = 3$$

Prenons successivement les naturels " 2 " et " 4 " comme opérateurs et utilisons le schéma sagittal :



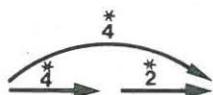
Nous voyons que l'opérateur " $\overset{*}{4}$ " applique le premier ensemble dans le troisième puisque les naturels 0, 1, 2, 3, 4 ont pour image le naturel 4 tandis que 5 a pour image 5, 6 a pour image 6, 7 a pour image 7.

Nous pouvons écrire :



— Ce schéma a été établi pour l'ensemble E. Serait-il encore exact pour l'ensemble des 9 premiers naturels ? des 10 ? etc. Il est facile de le voir.

— Que se passe-t-il si nous changeons l'ordre des opérateurs ? Nous recommençons et nous obtenons :

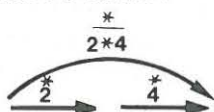


— En serait-il de même avec deux autres opérateurs ? Autrement dit, la loi de composition des opérateurs est-elle commutative ?

L'examen d'un ou deux cas montre rapidement qu'il en est bien ainsi et pourquoi.

Il faudra, dans chaque cas, comparer les dessins des deux compositions pour en dégager la raison.

— Le schéma peut encore s'écrire :



puisque $2 * 4 = 4$.

En serait-il de même avec deux autres opérateurs ? Autrement dit, le composé “ $\overset{*}{a}$ suivi de $\overset{*}{b}$ ” est-il $\overset{*}{a * b}$, quels que soient a et b ?

Là encore l’examen d’un ou deux cas montre rapidement pourquoi il en est ainsi.

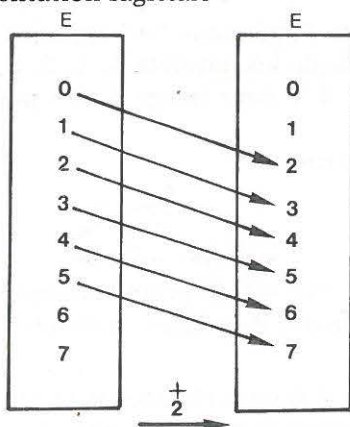
Mais la réponse à toutes ces questions sera tout autrement rapide et vigoureusement dominée si les enfants, comme nous l’avons expliqué précédemment, sont longuement familiarisés avec les notions d’associativité et de commutativité d’une loi avant d’aborder la composition des opérateurs.

II. Exemple faisant intervenir l’addition des naturels.

Soit l’ensemble

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et l’addition comme opération. Nous savons qu’elle n’est pas une loi de composition. Prenons le nombre “2” comme opérateur et utilisons encore la représentation sagittale :



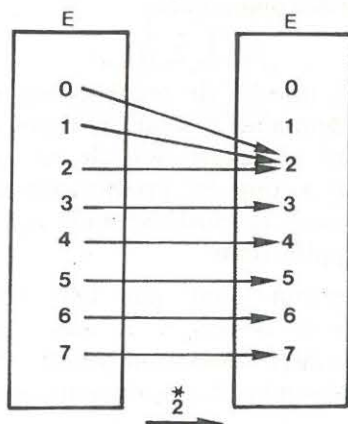
Les élèves du C.P. remarquent d’elles-mêmes : aucune flèche n’arrive sur le 0 et sur le 1 : “ils sont trop petits” ; aucune flèche ne part du 6 ni du 7 : “ils sont trop grands”.

Pour les premiers, il semble bien que nous n’y pouvons rien ; mais pour les seconds, les idées jaillissent : “il n’y a qu’à mettre 8, 9 dans l’ensemble E”. Ce qui est fait mais laisse la question inchangée, puisque s’ils donnent bien des images à 6 et 7, les voilà eux-mêmes “trop grands” pour avoir des images. On essaie encore d’introduire 10 et 11 et on retrouve la même situation si bien que les petites filles concluent : “On n’y arrivera jamais, même si on met tous les naturels qu’on ne connaît pas”, et que l’une d’elles ne voit qu’une issue pour tout arranger, celle de prendre “0” pour opérateur car “autrement les flèches pencheront toujours”, c’est-à-dire qu’il y aura à la fois des naturels qui ne seront pas des images et d’autres qui n’auront pas d’images.

La difficulté que nous rencontrons pour “alimenter” l’opérateur $\xrightarrow{\frac{*}{2}}$ lorsqu’il opère sur un ensemble fini de naturels nous montre bien qu’elle reste la même pour un ensemble ayant un grand nombre d’éléments. N ne sera pas un ensemble de “beaucoup” de nombres, “d’un million” de nombres.

Nous pouvons, à partir de cet exemple, composer des opérateurs. C’est ce qui a été fait dans l’étude précédente. Nous pouvons aussi multiplier les exemples en prenant des opérateurs tirés de lois non associatives dans E afin d’étudier des cas où la composition de deux opérateurs ne peut être définie. Ainsi, la loi suivante : le composé de deux naturels est la somme si elle n’a qu’un chiffre, le chiffre des dizaines si elle en a deux.

Nous pouvons encore constater qu’il existe des opérateurs n’admettant pas d’opérateur-retour. C’est le cas de l’exemple 1 de cette étude :



car l’application de E dans E définie par $\xrightarrow{\frac{*}{2}}$ n’est pas injective. La relation réciproque n’est pas fonctionnelle. Et nous savons que le composé de l’opérateur avec un élément de E, s’il est défini, est unique.

L’intérêt d’opérer sur des ensembles finis réside, nous espérons l’avoir montré, dans la qualité du travail mathématique obtenu, quelle que soit son ampleur. Suivre cette voie permet de rencontrer de bonnes questions, de vraies questions et d’y répondre avec justesse dans le cas précis étudié. Ce n’est pas rétrécir l’horizon mathématique des élèves, c’est l’élargir considérablement en diversifiant leur pensée tout en l’affermissant.

Annexes

1) Mieux vaudrait, sans doute, utiliser un autre symbole que le signe + dans la notation $\frac{*}{2}$. Mais on ne peut multiplier le nombre des

symboles utilisés à l'école primaire. Le "+" placé en haut du 3 rappelle simplement le "+" opératoire de l'image $1 + 3$. On évite ainsi le risque de confusion chez les enfants, car, pour eux, à cette place il n'opère pas.

Il faut cependant bien remarquer que nous avons ainsi créé un nouvel être mathématique, dont le symbole $\overset{+}{3}$ est un tout indécomposable, d'une autre nature que le naturel 3. C'est une application de N dans N :

$\{0, 1, 2, 3\}$ est un ensemble de naturels

$\{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}\}$ est un ensemble d'applications de N dans N.

2) 1^o Examinons la composition du haut. Elle se note :

$$\overset{+}{2} \circ \overset{+}{3} = \overset{+}{3+2}$$

Dans l'ensemble des opérateurs :

$$\{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, \dots\}$$

nous avons introduit une loi de composition interne que nous ne notons pas à l'école primaire. Il serait dangereux de la noter "+" car nous aurions ainsi un troisième sens de ce signe. Le premier est opératoire dans N, le second est prédicatoire dans un symbole qui désigne une application et le troisième serait opératoire dans un autre ensemble, celui des applications.

2^o L'opérateur-retour n'est pas une application, mais une relation fonctionnelle de N vers N. Si nous adoptons pour le mot opérateur le sens plus large de relation fonctionnelle, nous procédons à une extension de l'ensemble des opérateurs qui devient :

$$\{\dots, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, \dots\}$$

3^o La composition du bas s'écrit :

$$\bar{3} \circ \bar{2} = \overline{3+2}$$

Elle compose deux des opérateurs ainsi introduits.

Mais nous aurons à composer un opérateur d'un type avec un opérateur de l'autre type. Prenons par exemple la composition :

$$\overset{+}{3} \rightarrow \bar{5}$$

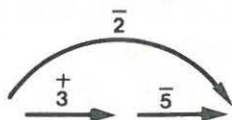
Elle se note :

$$\bar{5} \circ \overset{+}{3} = \overline{5-3}$$

Il n'est pas question de l'écrire sous la forme :

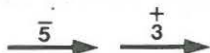
$$\begin{array}{c} \overline{5-3} \\ \curvearrowright \\ \overset{+}{3} \rightarrow \bar{5} \end{array}$$

Autrement dit, nous ne pouvons étudier systématiquement cette opération dans l'ensemble des opérateurs défini précédemment. Nous écrirons la composition précédente seulement sous la forme :



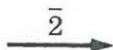
Mais nous voyons apparaître une nouvelle difficulté.

Le composé



est une relation fonctionnelle de N vers N pour laquelle les naturels 2,3,4, n'ont pas d'image.

Il ne peut donc s'écrire



car dans cette relation fonctionnelle de N vers N les naturels 2,3,4, ont une image.

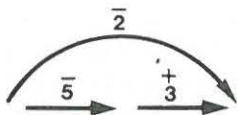
L'opération n'est donc pas une loi de composition interne dans l'ensemble des opérateurs défini au 2).

De façon plus précise, dans cet ensemble, nous pouvons composer deux opérateurs "additifs", deux opérateurs "soustractifs", un opérateur "additif" avec un opérateur "soustractif".

Mais nous ne pouvons écrire, à l'aide d'un opérateur de l'ensemble, le composé d'un opérateur "soustractif" avec un opérateur "additif".

Les élèves du C.M. l'ont constaté, non sans perplexité.

Elles ont cependant refusé d'écrire, en dépit de tous leurs regrets :



car "dans un dessin il y a trois flèches de plus que dans l'autre".

Seule la connaissance de Z permettra de lever plus tard ces difficultés.

3) 1° Nous avons un ensemble d'opérateurs "multiplicatifs" :

$$\left\{ \begin{array}{c} \times \times \times \\ 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\}$$

La composition du haut introduit une loi de composition dans cet ensemble, loi que nous ne notons pas pour les mêmes raisons que celles que nous avons exposées à propos des "opérateurs additifs".

L'introduction des opérateurs-retour entraîne une extension de l'ensemble précédent. Nous obtenons :

$$\left\{ \dots, \overset{\cdot}{3}, \overset{\cdot}{2}, \overset{\cdot}{1}, \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \dots \right\}$$

La composition du bas s'écrit :

$$\overset{\cdot}{3} \circ \overset{\cdot}{2} = \overset{\cdot}{3 \times 2}$$

Nous aurons ici encore à composer un opérateur d'un type avec un opérateur d'un autre type. Prenons par exemple la composition :

$$\overset{\times}{3} \rightarrow \overset{\cdot}{2} \rightarrow$$

Les commentaires nous invitent à noter le composé :

$$\overset{\times}{\frac{3}{2}} \rightarrow$$

Il est peut-être fâcheux d'appeler "fraction" cette relation fonctionnelle de N vers N . L'essentiel est de bien voir que nous avons créé un nouvel être mathématique qui n'est pas un "nombre", mais qui nous fait procéder à une nouvelle extension de l'ensemble des "opérateurs multiplicatifs".

Nous obtenons maintenant :

$$\left\{ \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \dots, \overset{\cdot}{1}, \overset{\cdot}{2}, \overset{\cdot}{3}, \dots, \overset{\times}{\frac{1}{1}}, \overset{\times}{\frac{1}{2}}, \overset{\times}{\frac{1}{3}}, \dots, \overset{\times}{\frac{2}{1}}, \overset{\times}{\frac{2}{2}}, \dots, \dots \right\}$$

Bien entendu, nous devons placer $\overset{\times}{\frac{1}{2}}, \overset{\times}{\frac{3}{4}}$ par exemple, dans cet ensemble de relations fonctionnelles, tandis que 0,5 et 0,75 sont des nombres décimaux définis à partir des naturels.

On ne pourra donc comparer la relation fonctionnelle $\overset{\times}{\frac{1}{2}}$ au décimal 0,5 obtenu à partir du naturel 5 par un changement d'unité.

Tout au plus pourra-t-on, peut-être, par une nouvelle extension de l'ensemble des opérateurs, montrer l'équivalence de

$$\overset{\times}{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \overset{\times}{0,5}$$

2° Les commentaires nous proposent la composition des "opérateurs-fractions". Ainsi :

$$\overset{\times}{\frac{2}{3}} \rightarrow \overset{\times}{\frac{5}{4}} \rightarrow \overset{\times}{\frac{10}{12}}$$

On peut fort bien écrire : $\frac{\overset{x}{10}}{12} = \frac{2 \overset{x}{\times} 5}{3 \times 4}$

Mais écrire, comme il est indiqué dans les commentaires :

$$\frac{10}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

ne peut qu'engendrer les plus graves confusions :

- . parce que les opérateurs fractions ne sont pas écrits avec leurs symboles distinctifs ;
- . et surtout parce que cette fois-ci nous introduisons un troisième sens du symbole "X", un sens opératoire dans l'ensemble des opérateurs.

La seule notation convenable

$$\frac{\overset{x}{10}}{12} = \frac{\overset{x}{2}}{3} \circ \frac{\overset{x}{5}}{4}$$

ne paraît pas indispensable à l'école primaire.

Nous retrouvons ici, plus complexes encore, les difficultés rencontrées lors de la composition des opérateurs "additifs" et "soustractifs".

Si la relation fonctionnelle de N vers N définie par la composition

$$\xrightarrow{\overset{x}{3}} \xrightarrow{\overset{i}{2}}$$

est la même que celle définie par

$$\xrightarrow{\overset{i}{2}} \xrightarrow{\overset{x}{3}}$$

il n'en est plus ainsi pour les compositions

$$\xrightarrow{\overset{x}{6}} \xrightarrow{\overset{i}{4}}$$

et

$$\xrightarrow{\overset{i}{4}} \xrightarrow{\overset{x}{6}}$$

puisque la première donne des images à tous les naturels pairs tandis que la seconde n'en donne qu'aux multiples de 4.

Réserverons-nous la notation

$$\xrightarrow{\frac{\overset{x}{6}}{4}}$$

pour la première composition ?

Si oui, les opérateurs $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{4}$ définissent la même relation fonctionnelle de N vers N . On peut donc les dire équivalents.

Remarquons que dans l'ensemble des opérateurs que nous avons défini dans cette note la notion d'équivalence des opérateurs introduit une partition en classes. C'est chacune d'elles qui détermine une relation fonctionnelle de N vers N . Il n'en était pas ainsi pour l'ensemble des opérateurs "additifs" et "soustractifs" où deux opérateurs distincts définissaient deux relations fonctionnelles distinctes.

Mais soulignons bien le fait qu'avec la convention adoptée, sauf dans le cas où p et q sont premiers entre eux, nous ne pouvons composer un opérateur du type $\frac{x}{q}$ avec un opérateur du type $\frac{x}{p}$.

Dans l'ensemble que nous étudions nous savons qu'il nous est possible de composer :

- 1) deux opérateurs du type $\frac{x}{p}$
- 2) deux opérateurs du type $\frac{x}{q}$
- 3) un opérateur du type $\frac{x}{p}$ avec un opérateur du type $\frac{x}{q}$

Examinons la composition de deux opérateurs du type $\frac{x}{q}$

Les difficultés rencontrées au 1) de cette note en engendrent de nouvelles quand il s'agit de composer des opérateurs-fractions. Bornons-nous à l'examen de deux cas :

Le composé

$$\frac{\frac{x}{2}}{3} \longrightarrow \frac{\frac{x}{5}}{4}$$

donne une image à tous les multiples de 6.

Il en est de même pour l'opérateur

$$\frac{\frac{x}{10}}{12}$$

en lui donnant le sens indiqué au 1), à savoir

$$\frac{\frac{x}{10}}{3} \longrightarrow \frac{\frac{x}{12}}{4}$$

Mais on voit tout de suite qu'il n'en est pas de même pour le composé

$$\frac{\frac{x}{5}}{4} \longrightarrow \frac{\frac{x}{2}}{3}$$

qui ne donne des images qu'aux multiples de 12.

Le composé de l'opérateur $\frac{x}{4}$ par l'opérateur $\frac{x}{3}$ ne définit donc pas la relation fonctionnelle déterminée par $\frac{x}{12}$

Examinons maintenant le composé

$$\frac{\times 4}{6} \rightarrow \frac{\times 3}{10}$$

il donne des images à tous les multiples de 15 ;
tandis que le composé

$$\frac{\times 3}{10} \rightarrow \frac{\times 4}{6}$$

en donne à tous les multiples de 10

et l'opérateur

$$\frac{\times 12}{60} \rightarrow$$

à tous les multiples de 5.

Le composé de $\frac{\times 4}{6}$ par $\frac{\times 3}{10}$, le composé de $\frac{\times 3}{10}$ par $\frac{\times 4}{6}$, l'opérateur $\frac{\times 12}{60}$ définissent trois relations fonctionnelles différentes.

Il est donc malaisé de définir le composé de deux opérateurs-fractions.

Division euclidienne aux Cours Elémentaire et Cours Moyen

par G. BROUSSEAU

1 — BUTS DE LA SERIE DE LECONS

Nous voulons que les enfants élaborent progressivement un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation que nous utilisons habituellement.(1)

Ces découvertes doivent surgir à l'occasion de jeux de stratégie dans lesquels elles sont utiles : "la course à n".

Elles doivent être formulées et utilisées comme des théorèmes au cours d'un "jeu de la découverte" permanent.

Nous allons exposer en détail l'utilisation pédagogique de ces deux jeux.

La reconnaissance de situations *isomorphes* dans lesquelles l'algorithme élaboré est utilisable — ce que les maîtres appellent le

(1) Voir : "Processus de Mathématisation" dans le cinquième chapitre.